

UDC 518.6:532.526.4:
533.6.011

NAL TR-219

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-219

二次元非圧縮性乱流境界層の近似について

尾形吉和

1970年10月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-200	フライングテストベッドの高度制御システムの検討 (II) シミュレーションによる二, 三の問題点の検討 Analytical and Simulation Studies on the Height Control System of Flying Test Bed (II) On Some Problems	1970年 6月	堀川勇壮, 甲斐忠夫
TR-201	FA-200 改機の風洞試験 (III) 地面効果 Low Speed Wind Tunnel Test of the FA-200-XS Airplane Model Influenced with Ground Effects	1970年 7月	広末健一, 高橋 宏 小野孝次, 桑野尚明
TR-202	過酸化水素分解ロケットモータの実験 The Experimental Investigation of Monopropellant Hydrogen Peroxide Reactor	1970年 7月	清水昭紀, 種村利春
TR-203	固体ロケット多分力テストスタンドの精度について On the Accuracy of the Multi-Component Test Stand	1970年 7月	石井進一, 山田 晃 鎮西信夫, 引地豊三 工藤賢司
TR-204	ジェットエンジン燃焼器の燃焼性能の研究 Investigation of Combustion Performance of Turbojet Combustor	1970年 7月	大塚貞吉, 堀内正司 本間幸吉
TR-205	差分法による2次元非定常ノズル流の数値計算 Finite Difference Calculations of Two-dimensional Nonsteady Nozzle Flows	1970年 8月	石黒登美子
TR-206	航空機の横操縦を行なう人間の動特性についてのシミュレータ実験 (1自由度の場合) A Simulator Experiment to Investigate the Human Behavior in Tracking Tasks	1970年 8月	別府護郎, 坂井紀穂 吉田純一
TR-207	境界層内圧力変動による板の振動解析 (I) ——周辺単純支持板—— Response Analysis of the Simply Supported Plate of Boundary Layer Pressure Fluctuations	1970年 9月	藤森義典
TR-208	ガスタービン燃焼器 Gas Turbine Combustors	1970年 9月	鈴木邦男, 田丸 卓 堀内正司, 斉藤 隆
TR-209	フライングテストベッド用偏向ジェットパイプの模型実験 Model Test on Deflected Jet Pipes of NAL Flying Test Bed	1970年10月	田辺義一
TR-210	自由飛行模型 FFM-10 の空力特性について On the Aerodynamic Characteristics of a Free Flight Model FFM-10	1970年 8月	河崎俊夫, 斉藤秀夫 河本 巖
TR-211	ジェット・フラップ・ローターのホバ特性に関する一模型実験 A Model Test on Hovering Characteristics of Jet-Flapped Rotor	1970年 9月	吉田真幸, 戸田亘洋 岡 遠一, 高沢金吾
TR-212	二重噴流の空力的騒音 Aerodynamic Noise of a Circular Double Jet	1970年10月	河野長正
TR-213	ジンバルエンジン駆動用 DPF 方式油圧サーボの試作研究 A Study of Gimbal-Engine Actuated Hydraulic Servomechanism with DPF Hydromechanical Compensation Network	1970年 9月	畑山茂樹, 興石 肇
TR-214	軸流圧縮機動翼機植込部の疲労についての実験的研究 (隙間のあるピン接合ラグ) Experimental Investigation of Fatigue Strength of Axial Flow Compressor Blade Root—Pin Joint Lug Having Clearance between Pin and Pin-Hole—	1970年 9月	池田為治, 山岸 崇

二次元非圧縮性乱流境界層の近似について*

尾 形 吉 和**

On an Approximation of the Two-Dimensional Incompressible Turbulent Boundary Layer

By Yoshikazu OGATA

SUMMARY

An expression for the mean velocity profile of the turbulent boundary layer is discussed. According to this expression, relations between the characteristic parameters of the boundary layer are then constructed and compared with those derived from empirical formulas. The auxiliary equation presented for the calculation of the form parameter is based on the use of the energy integral equation in which the term of the shear stress work integral is evaluated with the assumption of the mixing length concept. This approximation is applicable, in place of existing empirical relations, to the calculation of the turbulent boundary layer developing under an arbitrary pressure gradient. Some numerical examples are illustrated and compared with experimental data published by various authors, together with the calculated results of Head's entrainment equation.

