

UDC 518.6:
533.6.011.5

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-217

人工粘性付 Lax-Wendroff およびその変形
差分法に関する数値実験

安 喜 隆 幸

1970 年 9 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|---------|------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| TR-195 | 箱型主翼構造模型のひずみ分布とたわみに関する計算と実験
Results of Strain and Deflection Measurements Carried out on Model Wings and their Comparison with Calculated Results | 1970年5月 | 久能和夫 |
| TR-196 | 回転式動安定測定装置による遷音速試験
Dynamic Stability Test in Transonic Wind Tunnel Rotary System | 1970年5月 | 小橋安次郎, 河野長正
西武徳, 宮沢政文 |
| TR-197T | Wind Tunnel Investigations of the STOL Airplane with Attention to the Relations between the Aerodynamic Characteristics and the Wake Structure | May. 1970 | Norio Inumaru, Kiyomi ⁱ
Kitamura, Nagakatsu
Kawahata, Hitoshi
Takahashi, Tomoaki
Suzuki |
| TR-198 | 低マッハ数における翼型の翼型抗力の計算
A Calculation of the Profile Drag of Airfoils at Low Mach Numbers | 1970年5月 | 河崎俊夫, 石田洋治 |
| TR-199 | 鈍い頭部を有する円筒物体まわりの超音速流れ
Supersonic Flow Fields around Cylindrical Bodies with Blunt Nose | 1970年6月 | 河本 巖 |
| TR-200 | フライングテストベッドの高度制御システムの検討
(II)シミュレーションによる二, 三の問題点の検討
Analytical and Simulation Studies on the Height Control System of Flying Test Bed (II) On Some Problems | 1970年6月 | 堀川勇壮, 甲斐忠夫 |
| TR-201 | FA-200 改機の風洞試験(III) 地面効果
Low Speed Wind Tunnel Test of the FA-200-XS Airplane Model Influenced with Ground Effects | 1970年7月 | 広末健一, 高橋 宏
小野孝次, 桑野尚明 |
| TR-202 | 過酸化水素分解ロケットモータの実験
The Experimental Investigation of Monopropellant Hydrogen Peroxide Reactor | 1970年7月 | 清水昭紀, 種村利春 |
| TR-203 | 固体ロケット多分力テストスタンドの精度について
On the Accuracy of the Multi-Component Test Stand | 1970年7月 | 石井進一, 山田 晃
鎮西信夫, 引地豊三
工藤賢司 |
| TR-204 | ジェットエンジン燃焼器の燃焼性能の研究
Investigation of Combustion Performance of Turbojet Combustor | 1970年7月 | 大塚貞吉, 堀内正司
本間幸吉 |
| TR-205 | 差分法による2次元非定常ノズル流の数値計算
Finite Difference Calculations of Two-dimensional Nonsteady Nozzle Flows | 1970年8月 | 石黒登美子 |
| TR-206 | 航空機の横操縦を行なう人間の動特性についてのシミュレータ実験(1自由度の場合)
A Simulator Experiment to Investigate the Human Behavior in Tracking Tasks | 1970年8月 | 別府護郎, 坂井紀穂
吉田純一 |
| TR-207 | 境界層内圧力変動による板の振動解析(I)
一周辺単純支持板
Response Analysis of the Simply Supported Plate to Boundary Layer Pressure Fluctuations | 1970年9月 | 藤森義典 |
| TR-208 | ガスタービン燃焼器
Gas Turbine Combustors | 1970年9月 | 鈴木邦男, 田丸 卓
堀内正司, 齋藤 隆 |

人工粘性付 Lax-Wendroff およびその変形差分法 に関する数値実験*

安 喜 隆 幸**

Numerical Tests on Lax-Wendroff Difference Scheme with Artificial Viscosity and Its Variations by the Two-Step Method

By Takayuki AKI

This paper describes results of test computations on the Lax-Wendroff difference scheme and its two variations by the two-step method. All of these methods include the so-called artificial viscosity which plays an important role in preventing nonlinear instabilities.

The first aim of the present tests was to make a numerical check on the stability condition which was proposed in the literature. A series of test computations was performed over a range of values of the viscosity coefficient. It was found that allowable values of the mesh ratio in the computations were always in excess of the values predicted by the proposed condition and were not so strongly dependent on the viscosity coefficient.

Secondly as a representative of flow variables, the shapes of pressure curves were examined in relation to the mesh ratios and the magnitudes of the viscosity coefficient. In the case of small values of the viscosity coefficient (1.0~2.0) and larger (but not the largest possible) values of the mesh ratio, shapes with the most damped oscillation could be obtained.

The usefulness of these difference schemes to analyze multiple interactions of the gas dynamic discontinuities can be also shown by sample computations for the problems of end-wall reflection in a shock tube or head-on collision of two shock waves.

1. ま え が き

一般の双曲型偏微分方程式の数値解法にたいして Lax と Wendroff らが提案した差分法は、その打ち切り誤差が3次となるため、理論上の良さの比較で秀れていることは明らかである。しかし、計算実務に携わる側からみると、それだけをもって計算法としての優位性を単純に認めることができない。その事情として、精度の良い方法には多かれ少なかれ附随してくる困難性であるとか理論上の問題点が存在し、これらの程度や性質がはじめから必ずしも明らかでないということが一般的に言えるからである。これらの解決のために費される労力は、対象とした差分法の発展や完成のために寄与するところ大ではあるが、目的をもった計算計画の中では損失として受けとられる。したがって、良さに伴う利益と損失との比較から計算法として

の判定がなされるか、少なくとも判定に役立つ情報の存在が実務家にとって有益であると考えられる。

Lax-Wendroff 差分法は原形が公式に提出されたのが 1960 年¹⁾、その空間 2 次元への拡張が 1964 年²⁾であり、実用計算が試みられはじめたのは 1964 年³⁾であるから、古い歴史をもった計算法ではない。

1966 年に、筆者は Lax-Wendroff 差分法の良い精度に注目し、実用計算の可能性を検討するため試験計算をこころみはじめた。このときの結果から、振動抑圧に無関心でいると計算の解釈に誤りをもたらすであろうということを知り、この振動抑圧にたいする格子間隔あるいは人工粘性項による効果の依存性を確かめる必要性を感じた。当時参照し得た文献 1)~5) においては筆者の要求を満足させる記述を見つけることができず、また高速計算機の利用が不自由であったこともあり、いろいろな憶測をしてみるだけに過ぎなかった。

1967 年には、われわれの研究所にも高速大型計算

* 昭和 45 年 4 月 30 日受付

** 計測部

機が導入され憶測を経験に移しかえることができるようになった。このころ、人工粘性の本質性についての意義を深めると考えられた論文⁶⁾が発表された。そこで、以前疑問のまま放置していた人工粘性効果を調べ、とくに安定性条件との関連を検討の中に取り入れることを考えた。これは、その頃の幾例かの計算で理論が与える判定基準が過少評価に過ぎることを経験的に発見していたためである。

1967~68 年には、この差分法の計算手段に関する改良や統一的解釈などの基本的事項に関する論文^{6),7),9),10)} および各種差分法との比較⁸⁾などが公表されてきた。これらの急激な展開は、手段についての可能性の多様さを示す点で目ざましいものがあった。しかし可能性の多さはそれだけ撰択の迷いを深めることにもなり、撰択基準となり得る情報の不足に悩みが重くなってくる。とくに人工粘性項が不可避である実用計算を目ざす者にとって上記論文は十分な教訓を与えてはくれない。このような事情からも前節に述べた検討を行なうことにしたのである。そしてこの検討経過の中で副次的に得られた知識も多い。この報告では、これらの作業の集約として

- (1) 安定性条件の数値的検討
- (2) 流れ状態量の表現差の検討

を主項目にとりあげる。これらについて系統的に調べた結果、とくに人工粘性つき差分法のそれは公表されたものがないので実務家にとっての判断に役立つであろうと考えている。

また、実用計算にたいする有用性を示すための実験計算の一部を追加しておく。これは計算計画にたいする総合的判断と関係した結論を導くためのものである。

なお、引用する結果はすべて空間 1 次元でかつ Euler 座標系での実験計算によるものに限っておく。筆者の実用計算経験は、そのご反応性気体中の反射衝撃波（空間 1 次元）から衝撃波回折（空間 2 次元）へと拡がってきている。これらの計算において遭遇した難所で、1 次元での経験が事態の把握と収束を容易にさせていたことを附記するにとどめ、多次元に特徴的な事項などは上記計算の報告に含めることにする。

2. 記号

- c : 局所音速
- E : 気体の全エネルギー
- e : 気体の内部エネルギー
- G : amplification matrix

- g : G の固有値
 - g_0, g_1, g_2 : 人工粘性の係数因子
 - I : 単位行列
 - p : 圧力
 - p_{41} : 初期膜圧比
 - Q : 人工粘性ベクトル
 - t : 時間
 - u : 流体速度
 - x : 距離
 - γ : 気体比熱比
 - Δ : 差分演算子
 - Δt : 時間間隔
 - Δx : 距離間隔
 - κ : 人工粘性係数
 - λ : $\Delta t / \Delta x$
 - μ : 固有値
 - ξ : 波数
- 添字
- j : 空間格子番号
 - n : 時間格子番号
 - x : 空間偏微分
 - t : 時間偏微分

3. 基礎方程式および差分式

3.1 基礎方程式

散逸過程のない理想気体の非定常 1 次元流れは、保存形式で書いた

$$w_t = f_x \quad (2.1)$$

によって記述される。ここで、 t と x はそれぞれ時間および空間方向における偏微分を意味し、 w と f は以下のような成分をもつベクトル値関数である。

$$w^T = (\rho, \rho u, E) \quad (2.2a)$$

$$f^T = (-\rho u, -[\rho u^2 + p], -[E + p]u) \quad (2.2b)$$

従属変数相互の関係は、定義式

$$E = \rho \left(e + \frac{1}{2} u^2 \right) \quad (2.3)$$

および熱状態方程式

$$\begin{aligned} p &= \rho(\gamma - 1)e \\ &= (\gamma - 1) \left(E - \frac{1}{2} \rho u^2 \right) \end{aligned} \quad (2.4)$$

で定められる。(2.2)~(2.4) 式中の記号は下記のような意味を表わす。

- ρ =密度
- u =速度
- p =圧力

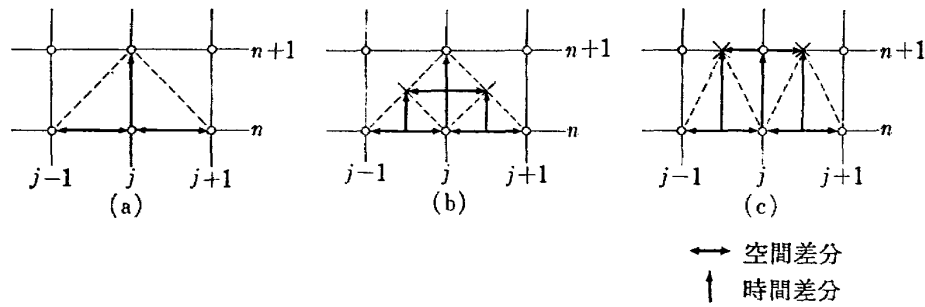


図 1 各差分法の図式模型

e =内部エネルギー

γ =比熱比

ついでに後節での式の導出や説明に有用な関係として、基礎方程式 (2.1) が

$$w_t = Aw_x \quad (2.5)$$

と書けることを補足しておく。 A は f の w に関する Jacobian を表わす。その具体的内容は附録 (A.3) 式のようになり、成分には w の微分を含んでいない。したがって準線形偏微分方程式である。

3.2 差分基礎式

与えられた初期値のもとに (2.1) によって w が記述される連続空間 (x, t) を微小間隔 $(\Delta x, \Delta t)$ により格子に分割、格子点上での w の値を考える。そのため両方の空間で対応する w や f などを

$$w(x, t) \rightarrow w(j\Delta x, n\Delta t) = w_{j,n}$$

$$f(x, t) \rightarrow f(j\Delta x, n\Delta t) = f_{j,n}$$

などの約束で表現することにする、ここでの j と n は整数である。

この報告で検討される差分式は3種類であるが、その基本形式部分をまず示す。これらはすべて2次の精度をもった (2.1) の差分近似である。基本形式部分についての差分式は公表された文献^{1), 6)} があるので、それらの導出は附録で簡単に述べ結果だけを示し煩雑さを避けることにする。

第一の差分基礎式は

$$\begin{aligned} w_{j,n+1} = & w_{j,n} + \frac{\lambda}{2} (f_{j+1,n} - f_{j-1,n}) \\ & + \frac{\lambda^2}{2} \{ \bar{A}_{j+1/2,n} (f_{j+1,n} - f_{j,n}) \\ & - \bar{A}_{j-1/2,n} (f_{j,n} - f_{j-1,n}) \} \end{aligned} \quad (2.6)$$

である、この式中

$$\lambda = \frac{\Delta t}{\Delta x}$$

および \bar{A} は f の w に関する Jacobian で

$$\bar{A}_{j+1/2,n} = A \left(\frac{1}{2} (w_{j+1,n} + w_{j,n}) \right)$$

などを表わす*。この差分基礎式は $t = n\Delta t$ の3格子点上の w を用いて、 $t = (n+1)\Delta t$ の w が1段計算で求められることを意味している(第1図(a)参照)。

第二の差分基礎式は $t = n\Delta t$ 上の3格子点上の w から、一たん

$$\begin{aligned} w_{j+1/2,n+1/2} = & \frac{1}{2} (w_{j+1,n} + w_{j,n}) \\ & + \frac{\lambda}{2} (f_{j+1,n} - f_{j,n}) \end{aligned} \quad (2.7)$$

などの中間値を求めることにより、 $(n+1)\Delta t$ の値が

$$w_{j,n+1} = w_{j,n} + \lambda (f_{j+1/2,n} - f_{j-1/2,n}) \quad (2.8)$$

で定められるという方法である(第1図(b)参照)。したがってこの差分法では計算手順が2段に分割されている。

第三の差分基礎式は第二と同じ2段計算法であるが、中間値を

$$\begin{aligned} w_{j+1/2,n+1} = & \frac{1}{2} (w_{j+1,n} + w_{j,n}) \\ & + \lambda (f_{j+1,n} - f_{j,n}) \end{aligned} \quad (2.9)$$

などで求めたのち

$$\begin{aligned} w_{j,n+1} = & w_{j,n} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{2} (f_{j+1,n} - f_{j-1,n}) \right. \\ & \left. + (f_{j+1/2,n+1} - f_{j-1/2,n+1}) \right\} \end{aligned} \quad (2.10)$$

によって $(n+1)\Delta t$ の w を定める方法である(第1図(c)参照)。

以上の差分法のどれにたいしても安定性条件は

$$\lambda < \frac{1}{\mu_{\max}} \quad (2.11)$$

となっており、Courant-Friedrichs-Levy の条件と一致する。ここで μ_{\max} は A の固有値の最大値を適用するものとする。

* 付録 A [注意] 参照

3.3 人工粘性および差分式

前節に示された基礎差分式がそのままの形式で応用計算に使用され成功するのはかなり限られた場合だけである。一般の超音速流れ場では、場の中を移動したり相互干渉をしたりする不連面（衝撃波、接触面）であるとかよどみ点などが存在する。そこでは場の状態量間の非線形結合が本質的であって、このために生ずる非線形不安定性は前節の基礎差分式の打ち切り誤差項程度がもつ抑圧効果では処理しきれない。そのため解がたちまち破滅（オーバフロー）してしまう。もちろんわれわれは数学の解の破局と物理現象のそれとが一致する問題があることを知っている。しかしもっと多くの場合において数学の解の破局以後も観測可能な現象の持続がみられることも知っている。したがってこのような場合われわれとしては数学のほうに改良すべき問題が残されていると考えざるを得ない。このような破局を救う手段として考案されたのが人工粘性という考え方である。この考え方の歴史は文献¹²⁾にゆずることとし、この破滅がおこる原因について簡単に触れておこう。

前節で示した安定性条件 (2.11) を導くには、これらの差分式をもとにつくられる Amplification matrix を扱わねばならない。 G をその行列であるとすれば (附録 A 参照)

$$G = I + i\lambda A \sin \xi + \lambda^2 A^2 (\cos \xi - 1) \quad (2.12)$$

である、ここに I は単位行列を、 k を波数として $\xi = k\Delta x$ となっている。 G の固有値を g で表わすと (2.12) から簡単に

$$|g|^2 = 1 - 4\lambda^2 \mu^2 (1 - \lambda^2 \mu^2) \sin^4 \frac{\xi}{2} \quad (2.13)$$

が得られる、式中 μ は A の固有値を表わしている。任意の ξ に対し、von Neumann の条件

$$|g| \leq 1 + O(\Delta t)$$

を適用することにより (2.11) が得られている。

一方 A の固有値 μ はよく知られているように

$$u+c, \quad u, \quad u-c$$

の値をとる、ここで c は局所音速を表わす。したがって流れ場の中のよどみ点や音速点で固有値の値が 0 をとると、 G の固有値は 1 に等しく、(すべての ξ すなわち全ての波長成分) に対して振幅増幅の抑圧能力を失ってしまう。そのため、よどみ点や音速点の近傍は常に発散の危険性にさらされているといえる。

