

UDC 534.12:539.3

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-182

点束縛のある板の振動について

塙 武 敏・多 田 保 夫
泉 日 出 夫・越 出 慎 一

1969 年 9 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-161	宇宙飛しょう体の直接式最適誘導法 The Optimal Explicit Guidance Equation for Space Vehicle	1968年 8 月	新田 慶 治, 松 島 弘 一 大坪 孔 治, 志 南 徹
TR-162	よどみ点領域での非定常空力加熱の測定 Measurements of Unsteady Aerodynamic Heating of Stagnation Region	1968年 9 月	野 村 茂 昭
TR-163	双発プロペラ STOL 機の安定操縦性に関する考察 Investigation on the Stability and Control Characteristics of a Twin-propeller STOL Airplane	1968年 9 月	別 府 護 郎
TR-164	熱伝導を考慮した空力加熱による薄肉機体外 板の温度上昇とその電気抵抗アナログ回路 Investigation of the Streamwise Heat Con- dition Effect on the Transient Aerodyna- mic Heating of Thin-skinned Bodies by the Resistance Network Analog Method	1968年10月	小 川 鉦 一
TR-165	有限要素法による箱型梁の解析 Applications of the Finite Element Method to Box Beams	1968年11月	三本木茂夫
TR-166	DPF バルブを用いた ジンバルエンジン駆動 用油制御系の基礎的解析 Fundamental Analyses of Gimbal-Engine Positioning Hydraulic Control System Made Use of DPF Servovalves	1968年11月	畑 山 茂 樹, 興 石 肇
TR-167	アブレーションによるよどみ点空力加熱の減 少の測定 Measurements of Heat Transfer Reduction by Ablation at Stagnation Region	1968年11月	野 村 茂 昭
TR-168	角度測定周波数測定併用のトラッキングシス テムの計算処理に関する研究 On the Orbit Determination Procedures for the Doppler Frequency Measurement with Angular Measurement Tracking System	1968年11月	鳥 海 良 三, 松 本 一 夫 樋 口 一 雄, 戸 川 隼 人 木 村 武 雄
TR-169	VTOL 機操縦研究設備 Design and Construction of VTOL Flight Simulator System	1968年12月	樋 口 一 雄, 百 名 盛 之 三 好 節 子, 岡 部 正 典 山 本 六 郎, 川 原 弘 靖
TR-170	STOL 機の縦の自動安定制御方式に関する 研究 (I) 姿勢制御方式の解析 System Studies on Automatic Longitudinal Stabilization Control Systems for STOL Aircraft Part 1 Automatic Attitude Control Systems	1968年12月	堀 川 勇 壮, 森 幹 彦
TR-171T	Simple Flow Characteristics Across a Strong Shock Wave	Feb. 1969	Kenneth K. Yoshikawa
TR-172	高速における円錐体および三角翼の動安定微 係数の測定 Measurement of Dynamic Stability Deriva- tives of Cones and Delta-Wings at High Speed	1969年 2 月	柳 沢 三 憲
TR-173T	Coupling Effect of Radiative Heat on Con- vective Heat Transfer	Feb. 1969	Kenneth K. Yoshikawa
TR-174	Navier-Stokes 方程式に対する差分法 Difference Method for Navier-Stokes Equa- tion	1969年 4 月	三 好 甫

点束縛のある板の振動について*

埴 武 敏**・多 田 保 夫**
泉 日出夫***・越 出 慎 一**

On the Natural Vibration of Plates Restrained at Several Points

By Taketoshi HANAWA, Yasuo TADA, Hideo IZUMI,
and Shinichi KOSHIDE

An approximate method for vibration analysis of plates restrained at several points is presented.

The method of solution is based upon "Rayleigh-Ritz's Procedure", and the restraints at the points are added to a basic functional making use of "Method of Lagrange Multipliers".

The deflection of a given plate $w(x, y)$ is expressed by a general power series of variables x and y so that the used function is not only applicable for a plate with arbitrary shape but also suitable for numerical calculations with a digital computer.

It is found that the change of restraint conditions at the points does not require a new derivation of the basic characteristic equation but only introduces supplemental elements to the original equation. Furthermore, the corresponding values of these elements concerned with restraint conditions can be easily obtained by simple alternation in the program of digital computer or by desk calculations.

A few examples of numerical analysis as well as of experimental results are shown in this paper, and they indicate the applicability of this method to the kind of the problems studied.

1. 緒 言

航空機やロケットの安定板などの解析をするにあたって、それらの板が支持される方法には種々な条件が考えられる。

普通は片持板などが考えられるが、実際の構造物では数点で固定または支持する。また現在のように宇宙関係の飛行体などにおいては、一点を固定したような構造物も必要とされている。

ここでは、これらに関連し、一般に板の支持が数点においてなされるような系の振動のエネルギー法による近似解法について吟味したものである。

種々の束縛のある梁や板の振動問題を変分法直接解法を用いて解く場合、これらの束縛による未定係数間の関係式を利用して試験関数の係数の個数を最初から

減じておく方法はよく用いられている方法であるが、条件によってはこの束縛をラグランジュの未定乗数法 (Method of Lagrange Multipliers) で入れる方が実際の数値解析の場合便利になることがある。もちろん実際には最初から簡単に入れられる係数関係は試験関数に入れておき、面倒な条件をラグランジュの未定乗数法で入れるのが解の近似を高める上では実用的である。これらの方法については多数の文献^{5), 6)}があり、ここで取り扱った方法は特に目新しいものではないが、この方法の実用性を確めるため数種類の例について数値解析をおこない実験値と比較した結果、一応の成果が得られたので報告する。

束縛の条件には種々あるが本報告では幾何学的な点束縛に限定し、これをわれわれが現在まで進めてきた任意形状の板の振動問題に適用して解析をおこなった。力学的な束縛条件については現在ラグランジュの未定乗数の物理的意味について吟味を進めており別の報告で述べる予定であるのでここでは省略する。

本報告で取り扱った例は

* 昭和44年6月10日受付

** 機体第二部

*** 機体第一部

I 点支持束縛の場合

- (1) 面内一点支持片持正方形板
- (2) 四隅および面内一点支持正方形板

II 点固定束縛の場合

- (1) 一点固定正方形板
- (2) 二点固定台形板

の4例である。これらのなかで片持板の場合固定辺の条件は直線束縛の問題となるのでこの条件は最初から試験関数に入れておき、点束縛の条件のみにラグランジュの未定乗数法を適用した。

2. 解析法

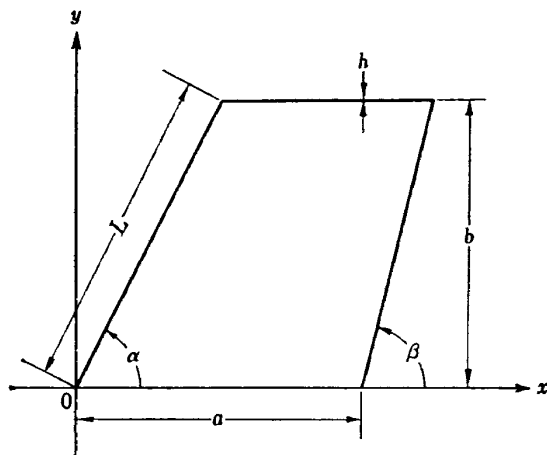
解析の対象を板厚一定の等方性梯形板の自由振動に限り図 2.1 のごとく座標系を定める。このようにすれば角度を表わすパラメータ α , β および板の縦横比に関係するパラメータによって任意の台形板を定めることができる。

平板が微小たわみ振動を起した場合の系のポテンシャルエネルギーを J とすれば、エネルギーの停留原理によって J が停留値をとる条件から固有値（自然振動数）を求めることができる。平板のたわみ関数を

$$w(x, y, t) = w_0(x, y)g(t) \quad (1)$$

とおき解析を進めると、 J は最後には (1) 式の時間の項を分離したたわみ $w_0(x, y)$ で次のように表わされ、この J の停留条件から固有値を求める特有方程式が得られる。

$$J = \frac{D}{2} \left[\iiint \left[\left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left\{ \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 \right\} \right] dx dy - \lambda^2 \iint w_0^2 dx dy \right] \quad (2)$$



α : 前縁後退角

β : 後縁後退角

$R = a/L$: 板の縦横比に関係するパラメータ

図 2.1 座標系

ここに

$$\lambda^2 = \frac{\gamma h}{gD} p^2, \quad \frac{\gamma}{g} : \text{板の密度}, p : \text{角振動数},$$

h : 板厚, D : 板の曲げ剛性

ν : ポアソン比

いま板のたわみ関数（試験関数）として

$$w_0(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} x^m y^n \quad (3)$$

をとる。これは任意形状の板のたわみを一般的に表わすため最も一般的な関数として x, y のべき級数を選んだものである。板の固有値問題において試験関数をこのようなべき級数表示にすることの妥当性は既に報じてある¹⁾。(3) 式の未知係数 a_{mn} には点束縛の条件は入れてないので J は単に幾何学的な積分域の問題だけで平板の形状が与えられれば a_{mn} の二次形式として表わされる。すなわち (3) 式を (2) 式に代入して計算を進めると J として次式を得る。

$$J = \frac{D}{2} \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s a_{mn} a_{rs} [m(m-1)r(r-1) \times I_{m+r-4, n+s} + n(n-1)s(s-1)I_{m+r, n+s-4} + 2\nu m(m-1)s(s-1)I_{m+r-2, n+s-2} + 2(1-\nu)mnr s I_{m+r-2, n+s-2} - \lambda^2 I_{m+r, n+s}] \quad (4)$$

ここに

$$I_{pq} = \iint_A x^p y^q dx dy$$

(A は与えられた形状全域)

前にも述べたようにここでは点束縛の条件のみをラグランジュの未定乗数法で入れるため、片持板の問題の場合には固定辺の条件を最初から (3) 式に入れておかなければならない。これは簡単であって図 2.1 の座標系および (3) 式からわかるように (3) 式において m および n をそれぞれ

$$m = 0, 1, 2, \dots$$

$$n = 2, 3, 4, \dots$$

のようにとればよい。このようにすれば

$$w_0|_{x=0} = 0, \quad \partial w_0 / \partial y|_{y=0} = 0$$

となって $y=0$ におけるたわみおよび傾斜が零という固定辺の条件が満足される。自由辺の条件は変分法のいわゆる“自然境界条件”となっているので (3) 式において考慮する必要はない²⁾。次に点束縛条件について考えることにする。

I. 点支持束縛の場合（初期たわみ零とする）

任意支持点 (x_i, y_i) においてたわみが零でなければならないから (3) 式より

$$w_0(x_i, y_i) = \sum_m \sum_n a_{mn} x_i^m y_i^n = N_i = 0 \quad (5)$$

なる a_{mn} 間の係数関係を得る。ここにおいて問題は (4) 式の J が (5) 式の関係を満たしつつ停留値をとる条件から固有値を求めることになる。そこで (5) 式の係数関係を入れるためラグランジュの未定乗数法を用いることにする。すなわち新しい変数 λ_i を導入することにより

$$I = J + \sum_i \lambda_i N_i \quad (6)$$

なる汎関数が未知係数 a_{mn} および λ_i を変数としたとき停留値をとるようにすればよい (付録 1)。したがって (6) 式を各変数で微分して次式のごとき a_{mn} および λ_i に関する無限次元連立一次方程式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_{mn}} &= \frac{\partial J}{\partial a_{mn}} + \sum_i \lambda_i \frac{\partial N_i}{\partial a_{mn}} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \lambda_i} &= N_i = 0 \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで (4) 式および (5) 式の a_{mn} の係数を次の記号で表示することにする。

$$\begin{aligned} A_{mnr} &= m(m-1)r(r-1)I_{m+r-4, n+s} \\ &\quad + n(n-1)s(s-1)I_{m+r, n+s-4} \\ &\quad + 2\nu m(m-1)s(s-1)I_{m+r-2, n+s-2} \\ &\quad + 2(1-\nu)mnrI_{m+r-2, n+s-2} - \lambda^2 I_{m+r, n+s} \\ B_{i mn} &= x_i^m y_i^n \end{aligned}$$

上の記号を用いて (7) 式を整理すれば

$$\left. \begin{aligned} \frac{2}{D} \frac{\partial I}{\partial a_{mn}} &= \sum_r \sum_s a_{rs} A_{mnr} + \sum_i \lambda_i B_{i mn} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \lambda_i} &= \sum_m \sum_n a_{mn} B_{i mn} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

ここに $A_i = 2/D \lambda_i$

を得る。(8) 式において変数 a_{mn} および A_i が零以外の解を有するためには A_{mnr} および $B_{i mn}$ を要素とする行列式が零でなければならない。このことより (周辺自由の場合)

$$\begin{vmatrix} A_{0000}, A_{0001}, A_{0010}, \dots, A_{00rs} & B_{000}, B_{001}, \dots, B_{00i} \\ A_{0100}, A_{0101}, \dots & B_{010}, B_{011}, \dots \\ A_{1000}, \dots & B_{100}, B_{101}, \dots \\ \vdots & \vdots \\ A_{mn00}, \dots, A_{mnr} & B_{mn0}, B_{mn1}, \dots, B_{mni} \\ \vdots & \vdots \\ B_{000}, B_{001}, \dots, B_{00i} & 0, 0, \dots, 0 \\ B_{100}, B_{101}, \dots, B_{10i} & 0, 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots \\ B_{mn0}, B_{mn1}, \dots, B_{mni} & 0, 0, \dots, 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (9)$$

(片持板の場合)

$$\begin{vmatrix} A_{0202}, A_{0203}, A_{0204}, \dots, A_{02rs} & B_{020}, B_{021}, \dots, B_{02i} \\ A_{0302}, A_{0303}, \dots & B_{030}, B_{031}, \dots \\ A_{0402}, \dots & B_{040}, B_{041}, \dots \\ \vdots & \vdots \\ A_{mn02}, \dots, A_{mnr} & B_{mn0}, B_{mn1}, \dots, B_{mni} \\ \vdots & \vdots \\ B_{020}, B_{021}, \dots, B_{02i} & 0, 0, \dots, 0 \\ B_{030}, B_{031}, \dots, B_{03i} & 0, 0, \dots, 0 \\ \vdots & \vdots \\ B_{mn0}, B_{mn1}, \dots, B_{mni} & 0, 0, \dots, 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (10)$$

なる無限次元の振動数方程式が得られる。

II. 点固定束縛の場合 (初期たわみおよび傾斜を零とする)

任意固定点 (x_i, y_i) の固定条件はその点におけるたわみおよび傾斜が零であればよい。したがってたわみに関しては

$$w_0(x_i, y_i) = 0$$

傾斜に関してはその点の、ある方向を n とし

$$\frac{\partial w_0}{\partial n} \Big|_{x=x_i, y=y_i} = \frac{\partial w_0}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial n} + \frac{\partial w_0}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial n} = 0$$

が n の任意方向に対して成立すればよい。すなわち

$$\frac{\partial w_0}{\partial x} \Big|_{x=x_i, y=y_i} = 0, \quad \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{x=x_i, y=y_i} = 0$$

が同時に成立すれば、その点における傾斜は零となる。従って点固定の束縛条件としては

$$\left. \begin{aligned} w_0 \Big|_{x=x_i, y=y_i} &= \sum_m \sum_n a_{mn} x_i^m y_i^n = N_i = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial x} \Big|_{x=x_i, y=y_i} &= \sum_m \sum_n a_{mn} m x_i^{m-1} y_i^n = N_{xi} = 0 \\ \frac{\partial w_0}{\partial y} \Big|_{x=x_i, y=y_i} &= \sum_m \sum_n a_{mn} n x_i^m y_i^{n-1} = N_{yi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

なる a_{mn} 間の係数関係を得る。ラグランジュの未定乗数として $\lambda_i, \lambda_{xi},$ および λ_{yi} を用いると、この場合の停留値をとるべき汎関数は

$$I = J + \sum_i (\lambda_i N_i + \lambda_{xi} N_{xi} + \lambda_{yi} N_{yi}) \quad (12)$$

となる。

(12) 式を各変数で微分して

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial I}{\partial a_{mn}} &= \frac{\partial J}{\partial a_{mn}} + \sum_i \left(\lambda_i \frac{\partial N_i}{\partial a_{mn}} + \lambda_{xi} \frac{\partial N_{xi}}{\partial a_{mn}} + \lambda_{yi} \frac{\partial N_{yi}}{\partial a_{mn}} \right) = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \lambda_i} &= N_i = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \lambda_{xi}} &= N_{xi} = 0 \\ \frac{\partial I}{\partial \lambda_{yi}} &= N_{yi} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (13)$$

なる無限元連立一次方程式を得る。これより解くべき振動数方程式は、I の場合と同様の記号を用いて表わせば (周辺自由の場合)

$$\begin{vmatrix} A_{0000}, A_{0001}, \dots, A_{00rs}, \dots, B_{00}^1, B_{00}^i, B_{00}^{x1}, \dots, B_{00}^{xi}, B_{00}^{y1}, \dots, B_{00}^{yi} \\ A_{0100}, \dots \\ A_{mn00}, \dots, A_{mnrs}, \dots, B_{mn}^1, B_{mn}^i, B_{mn}^{x1}, \dots, B_{mn}^{xi}, B_{mn}^{y1}, \dots, B_{mn}^{yi} \\ B_{00}^1, \dots, B_{rs}^1, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0 \\ B_{00}^i, \dots, B_{rs}^i, \dots, 0, \dots, 0, \dots, 0 \\ B_{00}^{x1}, \dots, B_{rs}^{x1}, \dots, 0, \dots, 0 \\ B_{00}^{xi}, \dots, B_{rs}^{xi}, \dots, 0, \dots, 0 \\ B_{00}^{y1}, \dots, B_{rs}^{y1}, \dots, 0, \dots, 0 \\ B_{00}^{yi}, \dots, B_{rs}^{yi}, \dots, 0, \dots, 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (14)$$

ここに

$$B_{mn}^{xi} = m x_i^{m-1} y_i^n, \quad B_{mn}^{yi} = n x_i^m y_i^{n-1}$$

となる。

かくして得られた振動数方程式 (9), (10) 式あるいは (14) 式を解いてそれぞれの場合の固有値およびそれに対応する固有関数が求められるわけであるが、実際の計算においては未知係数 a_{mn} の項数を有限項で打ち切り、すなわち (3) 式の試験関数の項数を適当な有限項で打ち切って逐次近似的に近似固有値および固有関数を求めることになる。この場合 a_{mn} の項数は束縛条件の数より多くとらなければならないことはいうまでもないが上限の項数は板の形状、束縛条件、計算機の容量およびプログラム等によって個々の場合に依りて決まるべきものであって一概に論ずることはできない性質のものである。