主な記号

$A(\eta)$ λ を規定する多項式
 C 対数法則に現われる実験定数 (=5.25)
 e 剪断応力のなす仕事
 F Head の entrainment の速度を無次元化した量
 H, H_1, \bar{H} 境界層の形状パラメータ, Head のパラメータ (H_{e-3*}), エネルギー厚さに関する形状パラメータ
 K, K^* van Driest の減衰率に現われる実験定数 (長さの次元), $\frac{Ku_r}{\nu}$ (=26)
 l 混合距離
 R_θ θ に基づいた局所レイノルズ数 $U\theta/\nu$
 U 境界層の外の局所流速
 u 境界層内平均流速 x 方向成分
 u_r 摩擦速度 $\sqrt{\tau_0/\rho}$

x, y 直交座標, x は物体表面に沿った距離
 y^* yu_r/ν 無次元量
 $\delta, \delta^*, \delta^{**}$ 境界層の見かけの厚さ, 排除厚さ, エネルギー厚さ
 η y/δ
 θ 境界層の運動量厚さ
 κ 対数法則に現われる実験定数 (=0.4)
 μ 流体粘性係数
 ν 流体動粘性係数
 ρ 流体密度
 τ, τ_0 剪断応力, 壁面における剪断応力
 ϕ, ψ 補助方程式を一般化したとき表わされる関数
 ϕ 境界層内平均速度分布と対数法則とのずれに関係した量
 $\chi(\eta)$ 境界層内平均速度分布を表わす成分

1. 結 言

二次元非圧縮性の定常な乱流境界層について, 最初に従来の数多い計算方法を概観してみよう。乱流境界

* 昭和45年6月23日受付

** 空気力学第2部

層の主問題点の一つは乱流剪断応力の性質が十分に解明されていない点にある。このため一般に任意の速度勾配のもとで発達する乱流境界層は境界層方程式を壁に垂直な向きに一回積分した型、すなわち次式に示すような運動量積分式¹⁾と呼ばれる式で、積分された量について解かれるのが普通である。

$$\frac{d\theta}{dx} + (H+2)\frac{\theta}{U}\frac{dU}{dx} = \frac{\tau_0}{\rho U^3} \quad (1.1)$$

(1.1) は θ レイノルズ数を用いて次のようにも書かれる。

$$\frac{dR_\theta}{dx} + (H+1)\frac{R_\theta}{U}\frac{dU}{dx} = \frac{U}{\nu}\frac{\tau_0}{\rho U^3} \quad (1.2)$$

θ 若しくは R_θ を未知数と考えたとき上式を解くにはさらに二つの式が必要である。すなわち境界層の外の流れの速度 U が与えられている順問題では、一つは境界層の形状を表わす H に関する情報であり、いま一つは壁における摩擦応力 $\tau_0/\rho U^3$ に関するものである。

$\tau_0/\rho U^3$ に関しては次の Ludwig-Tillmann²⁾ の式 (1.3) が有名で最もしばしば用いられる。

$$\frac{\tau_0}{\rho U^3} = 0.123 \times 10^{-0.678H} \left(\frac{U\theta}{\nu} \right)^{-0.368} \quad (1.3)$$

形状パラメータに関する式は、補助方程式とも呼ばれ、内容的に次の三通りに大別される。すなわち von Doenhoff & Tetervine³⁾, Garner⁴⁾ 等の純然たる経験式である場合、エネルギー積分式に基づいたもので Trücken-brodt¹⁾ に代表される半経験式である場合(同じくエネルギー積分式に基づいても河崎⁵⁾ の平衡境界層を利用した仮説によって導かれたものもある)、さらに Head の entrainment の考えによる経験式とである。