発散を避けるための方法を考えるにあたって、その方法原理が失ってはならない数学的側面があることを注意しておこう。それは得られるべき差分式が元の偏

微分方程式 (2.1) の解として、どのような数学的意味にあるかということと関係している。差分式は、それが安定に得られているとき、衝撃波のような不連続面を数個の格子点中にわたる場の状態量の急激な変化として表現させる。偏微分方程式の理論は、このような安定な解が格子間隔に關しての数学的極限操作の結果として元の偏微分方程式の弱い解への収束を保証している。したがって、このような極限操作を受けたとき上記の性質を失ってしまうような発散抑圧方法は避けておかねばならない。

一方このような事情とは別に、気体力学における衝撃波構造の研究から、輸送ないしは散逸過程が存在する条件では衝撃波が有限な構造中をもっていることが知られ、とくに粘性による構造はすべての衝撃波強さにたいして急激ではあるが連続な状態変化を与えることがわかった。そこで当然の帰結として粘性効果をもつ項を差分式に導入し振動抑圧を期待しようと考えることになる。ただ物理現象の粘性は衝撃波強さに依存した構造幅を与えるばかりでなく、方程式に放物型の性質を導入することにもなる。もっとも重要な点は、前記の極限操作において物理粘性項は保存されたままに残り数学的要請を満足していないことである。このため (2.1) 式への弱い解の保証を失ってしまう。

そこで、衝撃波強さによって遷移幅が変わらないよう、また前述の数学的極限操作の中で粘性項が消滅してしまうことが望まれる。粘性係数に相当する因子が格子幅にのみ依存するよう撰ぶとこれらが解決できる。このため人工粘性 (項) の名が与えられている。

人工粘性の資格は上記条件の充足だけが本質であるので、実際の表現方法には任意性が残されている。上記の自然の帰着ともみられる人工粘性の表現は物理粘性のそれと同じ形式のものを用いることである¹¹⁾。この表現の欠点は判定条件を伴って組込まれること、安定性条件の体系化が容易でなく数値実験による評価に頼らねばならぬなどのやっかいさである。この点でも Lax-Wendroff が提案した人工粘性は巧妙であるので、本報告では彼等の人工粘性だけを考慮することにしよう。彼等の人工粘性の導き出し方やその考え方は附録 B にまとめてあるので結果のみを示すことにする。

基礎差分式 (2.6) に対してそれは次のような表現である、

$$\frac{\lambda}{2} \{ Q_{j+1/2,n}^+ (w_{j+1,n} - w_{j,n}) - Q_{j-1/2,n}^- (w_{j,n} - w_{j-1,n}) \} \quad (2.14 a)$$

ただし

$$Q_{j+1/2,n}^+ = g_0^+ + g_1^+ \bar{A}_{j+1/2,n} + g_2^+ \bar{A}_{j+1/2,n}^2 \quad (2.14b)$$

$$g_0^+ = \frac{\kappa}{4\bar{c}^2} \{ \bar{u}(\bar{u}-\bar{c}) |D(u+c)| - 2(\bar{u}+\bar{c})(\bar{u}-\bar{c}) |Du| + \bar{u}(\bar{u}+\bar{c}) |D(u-c)| \}$$

$$g_1^+ = -\frac{\kappa}{4\bar{c}^2} \{ (2\bar{u}-\bar{c}) |D(u+c)| - 4\bar{u} |Du| + (2\bar{u}+\bar{c}) |D(u-c)| \}$$

$$g_2^+ = \frac{\kappa}{4\bar{c}^2} \{ |D(u+c)| - 2|Du| + |D(u-c)| \} \quad (2.14c)$$

とする。(2.14c) 中, κ は $O(1)$ の定数で,

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(u_{j+1,n} + u_{j,n})$$

$$|Du| = |u_{j+1,n} - u_{j,n}|$$

などを表わす, $Q_{j-1/2,n}^-$ についての g_0^-, g_1^- , および g_2^- についての平均ならびに差は j と $j-1$ 格子点での値で計算するものとする。上式から明かなようにこの人工粘性は解が滑らかな領域では $|Du| \approx 0$ となってほとんど寄与しない, しかし急激な解の変化がおこる (たとえば衝撃波遷移) 領域附近では効果を及ぼす。また流れの方向あるいは流れ状態変化の大きさおよび方向に特別な考慮を必要としない点も特徴の一つであるといえよう。

人工粘性 (2.14) を (2.6) に加えた全体は,

$$\begin{aligned} w_{j,n+1} = & w_{j,n} + \frac{\lambda}{2} \{ (f_{j+1,n} + f_{j,n}) + (\lambda + g_2^+) \\ & \times \bar{A}_{j+1/2,n} (f_{j+1,n} - f_{j,n}) + g_1^+ (f_{j+1,n} \\ & - f_{j,n}) + g_0^+ (w_{j+1,n} - w_{j,n}) \} \\ & - \{ (f_{j,n} + f_{j-1,n}) + (\lambda + g_2^-) \bar{A}_{j-1/2,n} \\ & (f_{j,n} - f_{j-1,n}) + g_1^- (f_{j,n} - f_{j-1,n}) \\ & + g_0^- (w_{j,n} - w_{j-1,n}) \} \end{aligned} \quad (2.15)$$

と書ける*。これが本報告で検討される第一の差分式である。この差分式にたいする Amplification matrix は

$$G = I + i\lambda A \sin \xi + (\lambda^2 A^2 + \lambda Q) (\cos \xi - 1) \quad (2.16)$$

である, Q の固有値の評価法として Lax-Wendroff らの方法¹⁾ にしたがうと,

$$\lambda \mu_{\max} \leq \left(1 + \frac{\kappa^2}{16}\right)^{1/2} - \frac{\kappa}{4} \quad (2.17)$$

が安定条件となる。 $\kappa \rightarrow O(1)$ にたいし上式右辺は 1 より小さくなり, (2.6) におけるそれよりも厳しい条件

* $\{\dots\}$ のそれぞれに $f_{j,n}$ が付加されている, このように書いておくと $\{ \}$ 全体が一つのベクトルとして移送できるのでプログラム作成上でも便利である。

となる。

第二の基礎差分式に対応する人工粘性付きのそれは

$$\begin{aligned} w_{j+1/2,n+1/2} = & \frac{1}{2} \{ (w_{j+1,n} + w_{j,n}) + (\lambda + g_2^+) \\ & \times (f_{j+1,n} - f_{j,n}) + g_1^+ (w_{j+1,n} - w_{j,n}) \} \end{aligned} \quad (2.18a)$$

および

$$\begin{aligned} w_{j,n+1} = & w_{j,n} + \lambda \left\{ \left[f_{j+1/2,n+1/2} + \frac{g_0^+}{2} (w_{j+1,n} \right. \right. \\ & \left. \left. - w_{j,n}) \right] - \left[f_{j-1/2,n+1/2} + \frac{g_0^-}{2} (w_{j,n} \right. \right. \\ & \left. \left. - w_{j-1,n}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.18b)$$

と書くことができる。その根拠は基礎差分式における証明と全く同じ手続によって (2.15) が得られることに基づいている。

第三の差分式も同じ理由によって,

$$\begin{aligned} w_{j+1/2,n+1} = & \frac{1}{2} (w_{j+1,n} + w_{j,n}) + \left(\lambda + \frac{g_2^+}{2} \right) \\ & \times (f_{j+1,n} - f_{j,n}) + \frac{g_1^+}{2} (w_{j+1,n} - w_{j,n}) \end{aligned} \quad (2.19a)$$

および

$$\begin{aligned} w_{j,n+1} = & w_{j,n} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \left[f_{j+1/2,n+1} + \frac{1}{2} (f_{j+1,n} \right. \right. \\ & \left. \left. + f_{j,n}) + g_0^+ (w_{j+1,n} - w_{j,n}) \right] - \left[f_{j-1/2,n+1} \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{1}{2} (f_{j,n} + f_{j-1,n}) + g_0^- (w_{j,n} - w_{j-1,n}) \right] \right\} \end{aligned} \quad (2.19b)$$

となる。

4. 実験計算および結果

流れの中での不連続面相互間, あるいは不連続面と固体壁との干渉は空気力学で興味ある分野である。これらの現象が単一の問題の中で出現するという意味において単段衝撃波管問題が対象として選ばれた**。すなわち衝撃波管全長を x_L とし, 膜位置を x_d とすれば

$$\left. \begin{aligned} 0 \leq x \leq x_d & \quad \text{にたいして} \quad w = w_4 \\ x_d < x \leq x_L & \quad \text{にたいして} \quad w = w_1 \end{aligned} \right\} \quad (3.1)$$

と初期値がおかれる。簡単のため高圧部気体と低圧部気体とは同種類で, 同一初期温度であるとする (第2図参照)。したがって本質的に意味のある初期値は膜

** 厳密解が容易に得られるということも理由の一つである。

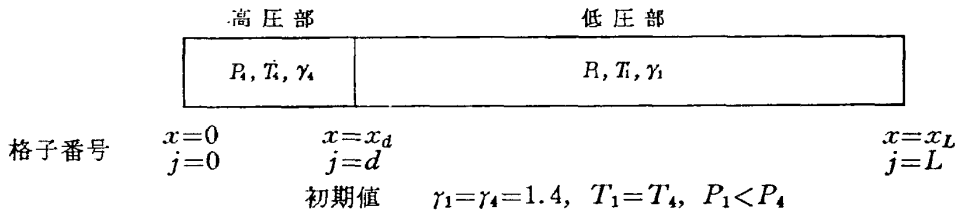


図 2 単段衝撃波管のスケッチ

圧比 P_4/P_1 のみである。

計算は低圧部気体状態を基準として無次元化して行なう，無次元化量の意味で

$$\frac{P_4}{P_1} \rightarrow p_{41}$$

などの記号を使うことにする。衝撃波管全長を Δx で等分割しておき (3.1) と対応するよう初期値を，与えられた p_{41} に基づいて設定し，差分計算を開始する。差分計算開始にあたって一寸した注意があるのでそれを述べておく。これは不安定性発生とは別の問題であるが空気力学的に合理的な解をうるため必要な注意である。

たとえば， $j=d+1$ の点で $n=1$ における w の値は差分式に初期値 (3.1) を代入し整理してみると

$$\begin{aligned} \rho &= \rho_1 \\ \rho \mu &= \frac{\lambda}{2} (\gamma - 1) (E_4 - E_1) \\ E &= E_1 \end{aligned}$$

となることがわかる。これより p を求めると

$$p = (\gamma - 1) \left[E_1 - \frac{1}{\rho_1} \left\{ \frac{\lambda}{2} (\gamma - 1) (E_4 - E_1) \right\}^2 \right]$$

であるから，

$$\lambda < \frac{2\sqrt{\rho_1 E_1}}{(\gamma - 1)(E_4 - E_1)} \quad (3.2)$$

を満足するように λ を選ばない限り， $p \leq 0$ ，したがって $T \leq 0$ という値になり物理的意味での妥当性を失ってしまう。(3.2) を満足させる λ の値は，流れ場の中で予期される μ_{\max} でつくった値よりかなり小さい。たとえば， $p_{41}=1000.0$ ， $\gamma=1.4$ のとき

$$\lambda < 0.03779$$

である。このような事情が不連続崩壊の初期数サイクルにわたって発生する可能性があるので防止策を必要とする。この報告では，予定した λ の値に対し初期計算の λ の値は，(3.2) を満足し，かつ整数比 (10 の倍数) をなすように撰んで解を出発させている。このように撰ぶと Δt または Δx が撰ばれた整数比サイクルのところで後の計算格子点の値としてそのまま使用でき，便利である。

4.1 安定性条件にかんする数値実験

衝撃波管問題においては，膜圧比，温度比，および

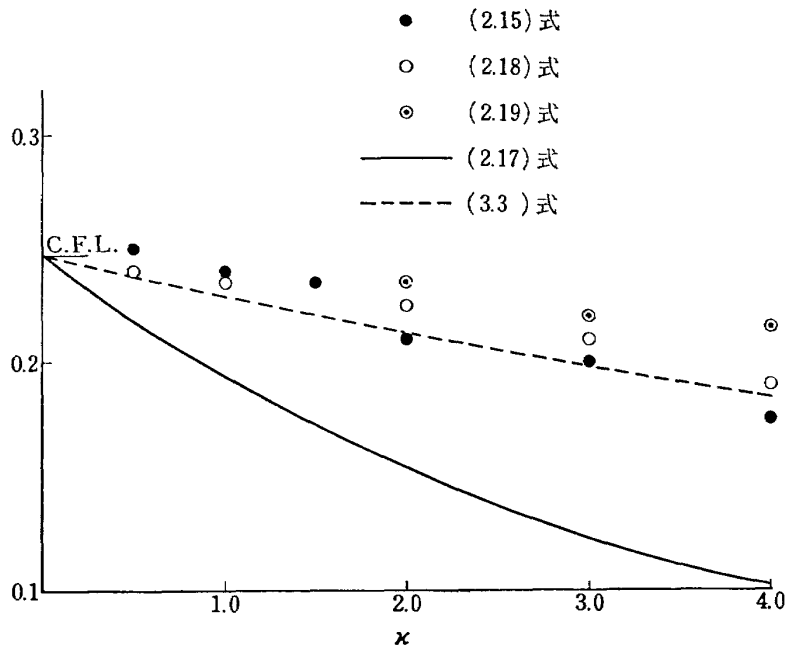
気体比熱比が知れていれば衝撃波マッハ数を知ることが可能であり，このマッハ数から衝撃波管各部における気体状態量が厳密に計算できる。したがって各部における気体速度，音速を用いて安定性条件を事前に評価しておくことが可能である。現在の問題の場合，固有値の最大値は入射衝撃波背後領域において得られるから，ここでの固有値で安定性条件を計算する。膜圧比 1000, 100, 10 を撰んで，上記の手順で固有値を求め，人工粘性の係数 0~4.0 にたいし (2.17) の計算をしたものが第 3 図において実線で示されている。これらの計算値より大きな λ の値を撰んで計算を始めさせる。この数値実験では安定領域の λ の厳密な値を知ることは必ずしも重要な要件ではないので， λ の幅を 0.005 にとった。すなわち，ある値での λ で解が不安定であれば，次の λ は 0.005 小さい値にとり安定解が得られるまで小さな値を撰んで計算が繰返される。

解の不安定はオーバフローの続出として表われる，実際にはこのオーバフロー出現の数サイクル以前に負の密度の値をもった格子点が出るので不安定の予知になる。すなわち密度の値の符号を監視して不安定が予知されたら，その λ での計算を打切ることにした。

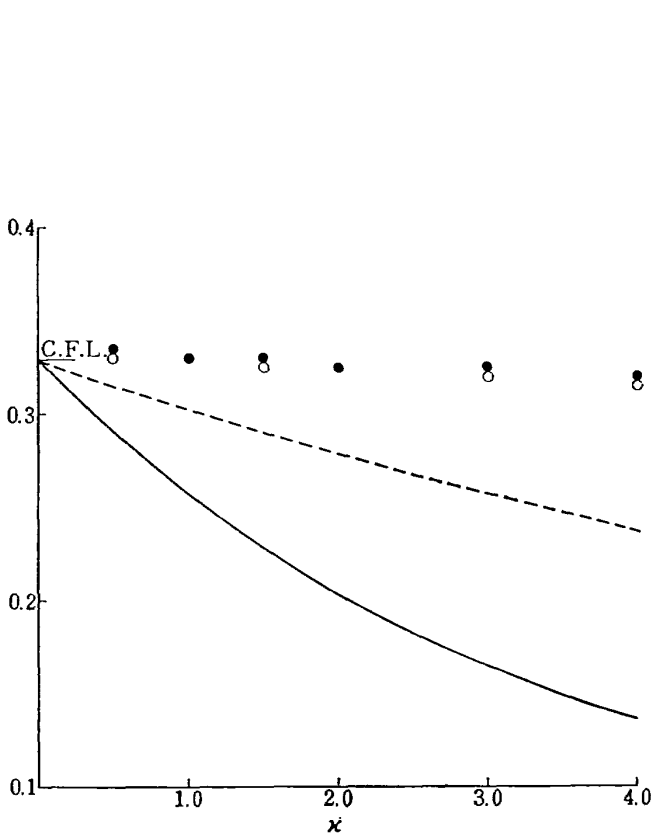
一方安定解の判定はその λ の値での計算が Δt の 400~1000 サイクルの間に上述のようなことが起らなければ，この解は安定，したがって安定領域の λ であるとした。同一値の λ にたいし，不安定領域から安定領域への遷移は非常に急激で，ある値の λ で数十サイクルで破滅しても次の λ では安定になることがわかった。このようにして安定と判定された λ の値が第 3 図に記入してある。実験点の何れもが (2.17) 式による値より大きなところにあり，弱い衝撃波すなわち p_{41} の小さいほど (2.17) とのずれが大きい。

計算実務の立場からみた安定性条件の意味は計算時間との関連において重要さが加わる。今の例でいえば λ の値が大きいほど計算所要時間が短縮されるから*，可能な限り大きな λ を撰ぶことが好ましい。偏微分方程式の理論では，解の収束性と関係した帰結として安定性条件が存在する。したがって安定条件の限界をこ