なお、ここで用いた振動数方程式の計算法の詳細は別の報告³⁾があるのでここでは省略する。

3. 数値計算

計算を無次元量でおこなうため図 2.1 において

$$x/a = \xi, \quad y/b = \eta, \quad a/b = k$$

とおく。なお以後の計算過程では (3) 式の試験関数 $w_0(x, y)$ に対応する無次元化された試験関数はサフィックスの 0 をとって $w(\xi, \eta)$ なる形に記すことにする。その他の式についても同様である。

I. 点支持束縛の場合

(1) 面内一点支持片持正方形板

図 3.1 に示すような片持正方形板の一点 (ξ_1, η_1) を単純支持した場合について計算する。この場合は以前用いた¹⁾片持板のプログラムを利用することにし、固定辺の条件は最初から試験関数に入れておくことにする。未知係数 a_{mn} を 6 項とれば試験関数は (3) 式より

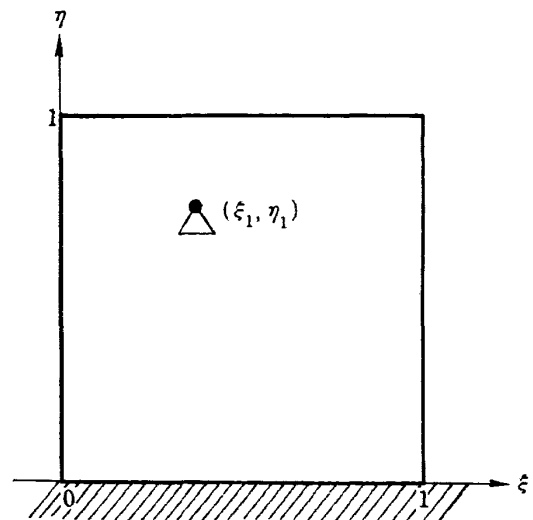


図 3.1 面内一点支持片持正方形板

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= \sum_{m=0}^2 \sum_{n=2}^4 a_{mn} \xi^m \eta^n \quad (m+n \leq 4) \\ &= a_{02} \eta^2 + a_{03} \eta^3 + a_{04} \eta^4 + a_{12} \xi \eta^2 + a_{13} \xi \eta^3 \\ &\quad + a_{22} \xi^2 \eta^2 \end{aligned} \quad (15)$$

となる。束縛条件は一点支持であるから (5) 式より

$$\begin{aligned} w(\xi_1, \eta_1) &= a_{02} \eta_1^2 + a_{03} \eta_1^3 + a_{04} \eta_1^4 + a_{12} \xi_1 \eta_1^2 \\ &\quad + a_{13} \xi_1 \eta_1^3 + a_{22} \xi_1^2 \eta_1^2 \\ &= N_1 = 0 \end{aligned} \quad (16)$$

となり停留値をとるべき汎関数は (6) 式において $i=1$ として

$$I = J + \lambda_1 N_1 \quad (17)$$

となる。(17) 式中の N_1 は (16) 式で与えられ、 J は試験関数 (15) 式と (4) 式を用いて計算することができる。いま 2 章で使用した記号を用いて計算を進めると (17) 式より連立一次方程式

$$\left. \begin{aligned} \sum_{r=0}^2 \sum_{s=2}^4 a_{rs} A_{mnrs} + \lambda_1 N_1 &= 0 \\ \sum_{m=0}^2 \sum_{n=2}^4 a_{mn} B_{mn}^1 &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

が得られ、最終的に (10) 式に対応する振動数方程式は次式に示す 7 行 7 列の対称行列式となる。

$$\begin{vmatrix} A_{0202} & A_{0203} & A_{0204} & A_{0212} & A_{0213} & A_{0222} & B_{02}^1 \\ A_{0302} & A_{0303} & A_{0304} & A_{0312} & A_{0313} & A_{0322} & B_{03}^1 \\ A_{0402} & A_{0403} & A_{0404} & A_{0412} & A_{0413} & A_{0422} & B_{04}^1 \\ A_{1202} & A_{1203} & A_{1204} & A_{1212} & A_{1213} & A_{1222} & B_{12}^1 \\ A_{1302} & A_{1303} & A_{1304} & A_{1312} & A_{1313} & A_{1322} & B_{13}^1 \\ A_{2202} & A_{2203} & A_{2204} & A_{2212} & A_{2213} & A_{2222} & B_{22}^1 \\ B_{02}^1 & B_{03}^1 & B_{04}^1 & B_{12}^1 & B_{13}^1 & B_{22}^1 & 0 \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

ここに

$$\begin{aligned} A_{0202} &= 4.000000 - 0.200000 X \\ A_{0203} &= A_{0302} = 6.000000 - 0.166667 X \\ A_{0204} &= A_{0402} = 8.000000 - 0.142857 X \\ A_{0212} &= A_{1202} = 2.000000 - 0.100000 X \\ A_{0213} &= A_{1302} = 3.000000 - 0.083333 X \\ A_{0222} &= A_{2202} = 1.733333 - 0.066667 X \\ A_{0303} &= 12.000000 - 0.142857 X \\ A_{0304} &= A_{0403} = 18.000000 - 0.125000 X \\ A_{0312} &= A_{1203} = 3.000000 - 0.083333 X \\ A_{0313} &= A_{1303} = 6.000000 - 0.071428 X \\ A_{0322} &= A_{2203} = 2.900000 - 0.055556 X \\ A_{0404} &= 28.800000 - 0.111111 X \\ A_{0412} &= A_{1204} = 4.000000 - 0.071428 X \\ A_{0413} &= A_{1304} = 9.000000 - 0.062500 X \\ A_{0422} &= A_{2204} = 4.106667 - 0.047619 X \\ A_{1212} &= 3.200000 - 0.066667 X \\ A_{1213} &= A_{1312} = 4.100000 - 0.055556 X \\ A_{1222} &= A_{2212} = 3.066667 - 0.050000 X \\ A_{1313} &= 6.520000 - 0.047619 X \\ A_{1322} &= A_{2213} = 4.050000 - 0.041667 X \\ A_{2222} &= 4.355556 - 0.040000 X \\ B_{mn}^1 &= \xi_1^m \eta_1^n \\ X &= \lambda_n^2 a^4 k^{-4} \end{aligned}$$

図 3.1 の支持点 (ξ_1, η_1) を種々変化させた場合の計算および実験から得られた固有値 (付録 2) を巻末の表 1.1 に、固有値変化の様子を図 1.1 に、振動モード (付録 3) を図 1.2 に示す。

(2) 四隅および面内一点支持正方形板

図 3.2 に示すように四隅を単純支持した正方形板において更に面内の一点 (ξ_1, η_1) を単純支持し、この支持点位置を種々変化させた場合の固有値および振動モードについて計算する。

この場合支持点は全部で五点となるが、このうち簡単な座標原点の支持条件

$$w(0, 0) = a_{00} = 0$$

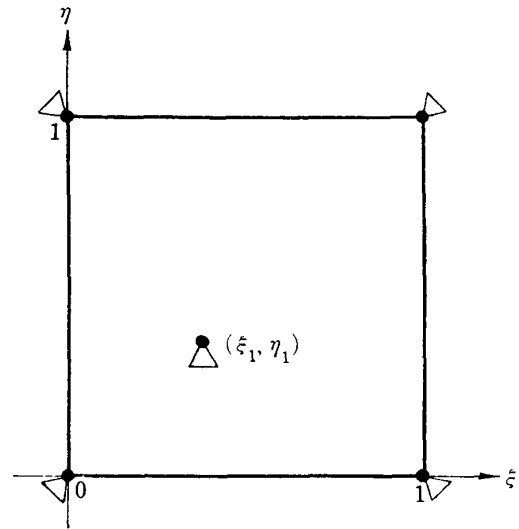


図 3.2 四隅および面内一点支持正方形板

は最初から試験関数に入れておくことにし、すなわち a_{00} を除いた未知係数 a_{mn} を 15 項とれば試験関数は (3) 式より

$$\begin{aligned} w(\xi, \eta) &= a_{01}\eta + a_{02}\eta^2 + a_{03}\eta^3 + a_{10}\xi + a_{11}\xi\eta \\ &\quad + a_{12}\xi\eta^2 + a_{13}\xi\eta^3 + a_{20}\xi^2 + a_{21}\xi^2\eta \\ &\quad + a_{22}\xi^2\eta^2 + a_{23}\xi^2\eta^3 + a_{30}\xi^3 + a_{31}\xi^3\eta \\ &\quad + a_{32}\xi^3\eta^2 + a_{33}\xi^3\eta^3 \end{aligned} \quad (20)$$

となる。

これは 19 行 19 列までの振動数方程式を解くプログラムを利用しているので、未知係数 a_{mn} 15 項と原点を除く 4 点支持の束縛条件を導入する際用いる未定乗数 4 個とを合せて解くべき振動数方程式の次数を 19 次 (19 行 19 列) とするためである。

束縛条件は四点支持であるから (16) 式で $i=4$ とおき汎関数として

$$I = J + \lambda_1 N_1 + \lambda_2 N_2 + \lambda_3 N_3 + \lambda_4 N_4 \quad (21)$$

を得る。これ以後は (1) の場合と同様に計算を進め振動数方程式として 19 行 19 列の行列式を得る。

この場合の固有値を巻末の表 1.2 および図 1.3 に振動モードを図 1.4 に示す。

II. 点固定束縛の場合

(1) 一点固定正方形板

図 3.3 に示すように正方形板の一辺上の一点 (ξ_1, η_1) を固定し、この固定点を ξ 軸方向に移動した場合について計算する。

試験関数は次式のように未知係数 a_{mn} を 16 個含む項までとったものを用いることにする。これは未知係数 16 個と一点固定の束縛条件 3 個とを合せて解くべき振動数方程式の次数を前例と同様 19 次にするためである。

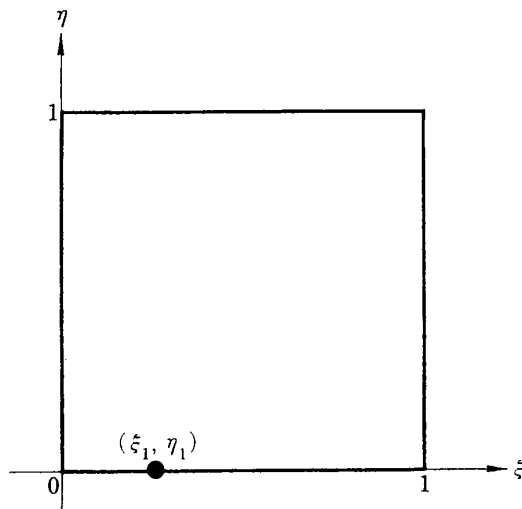


図 3.3 一点固定正方形板

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta) = & a_{00} + a_{01}\eta + a_{02}\eta^2 + a_{03}\eta^3 + a_{10}\xi \\
 & + a_{11}\xi\eta + a_{12}\xi\eta^2 + a_{13}\xi\eta^3 + a_{20}\xi^2 \\
 & + a_{21}\xi^2\eta + a_{22}\xi^2\eta^2 + a_{23}\xi^2\eta^3 + a_{30}\xi^3 \\
 & + a_{31}\xi^3\eta + a_{32}\xi^3\eta^2 + a_{33}\xi^3\eta^3 \quad (22)
 \end{aligned}$$

束縛条件は一点固定であるから (11) 式より

$$\left. \begin{aligned}
 w(\xi_1, \eta_1) &= N_1 = 0 \\
 \partial w / \partial \xi \Big|_{\xi=\xi_1, \eta=\eta_1} &= N_{\xi_1} = 0 \\
 \partial w / \partial \eta \Big|_{\xi=\xi_1, \eta=\eta_1} &= N_{\eta_1} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (23)$$

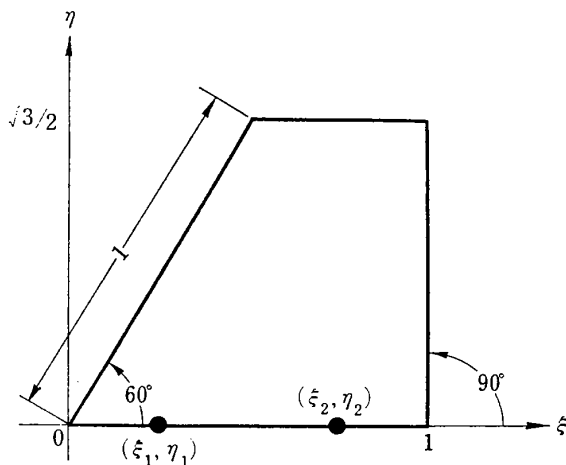
の 3 個を得る。停留値をとるべき汎関数は (12) 式において $i=1$ として

$$I = J + \lambda_1 N_1 + \lambda_{\xi_1} N_{\xi_1} + \lambda_{\eta_1} N_{\eta_1} \quad (24)$$

となる。これ以後は前例と同様に計算を進め最終的には 19 行 19 列の振動数方程式を得る。

この場合の固有値を巻末の表 1.3 および図 1.5 に振動モードを図 1.6 に示す。

(2) 二点固定台形板



$$\alpha : 60^\circ, \beta : 90^\circ, R=1$$

図 3.4 二点固定台形板

図 3.4 に示すように台形板の底辺上の 2 点 (ξ_1, η_1) および (ξ_2, η_2) を固定し、これらの点を ξ 軸方向に移動した場合について計算する。

前例 II. (1) で用いたプログラムを利用するため最初は試験関数として前例と同じく未知係数 a_{mn} を 16 個含む項までとる。すなわち (22) 式の関数をとる。束縛条件は二点固定であるから (11) 式より

$$\left. \begin{aligned}
 w(\xi_1, \eta_1) &= N_1 = 0 \\
 \partial w / \partial \xi \Big|_{\xi=\xi_1, \eta=\eta_1} &= N_{\xi_1} = 0 \\
 \partial w / \partial \eta \Big|_{\xi=\xi_1, \eta=\eta_1} &= N_{\eta_1} = 0 \\
 w(\xi_2, \eta_2) &= N_2 = 0 \\
 \partial w / \partial \xi \Big|_{\xi=\xi_2, \eta=\eta_2} &= N_{\xi_2} = 0 \\
 \partial w / \partial \eta \Big|_{\xi=\xi_2, \eta=\eta_2} &= N_{\eta_2} = 0
 \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

の 6 個を得る。

これ以後の計算は (1) の場合と同様に進めればよいわけであるがプログラム上の制約があるため、(25) 式の束縛条件のうち 3 個は (22) 式においてとった 16 個の未知係数の外に入れ、残りの 3 個は最初とった未知係数のうちべきの高いもの 3 個を消してここに入れることにする。したがってこの場合の試験関数は次式に示すように未知係数 13 個をもって表わされる。

$$\begin{aligned}
 w(\xi, \eta) = & a_{00} + a_{01}\eta + a_{02}\eta^2 + a_{03}\eta^3 + a_{10}\xi \\
 & + a_{11}\xi\eta + a_{12}\xi\eta^2 + a_{13}\xi\eta^3 + a_{20}\xi^2 \\
 & + a_{21}\xi^2\eta + a_{22}\xi^2\eta^2 + a_{30}\xi^3 + a_{40}\xi^4 \quad (26)
 \end{aligned}$$

このようにすれば上式の未知係数 13 個と (25) 式の束縛条件に用いる未定乗数 6 個とによって振動数方程式は 19 行 19 列の行列式となる。この場合の汎関数は (21) 式において $i=2$ として

$$\begin{aligned}
 I = & J + \lambda_1 N_1 + \lambda_{\xi_1} N_{\xi_1} + \lambda_{\eta_1} N_{\eta_1} + \lambda_2 N_2 \\
 & + \lambda_{\xi_2} N_{\xi_2} + \lambda_{\eta_2} N_{\eta_2} \quad (27)
 \end{aligned}$$

を得る。以後は前例と同様に計算を進めればよい。

この場合の固有値を巻末の表 1.4 および図 1.7 に振動モードを図 1.8 に示す。

4. 実 験

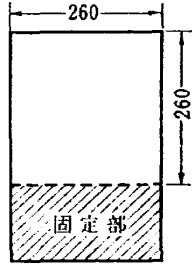
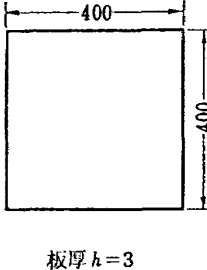
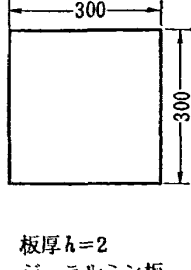
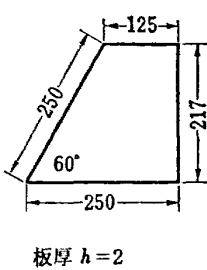
(1) 試験片

実験は数値計算例と同じく四種類おこなった。これに用いた試験片の諸元を表 4.1 に示す。試験片寸法は $\pm 1 \text{ mm}$ 程度の誤差を有する。

(2) 支持方法点

点支持あるいは点固定の条件を実現するのはむずかしい問題であるが、ここでは以下に説明する方法によった。

表 4.1 試験片諸元

実験項目	Ⅰ 点支持束縛		Ⅱ 点固定束縛	
	(1) 片持板面内一点支持	(2) 四隅および一点支持	(1) 一点固定	(2) 二点固定
形状 (mm)				
材質	板厚 $h=2$ ジュラルミン板	板厚 $h=3$ スチール板	板厚 $h=2$ ジュラルミン板	板厚 $h=2$ ジュラルミン板
束縛面積比*	1.04×10^{-4}	4.42×10^{-5}	3.14×10^{-4}	7.74×10^{-5}