これらの補助方程式は型の上では次に示すような1階微分方程式に書くことができる。⁷⁾

$$\theta \frac{dH}{dx} = \Phi \Gamma - \Psi \quad (1.4)$$

ただし $\Gamma = -\frac{\theta}{U} \frac{dU}{dx}$ である。

剪断応力の分布、したがって形状パラメータの変化は境界層の上流の履歴の影響を受けることが認められている。Buri¹⁾ は補助方程式を (1.4) とは別の型で、 $H=f(\Gamma R_\theta^{1/4})$ と与えたが、Buri の式では上流の影響が全く無視されている点で不利である。(1.4) によれば H の値は H の初期条件で定まるという点で上流の影響が加味されていることになる。これら多様

な経験式によっても結果は必ずしも如何なる場合にも実験値と良好に一致するとは限らない。Thompson⁷⁾ は数多い計算法の中でも、補助方程式に関して Head の entrainment の式が最も平均して良い結果を与えることを述べている。

しかし補助方程式を1階微分方程式の型で与えることも妥当であるとはいえない。 H は計算の始点である H の初期値のみならず dH/dx の初期値にもまた依存するであろうということが推察されて、(1.4) はさらに2階微分方程式の型にとって替えられるべきであるということを Bradshaw⁸⁾ や Nash⁹⁾ 等が指摘している。このような補助方程式の多様さは一に乱流剪断応力の性質の不明確さに帰せられる。

本文は乱流境界層の発達の実用計算のための一つの近似方法について述べたものである。その特異な点は、層内の平均速度分布を2パラメータの概念から合理的に表示することによって境界層パラメータ間の関係を説明したこと、運動量輸送理論の立場から混合距離を仮定することによってエネルギー積分式右辺の剪断応力のなす仕事の積分を評価したこと、従来の経験式に替えて、これらの結果を用いて境界層の発達を計算したことである。得られた補助方程式は (1.4) の型の1階微分方程式の範疇に位置する。適用例では本文の計算は、Head の式による計算結果と併せて、測定値と比較して述べてある。

2. 乱流境界層内平均速度分布

境界層の内部の壁面近傍は粘性の作用が著しい層流底層を形成している。それに続いて剪断応力におよぼす粘性の作用は次第に減衰し乱流成分が優位を占める領域が存在する。この領域では流れの状態はほぼ壁面の粗滑の状態と壁からの距離とによって定まり、いわゆる対数法則が成り立っているとみられる。対数法則は理論上境界層の外の流れの速度勾配がない場合に混合距離を壁からの距離に比例するものと仮定することによってよく説明できる。層流底層を含めてこの領域までは内側の領域と呼ばれている。

それに続いた外側の領域は境界層厚さの主要部分を占め、壁面からの影響よりは境界層の外の流れの影響を大きく受けて対数法則で表わされる速度分布からの差違が顕著になる。

いま内側の領域の平均速度分布を $f(y_*)$ で表わし、外側の領域の速度分布と $f(y_*)$ との差異を χ で表わすと、乱流境界層内の平均速度分布は次のように書くことができる。

$$\frac{u}{u_\tau} = f(y_*) + \chi \quad (2.1)$$

層流底層の厚さは境界層厚さに比して無視できるほど小さいから、これを無視して $f(y_*)$ は対数法則を用いてもよい。あるいは層流底層をも考慮に入れるときは van Driest¹⁰⁾ の例がある。van Driest は混合距離に $[1 - \exp(-y/K)]$ で表わされる減衰率なるものを導入し層流底層から対数法則の領域へ速度分布を滑らかに結び付け、速度分布の測定値と良く一致することを示した。van Driest によれば $f(y_*)$ を次のように表わすことができる。

$$f(y_*) = \int_0^{y_*} \frac{2 dy_*}{1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2 y_*^2 [1 - \exp(-y_*/K_*)]^2}} \quad (2.2)$$

(2.2) の壁面への漸近式は、

$$f(y_*) = y_* \quad (2.3)$$

これは層流底層を表わし、大きな y_* に対する漸近式は、

$$f(y_*) = C + \frac{1}{\kappa} \ln y_* \quad (2.4)$$

で対数法則に外ならない。ここでは $f(y_*)$ を (2.2) で与え、便宜に応じて層流底層を無視した (2.4) を用いることにする。

次に χ についての条件を考える。

$\eta = \eta_0$ より滑らかに差異が始まるものとする。また境界層の外縁で差異は最大となりこれを $2\phi/\kappa$ で表わす。さらに速度分布は境界層の外の流れと滑らかに連なるべきであるから、外縁において $(f + \chi)_{\eta} = (f + \chi)_{\eta_0} = \dots = 0$ が成立すべきであるが、この条件は $\chi_{\eta} = \chi_{\eta_0} = \dots = 0$ と理想化される。