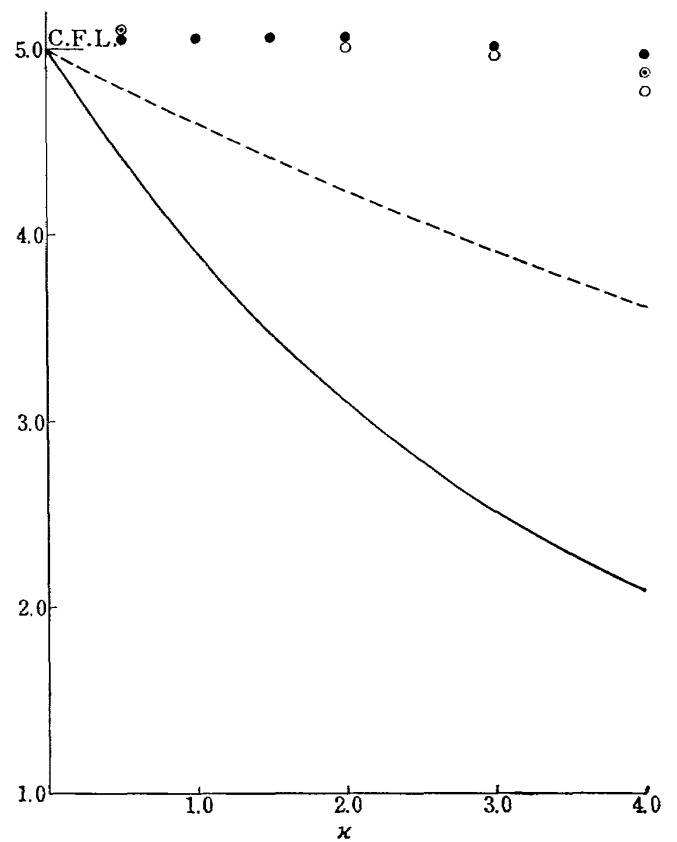
* 一般的にもいえる。



(a) $p_{41}=1000$



(b) $p_{41}=100$



(c) $p_{41}=10$

λ の値が同じとき、式番号の小さい方の記号で代表させてある

図 3 安定性の数値実験結果

えたとところで得られたものは解としての信用性にとぼしい。これは原理的にそうあり得なければならない筈のものである。しかし非線形偏微分方程式における安定性条件の導出の実際ではかなりの簡略化が行なわれるものである。このような事情に無関心でいると、論文に示された安定条件を鵜のみにして使い不必要な計算実務損失を招くことになる。この意味で (2.17) の条件は安全側にあり過ぎるといえる。

そこでもう少し現実的な評価を得る方法が無いのか

という気持ちが出てくる。実務の立場でなし得る手短かな方法とはいえば、上述のような簡略化のうち容易に回復できそうなものを探すことである。(2.16) から (2.17) を得た Lax-Wendoff らの原論文の過程をふりかえってみると、行列 Q の固有値評価にかなり簡略化のあることに気付かせる。行列 Q の詳しい表現 (2.14) を調べてみてわかるように、この行列の固有値を κ と置いてしまうことに抵抗を感ずる。そこで、これを回復させてみることにしよう。簡単な計

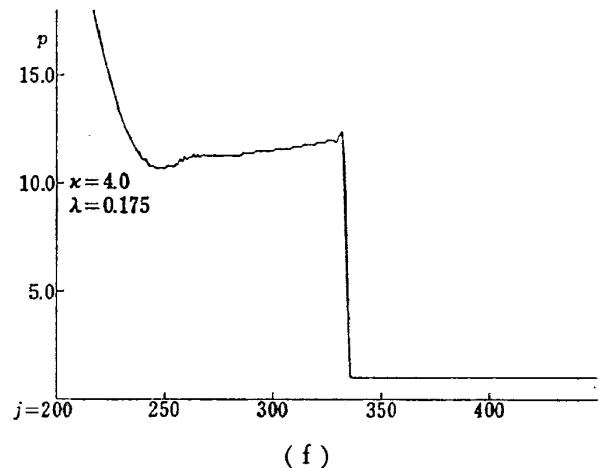
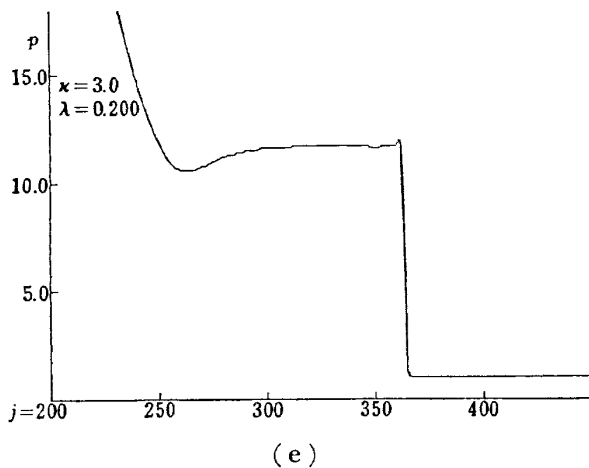
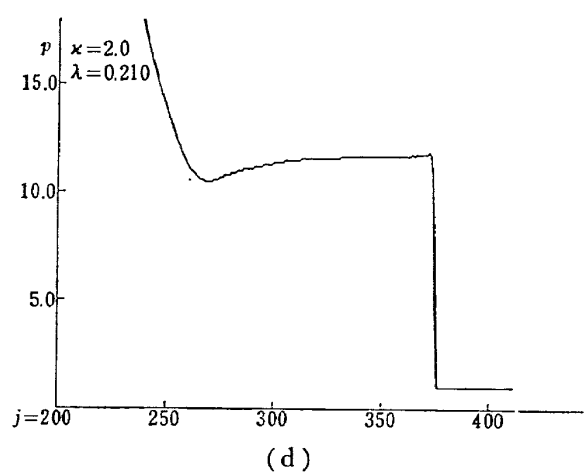
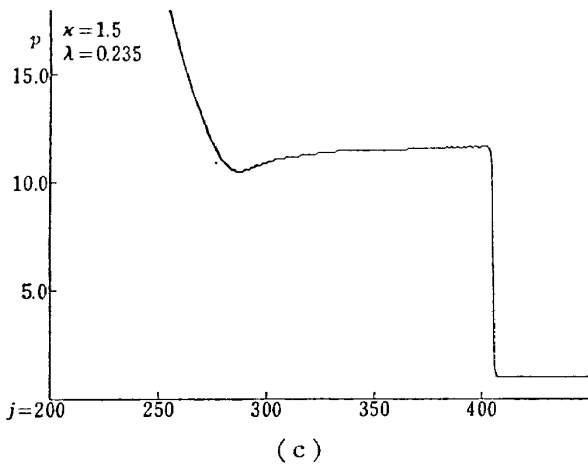
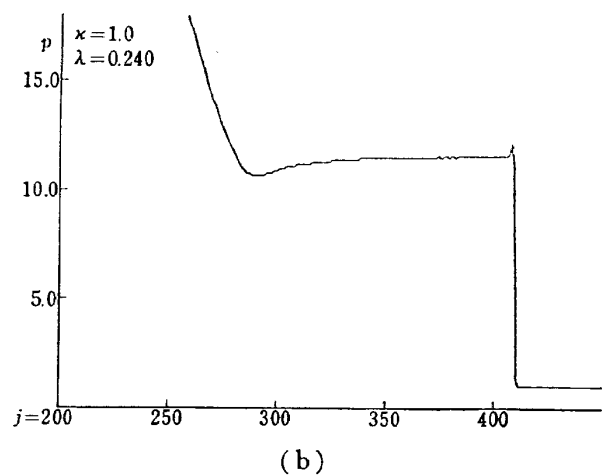
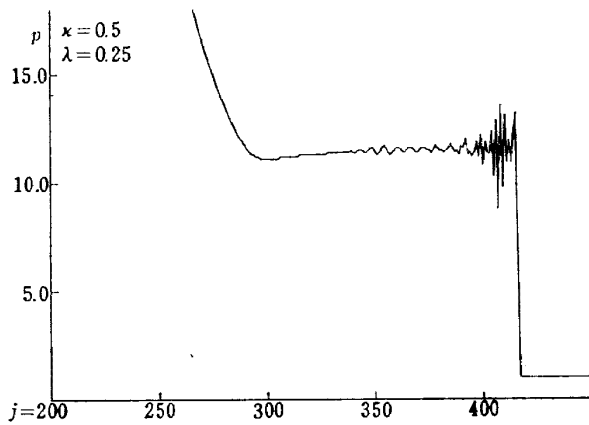


図 4 (2.15) 式による結果 ($p_{41}=1000$)

算の後 (2.17) 式のかわりに

$$\lambda \mu_{\max} \leq \left\{ 1 + \frac{\kappa^2}{16} \left(\frac{|\Delta \mu_{\max}|}{\bar{\mu}_{\max}} \right)^2 \right\}^{1/2} - \frac{\kappa}{4} \frac{|\Delta \mu_{\max}|}{\bar{\mu}_{\max}} \quad (3.3)$$

が得られる。 μ_{\max} として $(u+c)$ を使い、第3図実験線のとおり手順で値を求め、(3.3) 式を計算したものを破線で示してある【第3図】。結果として、(2.17) 式よりも良い値を与えてはいるが十分な理論という評価には余地がありすぎるといえる。

この差をつめるには、ここで行なったような主旨の精密化のみでは解決策として本質的なものを得ることはできず、場合によっては偏微分方程式理論に立帰ることも必要となるのではなからうかと思われる。

4.2 プロファイルの比較

前節では安定性条件のみをとらえた結果、理論から得られる値より大きな λ を使っても解が得られることを知った。大きな値をもった λ で計算を進めることは好ましいことではあるが、得られた結果の質的側面と

して精度およびプロファイルの妥当性も論じなければならない。この節ではプロファイルの妥当性の面をとりあげる。ここでいうプロファイルの妥当性とは物理的把握における現象面での合理性を表わしている。すなわち大域的解としての数学理論上の妥当性あるいは精度に関して問題が無くても、物理現象としてとらえ難いあるいは現象の存在が認識しにくいというような結果では好ましくないと考えることである。

このような議論のため本節では計算結果中より圧力プロファイルを取りあげ、それらの吟味を行なうことにする。引用する図(第4~16図)の縦軸は無次元化圧力、横軸は格子点番号である。本節の議論に関して横軸の絶対値(格子番号)そのものはたいした意味をもたない。

4.2.1 (2.15) 差分式による結果

第4~6図において、第3図に記入された計算実験点のそれぞれにたいする ($n=400$) のプロファイルが示されている。この差分式による結果では、プロファイル

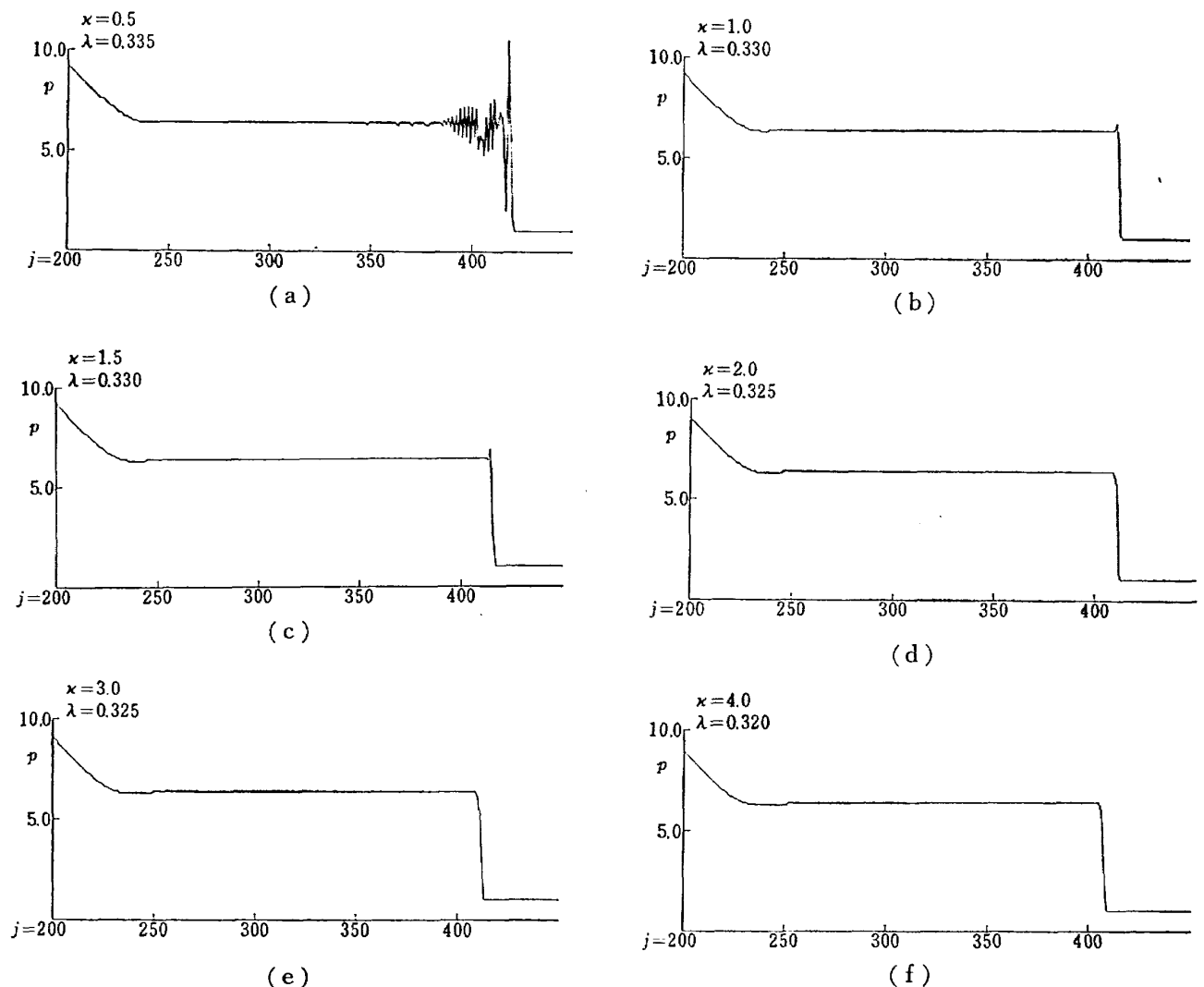


図5 (2.15) 式による結果 ($p_{41}=100$)

の特徴として

- (1) 衝撃波フロント遷移直後に著しいピークを生ずる
- (2) 引続く領域に振動を残す

などが原論文発表のときから知られ、かつその理由づけも行われた¹⁾。今回の計算ではさらに極端な例が出現している、すなわち第4図(a) および第5図(a)に示したものがそれである。これらの結果といえども計算平均誤差、衝撃波速度、衝撃波遷移幅など他の場合とそんなに劣らないし、精度1次の差分式による結果との

比較ではもちろん良好である。すなわち大域的意味での解として数学的資格を失なうものではない。しかし、これらのプロフィールを衝撃波現象として認識するには熟練を要するし、直観的説得力が弱いであろう。仮に、第三者への説得力の有無を問題としないにしても、計算数表から現象を読み取ろうとする実務家本人に憂うつな作業をもたらすことを否定できない。たとえば多重波動現象が存在するとき、このようなプロフィールを目の前にしては解析する気力さえ失わせるだろうことは容易に想像できよう。したがって、このようなプロフ

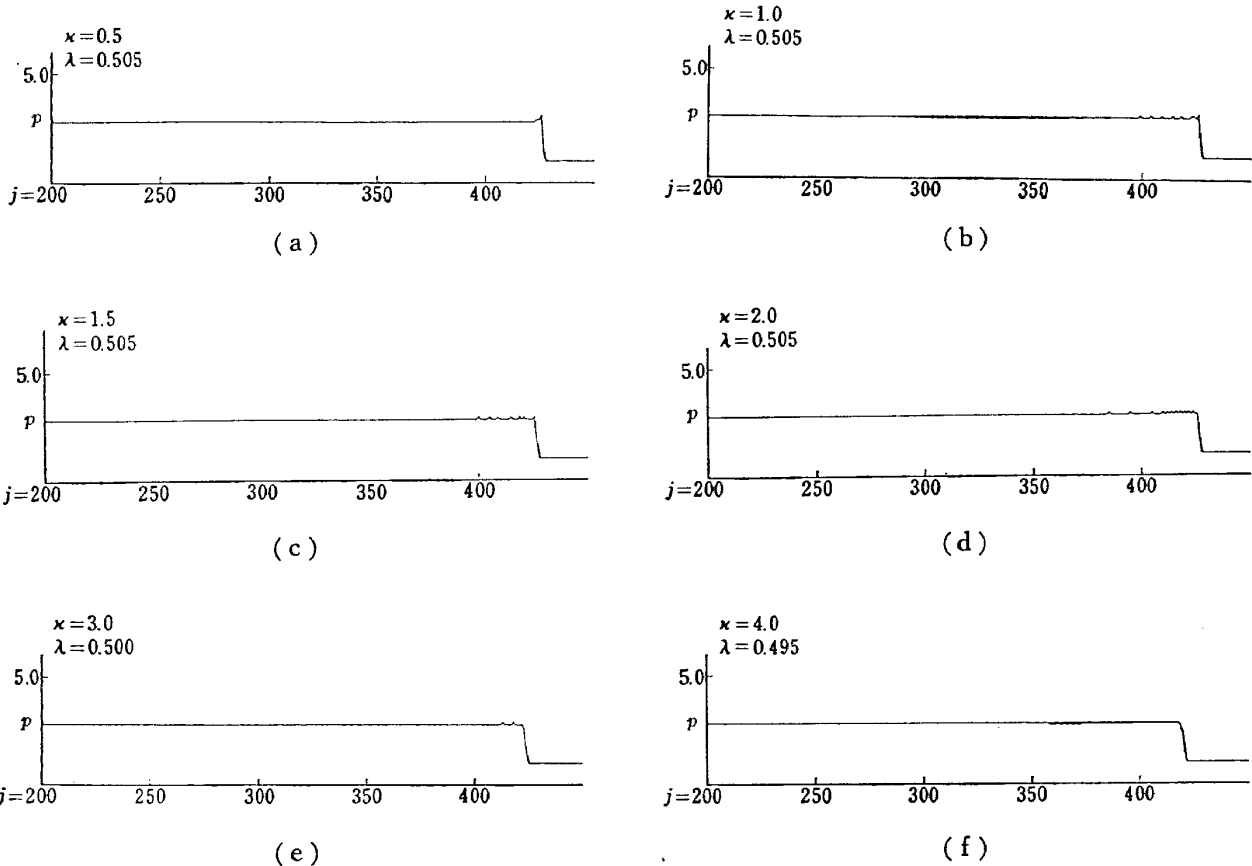


図 6 (2.15) 式による結果 ($p_{41}=10$)