* 束縛点面積/平板面積

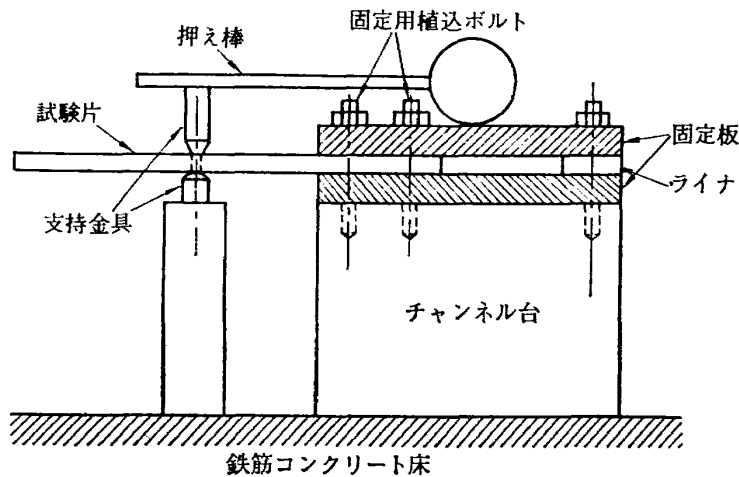


図 4.1 (a) 片持および点支持方法

i) 面内一点支持片持正方形板の場合

まず試験片の片持条件は図 4.1 (a) に示すようにコンクリート床上に固定されたチャンネル台に取りつけられた二枚の厚い固定板の間に試験片を挟み、ボルトで固定した。これは以前からおこなった実験と同じ方法で、片持板のみの場合は精度のよい解が得られることがわかっている⁴⁾。面内の点支持方法は図 4.1(b) に示すようにその点に直径 3 mm の穴をあけ、球座を下において上側から円錐形の治具を挿入し、これがずれない程度に軽く押えた。

ii) 四隅および面内一点支持正方形板の場合

四隅の支持方法は図 4.2 (a) に示すように i) のチャンネル台を 2 台用いてその固定板上に円柱を万力で固定し、その円柱の一部に楔形の切欠きを入れて (図 4.2 (b)) 試験片の隅を挿入した。面内の支持点については i) と同様な方法によった。

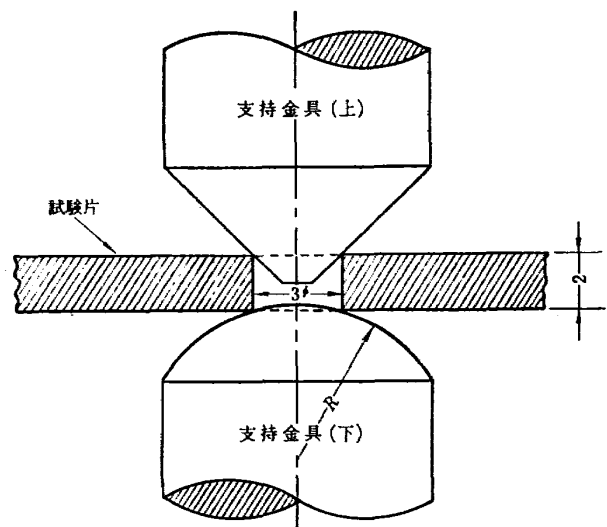


図 4.1 (b) 支持点詳細

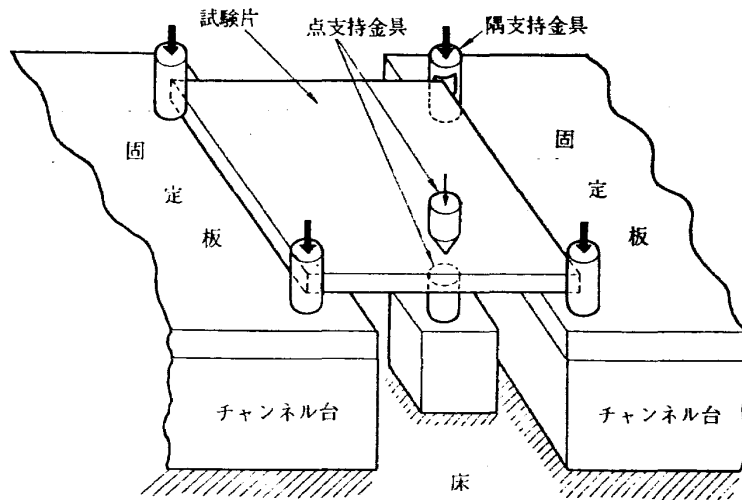


図 4.2 (a) 四隅および面内点支持方法

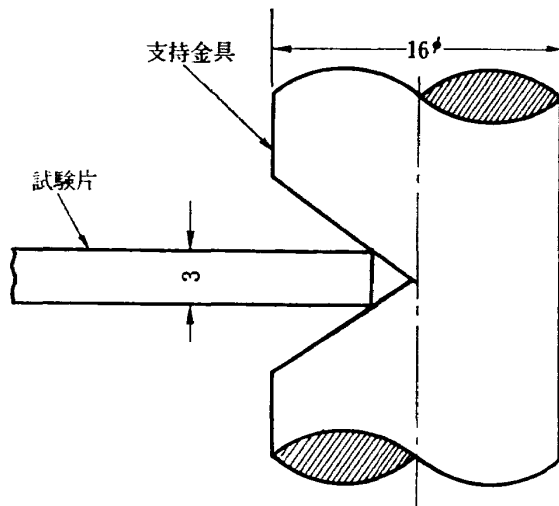


図 4.2 (b) 隅支持点詳細

iii) 一点固定正方形板の場合

図 4.3 に示すように呼び径 3mm の六角ナットを試験片の上下におきこれをチャンネル台の固定板上に万力で固定した。固定点の計算条件に合わせるためには接触面積が小さい方がのぞましいが、一点固定であるためあまり微小面積の治具では上、下の位置がずれを生じたり、試験片を水平に保持することが非常に困難であるのでこのようにした。

iv) 二点固定台形板の場合

この場合の固定は前述の固定面積なども吟味したので、この面積を変えて図 4.4 (b) および写真 2 に示すような治具を作り、これを試験片の上下においてチャンネル台の固定板に万力で固定した。(図 4.4(a) および写真 1) この場合、接触面積が小さいためあまり強く締め付けると試験片の固定部が圧潰するおそれがあるので、ある程度加減をして締め付けた。接触円直径は約 2mm である。

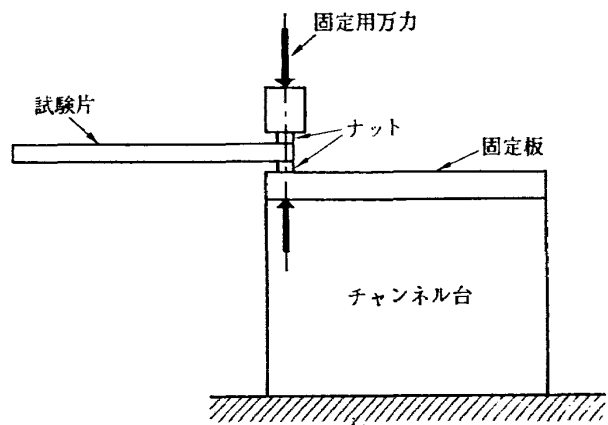


図 4.3 (a) 一点固定正方形板固定方法

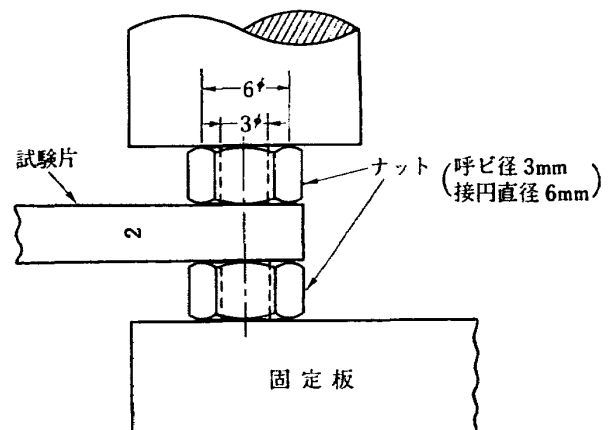


図 4.3 (b) 固定点詳細

(3) 実験装置および実験法

i) 実験装置

図 4.5 に実験装置全系のブロック図を示す。なお巻末に実験例の写真を示す(写真 4, 5, 6)。

ii) 加振法

オシレータ正弦波出力を増幅して試験片に取り付け

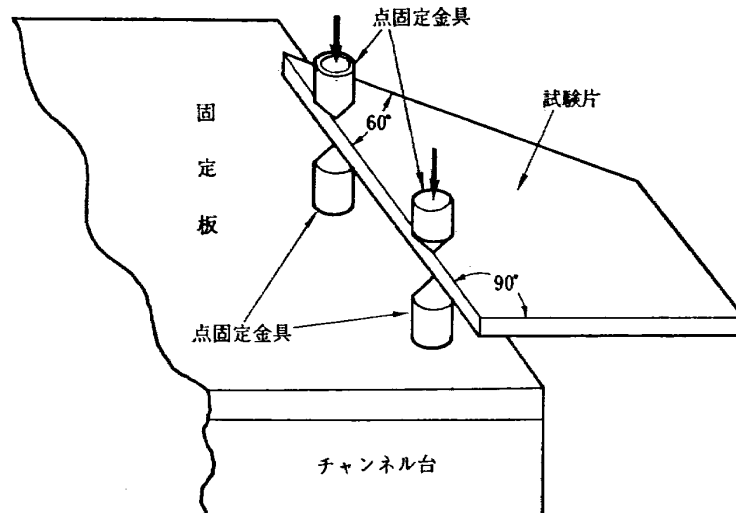


図 4.4 (a) 二点固定梯形板固定方法

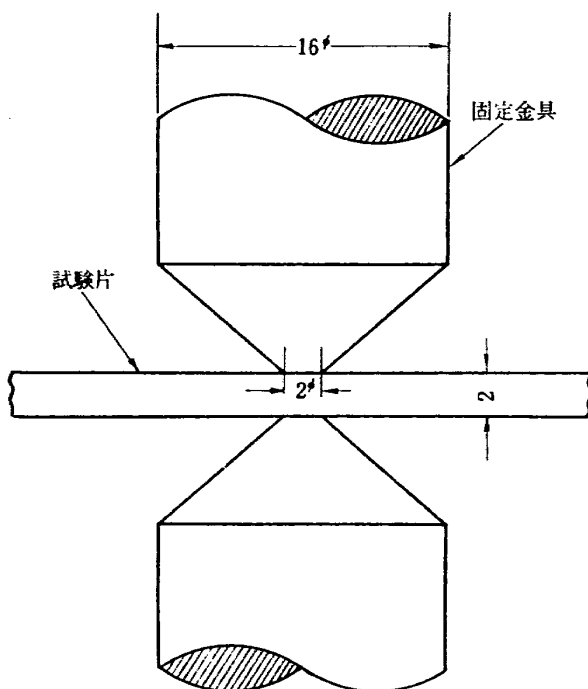


図 4.4 (b) 固定部詳細

た可動コイルを励起し試験片を振動させた。加振部のマグネットは市販のスピーカのものを利用し、可動コイルはなるべく重量がかかるように手で作ったものを用いた。コイルの重量は取付用ボルト、ナットを含めて4グラム弱である(写真3)。加振点は試験片によって異なるが、ノーデルラインに合致しないところがよく、また片持となるような支持条件のときは、できるだけ支持または固定点に近い方がのぞましい。写真4, 5, 6に例を示したが、特に写真6は自由端で加振しているが、これはコイルの重量の影響を考えると好ましくないが、この方が共振点を判定しやすい。

iii) 共振点の判定および記録

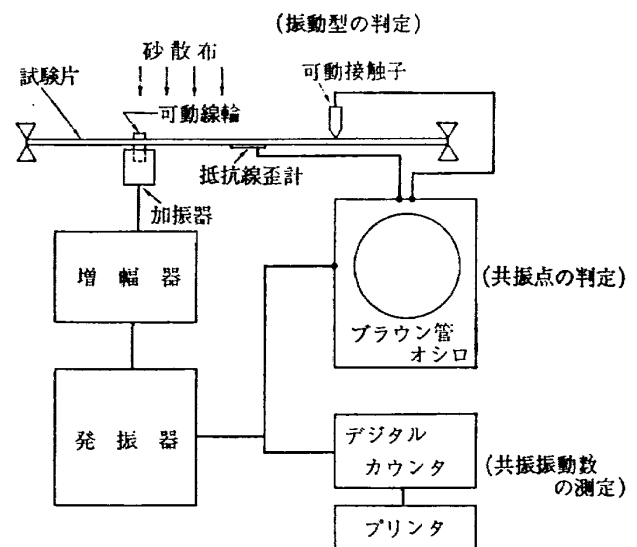


図 4.5 実験装置全系ブロック図

試験片の数個所に歪ゲージを接着し、適当な点の出力(ノーデルラインに直角方向の場合が出力最大となる)を増幅してブラウン管の垂直軸に入れ、同時にオシレーター出力を水平軸に入れてリサージュ図をかかせ共振点を判定した。共振振動数はこのときのオシレーター出力をデジタルカウンタでカウントして求め、同時にカウンタに連動するプリンタによって記録した。振動モードはよく乾燥した、細かい砂を試験片に散布して求めた。高次のモードにおいてノーデルラインの交叉する部分や支持点付近に砂が堆積して砂の状況だけではモードが不明確な場合があったが、このような場合はイヤホンマイクを利用した接触子によって振動波形をとり出してブラウン管に入れ、この波形とオシレーター出力との位相を判定することによりノーデルラインを求めた。

5. 結果の比較および考察

計算結果と実験結果を比較する場合、一番問題になるのは束縛点の条件がうまく合致しているかどうかということであろう。数値計算の場合束縛条件は完全にその点における条件として簡単に入れることができるが、実験の場合その点において束縛することは明らかに不可能で、試験片面積に比べれば微小ではあるが、ある有限な面積を束縛することになる。ここでおこなった実験では束縛点面積と平板面積との比はそれぞれ

- I (1) 面内一点支持片持正方形板の場合 1.0×10^{-4}
 (2) 四隅および面内一点支持正方形板の場合 4.4×10^{-5}
 II (1) 一点固定正方形板の場合 3.1×10^{-4}
 (2) 二点固定台形板の場合 7.7×10^{-5}

であって、厳密な理論上の点とは異なるけれども実用上は点とみなして差支えない程度と思われる。本報告では緒言で述べたように実用的な解法（たとえ解が近似解であっても）を確立するのが最大の目的であるためこの種類の理論的考察は別の機会に譲り、ここで得られた結果に主眼を置いて考察を進めることにする。実用面からみれば実際の構造物や部材では厳密な点束縛は不可能で、われわれがおこなった実験と同程度の束縛面積比を有する場合もよくあると思われるので、ここで報じた近似解法でも実際問題の固有値を推定する一助になるであろう。以下個々の場合について考察を進めることにする。

- I (1) 面内一点支持片持正方形板（表 1.1, 図 1.1, 図 1.2）

計算結果と実験結果は固有値については二次まで、振動モードについては三次までほぼ一致している。束縛点位置の変化による固有値および振動モードの変化の様相も明らかで、たとえば一次振動においては束縛点が片持辺の対辺上にある場合固有値が最も高く、片持辺に近くに徙い漸減し遂に純片持板の固有値に一致する（図 1.1）。試験関数はわずか6項であるが片持辺の条件を最初から満足させたためこの束縛の影響が非常に強く、項数が少ないにもかかわらず良い結果が得られたものであろう。なお図 1.1 に示すように一次固有値の計算値と実験値の大小が上下しているのは次の理由によるものと推定される。本解法はエネルギー法で試験関数を有限項で打ち切っているため厳密解より高い値が求められるはずである（付録 1）。一方実験についていえば片持の条件はほぼ満たしていると考えら

れるが支持点の条件を満たすことは不可能で純粹の点支持より拘束が強くなっており、その結果実験値も厳密解より高い値を示しているであろう。したがってこの厳密解からの差が計算、実験ともに同程度であれば必ずしも計算値の方が実験値より大きい値を示すとは限らない。高次の固有値については計算値の方が厳密解との差が増大するため実験値より大きくなるのは当然であり、得られた結果もそのことを示している。

- I (2) 四隅および面内一点支持正方形板（表 1.2, 図 1.3, 図 1.4）

計算固有値と実験固有値は三次まで 10% 以内の差で一致している。試験関数は 15 項であるため前例に比してより高次の場合まで値が求められ、表 1.2 からわかるように計算値と実験値は五次の固有値まで大部分の場合 15% 以内の差となっている。低次の実験固有値が計算値より高いのは前例と同様に実験の支持点条件（全部で五点）が完全に満たされず、純粹支持条件より拘束が強くなったためと思われる。振動モードは二次の場合を除いて三次ないし四次まで一致している。二次の場合（図 1.4）⑨以外のケースはすべて計算モードと実験モードが異なっており、試験関数もラグランジュの未定乗数法で入れたはずの面内支持点の条件であるたわみ零を満たしていない。しかし同じ方法で入れた隅（原点を除く三点）の支持条件はこの場合も満たしている。同一の計算過程から得られた他の次数（一、三、四次）の場合すべての支持条件を満たしながらなぜ二次の場合だけが面内支持点の条件を満たさないのか、この原因は目下不明である。

- II (1) 一点固定正方形板（表 1.3, 図 1.5, 図 1.6）

計算固有値と実験固有値の差は I の場合より全般に大きくなっている。これは計算の場合は点固定の条件が完全に満たされ、かつ厳密解より高い値が求められたものと思われるが、実験の場合は完全な点固定が点支持より一層困難で、両者の差が開いたものであろう。しかし定性的には図 1.5 からわかるように固定点位置の変化による固有値の変化は四次までよく表わされており全体の傾向をつかむことは十分できる。振動モードについてみれば、計算固有値と実験固有値との差があるにもかかわらず四次まで一致している。このことは固定点の束縛の影響が振動モードに対しては固有値に対する程きかない、換言すれば点固定の場合も、点固定に近い支持の場合も低次のモードは同様になることを示している。

- II (2) 二点固定台形板（表 1.4, 図 1.7, 図 1.8）

この場合も計算固有値と実験固有値との差は I の場合より大きい。ただ振動モードについては三次までよく一致しており束縛点位置の変化によるモード変化の様相がよく示されている。

6. 結 論

本報告において、点束縛のある板の振動問題の場合その点の幾何学的束縛条件をラグランジュの未定乗数法によって汎関数の付加条件として加えてその場合の特有方程式（振動数方程式）を導く方法について述べさらに数値解析例およびそれぞれに対応する実験例によってこの解法の実用性を確かめた。これを要約すると次のとき結論が得られる。