Pohlhausen の層流の計算にならって χ を η の多項式で近似するとき、

$$\begin{aligned} \eta = \eta_0; \quad \chi &= 0 \\ \chi_{\eta} &= 0 \\ \eta = 1; \quad \chi &= 2\phi/\kappa \\ \chi_{\eta} &= 0 \end{aligned}$$

の条件によって χ は次式のように表わされる。

$$\chi = \frac{\phi}{\kappa} A(\zeta) \quad (2.5)$$

ただし

$$A(\zeta) = 2\zeta^3(3 - 2\zeta) \quad (2.6)$$

$$\zeta = (\eta - \eta_0)/(1 - \eta_0) \quad (2.7)$$

したがって (2.1) は次のようになる。

$$\frac{u}{u_\tau} = f(y_*) + \frac{\phi}{\kappa} A(\zeta) \quad (2.8)$$

(2.8) の右辺第 2 項は Coles¹¹⁾ の the law of wake に対応した項である。 $A(\zeta)$ を Coles の wake function と比較すると図 1 のように良く一致していること

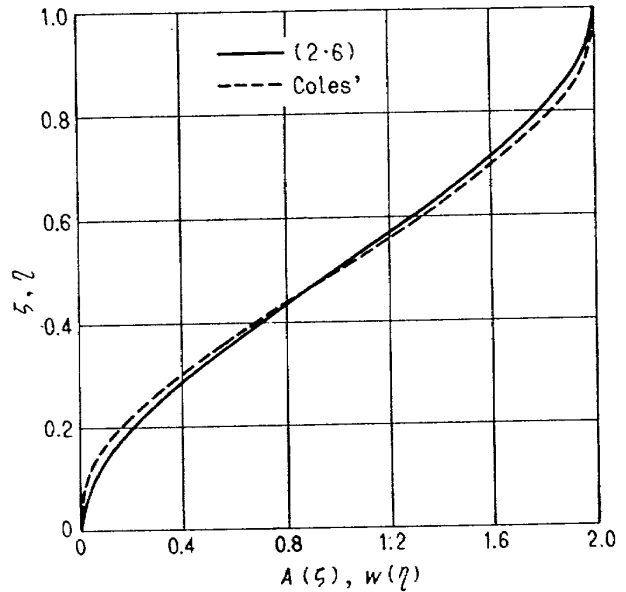


図 1

が示される。以上の説明によると η_0 は内側の領域と外側の領域との境界を指しているが、明確な区画があるわけではない。物理的には境界層の外の流れの影響は境界層全体に及ぶべきものであり、層流底層ではその影響が無視できるとしても η_0 はたかだか層流底層の大きさの程度であろう。したがって以後 $\eta_0 = 0$ と考えて $\zeta = \eta$ とみなす。 $f(y_*)$ を (2.4) で近似するとき、

$$\frac{u}{u_\tau} = C + \frac{1}{\kappa} \ln y_* + \frac{\phi}{\kappa} A(\eta) \quad (2.9)$$

である。特に境界層の外縁で、

$$\frac{U}{u_\tau} = C + \frac{1}{\kappa} \ln \frac{\delta u_\tau}{\nu} + \frac{2}{\kappa} \phi \quad (2.10)$$

が成り立つ。また速度損失分布は

$$\frac{U - u}{u_\tau} = \frac{1}{\kappa} [-\ln \eta + \phi(2 - A)] \quad (2.11)$$