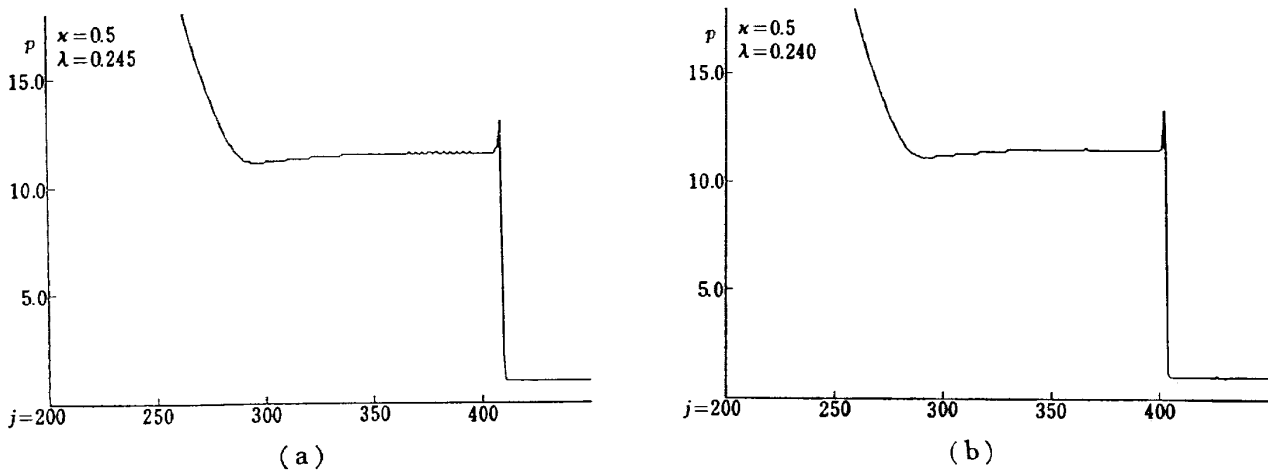
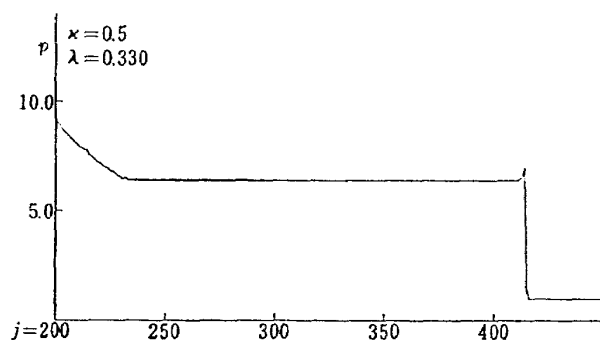
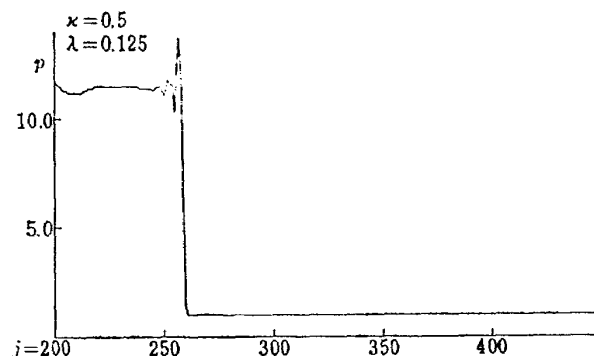


図 7 (2.15) 式による結果 ($p_{41}=1000$)

図 8 (2.15) 式による結果 ($p_{41}=100$)図 9 (2.15) 式による結果 ($p_{41}=100$)

ィルはわれわれの要求に質的欠点をもっと考えよう。

そこで、このような振動を抑圧して質的にも好ましい解を得るにはどうすればよいかということを考えるため追加の実験計算を行なった。一つの簡単な解決策は今迄述べてきた経過および第 4~6 図から容易にわかるように人工粘性項の係数を大きくすることである。

しかし単純に人工粘性項を大きくとることが合理的でない、つまり質的に良い解を得るための唯一の方法ではないことを示すのが第 7 図である。第 4 図 (a) との相異は λ のわずかな節約だけであるが、比較にならないほど質的な良さを持っている。さらに第 7 図 (b) と第 4 図 (b) と比較してみると、これらの差異は人工粘性項の大きさだけであるが、質的面で差異はさほどでもない。同様な事情は第 8 図と第 5 図 (a) および (b) の間の比較からも読みとれる。

一方単純に λ の値を減少させても良い結果にならない例として第 9 図を示す。これは λ の値を第 4 図 (a) の 1/2 に落したものだが、振動抑圧において失敗していることは明らかである。

以上の結果、不安定を恐れるあまり、人工粘性項を大きくとつたり、 λ の値を小さくし過ぎることは良い対策法ではないといえる。一般的な応用計算では場の中に出現しうる固有値をあらかじめ知ったり、あるいは予想をつけることですら困難があるとなしなくてはならない。このような時は計算を進めながら適切な格子幅を決定して行かなければならないが、その判断基準の手掛りを上記の結果は教えている。

4.2.2 (2.18) 差分式の計算

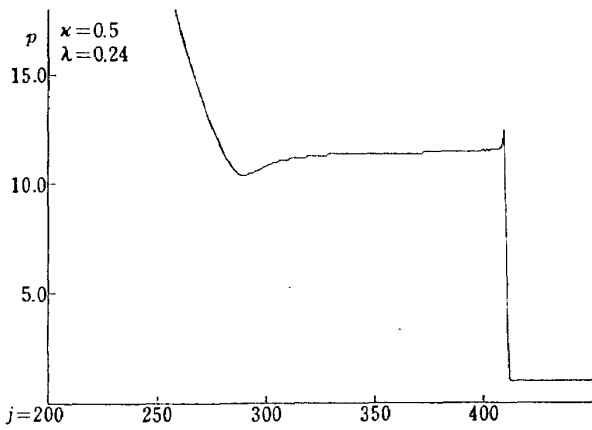
(2.18) 式を用いた結果を、第 10~12 図に示す。これらの図も前節と同じで、第 3 図の実験点に対応する。前節でみられたような極端なプロファイルは検出されていない、これは今回の実験計算の範囲および方法 (λ の刻み方) において見当たらないという意味で、そのような場合は存在しないことを保証しているのではない。

前節と本節の差分式では高次項と打ち切り誤差項にわずかな相異がある (附録 A 参照)、これが外部的な人工粘性項と相乗して作用しプロファイルに影響を与えていると考えられる。これらの効果を知るには前節に示した図との比較をみればよい。すなわち、同一初期値 p_{41} をもつ計算どうしにおいて、 λ と κ の値が等しいいくつかの図がある。これらの図は、もし上述のような効果が無いとすれば、原理的に同一なものになるべき性質のものである。ところが示したように明らかな差異を認めることができ、その説明のため上記各項の表現差に原因を求めることが理論的に無理を生じない考察の余地であろうと思われる。しかし、今のところその定量性を評価できる段階ではない。

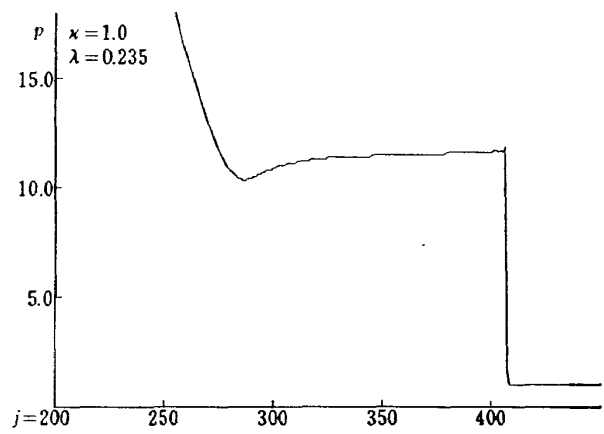
このような前提のもとにおける比較結果、

- (1) 衝撃波遷移直後におけるオーバシュート抑圧にはあまり成功しない
- (2) 引続く領域における振動抑圧にたいしては改善される傾向をもつ

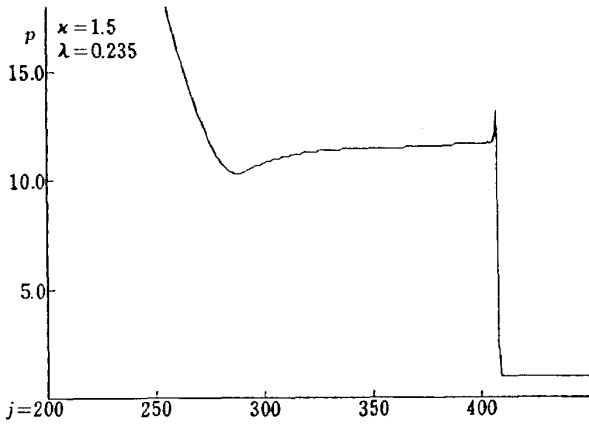
ことが (2.18) 式による特徴であるといえよう。



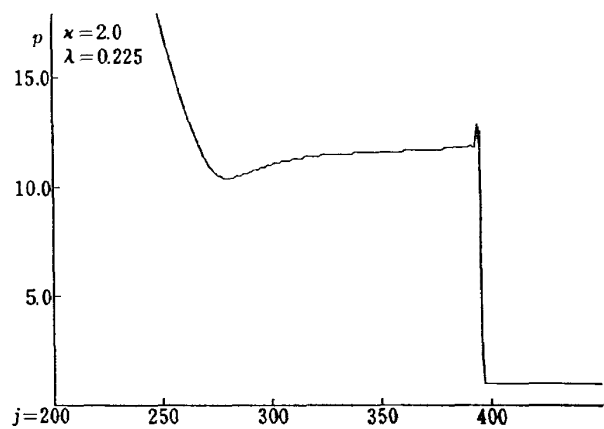
(a)



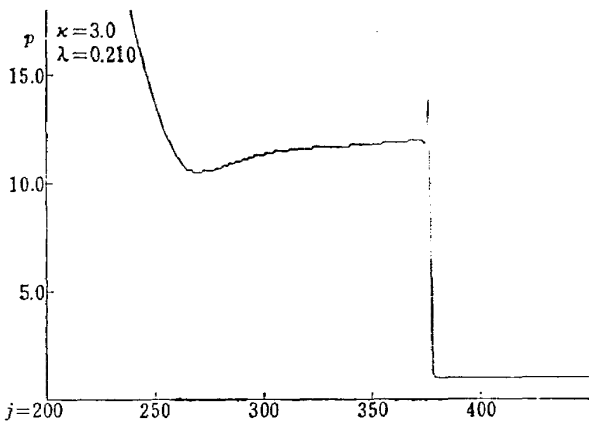
(b)



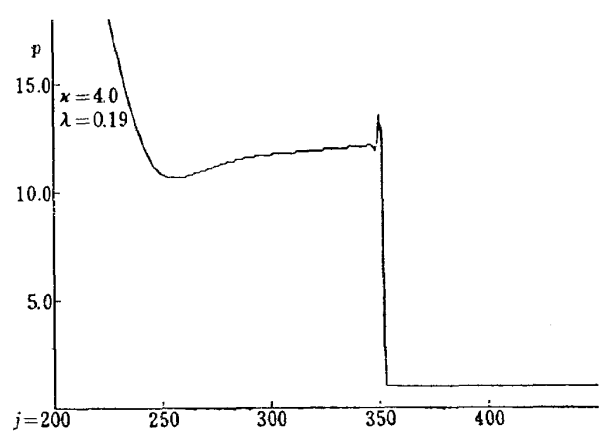
(c)



(d)



(e)



(f)

図 10 (2.18) 式による結果 ($p_{41}=1000$)

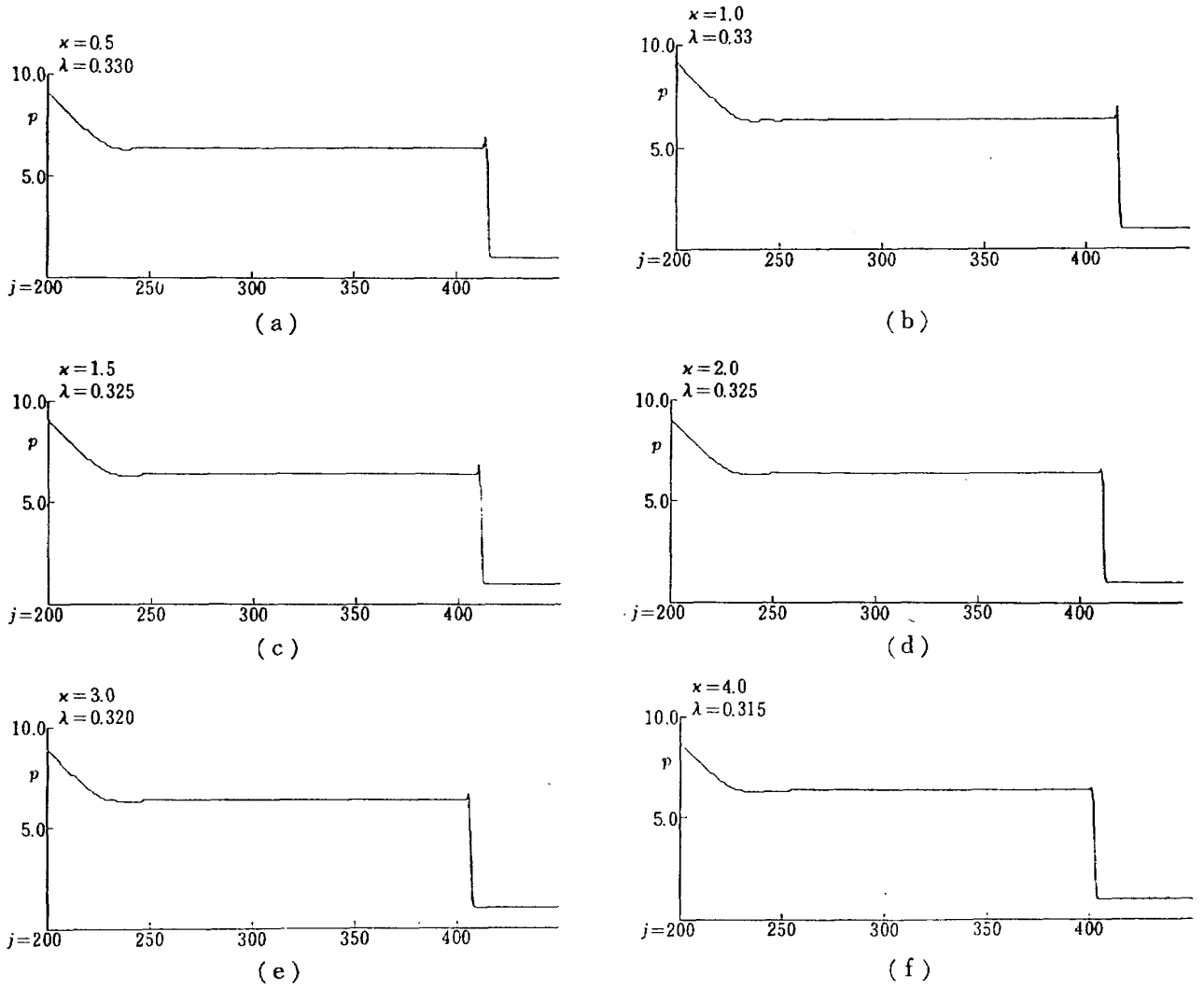


図 11 (2.18) 式による結果 ($p_{41}=100$)