(1) ラグランジュの未定乗数法によって点束縛条件は特有方程式に簡単に付加することができる。すなわちある基本的な場合の特有方程式が求められていれば点束縛条件による項はその付加項として基本式に加えられるだけあって、束縛点の条件（固定または支持）、位置および点数等が変っても基本式は何等変更する必要がなく、簡単なプログラムによって付加項のみを計算して加えれば種々の場合の問題を解くことができる。

(2) 点支持束縛の場合、ここで用いた程度の近似項数でも低次の固有値（振動数）および振動モードともに実験結果とはほぼ一致する解が求められる。

(3) 点固定束縛の場合、計算固有値と実験固有値に差が認められるが、これは近似項数および桁数をより大きくとった高精度の計算と精密な実験（特に点固定束縛において）をおこなえば是正されることが予想される。しかしここに報じた結果でも固定点位置の変化による固有値変化の傾向は明らかにされており、振動モードについては良い結果を示している。

(4) 計算に用いた束縛条件と実験の際の束縛条件の差（束縛点における傾斜に対する拘束）は固有値に対して大きい影響を与えるが、低次の振動モードに対してはあまり影響がないように思われる。

(5) ここに報じた例では束縛点面積と平板の全面積との比が 10^{-4} 程度であれば計算上は近似的に点と見なして差支えない。

以上の結果、点固定束縛の場合に精度のよい解を求めること、束縛点面積と平板全面積の比が近似的に点と見なし得る限界を解の精度との関連において定めること、および実用的な点固定の問題などが残された問題となるが、これらは今後の課題として研究を進めたい。本研究を進めるにあたっては構造研究室各技官の

協力が得られた。

文 献

- 1) 川井, 埴ほか; 平板翼の振動について, 航技研報告, TR-30 (昭和 37 年)
- 2) 川井, 埴ほか; 変分法による平板翼の撓み, 振動解における自然境界条件の数値的吟味, 航技研報告 TR-66 (昭和 39 年)
- 3) 戸川; 固有値問題 ($\sum \lambda_k A_k = 0$) の数値解法, 航技研報告 TR-45 (昭和 38 年)
- 4) 埴; 板の振動に関する二, 三の解析と実験例について, 航空学会誌, 第 14 巻第 148 号 (1966) p. 131
- 5) 浜田; 周辺固定長方形板の振動, たわみ, 座屈問題の一解法, 日本機械学会論文集, 23 巻, 127 号 (昭和 32 年)
- 6) 関谷; 二重フーリエ級数法による種々の境界条件下における長方形サンドイッチ板の撓みおよび座屈の解析, 第 13 回応用力学連合講演会前刷

付録 1 ラグランジュの未定乗数法

変分法の理論によれば, ある汎関数の極値をとるときに課せられる束縛条件はラグランジュの未定乗数法によって入れることができる。普通はある束縛条件が与えられたとき, この条件を満足するような試験関数を求めて, 汎関数を作るのであるが, 条件が複雑になるとこれが困難である。このため始めに作る汎関数は束縛のない試験関数を用いて作り, のちにこの条件を満たすようにする。

いま何等の束縛もない試験関数を用いて作った汎関数を J とし, 束縛の条件を $N_i = 0$ とする。ここに N_i は J を作る試験関数と同じ関数を用いたときの束縛条件式とする。

板の場合の点支持に対する幾何学的条件のときは, 試験関数を本文の (3) 式のようにとると, 本文の (5) 式などで与えられる条件式となる。いまこの条件が満たされないようなたわみの試験関数を用いると, この条件の値と, その点での試験関数のこの条件の値との差をとれば ($N_i - 0$) なる量が残ることになる。これと新たな試験関数 λ_i (もし N_i が変位の条件のときはこれに対する反力と考える) との積を考える。これはたわみの試験関数がこの条件 $N_i = 0$ を満たさないために反力とともに生じるあらたなポテンシャルと解釈できる。もしたわみの試験関数が $N_i = 0$ の条件を満たさないときには, この条件を満足するようにするため, あらたなポテンシャルを加えたものについて考えねばな

らない。あらたなポテンシャル $\lambda_i(N_i=0)$ を加えた系のポテンシャルを

$$I = J + \lambda_i(N_i=0)$$

とする。この変分をとると、

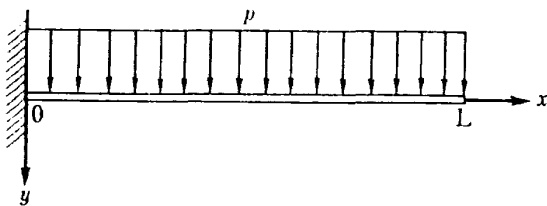
$$\delta I = \delta J + \delta \lambda_i N_i + \lambda_i \delta N_i$$

これより δJ の境界の値と $\lambda_i \delta N_i$ とが対応して λ_i が幾何学的境界条件 δN_i に対する一般反力となる。

また $\delta \lambda_i N_i$ より $N_i=0$ が得られる。直接解法では本文 (6) 式以降に示すように、たわみの試験関数に含まれるパラメータ a_{mn} と λ_i とを変数として、 I の極値を求めればよい。ここで束縛点が境界である場合はすなおであるが、一般に板の内部に入っている場合などでは、複雑になるが、これは幾何学的な問題で、同じと考えられる。詳しくは、別に λ_i の物理的な意味の数値例を示すつもりであるので、ここでは省略する。

次に、このようにして作られた汎関数がどのように変化し、また極値はどのような点になるかを片持梁の静たわみと振動解について数値的に吟味した例を示す。

(I) 片持梁の静たわみ解析におけるポテンシャルの値の数値的吟味



付図 1

付図 1 のような問題をとくときに二つの方法を比較する。梁のポテンシャルエネルギーはおのこの

$$J = \int_0^L \left(\frac{EI}{2} y''^2 - py \right) dx \quad (I-a)$$

$$I = \int_0^L \left(\frac{EI}{2} y''^2 - py \right) dx + \lambda y'_{x=0} \quad (I-b)$$

となる。(I-a) 式は $x=0$ での条件を満たす試験関数を用いる場合とし、(I-b) 式は $x=0$ での変位の条件は試験関数の中に含むが、傾斜の条件は満足しない試験関数を用いる場合で、ラグランジュの未定乗数法によって入れるものとする。

$$J = \frac{EI}{2L^3} \left\{ \sum_m \sum_r A_m A_r \frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-3} - \frac{2pL^4}{EI} \sum_m A_m \frac{1}{m+1} \right\} \quad (I-c)$$

$$I = \frac{EI}{2L^3} \left\{ \sum_m \sum_r A_m A_r \frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-3} \right.$$

$$\left. - \frac{2pL^4}{EI} \sum_m A_m \frac{1}{m+1} + \frac{2L^3}{EI} \lambda \sum_m m A_m x \frac{m-1}{x=0} L^{-m} \right\} \quad (I-d)$$

ここに

$$y = \sum_m a_m x^m$$

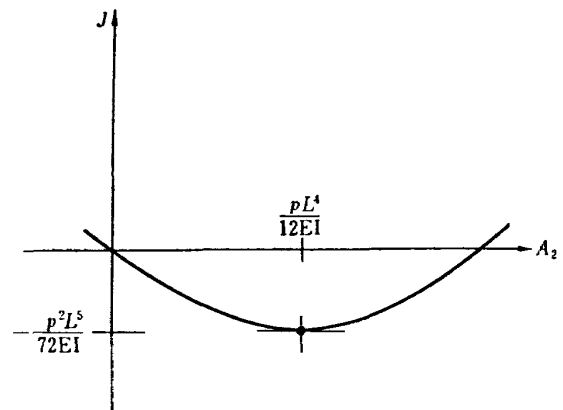
$$A_m = a_m L^m$$

とする。

(I-a) 式においては a_2, a_3, a_4, \dots が、(I-b) 式においては a_1, a_2, a_3, \dots および λ が変数である。

(i) $y = a_2 x^2$ の場合

$$J = \frac{EI}{2L^3} \left\{ 4 A_2 A_2 - \frac{2pL^4}{EI} \frac{A_2}{3} \right\} \quad (I-e)$$



付図 2

$$\frac{\partial J}{\partial A_2} = 0 \quad \text{より} \quad A_2 = \frac{pL^4}{12EI}$$

$$\therefore y = \frac{pL^2}{12EI} x^2, \quad y_{x=L} = \frac{pL^4}{12EI} \quad \left(\text{exact} = \frac{pL^4}{8EI} \right) \quad (I-f)$$

$$J_{\min} = -\frac{p^2 L^5}{72EI} \quad (I-g)$$

(ii) $y = a_1 x + a_2 x^2$ の場合

$$I = \frac{EI}{2L^3} \left\{ -\frac{pL^4}{EI} A_1 + 4 A_2^2 - \frac{2pL^4}{EI} \frac{1}{3} A_2 + \frac{2L^3}{EI} \lambda A_1 L^{-1} \right\} \quad (I-h)$$

$$\frac{\partial I}{\partial A_1} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial A_2} = 0, \quad \frac{\partial I}{\partial \lambda} = 0$$

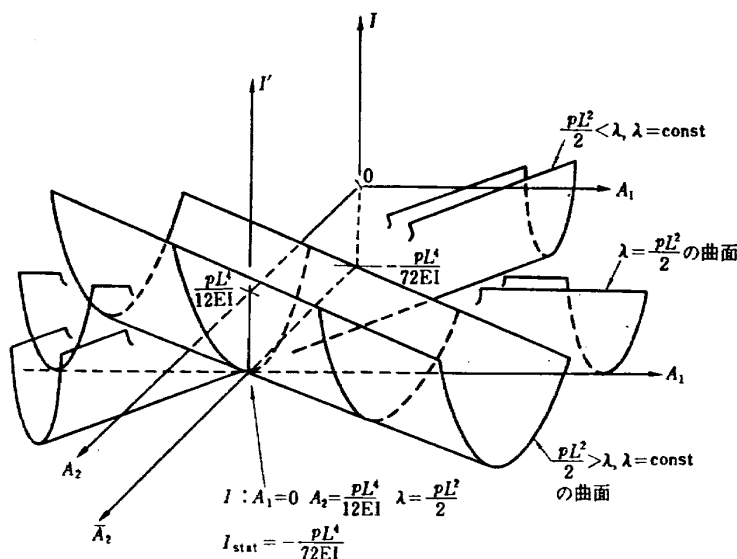
これより

$$A_1 = 0, \quad A_2 = \frac{pL^4}{12EI}$$

$$\lambda = \frac{pL^2}{2} \quad (\text{モーメントに相当})$$

$$\text{ゆえに} \quad y = \frac{pL^4}{12EI} x^2, \quad y_{x=L} = \frac{pL^4}{12EI}$$

$$(i) \text{ の場合と同様} \quad (I-i)$$



付図 3

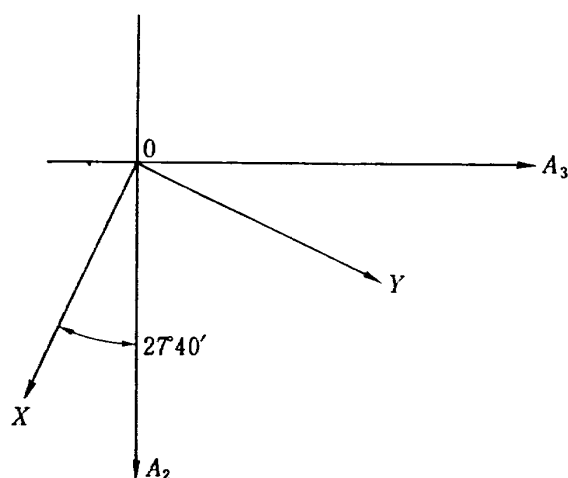
$$I = \frac{2EI}{L^3} \left(A_2 - \frac{pL^4}{12EI} \right)^2 - \left(\frac{pL^4}{12EI} \right)^2 \cdot \frac{2EI}{L^3} - \frac{pL}{2} A_1 + \frac{1}{L} \lambda \cdot A_1 \quad (I-j)$$

$$I_{\text{stationary}} = -\frac{2EI}{L^3} \left(\frac{pL^4}{12EI} \right)^2 = -\frac{p^2 L^5}{72EI} \quad ((i) \text{ の場合と同値}) \quad (I-k)$$

$$I' = \frac{2EI}{L^3} A_2^2 - \frac{pL}{2} A_1 + \frac{1}{L} \lambda A_1 \quad (I-l)$$

(iii) $y = a_2 x^2 + a_3 x^3$ の場合

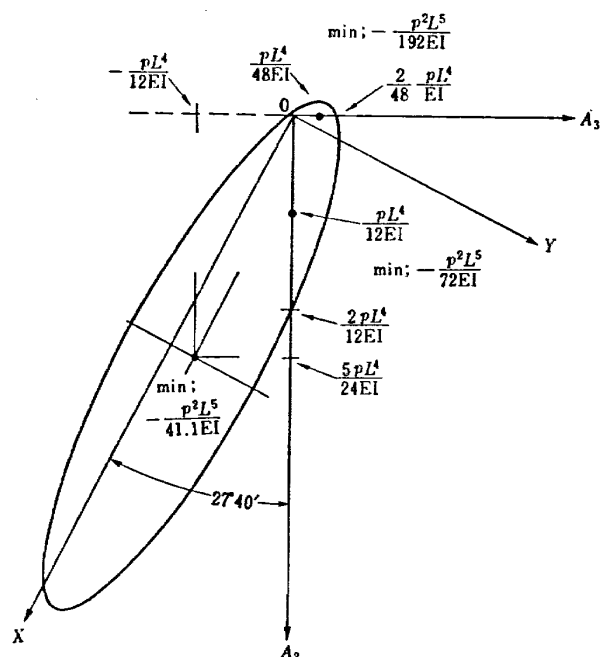
$$J = \frac{EL}{2L^3} \left\{ 4A_2^2 + 12A_2A_3 + 12A_3^2 - \frac{12pL^4}{EI} \cdot \frac{1}{3} A_2 - \frac{2pL^4}{EI} \cdot \frac{1}{4} A_3 \right\} \quad (I-m)$$



付図 4

$$\frac{\partial J}{\partial A_2} = 0, \quad \frac{\partial J}{\partial A_3} = 0$$

これより



付図 5

$$A_2 = \frac{5}{24} \frac{pL^4}{EI}, \quad A_3 = -\frac{1}{12} \frac{pL^4}{EI}$$

$$J_{\text{stationary}} = -\frac{1}{41.1} \frac{p^2 L^5}{EI},$$

$$y_{x=L} = \frac{pL^4}{8EI} \quad (\text{exact})$$

$$EI y''_{x=0} = -\frac{pL^2}{2} \quad (\text{exact})$$

J の座標変換 (付図 5)

$$A_2 = \sqrt{\frac{3+2\sqrt{13}}{26}} X + \sqrt{\frac{13-2\sqrt{13}}{26}} Z$$

$$A_3 = -\sqrt{\frac{13-2\sqrt{13}}{26}} X + \sqrt{\frac{13+2\sqrt{13}}{26}} Y$$

$$J = \frac{EI}{2L^3} \{ (8-2\sqrt{13})(X-\alpha)^2 + (8+2\sqrt{13})(Y-\beta)^2 - \gamma \} \quad (\text{I-n})$$

ここに

$$\alpha = -\frac{pL^4}{EI} \frac{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{13+2\sqrt{13}}{26}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{13-2\sqrt{13}}{26}} \right)}{(8-2\sqrt{13})}$$

$$\beta = -\frac{pL^4}{EI} \frac{\left(-\frac{1}{3}\sqrt{\frac{13+2\sqrt{13}}{26}} - \frac{1}{4}\sqrt{\frac{13+2\sqrt{13}}{26}} \right)}{(8+2\sqrt{13})}$$

$$\gamma = \frac{7}{144} \left(\frac{pL^4}{EI} \right)^2$$

$$J_{\min} = -\frac{1}{41.1} \cdot \frac{p^2 L^5}{EI} \left(A_2 = \frac{5}{24} \frac{pL^4}{EI}, \right.$$

$$\left. A_3 = -\frac{1}{12} \frac{pL^4}{EI} \right)$$

これにラグランジュの未定乗数法で傾斜の条件を付加した場合も (ii) の場合と同様で、このときは、この曲面が λ の値によって付図 3 のように変化する。

(II) 片持梁の振動解析におけるポテンシャルの値の数値的吟味



付図 6

$$J = \int_0^L \left(\frac{EI}{2} y'^2 - \frac{\omega^2 \rho A}{2} y^2 \right) dx \quad (\text{II-a})$$

$$I = \int_0^L \left(\frac{EI}{2} y'^2 - \frac{\omega^2 \rho A}{2} y^2 \right) dx + \lambda y'_{x=0}$$

(II-b)

(II-a) 式は $x=0$ で条件を満たす試験関数を用いる場合とし、(II-b) 式は $x=0$ で変位の条件は満たすが、傾斜の条件は満足しない関数を用いる場合で、この条件をラグランジュの未定乗数によって入れるものとする。