と表わされる。以上のように速度分布は u_τ および ϕ の二つのパラメータを含んで表示された。

3. 境界層諸特性パラメータ

排除厚、運動量厚等の諸パラメータにおよぼす層流底層の影響はきわめて小さい。そこで速度分布として $f(y_*)$ を (2.4) で近似した (2.9) または (2.11) を用いるとき諸特性パラメータと δ の比は次のように積分される。

$$\text{排除厚 } \frac{\delta^*}{\delta} = \int_0^1 \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = v_*^* g_1 \quad (3.1)$$

$$\text{運動量厚 } \frac{\theta}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) d\eta = v_*^* (g_1 - 2v_*^* g_2) \quad (3.2)$$

$$\text{エネルギー厚 } \frac{\delta^{**}}{\delta} = \int_0^1 \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u^2}{U^2}\right) d\eta = 2v_*^* (g_1 - 3v_*^* g_2 + 3v_*^{*2} g_3) \quad (3.3)$$

$$\text{ただし } v_*^* = \frac{1}{\kappa} \frac{u_r}{U} \quad (3.4)$$

$$g_1 = 1 + \phi \quad (3.5)$$

$$g_2 = 1 + \frac{19}{12}\phi + \frac{26}{35}\phi^2 \quad (3.6)$$

$$g_3 = 1 + \frac{265}{144}\phi + \frac{3389}{2450}\phi^2 + \frac{43}{105}\phi^3 \quad (3.7)$$

形状パラメータは,

$$H = \frac{\delta^*}{\theta} = \frac{g_1}{g_1 - 2v_*^* g_2} \quad (3.8)$$

エネルギー厚に関する形状パラメータは,

$$\bar{H} = \frac{\delta^{**}}{\theta} = \frac{2(g_1 - 3v_*^* g_2 + 3v_*^{*2} g_3)}{g_1 - 2v_*^* g_2} \quad (3.9)$$

Head の形状パラメータは $H_1 = (\delta - \delta^*)/\theta$ と定義されるから,

$$H_1 = \frac{1}{v_*^* (g_1 - 2v_*^* g_2)} - H \quad (3.10)$$

また (2.10) を変形して θ レイノルズ数の間の関係は次式のように得られる。

$$R_\theta = \frac{g_1 - 2v_*^* g_2}{\kappa} \exp\left(\frac{1}{v_*^*} - 2\phi - \kappa C\right) \quad (3.11)$$

(3.8) において g_1, g_2 を (3.5), (3.6) によって ϕ で表わし, ϕ について整理すれば, v_*^*, H を係数に含んだ ϕ に関する二次式が得られる。

$$\frac{52}{35} v_*^* \phi^2 + \left(\frac{19}{6} v_*^* - \frac{H-1}{H}\right) \phi + 2v_*^* - \frac{H-1}{H} = 0 \quad (3.12)$$

速度分布を 2 パラメータで表わしたから, いま二つのパラメータ v_*^* および H を与えると (3.12) を解いて ϕ が求められる。(ただし二根のうちで大きい方の根が意味をもつ, また $R_\theta = 10^3$, $H = 1.2$ 付近では実根が得られない) R_θ は (3.11) より計算され, (3.

1)~(3.10) によって諸特性パラメータが全て求められる。

通常独立変数は R_θ と H であって, このときは (3.11) と (3.12) を連立して逐次計算される。あるいは ϕ を R_θ および H で表わすには (3.8) および (3.11) より v_*^* を消去するとき次式を得る。

$$\ln \frac{R_\theta \cdot H}{g_1} - \frac{2H}{H-1} \frac{g_2}{g_1} + 2\phi + \kappa C + \ln \kappa = 0 \quad (3.13)$$

同様に (3.8) および (3.9) から v_*^* を消去すると,

$$\bar{H} = (3-H) + \frac{3}{2} \frac{g_1 g_3}{g_2^2} \frac{(H-1)^2}{H} \quad (3.14)$$

を得る。

次にこれら特性パラメータ間の関係について計算結果を経験式と比較して述べる。

(i) 壁面上における摩擦応力

図 2 には θ レイノルズ数をパラメータにして, 形状パラメータと壁面上の摩擦応力の関係を示してある。

本文の計算を実線で示し, Ludwig-Tillmann の式 (1.3) を鎖線で示す。両者同程度の結果を与えているが, 本文の計算は全般的に Ludwig-Tillmann の式より小さい値を示しており, 形状パラメータの大きいところでこの傾向が著しい。Nash¹²⁾ は R_θ に無関係に $H = 3.0$ で剝離点を与えるよう, 換言すれば $\tau_\theta = 0$ となるよう経験式を求めた。これを図中の一点鎖線で示す。