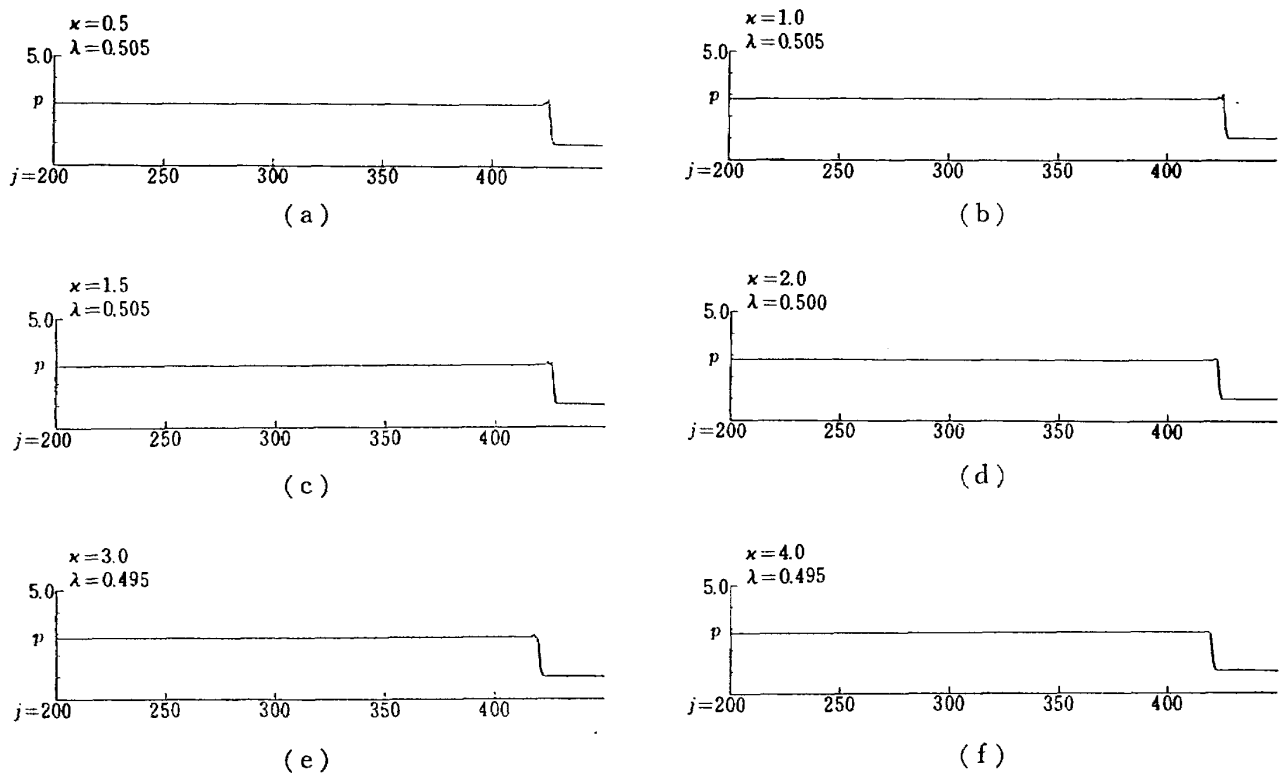


図 12 (2.18) 式による結果 ($p_{41}=10$)

4.2.3 (2.19) 差分式の結果

(2.19) 式による結果は、第 13~15 図に示されるようなものになる。前節で引用した図との比較をみると、衝撃波フロント遷移時のオーバーシュートにたいする抑圧効果が大きくなり、全般的に好ましい傾向をみせている。このことから、振動抑圧にたいし外部的人工粘性に依存する割合はこの差分式において最も少ないと考えられる。第 3 図にみられるように、同一値の

κ にたいし、 λ の値は他の差分式と同一ないしは少し大きくとれるにも拘らず、プロフィールが良質であるからこの考えの保証度は高いといえよう。こうした事情を考慮すれば、第 15 図にみられるような、いわゆる極端なプロフィールについても好意的に解釈してよいと思われる。そうしてよいという例として、 $\lambda=0.505$ 、 $\kappa=0.5$ の結果を第 16 図に示す。この図と第 6 図(a) および第 12 図(a) とを比較すると、これらは同じ値の

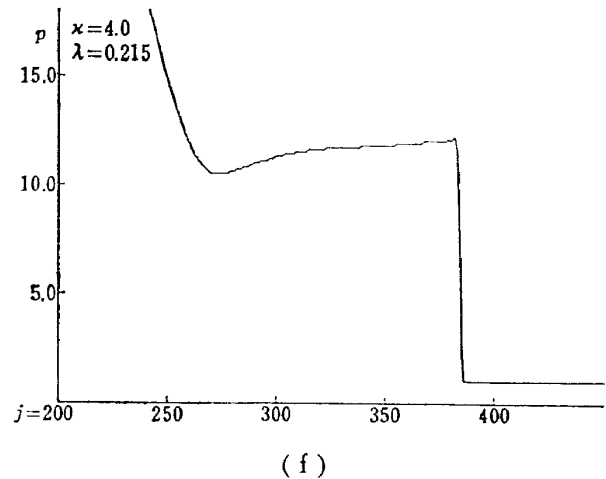
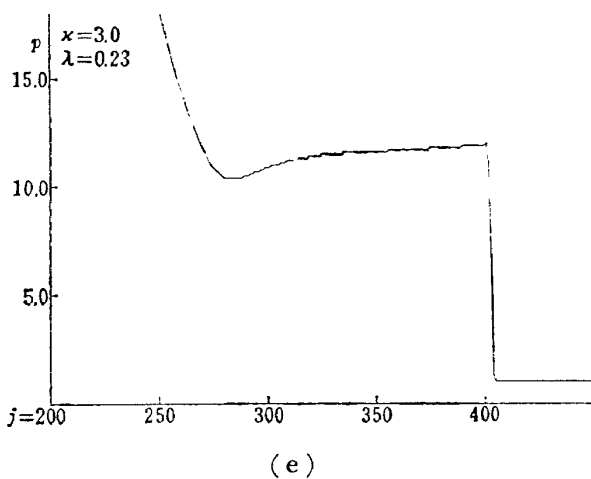
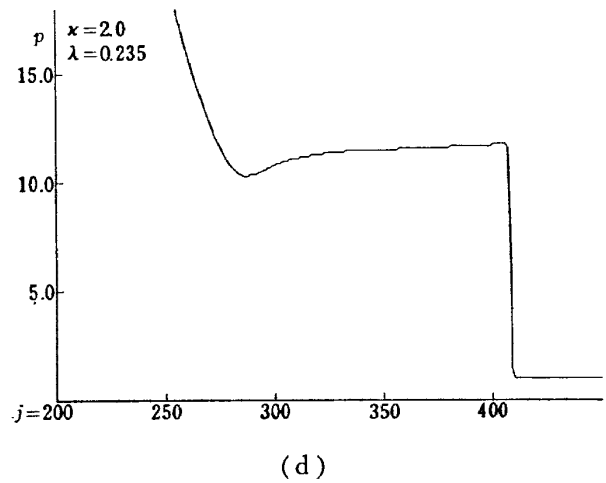
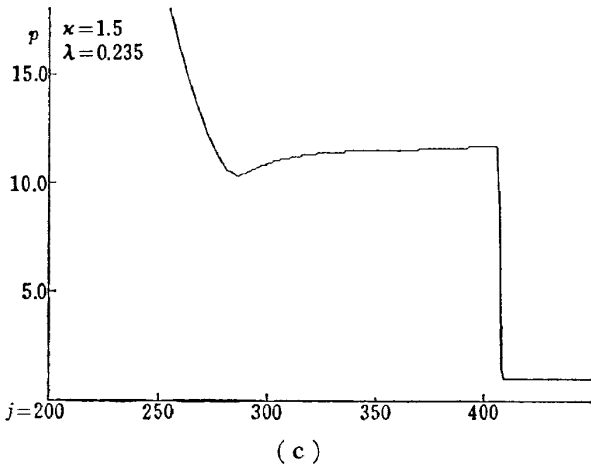
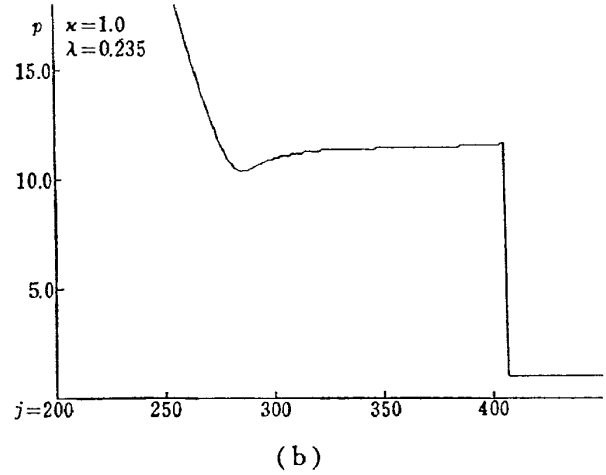
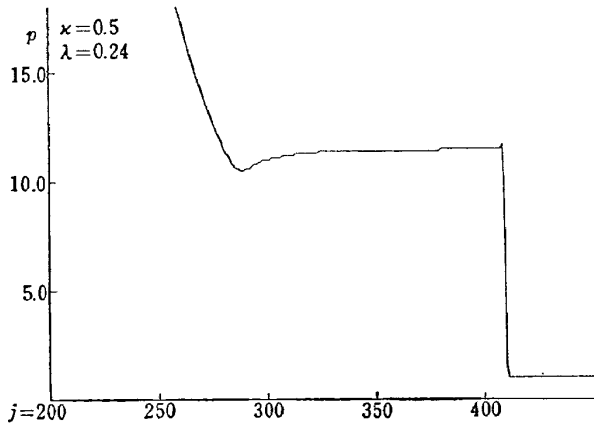


図 13 (2.19) 式による結果 ($p_{41}=1000$)

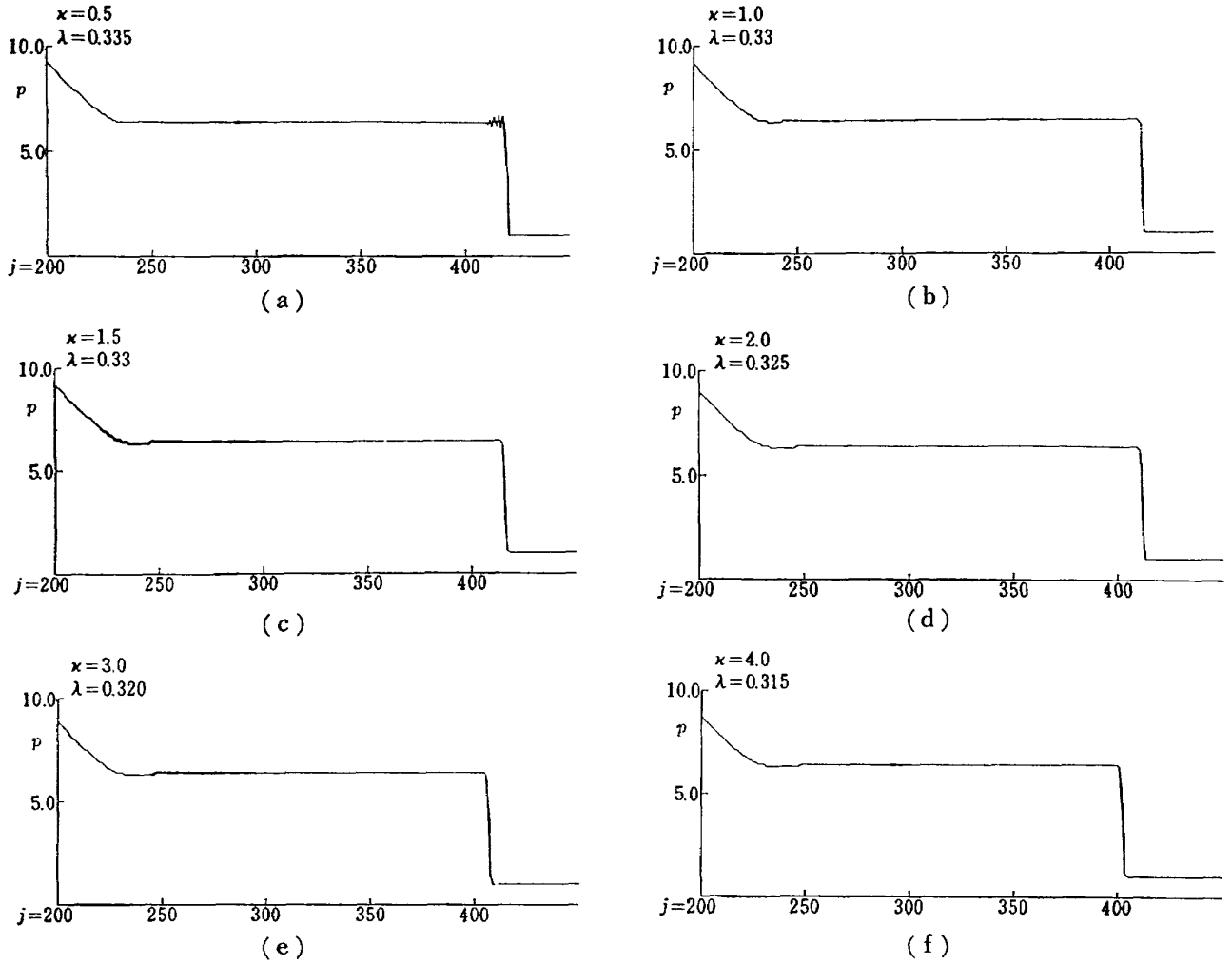


図 14 (2.19) 式による結果 ($p_{41}=100$)

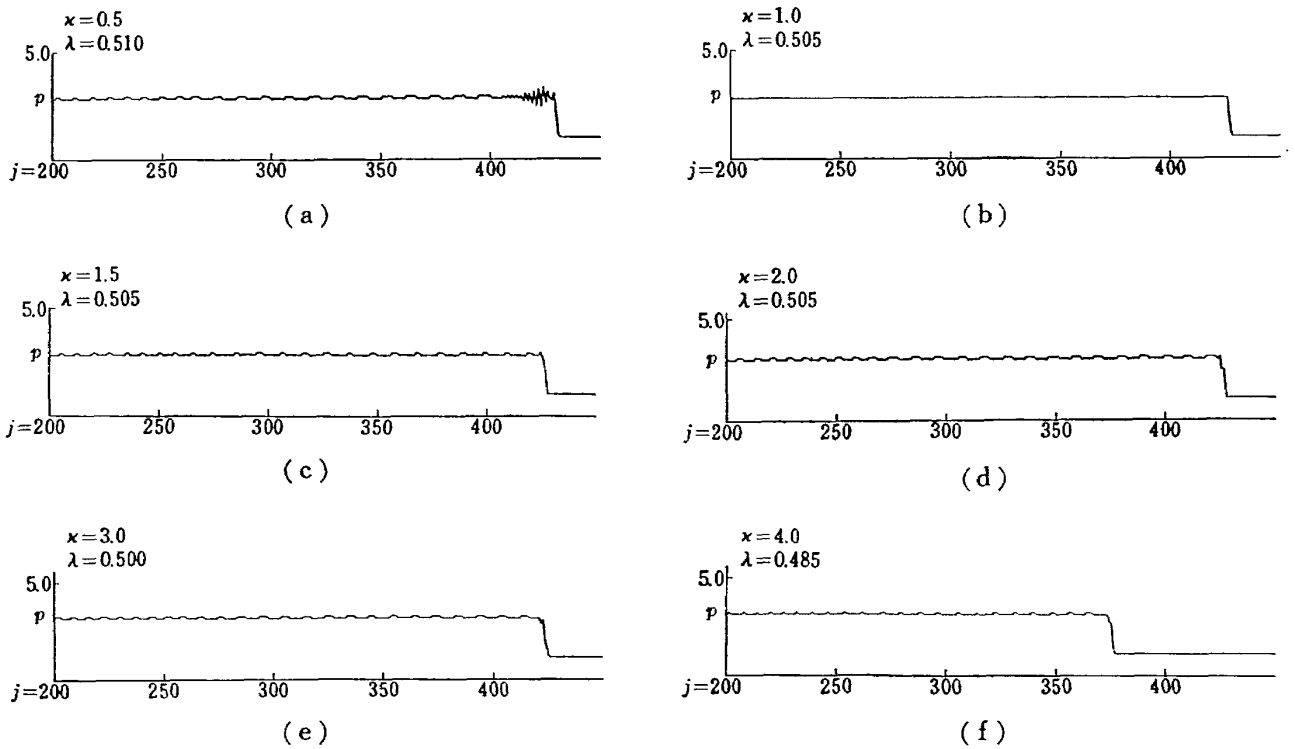


図 15 (2.19) 式による結果 ($p_{41}=10$)

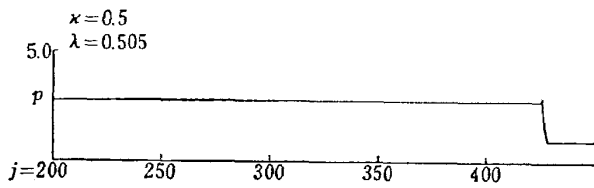


図 16 (2.19) 式による結果 ($p_{41}=10$)

λ と κ にたいする結果であるから、上記の保証は崩れていないといえる。

4.3 衝撃波管問題の解の例

前節までは、この報告の主目的である 3 種類の差分法の性質を論じてきた、いわば差分法の局所的様相を調べてみたわけである。本節では論じてきたような差分法によって応用問題を解く例として、差分法による大域的様相がどのように表現されるかを簡単に説明しておこう。

前節までの実験計算の拡張として、第 2 図に示したような単段衝撃波管の全領域を計算させる。このとき問題は境界を含むため、非線形双曲型偏微分方程式の混合初期値境界値問題を扱うことになる。差分法による解では、境界上の値は境界を含まない他の格子点とは別な手段で設定しなければならない。ここでの計算例では壁反射という方法を採用している。この方法の

利点は、境界上でも他の格子点と同じ手順で値が定められるのでプログラムが簡単になることである。欠点は、そのため外部格子点を設けるための記憶量が増すことである。今の問題では衝撃波管の両端末が境界となる、この端末においてそれぞれ外部側に格子点を 1 点ずつ余分にとり

$$\begin{aligned} \rho_{l-1} &= \rho_{l+1} \\ (\rho u)_{l-1} &= -(\rho u)_{l+1} \\ E_{l-1} &= E_{l+1} \end{aligned}$$