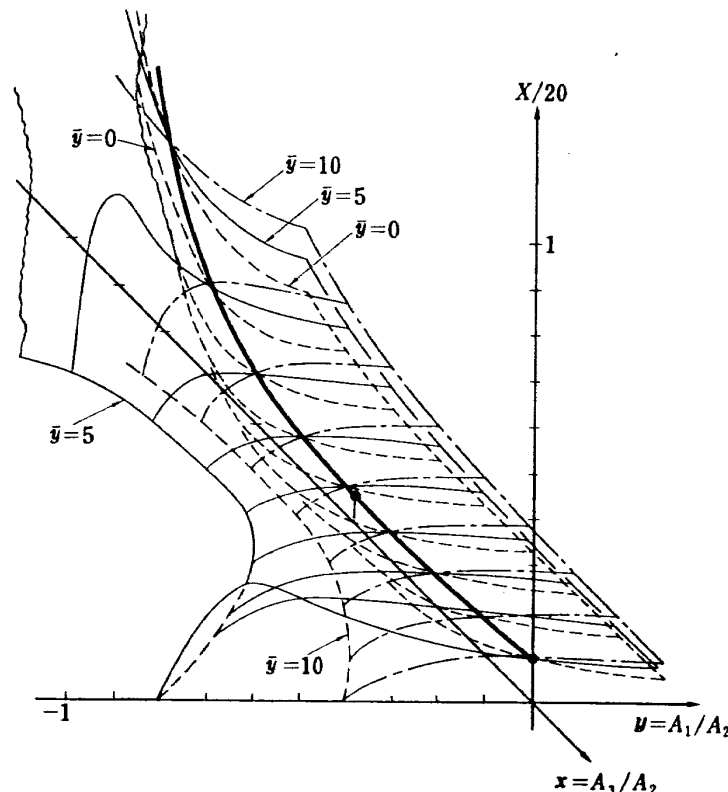
$$J = \frac{EI}{2L^3} \left\{ \sum_m \sum_r A_m A_r \frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-3} - \frac{\omega^2 \rho A}{EI} L^4 \sum_m \sum_r A_m A_r \frac{1}{m+r+1} \right\} \quad (\text{II-c})$$

$$I = \frac{EI}{2L^3} \left\{ \left[\sum_m \sum_r A_m A_r \frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-3} - \frac{\omega^2 \rho A}{EI} L^4 \sum_m \sum_r A_m A_r \frac{1}{m+r+1} + \frac{2L^2 \lambda}{EI} A_1 \right] \right\} \quad (\text{II-d})$$

(i) $y = a_2 x^2 + a_3 x^3$ の場合

$$X = \frac{\omega^2 \rho A}{EI} L^4 \quad (\text{II-e})$$

$$J = \frac{EI}{2L^3} \left\{ (4A_2^2 + 12A_2A_3 + 12A_3^2) - X \left(\frac{A_2^2}{5} + \frac{2}{6} A_2A_3 + \frac{A_3^2}{7} \right) \right\} \quad (\text{II-f})$$



付図 7

$$\frac{\partial J}{\partial A_m} = 0 \text{ より } X_1 = 12.4803$$

$$x = \left(\frac{A_3}{A_2} \right) = -0.38366$$

$$X = 20 \frac{1+3x+3x^2}{1+\frac{5}{3}x+\frac{5}{7}x^2} \quad (\text{II-g})$$

$y = a_2 x^2$ の場合

$$X_1 = 20$$

(ii) $y = a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$ の場合

$$I = \frac{EI}{2L^3} \left[-X \left(\frac{A_1}{3} + \frac{2}{4} A_1 A_2 + \frac{2}{5} A_1 A_3 + \frac{A_2^2}{5} + \frac{2}{6} A_2 A_3 + \frac{A_3^2}{7} \right) + (4A_2^2 + 12A_3^2 + 12A_2 A_3) + A_1 A_1 \right] \quad (\text{II-h})$$

停留値は (II-e) 式の場合と同様になり、このときの

$$X_1 = 12.4803 \text{ (厳密解} = 12.362364)$$

$$x_1 = -0.38366$$

$$y_1 = \left(\frac{A_1}{A_2} \right) = 0$$

$$\bar{y}_1 = \left(\frac{A}{A_2} \right) = 4.3246$$

$y = a_1 x + a_2 x^2$ の場合

$$X_1 = 20$$

$$y_1 = 0$$

$$\bar{y}_1 = 10$$

$$X = 20 \frac{1+3x+3x^2+\frac{y_1 y_1}{4}}{1+\frac{5}{3}x+\frac{5}{7}x^2+\frac{5}{2}y_1+\frac{5}{3}y_1^2+2xy_1} \quad (\text{II-i})$$

(I), (II) の計算例からわかるように、 J 曲面は下に凸な関数で、停留値は一般に極小値を示すが、 I の曲面では a_m に関しては下に凸であるが、 λ に関しては上に凸である。つまり変曲点が停留値となっている。しかし、ここで計算した例においては、この汎関数の停留値は厳密な解のときの停留値より一般に高い値を示すようである。このことに関しては a_m と λ との自由度に関係すると思うが、明らかでない。

付録 2 固有値と固有振動数の関係

計算において第 n 次の固有値は本文(19)式に示すように $X = \lambda_n^2 a^4 k^{-4}$ の形で求められる。実際のプログラムでは X , \sqrt{X} およびそれに対応する固有ベクトル a_{mn} と A の値をタイプアウトするようになっている

ので計算固有値はその \sqrt{X} を用いて

$$\lambda_n a^2 = k^2 \sqrt{X} \quad (\text{a})$$

として直ちに求められる。固有値と振動数の関係は

$$\lambda_n = \sqrt{\frac{\gamma}{g} \frac{h}{D} p_n^2}$$

$$\text{ここに } D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)}, \quad p_n = 2\pi f_n$$

によって

$$k^2 \sqrt{X} = \lambda_n a^2 = \sqrt{\frac{\gamma}{g} \frac{12(1-\nu^2)}{E}} 2\pi \frac{a^2}{h} f_n \quad (\text{b})$$

したがって

$$f_n = \frac{k^2 \sqrt{X}}{\sqrt{\frac{\gamma}{g} \frac{12(1-\nu^2)}{E}} 2\pi \frac{a^2}{h}} \quad (\text{c})$$

となる。(c) 式の右辺は計算固有値および材料定数と平板の形状によって定まる値であるからそれぞれの場合に対応した計算振動数を求めることができる。

実験の場合は (b) 式における f_n が実験振動数として得られる。(b) 式の右辺は f_n を除いてすべて既知の値であるから f_n が求まれば実験固有値 $\lambda_n a^2$ は直ちに計算できる。ここで用いた定数値は次のとおりである。

(i) スチール板の場合

$$\gamma = 7.8 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$

$$\nu = 0.3$$

$$E = 2.1 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$$

$$g = 980 \text{ cm/sec}^2$$

$$\pi = 3.14$$

これを (b) 式に代入すれば

$$\lambda_n a^2 = 4.04 \times 10^{-5} \times \frac{a^2}{h} f_n \quad (\text{d})$$

となる。

(ii) ジュラルミン板の場合

$$\gamma = 2.77 \times 10^{-3} \text{ kg/cm}^3$$

$$\nu = 0.3$$

$$E = 7.3 \times 10^5 \text{ kg/cm}^2$$

$$g = 980 \text{ cm/sec}^2$$

$$\pi = 3.14$$

したがってこの場合は

$$\lambda_n a^2 = 4.09 \times 10^{-5} \times \frac{a^2}{h} f_n \quad (\text{e})$$

となる。(d)(e) 式の $h(\text{cm})$ および $a(\text{cm})$ は試験片諸元の表 (表 4.1) の値を用いた。

なお固有値および固有ベクトルの計算は Datatron 205 および MADIC-II A でおこなったが前者のプロ

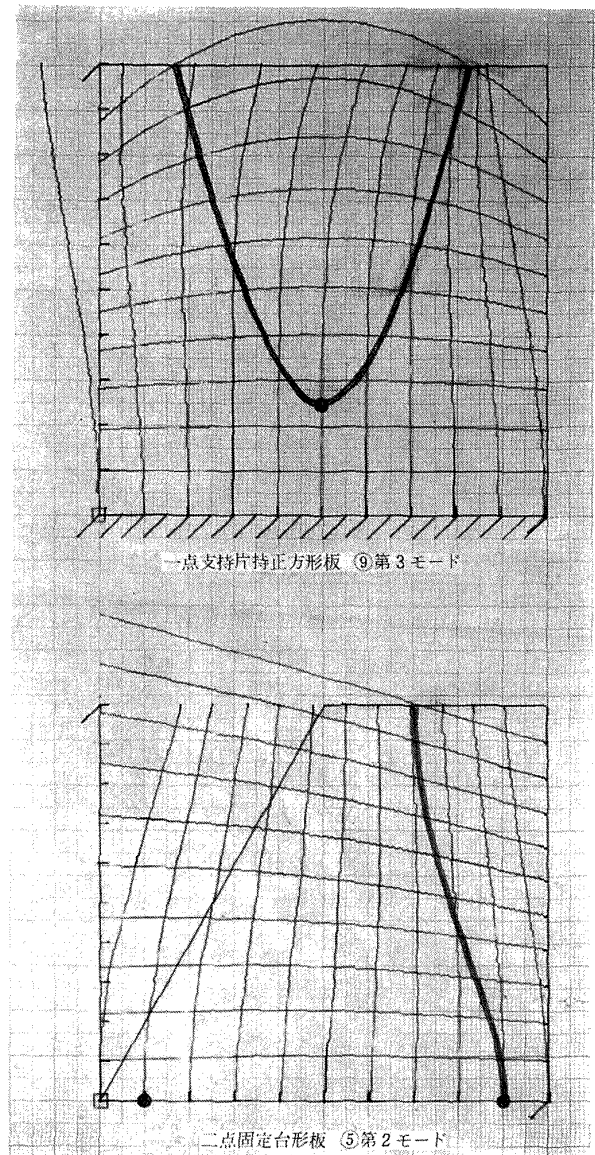
グラムは計測部戸川技官，後者のそれは松下通信工業計算室によって作成されたものである。

付録 3 計算による振動モードの求め方

前述のように固有値およびそれに対応する固有ベクトル a_{mn} が求められるから，この a_{mn} を本文 (3) 式の試験関数に対応する無次元化した式

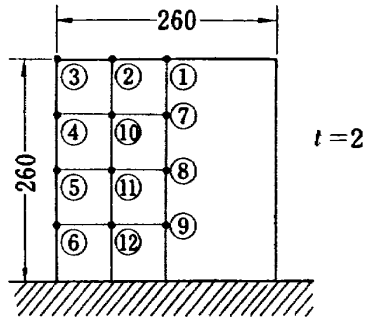
$$w(\xi, \eta) = \sum_m \sum_n a_{mn} \xi^m \eta^n \quad (a)$$

に代入することによりその場合の近似固有関数が得られる。すなわち振動モードは (a) 式によって ξ, η に関する高次の曲面で表わされたわけであるがこれを次のようにしてグラフ化する。まず平板の形状に応じた適当なメッシュをとり各メッシュの交点のたわみ $w(\xi, \eta)$ を計算する。次にこの点を連ねて曲線群を作りこの曲線群が $w=0$ の面を通る点を求める。これらの点は $w=0$ すなわちノーダルライン上の点であるからこれを連ねることによりノーダルラインを描くことができる。もちろんメッシュが細かいほど精密なノーダルラインが描けるがここでは ξ 軸, η 軸をそれぞれ 10 等分して合計 121 点についてたわみ w を計算し作図をおこなった。この w の計算および曲線群の作図は MADIC-II A とその出力に連動するデジタル X-Y プロッターでおこない最後のノーダルラインのみは手で描いたものである。付図 8 にその例を示す。



























付図 8 計算モード例































表 1.1 面内一点支持正方形片持板固有値



ジュラルミン板 260×260×2

$$\lambda_n a^2 \exp = 0.1381 f_{\exp}$$

case	n	実 験			計 算	Cal / Exp
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$	$\lambda_n a^2$	
支持なし 	1		25	3.45	3.5170	1.019
	2		62	8.56	8.9860	1.050
	3		152	21.0	22.230	1.059
	4		200	27.6	36.050	1.306
	5		218	30.1	47.040	1.563
① 	1		69	9.53	8.9850	0.943
	2		92	12.7	13.329	1.050
	3		185	25.6	30.037	1.173
	4		205	28.3	47.077	1.663
	5		275	38.0	91.720	2.414
② 	1		58	8.01	7.2384	0.904
	2		124	17.1	16.746	0.979
	3		165	22.8	34.418	1.509
	4		220	30.4	38.872	1.279
	5		300	41.4	93.770	2.265
③ 	1		42	5.80	5.4358	0.937
	2		128	17.7	17.722	1.001
	3		160	22.1	23.918	1.082
	4		210	29.0	41.968	1.447
	5		—	—	108.47	—

case	n	実 験			計 算	Cal /Exp
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$	$\lambda_n a^2$	
④ 	1		44	6.08	5.2403	0.862
	2		125	17.3	20.946	1.211
	3		165	22.8	25.796	1.131
	4		200	27.6	46.333	1.679
	5		290	40.0	114.21	2.855
⑤ 	1		38	5.25	4.9092	0.935
	2		95	13.1	15.434	1.178
	3		160	22.1	31.022	1.404
	4		200	27.6	39.740	1.440
	5		—	—	117.39	—
⑥ 	1		29	4.00	4.5326	1.133
	2		70	9.67	12.118	1.253
	3		155	21.4	34.173	1.597
	4		195	26.9	37.024	1.376
	5		240	33.1	97.225	2.937
⑦ 	1		68	9.39	8.9850	0.957
	2		120	16.6	21.570	1.299
	3		150	20.7	25.120	1.214
	4		200	27.6	47.077	1.706
	5		330	45.6	94.979	2.083
⑧ 	1		62	8.56	8.9850	1.050
	2		65	8.98	10.121	1.127
	3		130	18.0	32.711	1.817
	4		200	27.6	47.077	1.706
	5		—	—	115.76	—

























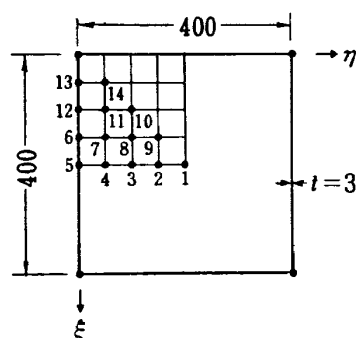






























case	n	実 験			計 算	Cal/Exp
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$	$\lambda_n a^2$	
⑨ 	1		37	5.11	6.1218	1.198
	2		65	8.98	8.9850	1.001
	3		170	23.5	33.916	1.443
	4		200	27.6	47.077	1.706
	5		330	45.6	79.961	1.754
⑩ 	1		50	6.91	7.0821	1.025
	2		158	21.8	22.751	0.998
	3		200 >	27.6 >	34.957	1.267
	4		200	27.6	45.525	1.649
	5		300	—	95.443	—
⑪ 	1		44	6.08	6.4380	1.059
	2		93	12.8	13.508	1.055
	3		160	22.1	34.748	1.572
	4		205	28.3	41.555	1.468
	5		—	—	116.36	—
⑫ 	1		32	4.42	5.3520	1.211
	2		68	9.39	10.323	1.099
	3		160	22.1	34.657	1.568
	4		200	27.6	42.259	1.531
	5		—	—	86.255	—































表 1.2 四隅支持面内一点支持正方形板固有値



Steel板 400×400×3

$$\lambda_n a^2_{\text{exp}} = 0.2156 f_{\text{exp}}$$

case	n	実 験			計 算	Cal/Exp	
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$	$\lambda_n a^2$		
面内支持ナシ 	1		39	8.41	8.0640	0.959	
	2		80	17.2	16.823	0.978	
	3		94	20.3	16.822	0.829	
	4		195	42.0	22.450	0.533	
	5		232	50.0	46.812	0.936	
① 	1		86	18.5	16.822	0.909	$\xi = 0.5$
	2		97	20.9	16.822	0.805	$\eta = 0.5$
	3		109	23.5	22.450	0.955	
	4		200	43.1	29.952	0.695	
	5		250	53.9	46.814	0.869	
② 	1		74	16.0	15.435	0.965	$\xi = 0.375$
	2		82	17.7	16.822	0.950	$\eta = 0.5$
	3		94	20.3	22.313	1.099	
	4		128	27.6	32.499	1.178	
	5		195	42.0	46.826	1.115	
③ 	1		62	13.4	12.984	0.969	$\xi = 0.5$
	2		83	17.9	16.849	0.941	$\eta = 0.25$
	3		93	20.1	21.672	1.084	
	4		185	39.9	46.100	1.155	
	5		197	42.5	46.658	1.098	
④ 	1		51	11.0	10.741	0.976	$\xi = 0.125$
	2		81	17.5	16.823	0.975	$\eta = 0.5$
	3		91	19.6	20.078	1.024	
	4		195	42.0	46.807	1.114	
	5		—	—	49.756		

case	n	実 験			計 算	Cal/Exp	
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$	$\lambda_n a^2$		
⑤ 	1		46	9.92	9.1576	0.932	$\xi = 0.5$
	2		82	17.7	16.822	0.950	$\eta = 0$
	3		90	19.4	19.770	1.019	
	4		188	40.5	42.712	1.055	
	5		200	43.1	46.810	1.086	
⑥ 	1		44	9.49	9.1140	0.960	$\xi = 0.375$
	2		82	17.7	16.822	0.950	$\eta = 0$
	3		90	19.4	19.709	1.016	
	4		160	34.5	39.367	1.141	
	5		200	43.1	47.578	1.104	
⑦ 	1		51	11.0	10.480	0.953	$\xi = 0.375$
	2		82	17.7	16.823	0.950	$\eta = 0.125$
	3		91	19.6	20.708	1.057	
	4		175	37.7	35.493	0.941	
	5		210	45.3	50.058	1.105	
⑧ 	1		60	12.9	12.822	0.994	$\xi = 0.375$
	2		82	17.7	16.823	0.950	$\eta = 0.25$
	3		93	20.1	21.980	1.094	
	4		210	45.3	41.991	0.927	
	5		230	49.6	49.182	0.992	
⑨ 	1		72	15.5	14.656	0.946	$\xi = 0.375$
	2		86	18.5	16.822	0.909	$\eta = 0.375$
	3		99	21.3	22.450	1.054	
	4		200	43.1	36.072	0.837	
	5		244	52.6	47.102	0.895	































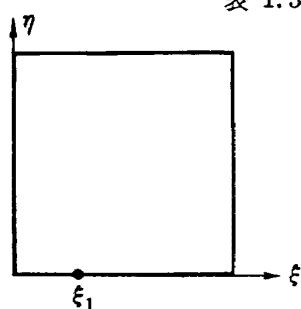
case	n	実 験			計 算	Cal/Exp	
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$	$\lambda_n a^2$		
⑩ 	1		55	11.9	12.205	1.026	$\xi = 0.25$
	2		83	17.9	16.823	0.940	$\eta = 0.25$
	3		95	20.5	22.450	1.095	
	4		137	29.5	37.459	1.270	
	5		220	47.4	50.789	1.071	
⑪ 	1		52	11.2	10.761	0.961	$\xi = 0.25$
	2		84	18.1	16.823	0.929	$\eta = 0.125$
	3		96	20.7	21.405	1.034	
	4		139	30.0	35.499	1.183	
	5		210	45.3	50.380	1.112	
⑫ 	1		44	9.49	8.999	0.948	$\xi = 0.25$
	2		81	17.5	16.822	0.961	$\eta = 0$
	3		90	19.4	19.529	1.007	
	4		136	29.3	33.385	1.139	
	5		205	44.2	48.343	1.094	
⑬ 	1		46	9.92	8.856	0.893	$\xi = 0.125$
	2		85	18.3	16.823	0.919	$\eta = 0$
	3		95	20.5	19.246	0.939	
	4		115	24.8	28.966	1.168	
	5		240	51.7	48.809	0.944	
⑭ 	1		48	10.3	10.585	1.028	$\xi = 0.125$
	2		84	18.1	16.823	0.929	$\eta = 0.125$
	3		100	21.6	22.450	1.039	
	4		113	24.4	28.408	1.164	
	5		240	51.7	50.223	0.971	