形状パラメータが大きいところ, 剝離点近くでは Ludwig-Tillmann の式も本文の近似も成り立たないし, 摩擦応力の情報自体も十分でない。

$A(\eta)$ が Coles の wake function と類似した関数であることは前述した。Coles の “the law of wall, the law of wake” に基づいた河崎の摩擦応力の計算と本文の計算が同様な結果を与えることは予想された。

(ii) 形状パラメータとエネルギー厚に関する形状パラメータの関係

本文の計算を図 3 の実線で示す。実験式の一例として Nicoll & Escudier⁹⁾ の式を鎖線で示した。通常実験式は R_θ を含まない。本文の計算も R_θ の影響は小さい。

(iii) 形状パラメータと Head の形状パラメータの関係

図 4 には本計算を実線で, Head が作成した H と H_1 (または $H_1 \rightarrow v_*^*$) の曲線を次式で近似して鎖線で示してある。

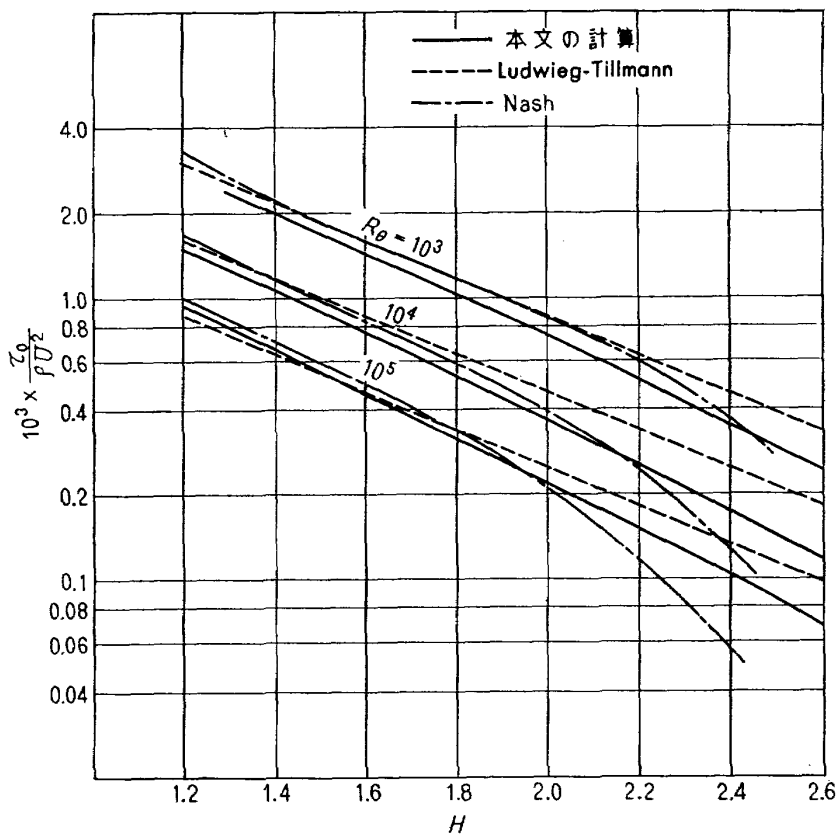


図 2

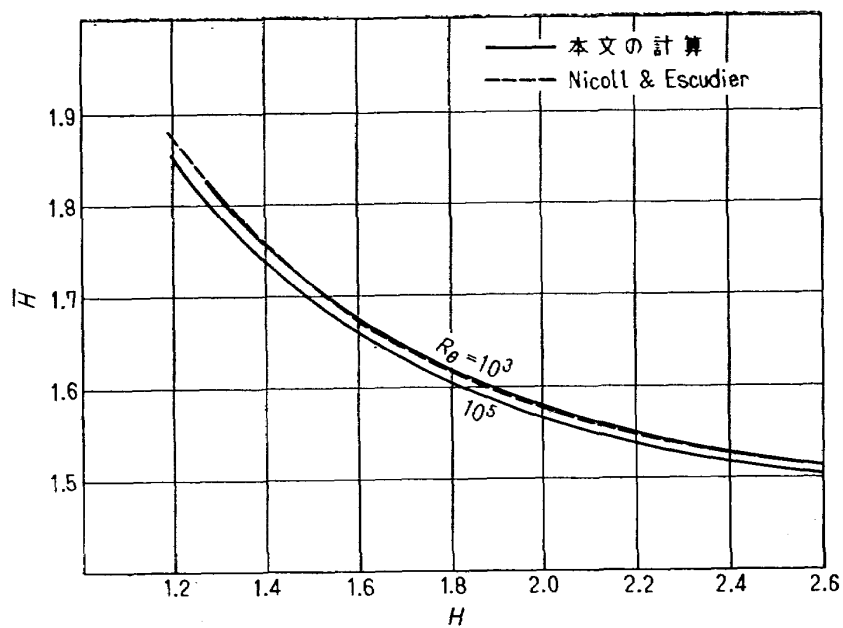


図 3

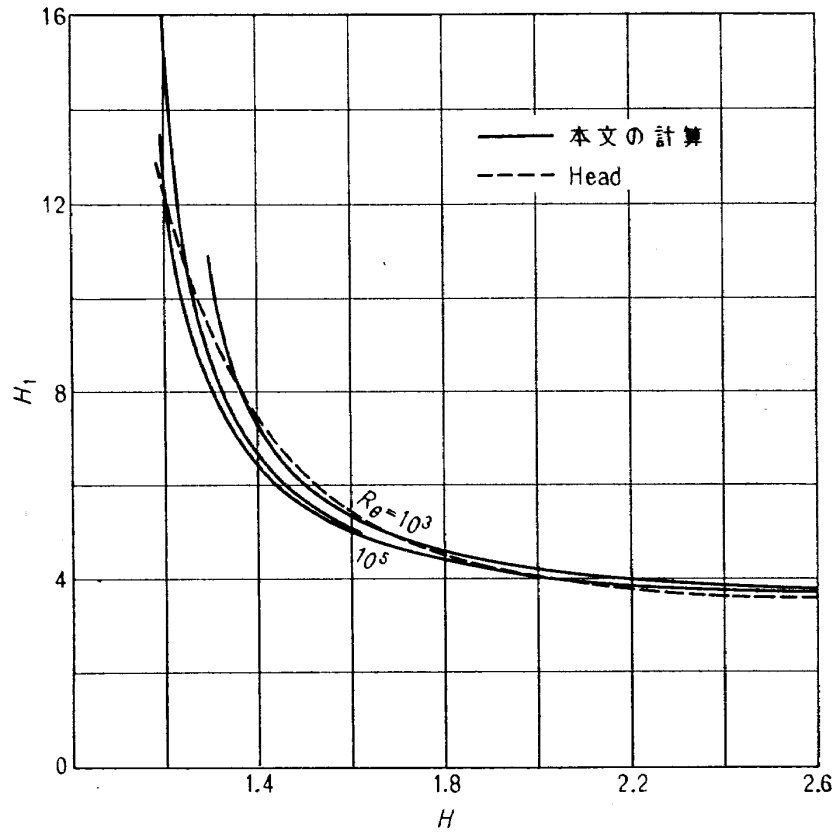


図 4

$$H_1 = 26.87 H^{-1} - 71.99 H^{-2} + 68.71 H^{-3} \quad (3.15)$$

本計算では形状パラメータの小さいところで θ レイノルズ数の影響がみられる。

4. 剪断応力のなす仕事の積分

剪断応力のなす仕事は

$$e = \int_0^{\delta} \frac{\tau}{\rho U^2} \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u}{U} \right) dy \quad (4.1)$$

で表わされる。剪断応力の分布が明確にされていないことはすでに述べた。運動量輸送理論によれば複雑な乱流現象を混合距離 l に背負わせて次式のように書かれる。

$$\tau = \mu \frac{\partial u}{\partial y} + \rho l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \quad (4.2)$$

ここで混合距離なるものについて考えよう。

境界層の内側の領域は混合距離で良く説明のつく領域である。(4.2)の右辺の乱流項を省略することによって層流底層が説明され、粘性項を省略し混合距離が壁からの距離に比例すると考えることによって対数法則が説明される。そしてこれは普遍的な法則として認められているところである。Van Driest は混合距離と