とする、ここでの l は端末壁の格子番号である。これらの条件は、境界が固体でかつエネルギー移動の無い(たとえば断熱的)壁であることと等価である。したがって流体質量の流入出が無いから

$$(\rho u)_l = 0$$

とおかれる。

計算例の初期値は無次元表示で

$$0 \leq x \leq 0.1: p_{41} = 100.0$$

$$T_{41} = 1.0$$

$$0.1 < x \leq 1.0: p_{11} = 1.0$$

$$T_{11} = 1.0$$

としてある。気体比熱比 $\gamma = 1.4$ にとつてある。また全長を 1 としたこの衝撃波管にたいし $\Delta x = 0.001$ とした。前節までの結果、衝撃波遷移幅は $2.4\Delta x \sim 3.4\Delta x$ と

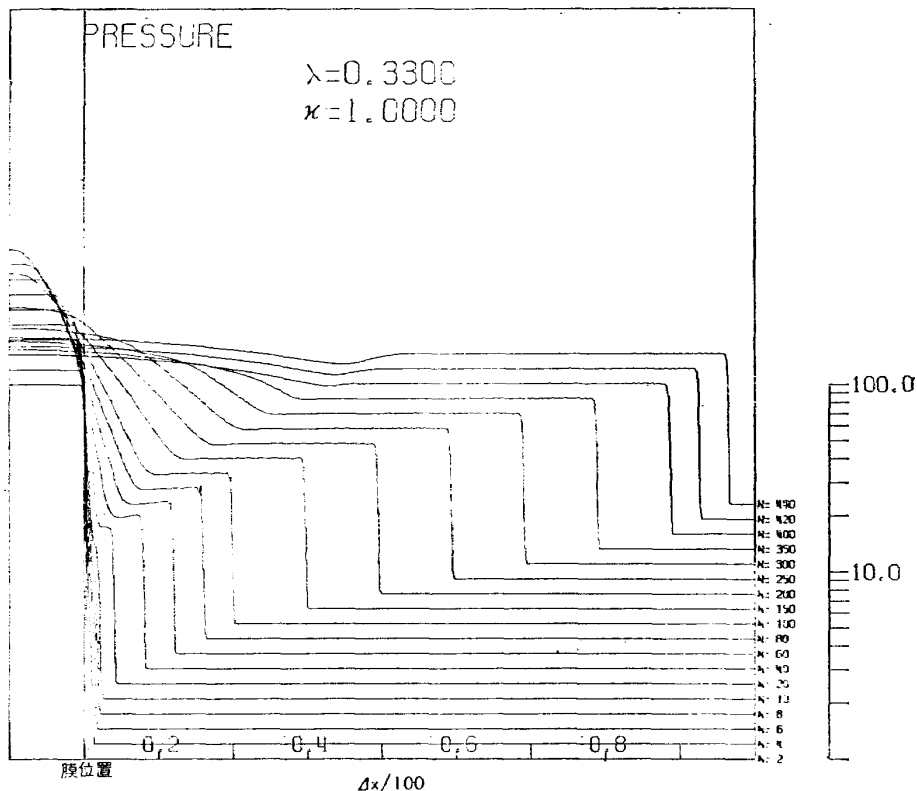


図 17 単段衝撃波管中の圧力プロファイル (反射前)

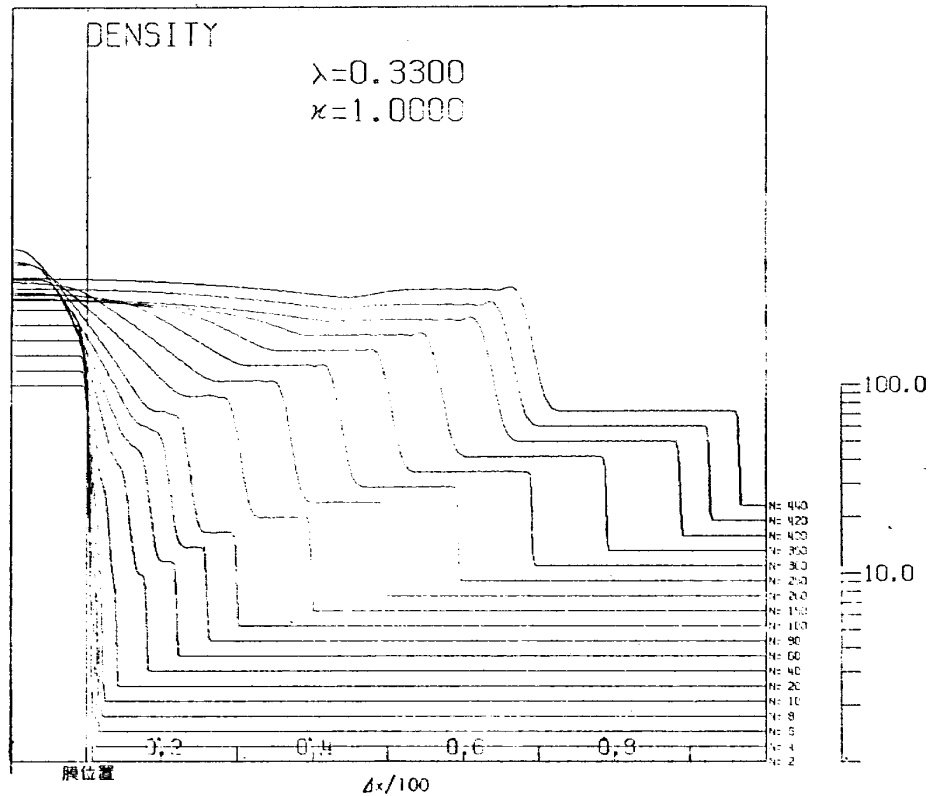


図 18 単段衝撃波管中の密度プロファイル (反射前)

表 1

流 れ 量	厳密解	差分解
衝撃波 マ ッ ハ 数	2.37105	2.380
密 度	3.17565	3.174
圧 力	6.39221	6.393
温 度	2.01289	2.013
粒 子 速 度	1.62442	1.624

なることがわかっている。実際にみられる衝撃波管は10m程度のものであるから、この Δx ではかなり大きな遷移幅を与えるように感じられる。しかし、このような例題計算では、現実の相似化にとられ過ぎるとあまり意味の無い計算時間を消費しなければならないのでこの点にこだわる必要は無い。むしろ物理的に重要な現象がどのように出現するか、あるいは表現されるかに着目するべきである。

第17~20図に、入射衝撃波の形成からそれが右側端末壁に衝突する以前における圧力、密度、温度、および速度の時間的変化が示されている。ただし、これらの図の縦軸は前述した無次元化状態量で、かつ $n\Delta t$ ごとの原点は上方に一定間隔でずらして画いてある。横軸は衝撃波管全長を1にとって表示した格子相対番号で、それぞれを100倍したものが計算における整数

番格子番号となる。

次に、第21~24図においては入射衝撃波が右側端末壁に衝突した後の過程が示される。右側における複雑なプロファイルの意味は後で述べる。その前に第1表で入射衝撃波に関する厳密解との値の比較を示す。

4.4 衝撃波干渉問題の解の例

衝撃波と固体壁、衝撃波同志の干渉などは空気力学において古い問題でありながら十分な探究がなされていない領域である。その原因の多くはことからの複雑性によっている。差分法による解がこれらの探究によい手段を提供すると思われる。

ここでは前節の計算の一つの拡張として、強さの等しい衝撃波の正面衝突の例を扱ってみる。これは2個の衝撃波管を対向させて接合部分に高温高压気体を発生させる実験装置という具体的問題への関連もある。この問題では、左および右側の衝撃波管は同一のものとし、同時刻に破膜させ、左からと右からの衝撃波を中央部で衝突させる。したがって、差分解における境界条件は左右端末の膨脹波部分について壁反射法を適用する。

計算結果として、反射後における流れ量のプロファイルを第25~28図に示す。この計算の初期値は前節と同一で左右対称に設置したものである、衝突直前まで

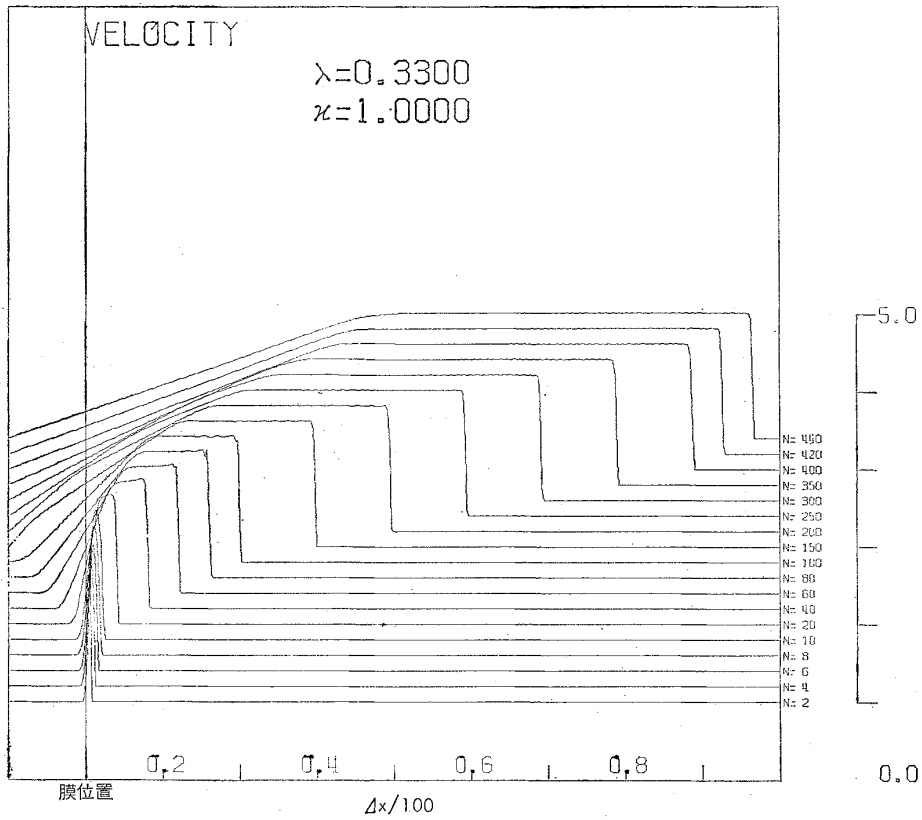


図 19 単段衝撃波管中の速度プロファイル (反射前)

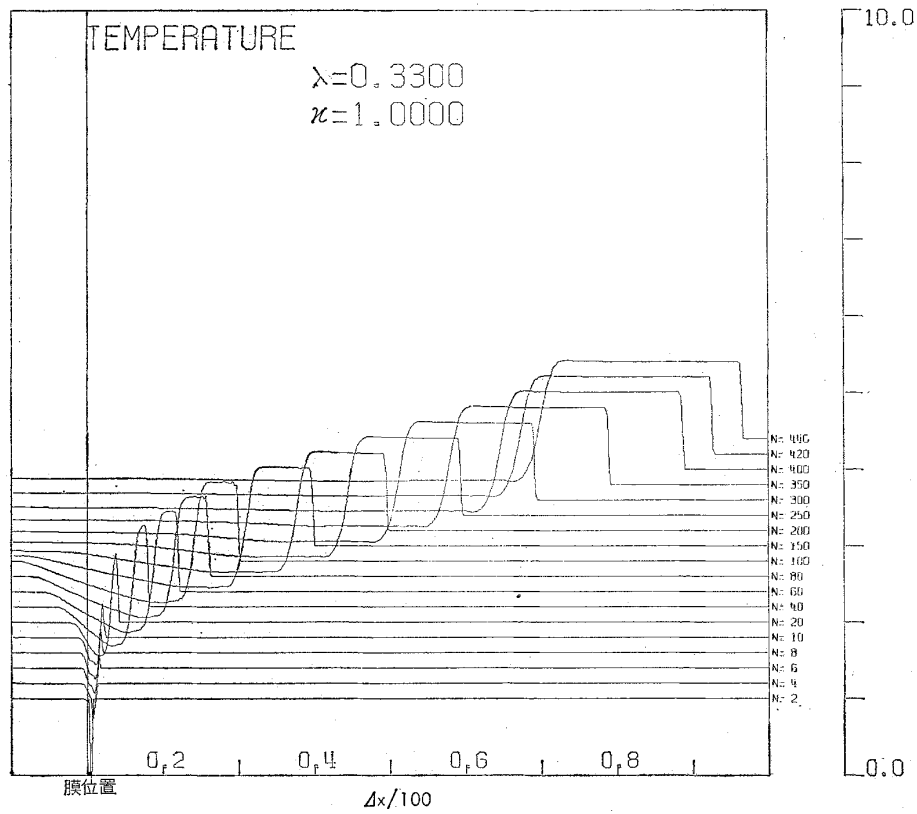


図 20 単段衝撃波管中の温度プロファイル (反射前)

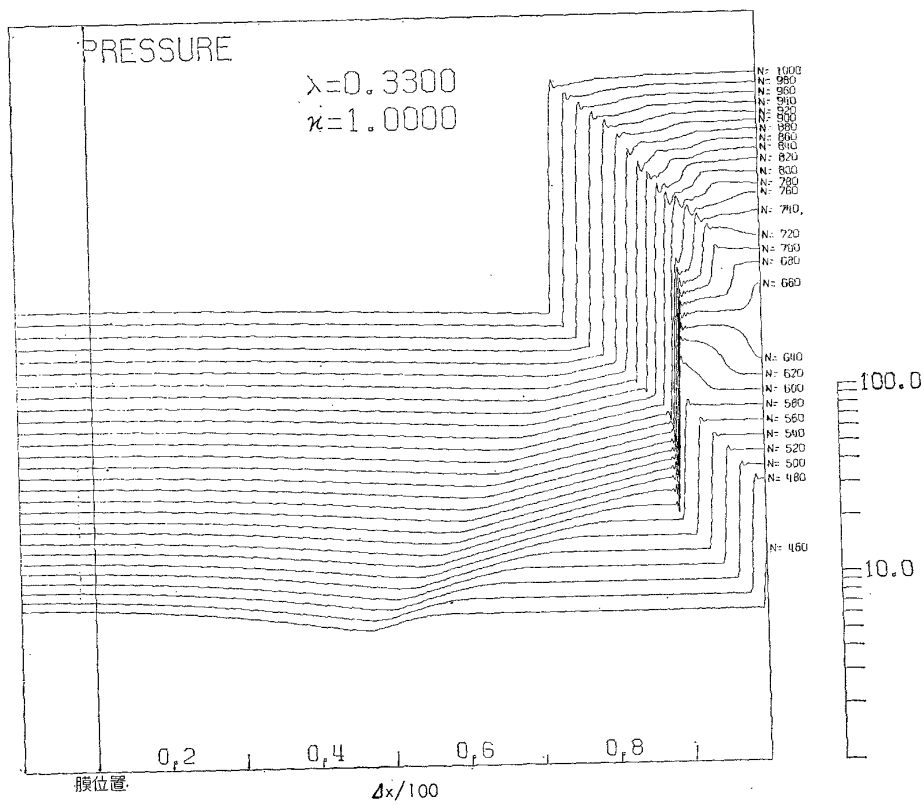


図 21 単段衝撃波管中の圧力プロフィール (反射後)

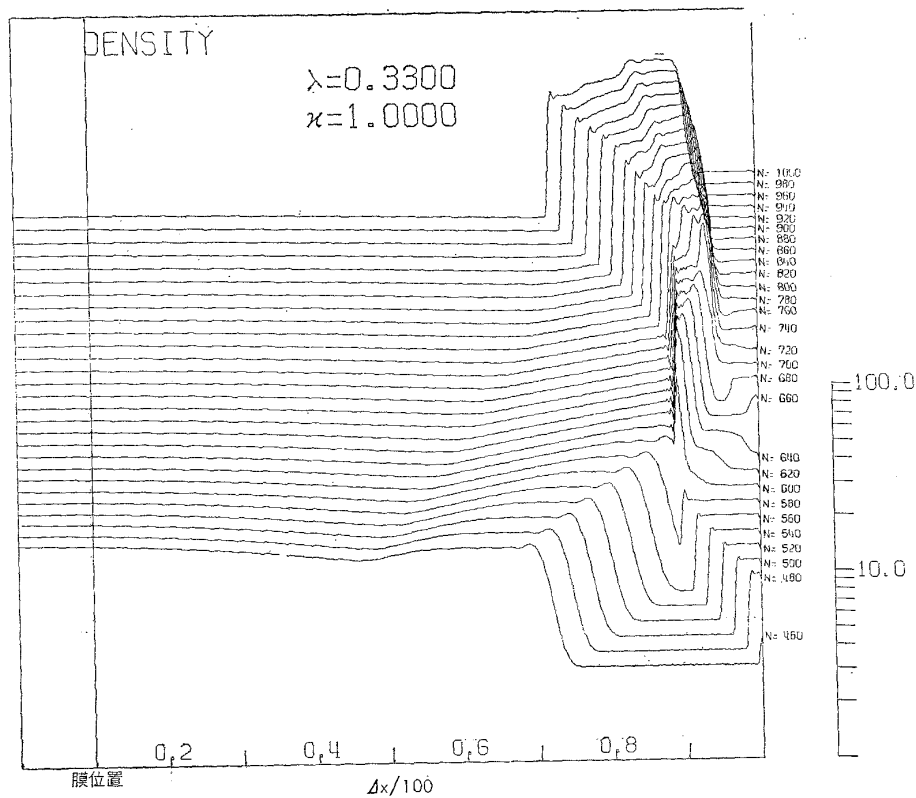


図 22 単段衝撃波管中の密度プロフィール (反射後)