表 1.3 正方形板一点固定



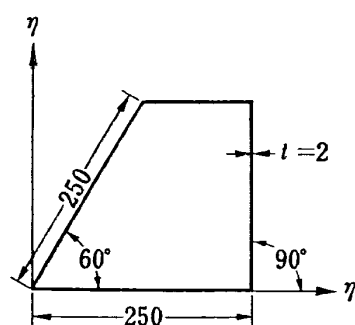
300×300×2mm

ジルルミン板

$$\lambda_n a_{\text{exp}}^2 = 0.1839 f_{\text{exp}}$$

ξ_1	n	実 験			計 算	Cal / Exp
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$	$\lambda_n a^2$	
0.1 	1		7.6	1.40	1.7352	1.239
	2		15.3	2.81	4.0619	1.446
	3		53.4	9.82	11.140	1.134
	4		109	20.0	27.230	1.362
0.2 	1		7.0	1.29	2.0012	1.551
	2		18.1	3.33	5.0110	1.505
	3		53.8	9.89	13.776	1.393
	4		111	20.4	20.958	1.027
0.3 	1		9.5	1.75	2.6118	1.492
	2		19.6	3.60	5.6798	1.578
	3		59.7	11.0	14.3876	1.308
	4		98.6	18.1	28.5134	1.575
0.4 	1		8.2	1.51	2.9696	1.967
	2		19.5	3.59	5.8033	1.617
	3		64.7	11.9	16.442	1.382
	4		97.4	17.9	25.337	1.415
0.5 	1		8.9	1.64	3.1303	1.909
	2		19.0	3.49	5.7084	1.636
	3		67.1	12.3	18.055	1.468
	4		84.0	15.4	22.353	1.451
	5		145	26.7	33.641	1.260
$\xi_1 = 10^{-4}$ $\eta = 10^{-3}$ 	1		8.9	1.66	—	—
	2		14	2.60	3.3561	1.290
	3		51	9.47	9.9392	1.049
	4		97	18.0	26.313	1.460

表 1.4 台形板点固定



ジュラルミン板

$$\lambda_n a^2_{\text{exp}} = 0.1277 f_{\text{exp}}$$

一点固定

ξ	n	実 験		
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$
0.5	1		18.0	2.299
	2		37.7	4.814
	3		123	15.81
	4		149	19.10
	5		262	33.46

二点固定

ξ_1 ξ_2	n	実 験			計 算 $\lambda_n a^2$	Cal / Exp
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$		
0 1 	1		16.7	2.13	3.6671	1.722
	2		90.5	11.6	15.148	1.306
	3		141	18.0	31.012	1.723
	4		227	29.0	49.103	1.693
	5		285	36.4	66.255	1.820
0.1 0.9 	1		20.3	2.59	4.6872	1.810
	2		100	12.8	16.095	1.257
	3		170	21.7	37.644	1.735
	4		265	33.8	62.715	1.855
	5		309	39.5	69.923	1.770
0.2 0.8 	1		22.9	2.92	5.3601	1.836
	2		99.1	12.7	16.892	1.330
	3		178	22.7	42.197	1.859
	4		291	39.2	64.359	1.730
	5		466	59.5	70.677	1.188



















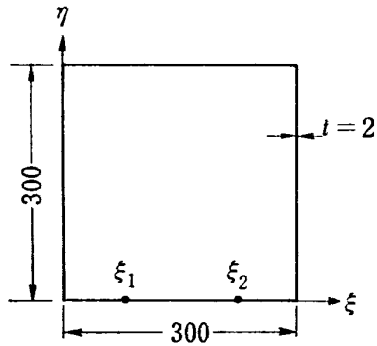
ξ_1 ξ_2	n	実 験			計 算	Cal/Exp
		made	f (%)	$\lambda_n a^2$	$\lambda_n a^2$	
0.3 0.7 	1		22.3	2.85	5.4495	1.912
	2		91.2	11.6	17.532	1.511
	3		157	20.0	38.999	1.950
	4		259	33.1	63.439	1.917
	5		308	39.3	74.084	1.885
0.4 0.6 	1		21.2	2.71	5.2939	1.953
	2		71.9	9.18	17.850	1.944
	3		139	17.8	35.271	1.982
	4		199	25.4	62.676	2.468
	5		276	35.2	75.715	2.151
0.48 0.52 	1		18.8	2.40	5.2172	2.173
	2		51.3	6.55	17.938	2.738
	3		123.5	15.8	34.129	2.164
	4		165.4	21.1	62.487	2.959
	5		261.7	33.4	75.784	2.268

表 1.5 正方形板二点固定



$$\lambda_n a^2 = 0.1836 f_{\text{exp}}$$

ξ_1 ξ_2	n	実 験		
		mode	f (%)	$\lambda_n a^2$
0.0 1.0 	1		13.7	2.52
	2		41.6	7.65
	3		78.0	14.3
	4		121	22.3
	5		171	31.4
0.1 0.9 	1		13.2	2.43
	2		44.7	8.22
	3		93.7	17.2
	4		130	23.9
	5		156	28.7
0.2 0.8 	1		13.4	2.46
	2		40.6	7.47
	3		98.2	18.1
	4		140	25.7
	5		148	27.2
0.3 0.7 	1		13.3	2.45
	2		38.2	7.02
	3		88.7	16.3
	4		144	26.5
	5		126	23.2
0.4 0.6 	1		12.9	2.37
	2		29.7	5.46
	3		77.0	14.2
	4		103	18.9
	5		—	—

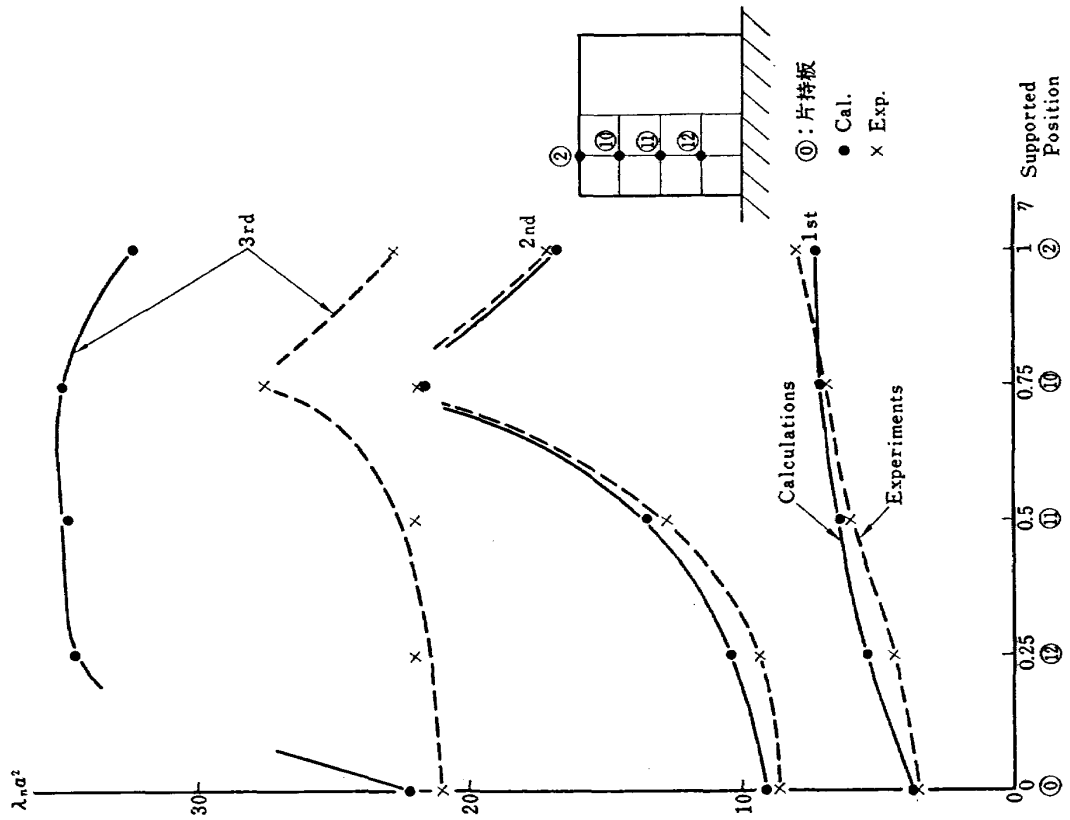


図 1.1 (b) 面内一点支持片持正方形片持板固有値

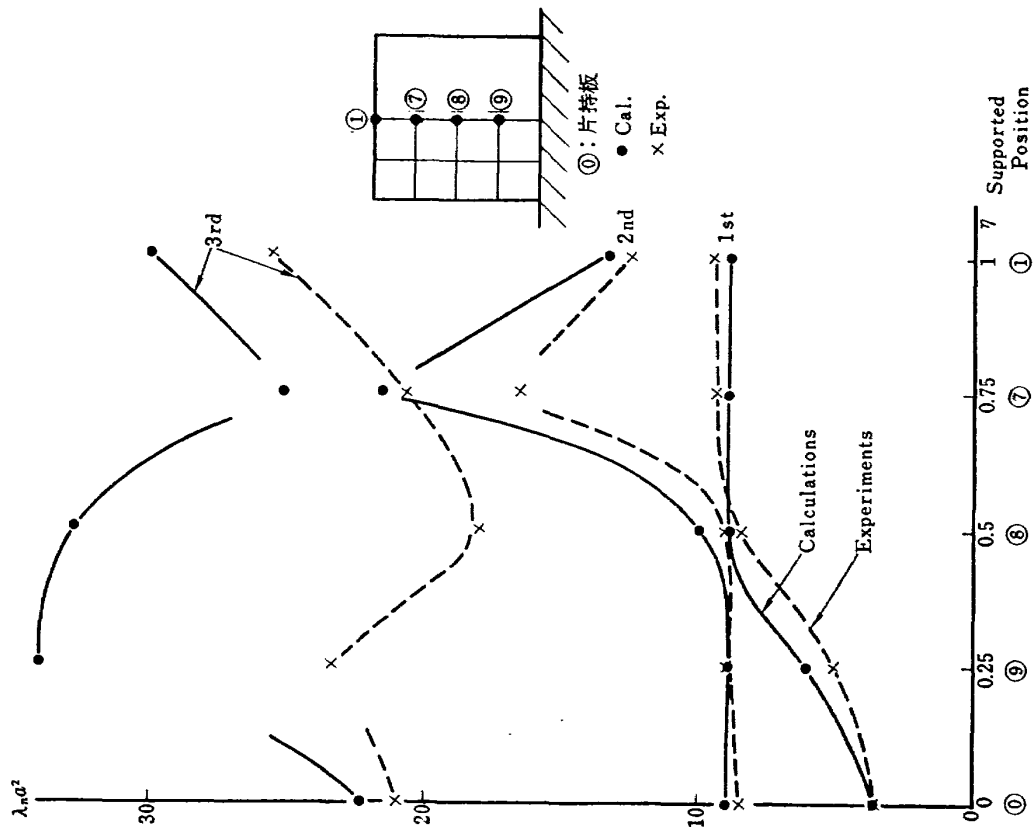


図 1.1 (a) 面内一点支持片持正方形片持板固有値

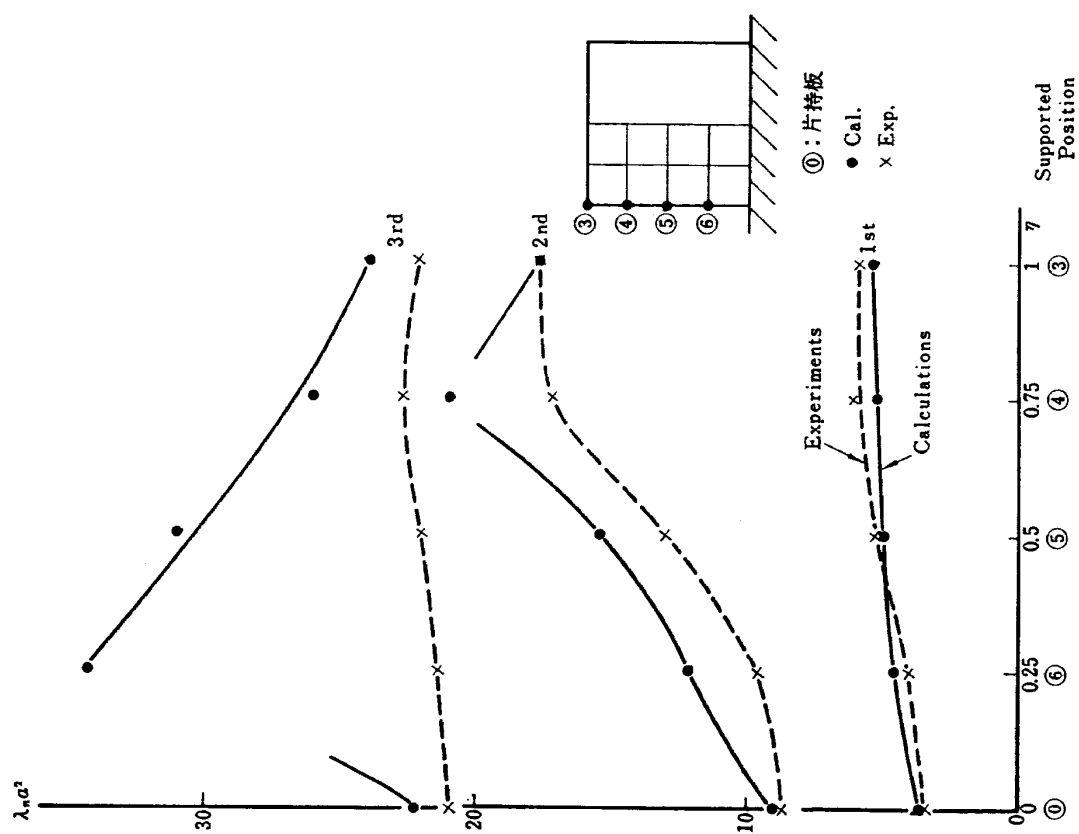


図 1.1 (c) 面内一点支持片持正方形板固有値

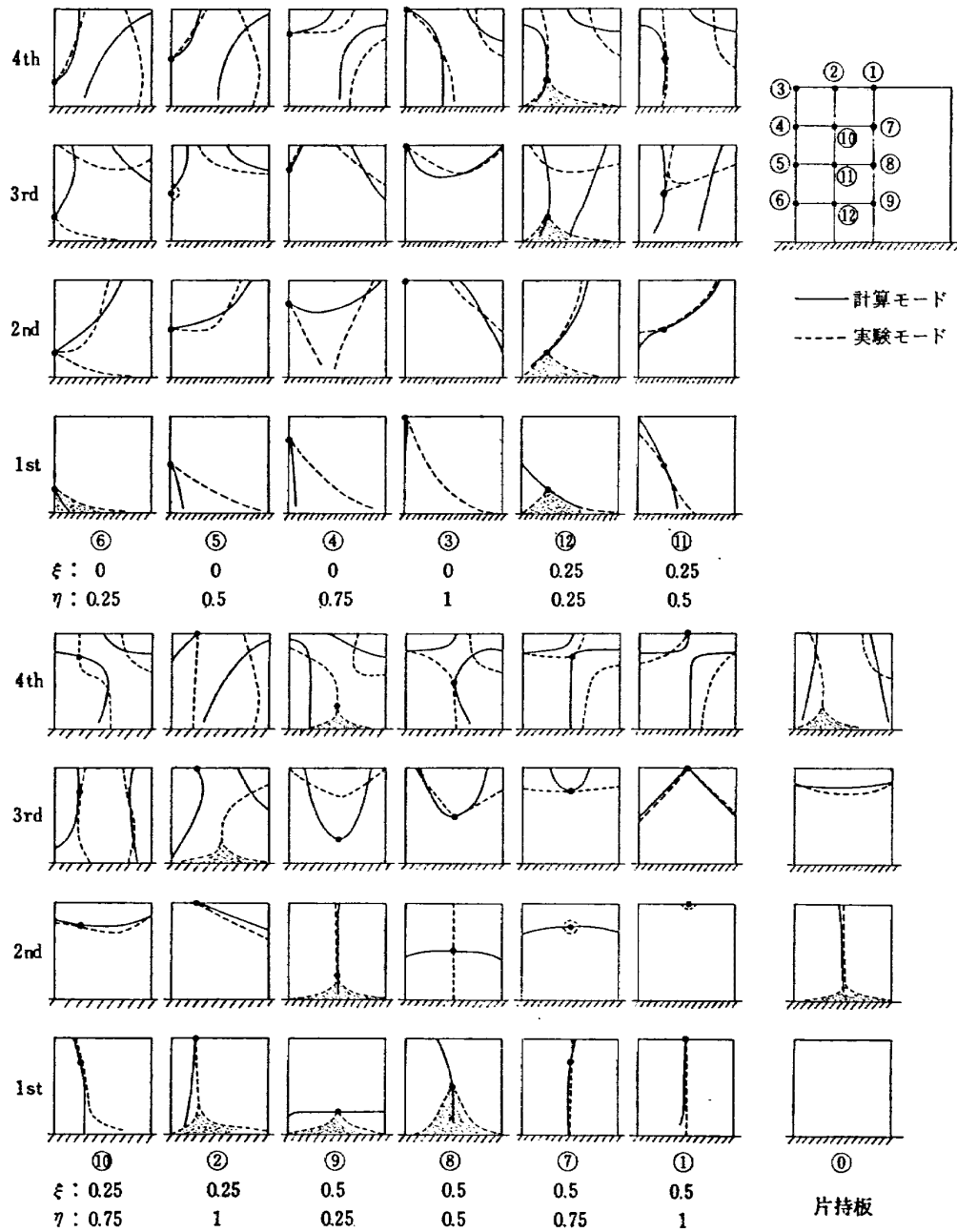


図 1.2 面内一支持片持正方形板点振動モード

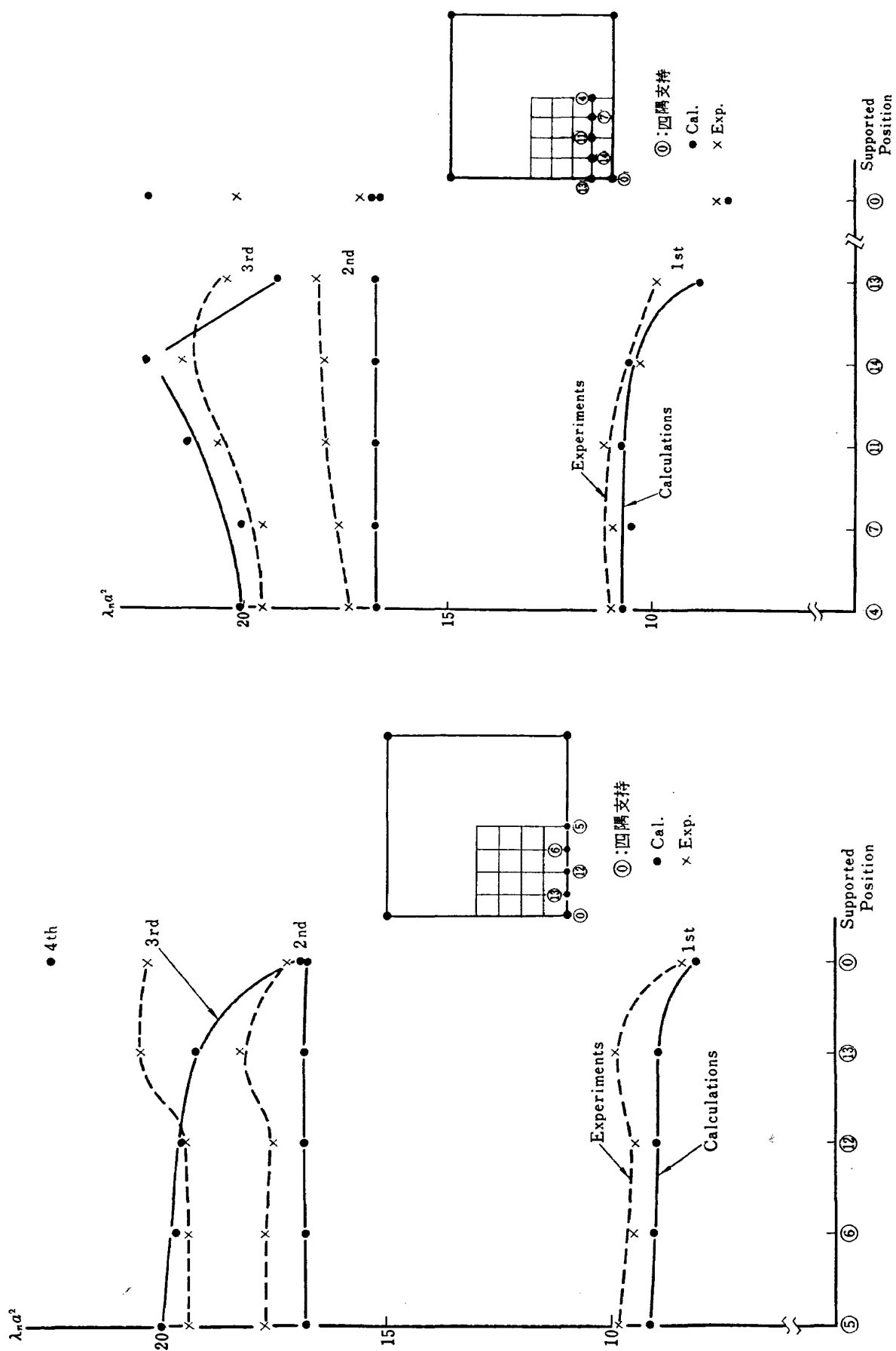


図 1.3 (b) 四隅および面内一点支持正方形板固有値

図 1.3 (a) 四隅および面内一点支持正方形板固有値

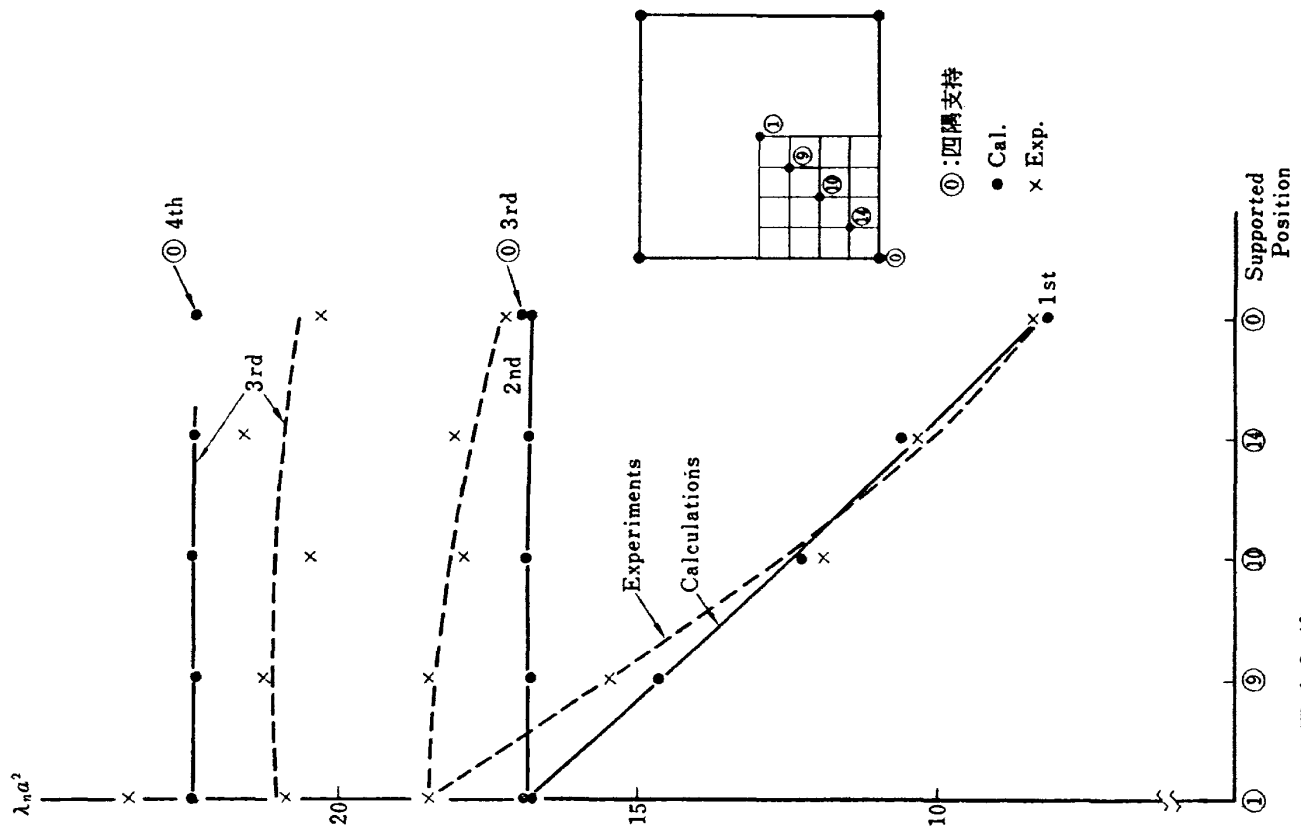


図 1.3 (f) 四隅および面内一点支持正方形板固有値

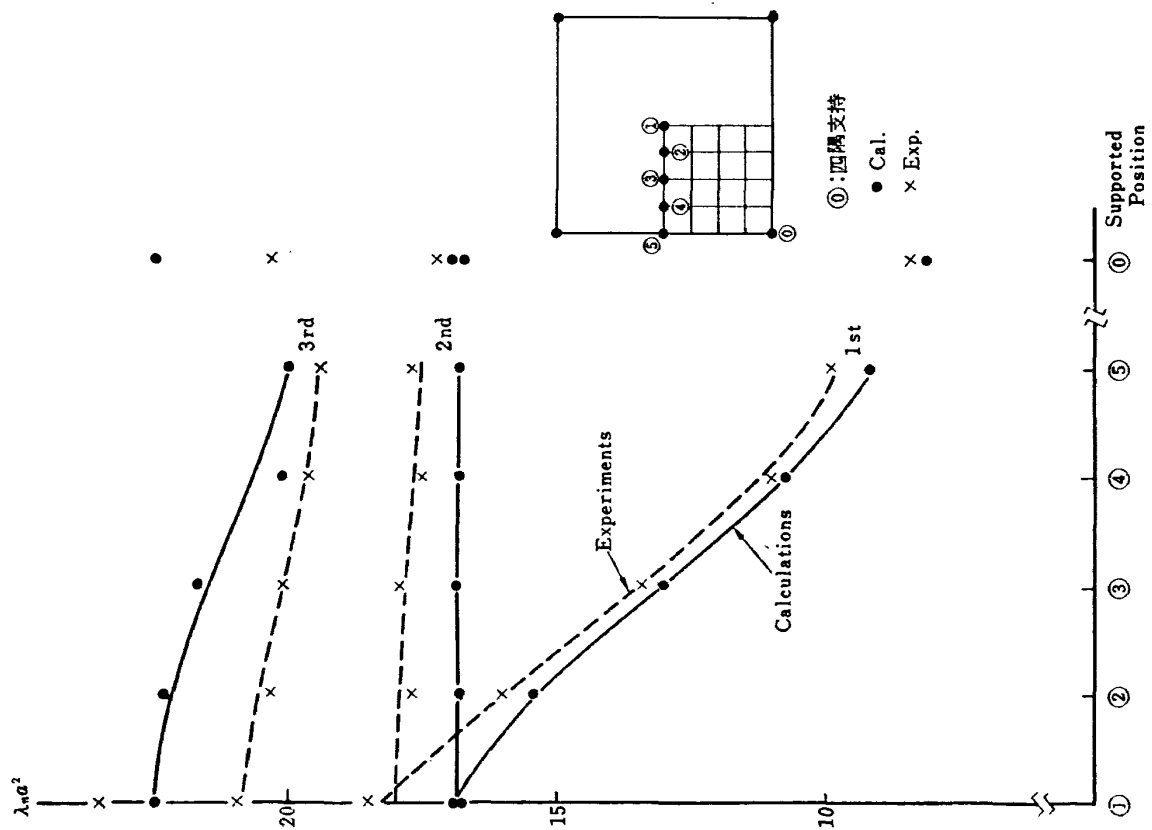


図 1.3 (e) 四隅および面内一点支持正方形板固有値

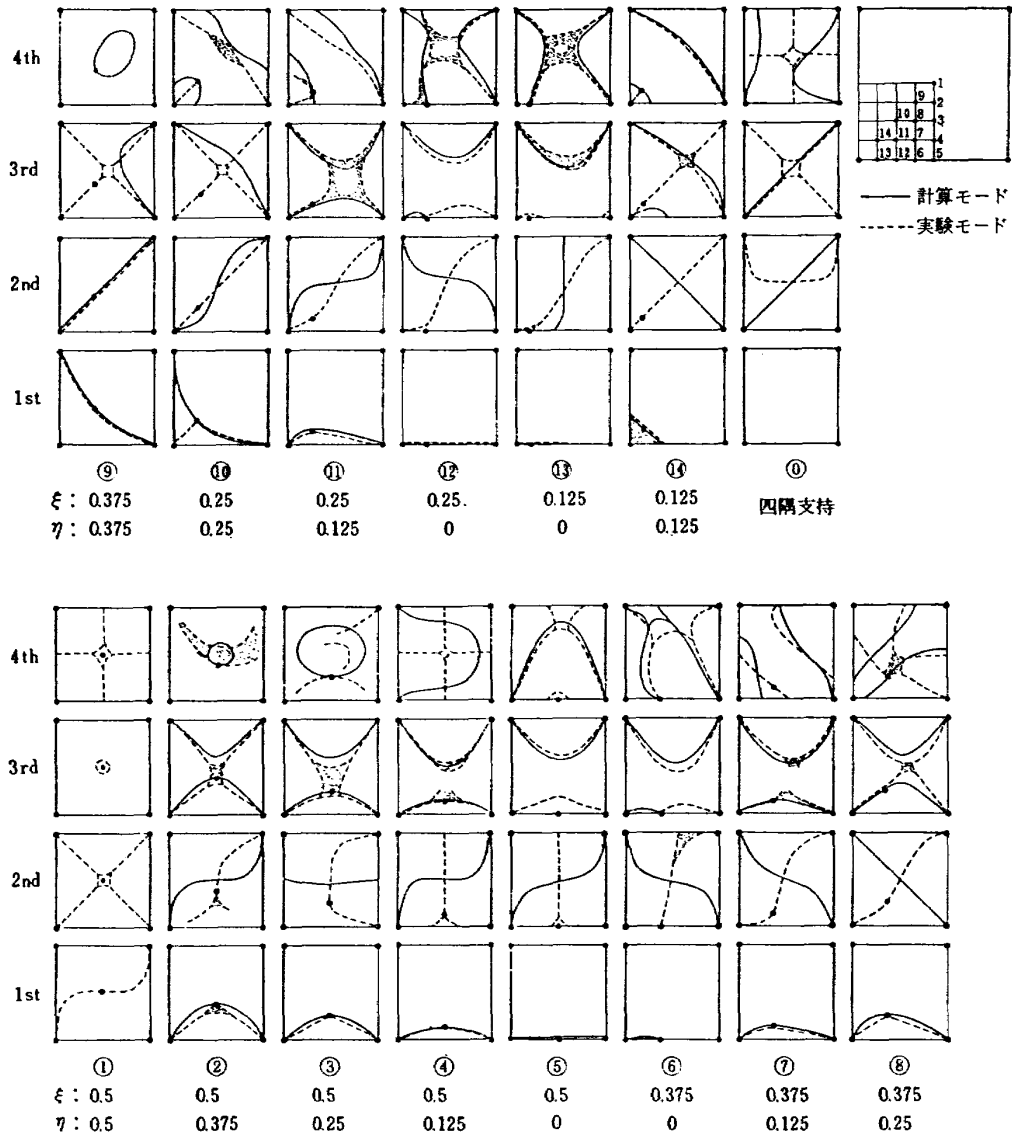


図 1.4 四隅支持面内一点支持正方形振動モード

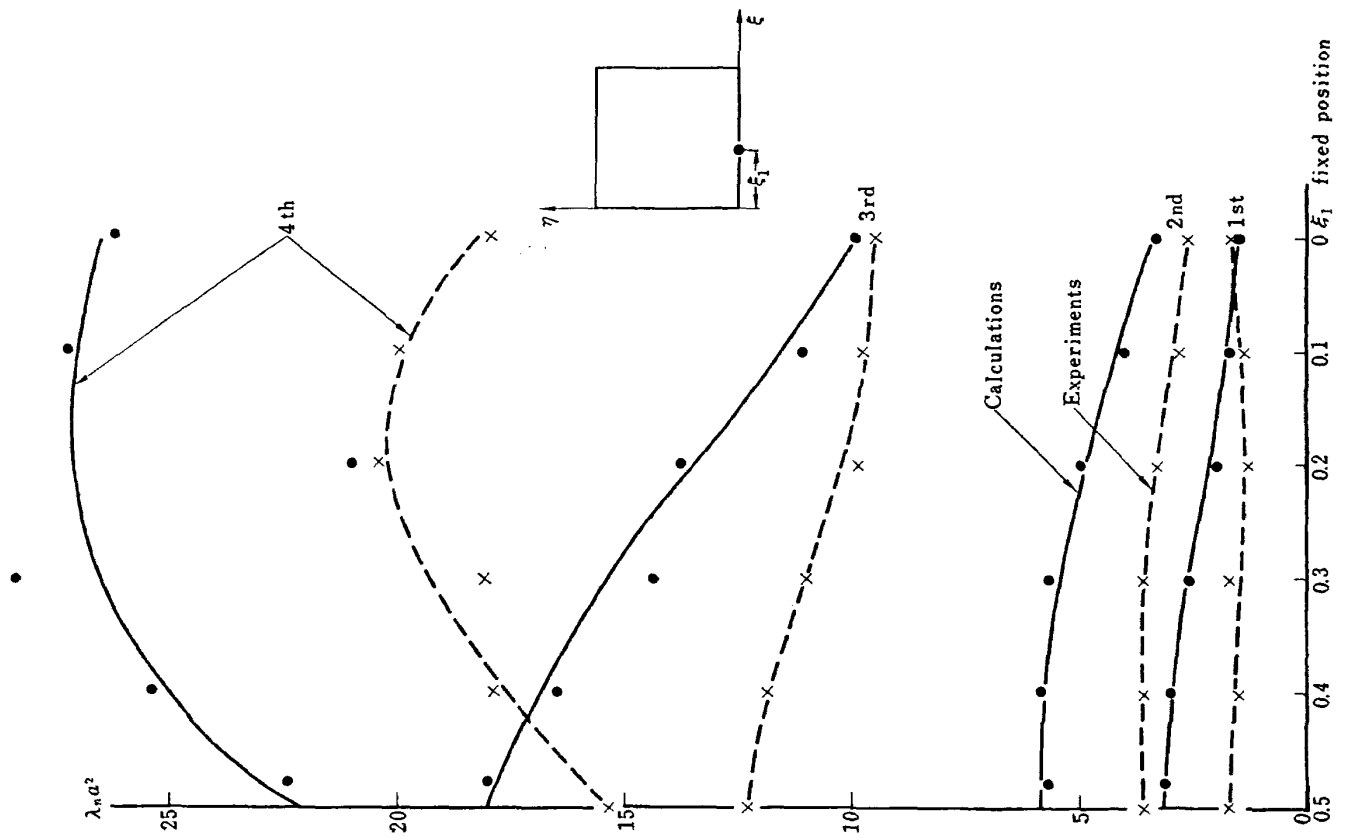


図 1.5 一点固定正方形板固有値

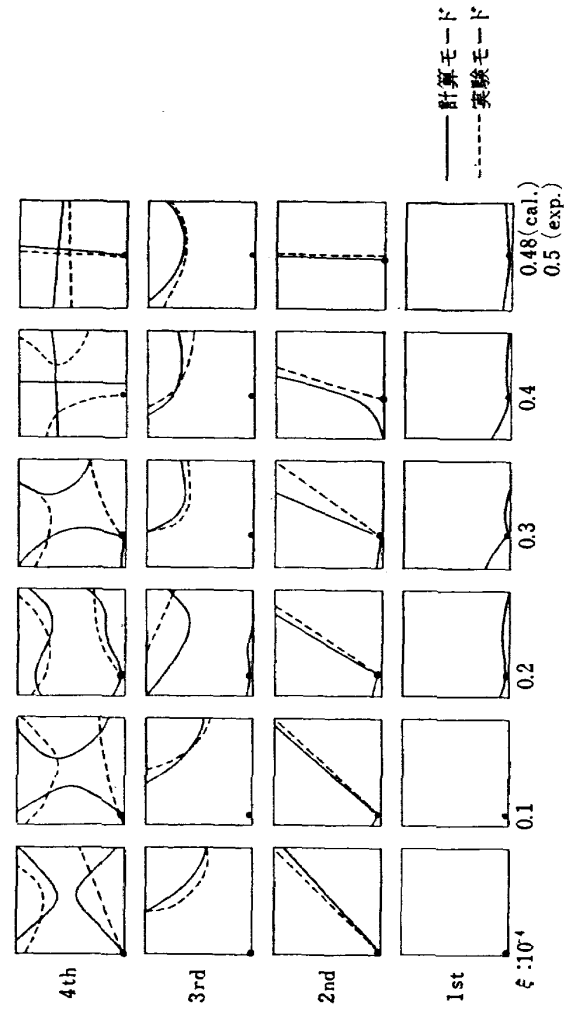


図 1.6 一点固定正方形板振動モード

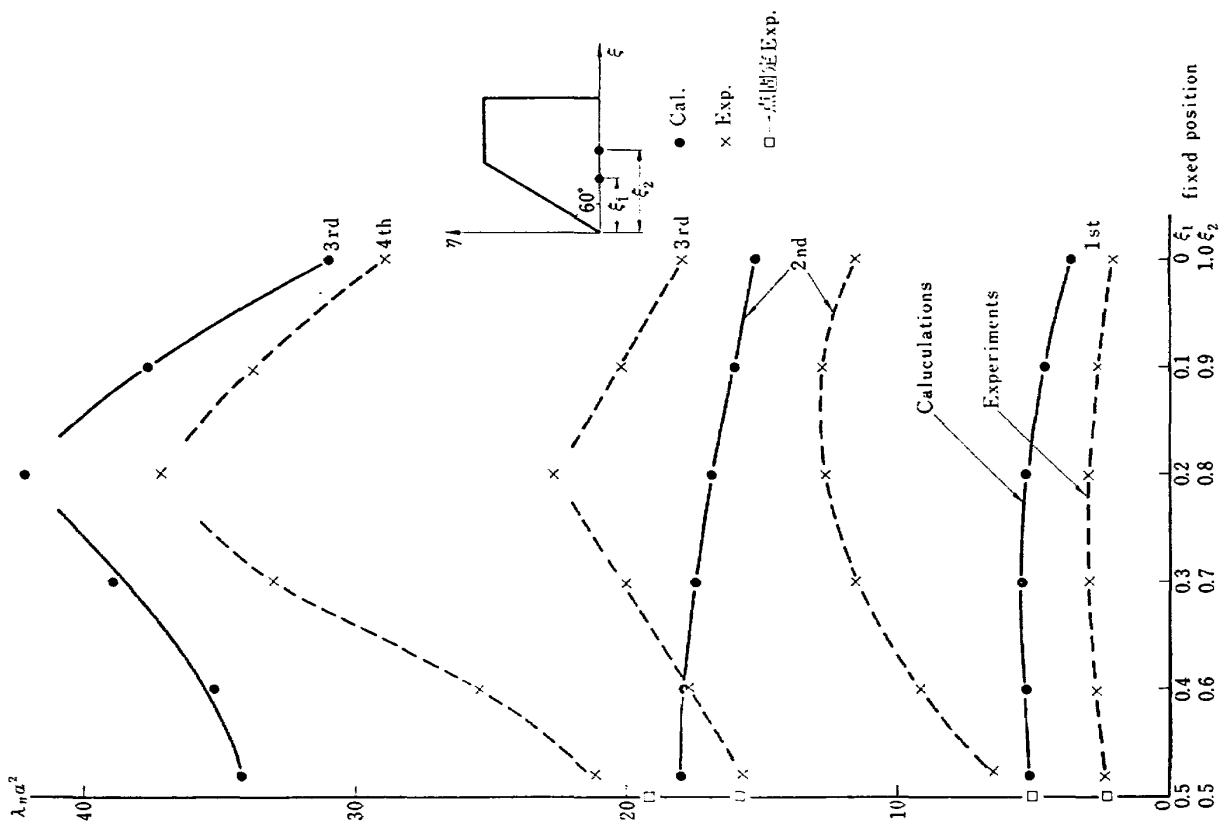


図 1.7 二点固定台形板固有値

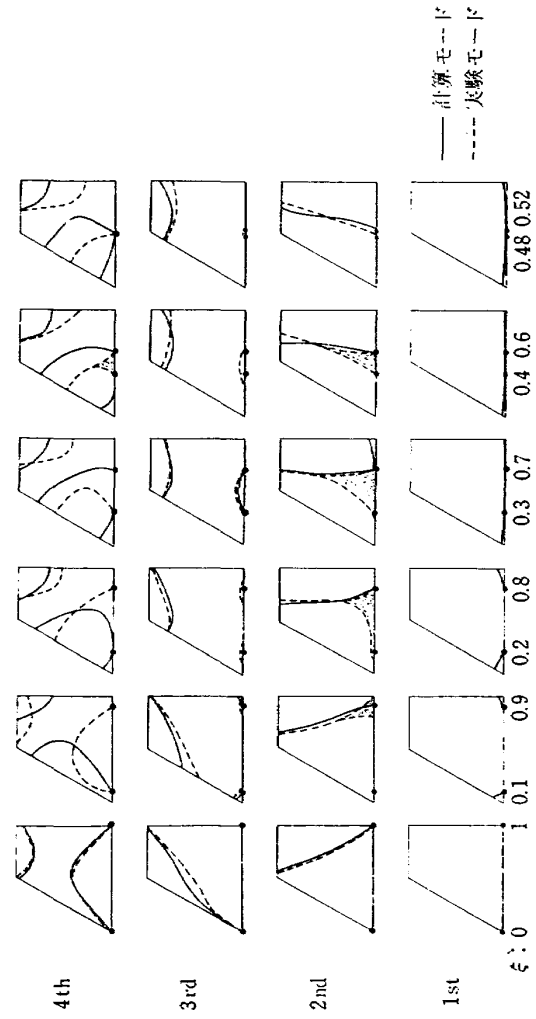


図 1.8 二点固定台形板振動モード

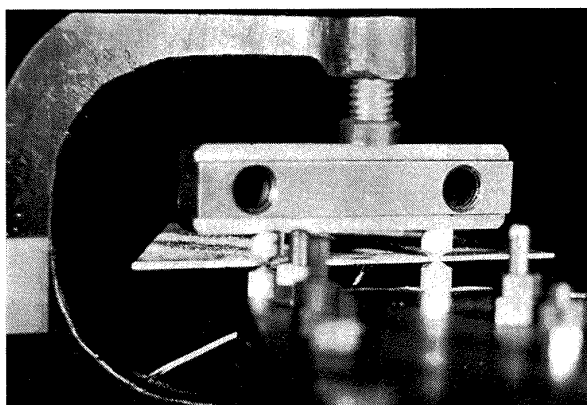


写真 1 二点固定台形板

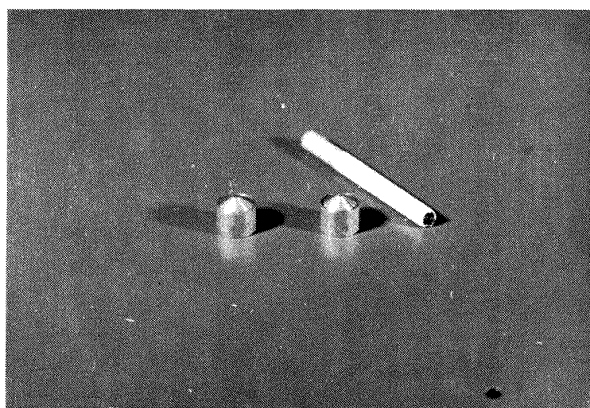


写真 2 点固定用治具

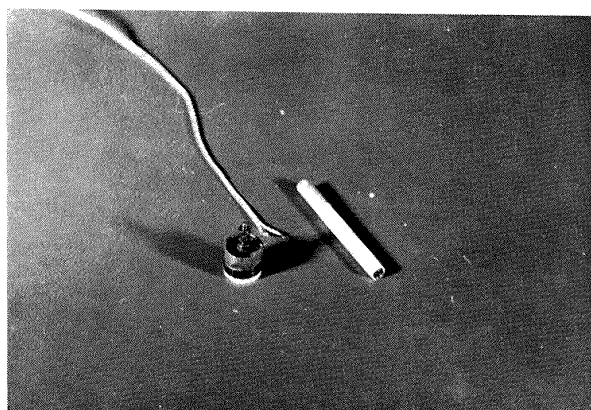
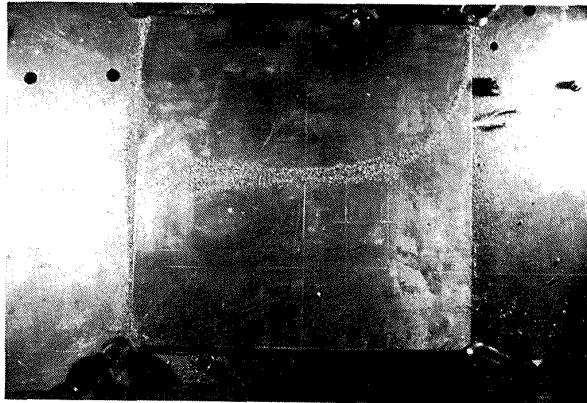
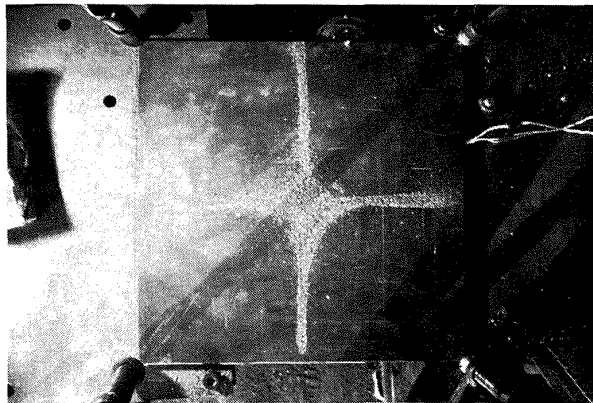


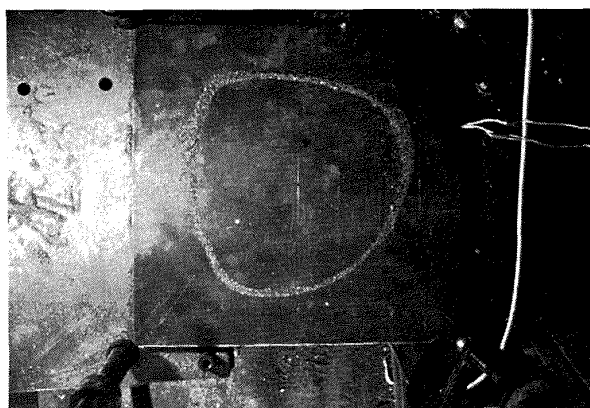
写真 3 加振用可動線輪



(a)



(b)



(c)

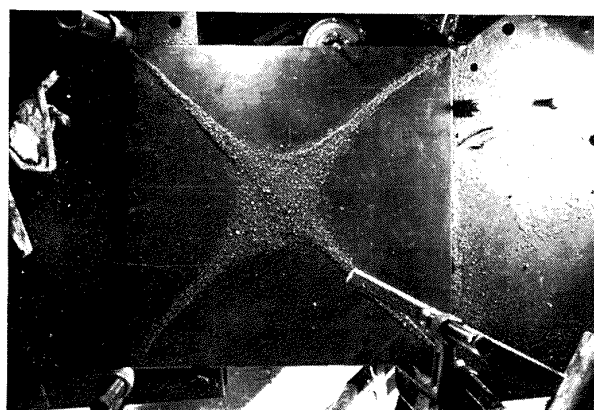
写真 4 四隅支持正方形板の振動モード例



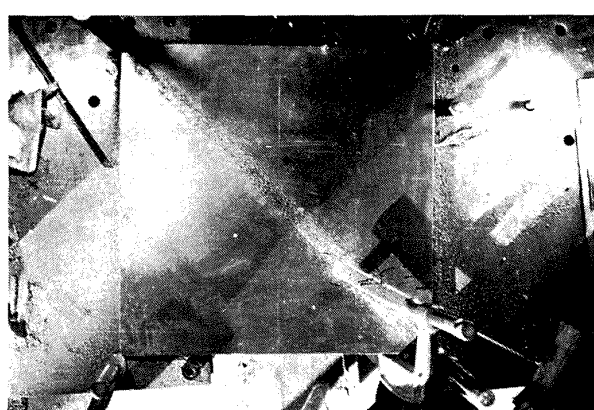
(a)



(b)

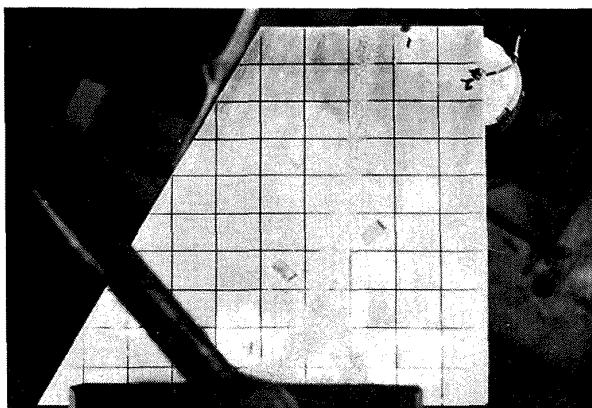


(c)

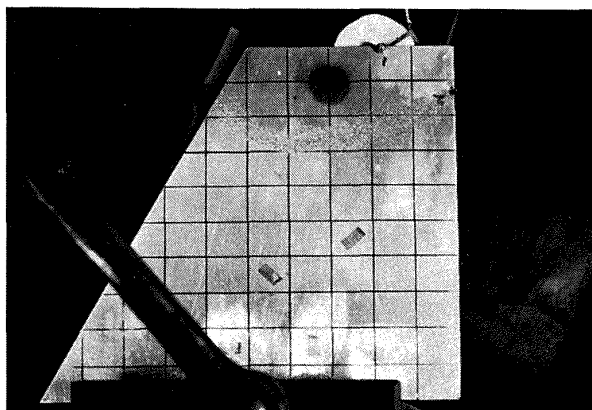


(d)

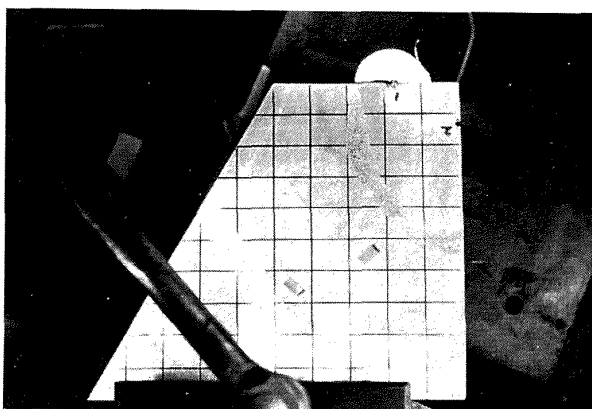