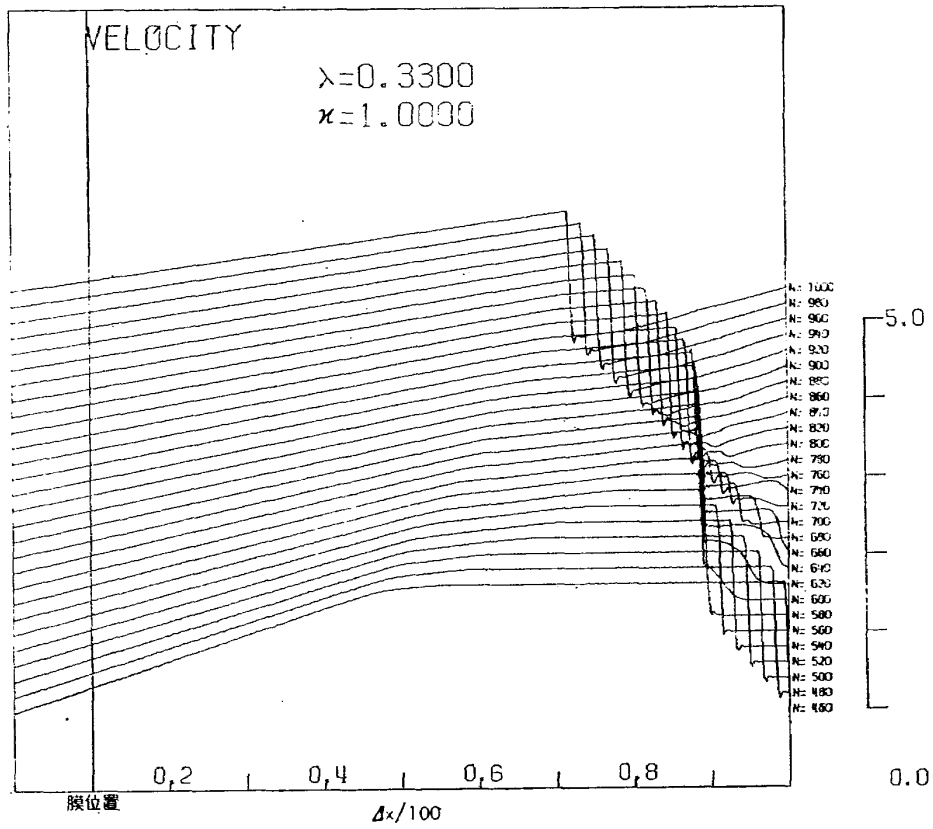


図 23 単段衝撃波管中の速度プロフィール (反射後)

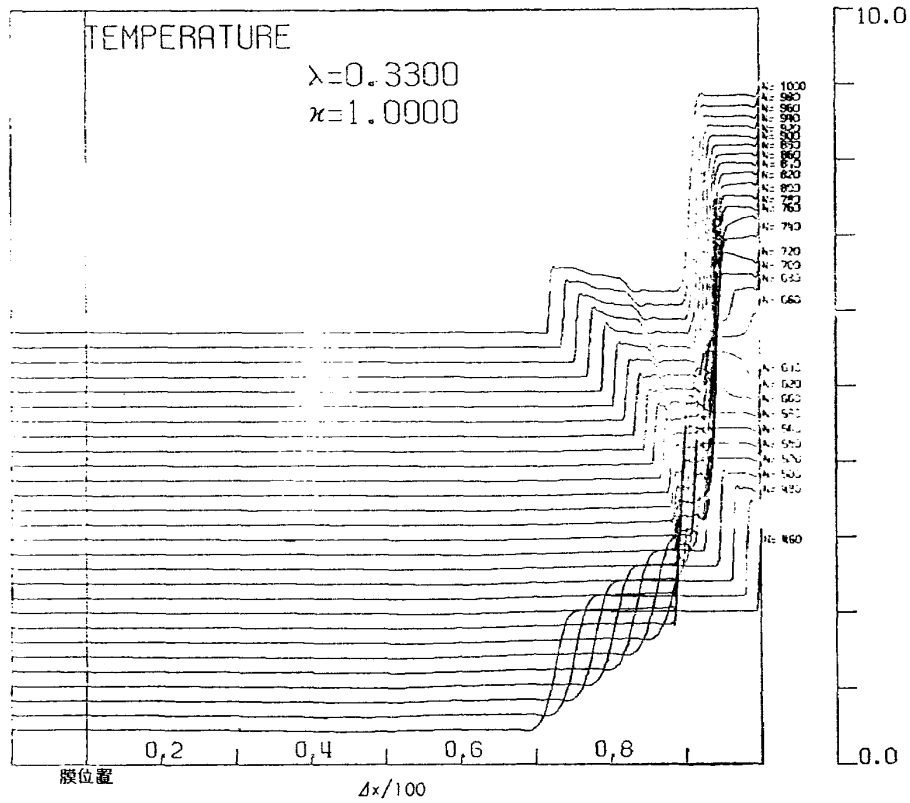


図 24 単段衝撃波管中の温度プロフィール (反射後)

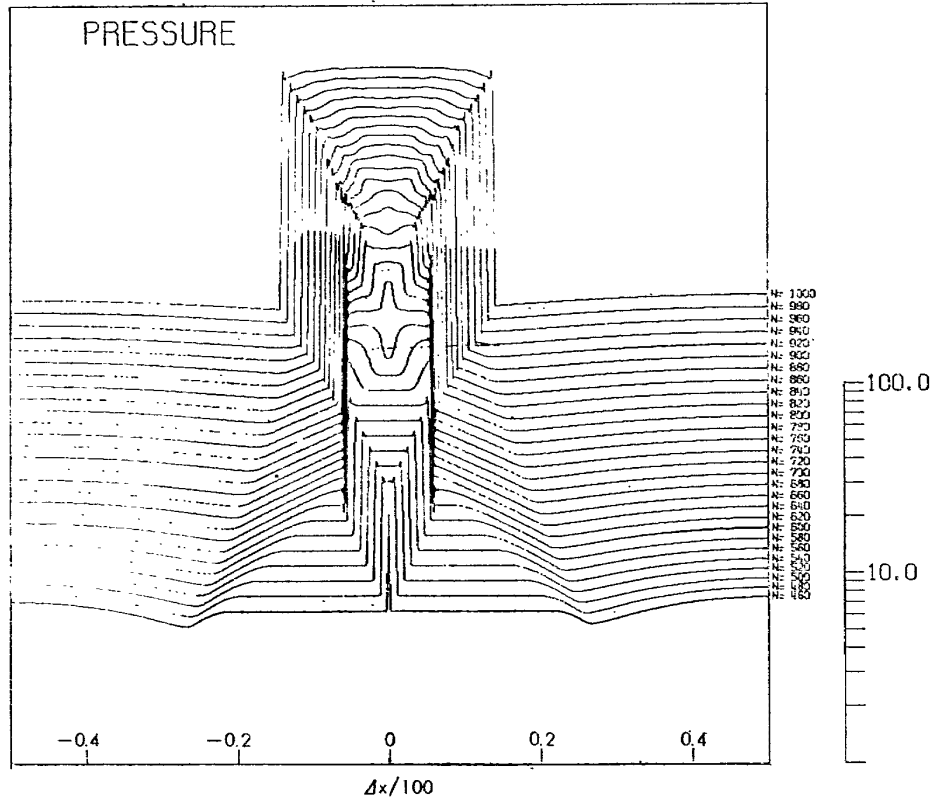


図 25 正面衝突した衝撃波流れの圧力プロフィール

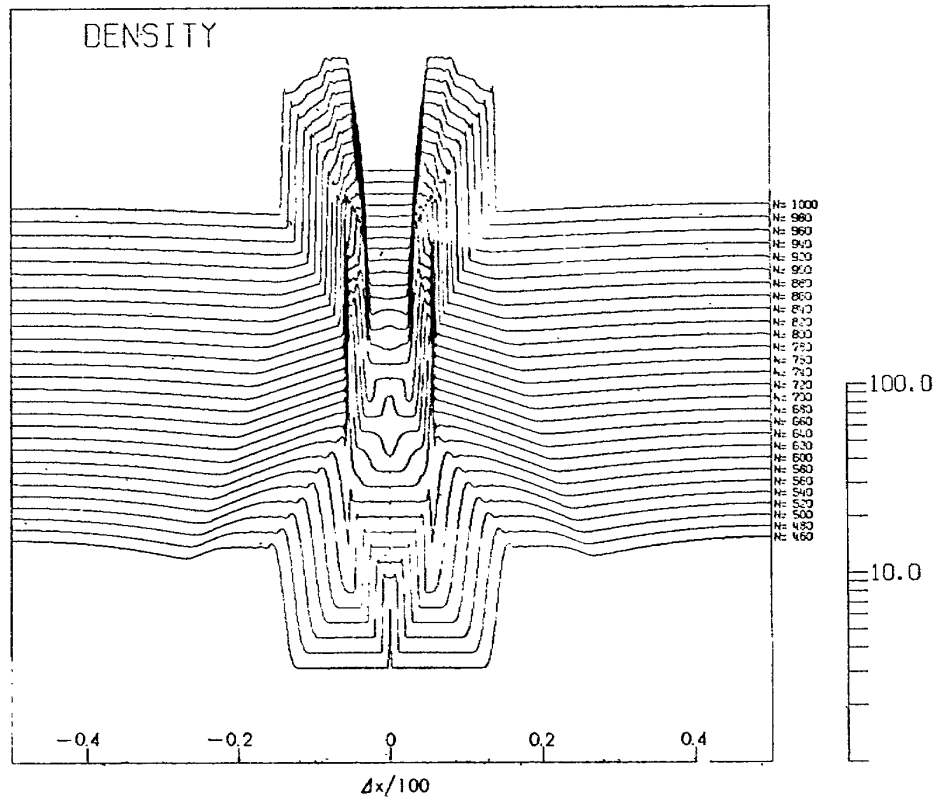


図 26 正面衝突した衝撃波流れの密度プロフィール

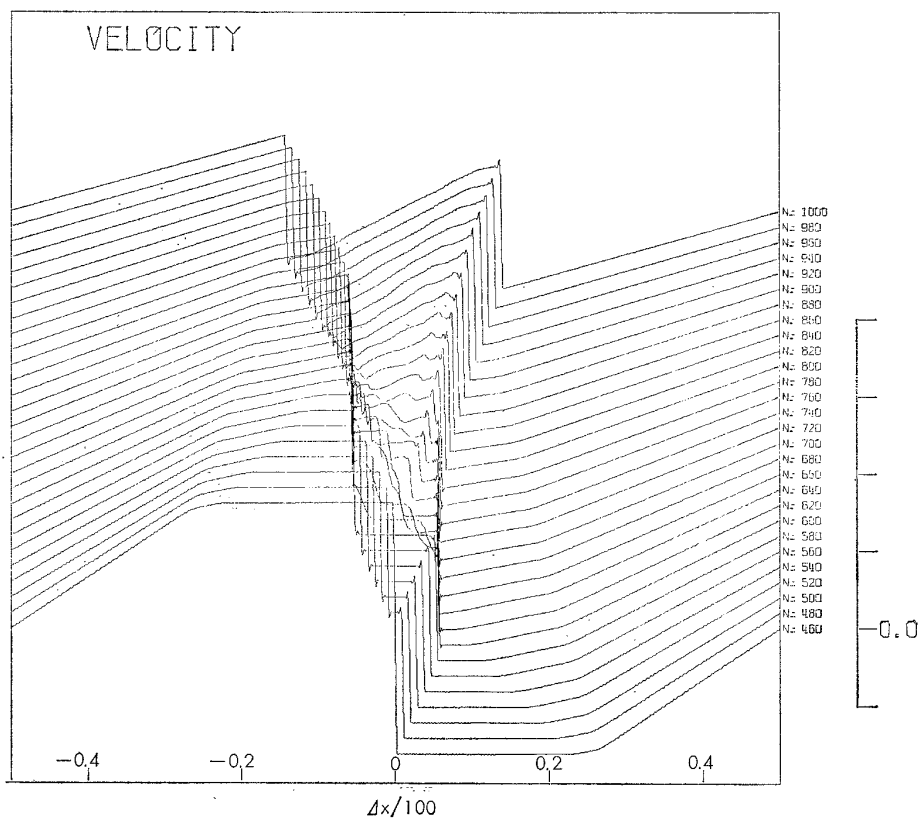


図 27 正面衝突した衝撃波流れの速度プロファイル

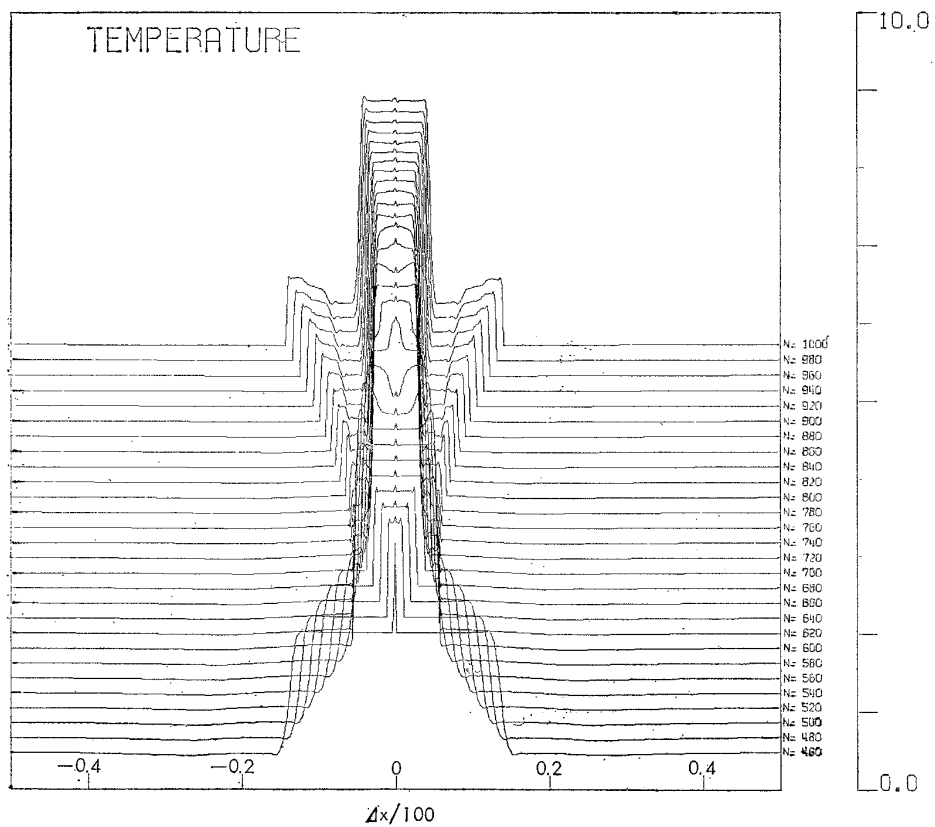


図 28 正面衝突した衝撃波流れの温度プロファイル

は前節と同じはずであるから、実際の計算ではこの時の値を初期値として格子点上に配置し計算をつないだ。結果の図は速度プロファイルが反対称である以外は左右鏡面对称で、かつ前節の結果と完全な重ね合わせができる。これは理論上当然そうあるべきものなので特別な結果ではない。ただ、前節で用いた壁反射法による境界条件の取扱いが誤っていないという意味での重要性は認めておく必要がある。

参考のため厳密解との比較を第2表に示し、この差分法の有用性を強調しておこう。

表 2

流 れ 量*	厳 密 解	差 分 解
衝撃波マッハ数	1.12889	1.081
密 度	7.98990	7.987
圧 力	25.86228	25.86
温 度	3.23687	3.237

* 入射衝撃波第1回目反射後の値、初期静止気体および実験室座標系にたいする値

4. ま と め

本報告では、非線形双曲型偏微分方程式の差分法に関して精度二次をもつ Lax-Wendroff の差分法およびその変形法を数値実験的に調べている。その結果、

- (1) 安定性条件の数値実験的検討については、原論文で提出された安定性条件は安全側にあり過ぎること、および人工粘性係数にたいする安定条件の依存性はあまり大きくないという結論となった。
- (2) 各差分法を通じて、あまり大きくない人工粘性係数、かなり C.F.L. 条件に近い格子比での計算が振動抑圧および一様部分での滑らかさにたいして良い結果を与えている。また計算が若干複雑にはなるが、第2種の変形差分法が差分法相互間の比較では良い結果をもたらすといえる。
- (3) 差分法精度の良さに伴って、多重波動干渉問題の解析に有望であろうという見通しを得た。ただし、接触不連続面を含む流れ場のときは解析にあたって結果の判断に経験を要することを心得ておかねばならない。

以上を総合すると、本報告に引用した差分法を用いて実用計算を行なうにはいく例かの予備計算によって事態の把握を確実にしたのち、効果的に最終結果を得るようすべきであるといえる。差分法は処理情報量が大きいだけに計算計画は十分さを期待すべきであ

り、そうでないと失うものばかりが大きく研究として成功しないということになりかねない。

附録 A. 差分基礎式の導出

本文に示した (2.6)~(2.10) 式を導くのにいくつかの方法がある。ここでは、直観的な理解の容易さよりも取扱いが統一されるという理由から以下のようにする。

まず、格子点 $(j, n+1/2)$ において、偏微分方程式(2.1) を時・空ともに中心差分近似すると

$$w_{j,n+1} = w_{j,n} + \lambda(f_{j+1/2,n+1/2} - f_{j-1/2,n+1/2}) \quad (\text{A.1})$$

が得られる。この式の右辺第2項は、現実の格子点上の w を用いてその値が直接表現できない。したがって、この項を

1) (j, n) 上の w で表現できるような等価な他の表示を探す

2) または、適当な方法で値を評価するのいずれかによって処理する必要がおこる。

1) の一つの方法として、 f の Taylor 展開において (2.1) を考慮すると

$$\begin{aligned} f(t + \Delta t/2) &= f(t) + \frac{\Delta t}{2} \cdot f_t + \dots \\ &= f(t) + \frac{\Delta t}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial w} \right) w_t + \dots \\ &= f(t) + \frac{\Delta t}{2} \cdot A f_x + \dots \quad (\text{A.2}) \end{aligned}$$

が得られることに着目する。ここで A は次のように表現される Jacobian である。

$$A \equiv \frac{\partial f}{\partial w} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ \frac{3-\gamma}{2} u^2 & (\gamma-3)u & 1-\gamma \\ \left[(1-\gamma)u^2 + \gamma \frac{E}{\rho} \right] u & \frac{3}{2}(\gamma-1)u^2 - \gamma \frac{E}{\rho} & -\gamma u \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

(A.1) の第2項は、(A.2) を差分近似した

$$f_{j+1/2,n+1/2} = f_{j+1/2,n} + \frac{\lambda}{2} A_{j+1/2,n} (f_{j+1,n} - f_{j,n})$$

などで書ける。さらに $(j \pm 1/2)$ における f を $\pm 1/2$ 両側格子点の f の平均値で近似すると、(A.1) は結局

* w の値が常時記憶される (j, n) 点のような格子点をさす。

$$w_{j,n+1} = w_{j,n} + \frac{\lambda}{2}(f_{j+1,n} - f_{j-1,n}) + \frac{\lambda^2}{2}[A_{j+1/2,n}(f_{j+1,n} - f_{j,n}) - A_{j-1/2,n}(f_{j,n} - f_{j-1,n})] \quad (\text{A.4})$$

と書き改められる。この式の中の A は後に述べる注意を別として $t=n\Delta t$ 上の w によって表現することができる。したがって、(A.4) は $t=n\Delta t$ における w を用いて $(n+1)\Delta t$ 後の w が1段の計算手順で陽わに求められるという形になっている。これが Lax と Wendroff によって提案された¹⁾ 基本形である。

(A.4) の差分演算の打ち切り誤差が $O(\Delta t^3)$ であるのを知るは容易である。またこの差分演算の繰返し適用による誤差が有界にとどまるための条件、すなわち安定性条件もすでに導き出されている¹⁾。ここでは確認と後の便宜のためにその手順のみを示すことにする。

いま、(A.4) の第2、第3項がそれぞれ f_x および $(Af_x)_x$ の差分近似であることに注意して、これらを

$$f_x = Aw_x \quad (\text{A.5a})$$

$$(Af_x)_x = (A^2w_x)_x \quad (\text{A.5b})$$

に改め、かつ A を(局所的)定数とするならば (A.4) は

$$w_{j,n+1} = w_{j,n} + \frac{\lambda}{2}A(w_{j+1,n} - w_{j-1,n}) + \frac{\lambda^2}{2}A^2(w_{j+1,n} - 2w_{j,n} + w_{j-1,n}) \quad (\text{A.6})$$

となる。この差分式において、 $w_{j,n} = \bar{w}(t)e^{ik\Delta x}$ の形の解を考えて代入し、 Δt 区間における k 高調波の増幅率として整理したものは

$$G = I + i\lambda A \sin \xi + \lambda^2 A^2 (\cos \xi - 1) \quad (\text{A.7})$$

である、ここに $\xi = k\Delta x$ である。次に行列 G の固有値を求め、この最大値の絶対値が1をこえなければよい(von Neumann の条件)というのが安定性の必要十分条件である¹¹⁾、ということを利用する。 A の固有値を μ_i とすれば、(A.7) から簡単な計算により

$$\lambda|\mu_{\max}| \leq 1 \quad (\text{A.8})$$

となって、C.F.L. 条件と一致する安定性であることがわかる。ここでの μ_{\max} は μ_i から選ばれる最大値を意味する。

第2の差分法は、前にも述べたように、(A.1) 右

辺第2項を他の手段で評価する方法である。たとえば Lax の差分法¹²⁾を適用することにより

$$w_{j+1/2,n+1/2} = \frac{1}{2}(w_{j+1,n} + w_{j,n}) + \frac{\lambda}{2}(f_{j+1,n} - f_{j,n}) \quad (\text{A.9})$$

を求めると問題の項が計算できる。したがって計算手順が2段階に分けられたことになる。

(A.9) のように精度一次の差分計算を介在させても差分全体としての精度が二次になっていることを知るのは簡単である。まず (A.5) の関係を考慮して、(A.9) を (A.1) に代入すれば

$$f_{j+1/2,n+1/2} = A_{j+1/2,n+1/2} \left\{ \frac{1}{2}(w_{j+1,n} + w_{j,n}) + \frac{\lambda}{2}(f_{j+1,n} - f_{j,n}) \right\} = \frac{1}{2}(f_{j+1,n} + f_{j,n}) + \frac{\lambda}{2}A_{j+1/2,n}(f_{j+1,n} - f_{j,n})$$

などと整理され、基本形 (A.4) に到達できることが確認されるからである。またこの差分法の安定性条件が (A.8) であることももちろんである。

第3の差分法は上記と同じ2段階法に属するものである。(A.1) 右辺第2項を t と $t+\Delta t$ との値の平均で近似すれば

$$f_{j+1/2,n+1/2} - f_{j-1/2,n+1/2} = \frac{1}{2}(f_{j+1/2,n} + f_{j+1/2,n+1}) - \frac{1}{2}(f_{j-1/2,n} + f_{j-1/2,n+1}) = \frac{1}{4}(f_{j+1,n} - f_{j-1,n}) + \frac{1}{2}(f_{j+1/2,n+1} - f_{j-1/2,n+1})$$

となるので、(A.1) の代りに

$$w_{j,n+1} = w_{j,n} + \frac{\lambda}{2} \left\{ \frac{1}{2}(f_{j+1,n} - f_{j-1,n}) + (f_{j+1/2,n+1} - f_{j-1/2,n+1}) \right\} \quad (\text{A.10})$$

が使えることになる。このときの中間値は前と同じく Lax 差分

$$w_{j+1/2,n+1} = \frac{1}{2}(w_{j+1,n} + w_{j,n}) + \lambda(f_{j+1,n} - f_{j,n}) \quad (\text{A.11})$$

などで計算される。この差分法の精度が二次であることの証明は第2法と同じにすればよい、したがってその安定性条件も (A.8) で与えられる。

以上3種類の差分基礎式が同一の原理から導かれ、かつ同一の精度をもつにもかかわらず本文の計算例でみたように微妙な差異を示すのは恐らく次のような事情によるものと推定される。

おのおのの差分基礎式において三次までの展開を計算してみると、

1)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} [w(x, t + \Delta t) - w(x, t)] \\ &= w_t(x, t) + \frac{\Delta t}{2} w_{tt}(x, t) + \frac{\Delta t^2}{6} w_{ttt}(x, t) \\ & \quad + \frac{\Delta t^3}{24} w_{tttt}(x, t) \\ &= f_x + \frac{\Delta t}{2} \cdot f_{xt} + \frac{\Delta t^2}{6} f_{xtt} + \frac{\Delta t^3}{24} f_{xttt} \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\left\{ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \right. \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2} \left\{ f_t\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f_t\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \\ & \quad + \frac{\Delta t^2}{6} \left\{ f_{tt}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f_{tt}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \\ & \quad \left. + \frac{\Delta t^3}{24} \left\{ f_{ttt}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f_{ttt}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 12})$$

2)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} [w(x, t + \Delta t) - w(x, t)] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t + \frac{\Delta t}{2}\right) \right. \\ & \quad \left. + \frac{\Delta t}{2} \right] \\ &= \frac{1}{\Delta x} \left[\left\{ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \right. \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2} \left\{ f_t\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f_t\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \\ & \quad + \frac{\Delta t^2}{8} \left\{ f_{tt}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f_{tt}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \\ & \quad \left. + \frac{\Delta t^3}{48} \left\{ f_{ttt}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f_{ttt}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 13})$$

3)

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t} [w(x, t + \Delta t) - w(x, t)] \\ &= \frac{1}{2\Delta x} \left[\frac{f(x + \Delta x, t) - f(x - \Delta x, t)}{2} \right. \\ & \quad \left. + \left\{ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t + \Delta t\right) \right\} \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\Delta x} \left[\left\{ f\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \right. \\ & \quad + \frac{\Delta t}{2} \left\{ f_t\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f_t\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \\ & \quad + \frac{\Delta t^2}{4} \left\{ f_{tt}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f_{tt}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \\ & \quad \left. + \frac{\Delta t^3}{12} \left\{ f_{ttt}\left(x + \frac{\Delta x}{2}, t\right) - f_{ttt}\left(x - \frac{\Delta x}{2}, t\right) \right\} \right] \end{aligned} \quad (\text{A. 14})$$

で表わされることがわかる。これらの展開を比較すると、差分法3種とも Δt の0次と1次とは全く一致するが

$$\Delta t^2 \text{ の係数} \quad \frac{1}{6} : \frac{1}{8} : \frac{1}{4}$$

$$\Delta t^3 \text{ の係数} \quad \frac{1}{24} : \frac{1}{48} : \frac{1}{12}$$

と異なっていることが認められる。

[注意]: $A_{j+1/2, n}$ の数値表示

$A_{j+1/2, n}$ の表示にさいして、 j と $j+1$ の値の平均という表現が用いられた。差分法理論展開の上でこのような表現法はあまり問題を生じない、ところが数値計算上ではこの表現にあいまいさがあるといえる。すなわち $A_{j+1/2, n}$ の表示として

$$\frac{1}{2} \{A(w_{j+1, n}) + A(w_{j, n})\} \quad (\text{A. 15})$$

および

$$A\left\{\frac{1}{2}(w_{j+1, n} + w_{j, n})\right\} \quad (\text{A. 16})$$

の二通りの可能性があるからである。実際に、文献1)と4)などでは(A.15)の表示が、文献11)では(A.16)が用いられている。本報告では(A.5)の関係をより厳密に表現するという立場から(A.16)を使用した。本報告中には引用しなかったが、予備的に(A.15)を用いたものとの比較で大きな差異を生ずることは無いが(A.16)のほうがわずかに振動が少ないという結果を得ている。

附録 B. 人工粘性項

Lax-Wendroff らは数学的次元 (w の成分が1) の微分方程式において人工粘性項がとるべき形式について議論したのち、多次元 (w の成分が複数) への拡張を模写的に行なうのが合理的であると主張する¹⁾。このため基本形式として

$$\frac{\lambda}{2} \{Q_{j+1/2,n}(w_{j+1,n} - w_{j,n}) - Q_{j-1/2,n}(w_{j,n} - w_{j-1,n})\} \quad (\text{B.1})$$

をとり、行列 Q に対して

(1) Q は A と可換

(2) Q の固有値は $|\mu_{j+1,n} - \mu_{j,n}|$ のごとく隣接格子点 A の固有値の差の絶対値に比例する

の条件を要請することになる。この結果 (1) から

$$Q = g_0 I + g_1 \bar{A} + g_2 \bar{A}^2 \quad (\text{B.2})$$

の形式で、(2) を満足するように係数を内挿で定めてやればよいことになる。

Lagrange 内挿を用いることとし

$$\bar{Q} = \sum_{k=0, l \neq k, m \neq l \neq k}^2 \alpha_k (\bar{A} - \mu_l) (\bar{A} - \mu_m) \quad (\text{B.3})$$

とにおいて、これを展開し (B.2) と比較する。固有値 μ はよく知られているように

$$u+c, \quad u, \quad u-c \quad (c = \sqrt{\gamma p / \rho})$$

であるから整理された結果として

$$\begin{aligned} g_0 &= \frac{\kappa}{4\bar{c}^2} \{ \bar{u}(\bar{u}-\bar{c}) |\Delta(u+c)| - 2(\bar{u}+\bar{c})(\bar{u}-\bar{c}) |\Delta u| \\ &\quad + \bar{u}(\bar{u}+\bar{c}) |\Delta(u-c)| \} \\ g_1 &= -\frac{\kappa}{4\bar{c}^2} \{ (2\bar{u}-\bar{c}) |\Delta(u+c)| - 4\bar{u} |\Delta u| \\ &\quad + (2\bar{u}+\bar{c}) |\Delta(u-c)| \} \\ g_2 &= \frac{\kappa}{4\bar{c}^2} (|\Delta(u+c)| - 2|\Delta u| + |\Delta(u-c)|) \quad (\text{B.4}) \end{aligned}$$

が得られる。式中

$$\bar{u} = \frac{1}{2}(u_{j+1,n} + u_{j,n})$$

$$|\Delta u| = |u_{j+1,n} - u_{j,n}|$$

などで、 κ は $O(1)$ の定数とし α_k のすべてに共通であるとした*。

* $\kappa_1 \neq \kappa_2 \neq \kappa_3$ と選んでも本質的には差支えない、このとき (B.4) の各因子の前にこれらが表われる。

文 献

- 1) Lax, P.D., and B. Wendroff; Systems of Conservation Laws, Comm. Pure Appl. Math., Vol. 13, 1960, pp. 217-237.
- 2) Lax, P.D., and B. Wendroff, Difference Schemes for Hyperbolic Equations with High Order of Accuracy, Comm. Pure Appl. Math., Vol.17, 1964, pp. 381-398.
- 3) Burstein, S.Z.; Numerical Methods in Multidimensional Shocked Flows, AIAA J. Vol. 2, No. 12, 1964, pp. 2111-2117.
- 4) Gary, J.; On Certain Finite Difference Schemes for Hyperbolic Systems, Math. Comp. Vol. 18, 1964, pp. 1-18.
- 5) Richtmyer, R.D. and K.W. Morton; Stability Studies for Difference Equations, NYO-1480-5, 1964.
- 6) Burstein, S.Z.; Finite-Difference Calculations for Hydrodynamic Flows Containing Discontinuities, J. Comp. Phys., Vol. 1, 1967, pp. 198-222.
- 7) Rubin, E.L. and S.Z. Burstein; Difference Methods for the Inviscid and Viscous Equations of a Compressible Gas, J. Comp. Phys. Vol. 2, 1967, pp. 178-196.
- 8) Emery, A.F.; An Evaluation of Several Differencing Methods for Inviscid Fluid Flow Problems, J. Comp. Phys. Vol. 2, 1968, pp. 306-331.
- 9) Gourlay, A. R. and J. Ll. Morris; Finite-Difference Methods for Nonlinear Hyperbolic Systems, Math. Comp. Vol. 22, 1968, pp. 28-39.
- 10) Gourlay, A.R. and J.Ll. Morris; Finite-Difference Methods for Nonlinear Hyperbolic Systems. II. Math. Comp. Vol. 22, 1968, pp. 549-556.
- 11) Richtmyer, R.D. and K.W. Morton; Difference Methods for Initial-Value Problems, 2nd. Ed., Interscience Publishers, 1967.
- 12) Lax, P.D.; Weak Solution of Nonlinear Hyperbolic Equations and Their Numerical Computation, Comm. Pure. Appl. Math., Vol. 7, 1954, pp. 159-193.

TR-209	フライングテストベッド用偏向ジェットパイ プの模型実験 Mode Test on Detected Jet Pipes of NAL Flying Test Bed	1970年10月	田辺義一
TR-210	自由飛行模型 FFM-10 の空力特性について On the Aerodynamic Characteristics of a Free Flight Model FFM-10	1970年8月	河崎俊夫, 斎藤秀夫 河本 巖
TR-211	ジェット・フラップ・ローターのホバ特性に 関する一模型実験 A Model Test on Hovering Characteristics of Jet-Flapped Rotor	1970年9月	吉田真幸, 戸田亘洋 岡 遠一, 高沢金吾
TR-212	二重噴流の空力的騒音 Aerodynamic Noise of a Circular Double Jet	1970年10月	河野長正
TR-213	ジンバルエンジン駆動用 DPF 方式油圧サー ボの試作研究 A Study of Gimbal-Engine Actuated Hydraulic Servomechanism with DPF Hydro-mechanical Compensation Network	1970年9月	畑山茂樹, 奥石 肇
TR-214	軸流圧縮機動翼植込部の疲れについての実験 的研究 (隙間のあるピン接合部) Experimental Investigation of Fatigue Strength of Axial Flow Compressor Blade Root --Point Joint Lug Having Clearance between Pin and Pin-Hole--	1970年9月	池田為治, 山岸 崇
TR-215	ジェット輸送機の操縦のタスクアナリシス Tax Analysis of Jet Transport (DC-8)	1970年10月	樋口一雄, 百名盛之 三好範子, 岡部正典 川原弘靖
TR-216	横風中の3次元乱流ジェットの湾曲と発達 Bending and Development Three-dimensio- nal Turbulent Jets in a Gross Wind	1970年9月	遠藤 浩, 中村正義

航空宇宙技術研究所報告 217 号

昭和 45 年 9 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) ☎182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2~27~12