写真 5 四隅および面内一点支持正方形板の振動モード例



(a)



(b)



(c)

写真 6 二点固定台形板の振動モード例

- | | | | |
|--------|--|---------|---|
| TR-175 | 低レイノルズ数における NACA 0012 翼型の失速特性について
—失速フラッタの研究Ⅱ—
Stalling Characteristics of the NACA 0012 Aerofoil Section at Low Reynolds Numbers | 1969年6月 | 中村泰治, 磯貝紘二
江尻 宏 |
| TR-176 | 軸流回転機の翼の振動について
(I) 固有振動数, 振動形および振動応力分布
On the Vibration of Turbomachine Blades
(I) Natural Frequency Mode and Stress Distribution | 1969年7月 | 宮地敏雄, 星谷昌二
祖父江 靖, 網千三郎
岩部柱相, 武田克己 |
| TR-177 | 固体ロケットモータの推力大きさ制御の究研
—特性と小型モータによる実験—
Thrust Magnitude Control of Solid Rocket Motors
—Characteristic Analysis and Small Motor Tests | 1969年7月 | 五代富文, 湯沢克宜
伊藤克弥, 西村久雄 |
| TR-178 | 測度最大の可制御領域を与える二次形式評価関数の最適重みマトリクスに対する必要条件
Necessary Conditions for the Optimal Weighting Matrices of Quadratic Performance Index to Maximize the Measure of the Controllable Set | 1969年7月 | 川幡長勝 |
| TR-179 | テフロン非定常アブレーションの測定
Measurements of Transient Ablation of Teflon | 1969年8月 | 野村茂昭 |
| TR-180 | 鈴鹿山脈付近における乱気流の観測
Measurement and Analysis of Atmospheric Turbulence over the Suzuka | 1969年8月 | 竹内和之, 小野幸一
山根皓三郎, 岡 遠一
外崎得雄 |
| TR-181 | 振動翼における表面非定常圧力の測定
—失速フラッタの研究(Ⅲ)—
Unsteady Surface Pressure on an Oscillating Aerofoil at High Mean Angles of Attack with Special Reference to Stall Flutter | 1969年8月 | 中村泰治, 磯貝紘二
江尻 宏 |

航空宇宙技術研究所報告182号

昭和44年9月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)●182
印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2-27-12