して壁からの距離に比例した量にさらに減衰率を乗じて、 $\kappa y [1 - \exp(-y/K)]$ と考えることによって、層流底層と対数法則の領域を連続して滑らかに記述した。Van Driest が求めた速度分布が測定値と良く一致することからこの領域の混合距離を Van Driest に従って考えても妥当であろう。

一方境界層の外縁に近い領域は境界層の外の流れと活発に混合が行なわれる。この状態は自由な乱れの流れとして取扱われる速度の不連続面の拡散現象や二次元物体の後流の問題と対比されるであろう。これから類推して混合距離は外縁近くで境界層厚さ δ に比例した一定な値をもつものと仮定される。

速度分布および剪断応力の分布の測定値から混合距離の形で整理された例は Schultz-Grunow⁴⁾, Escudier & Spalding⁵⁾ 等に見られ、以上の仮定が平均的に成り立っているものとみられる。

したがって混合距離として上述の境界層の両縁近傍の状態を満し、その間を適当に結ぶことになるが、簡単に次のように仮定する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{l}{\delta} &= \kappa \eta [1 - \exp(-y_*/K_*)] & \eta \leq \eta_1 \\ \frac{l}{\delta} &= \text{const} = \kappa \eta_1 [1 - \exp(-y_{*1}/K_*)] & \eta \geq \eta_1 \end{aligned} \right\} (4.3)$$

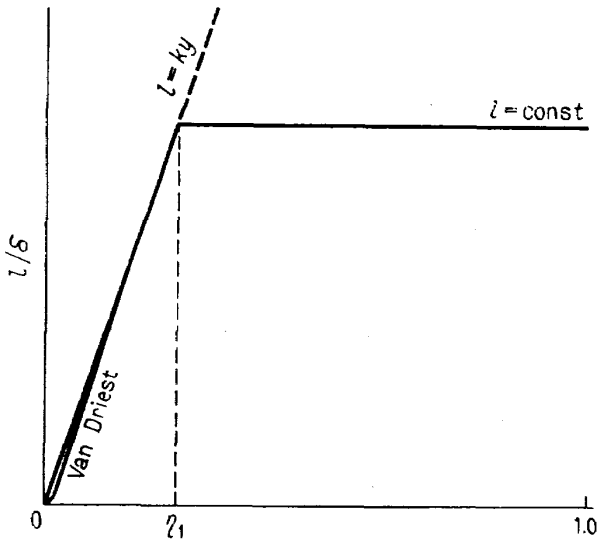


図 5

ただし $y_{*1} = \frac{\delta u_r}{\nu} \cdot \eta_1$ である。

(4.1) に (4.2) を代入すると (4.4) になる。

$$\frac{e}{\kappa^3} = \frac{\nu}{u_r \delta} v_*^3 \int_0^1 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{u_r} \right) \right]^2 d\eta + v_*^3 \int_0^1 \left(\frac{l}{\delta} \right)^3 \left[\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{u_r} \right) \right]^3 d\eta \quad (4.4)$$

ここで (2.8) の $f(y_*)$ を (2.2) で表わせば、

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{u}{u_r} \right) = \frac{\delta u_r}{\nu} \times \frac{2}{1 + \sqrt{1 + 4\kappa^2 y_*^2 [1 - \exp(-y_*/K_*)]^2}} + \frac{12}{\kappa} \phi \eta (1 - \eta) \quad (4.5)$$

ただし $\frac{\delta u_r}{\nu} = \frac{\kappa R_\theta}{g_1 - 2v_* g_2}$

$$y_* = \frac{\delta u_r}{\nu} \cdot \eta$$

である。

(4.4) は (4.3) および (4.5) によって数値積分される。簡単に η_1 を常数とみなして経験的に $\eta_1 = 0.165$ を仮定したときの積分結果を図 6 に示す。

周知のように剪断応力のなす仕事は大部分が熱として消散される。消散量に関して Rotta は Schubauer & Klebanoff の測定値を解析した結果形状パラメータへの依存度がきわめて小さいことを見出した。この結果に基づいて Truckenbrodt は形状パラメータによら

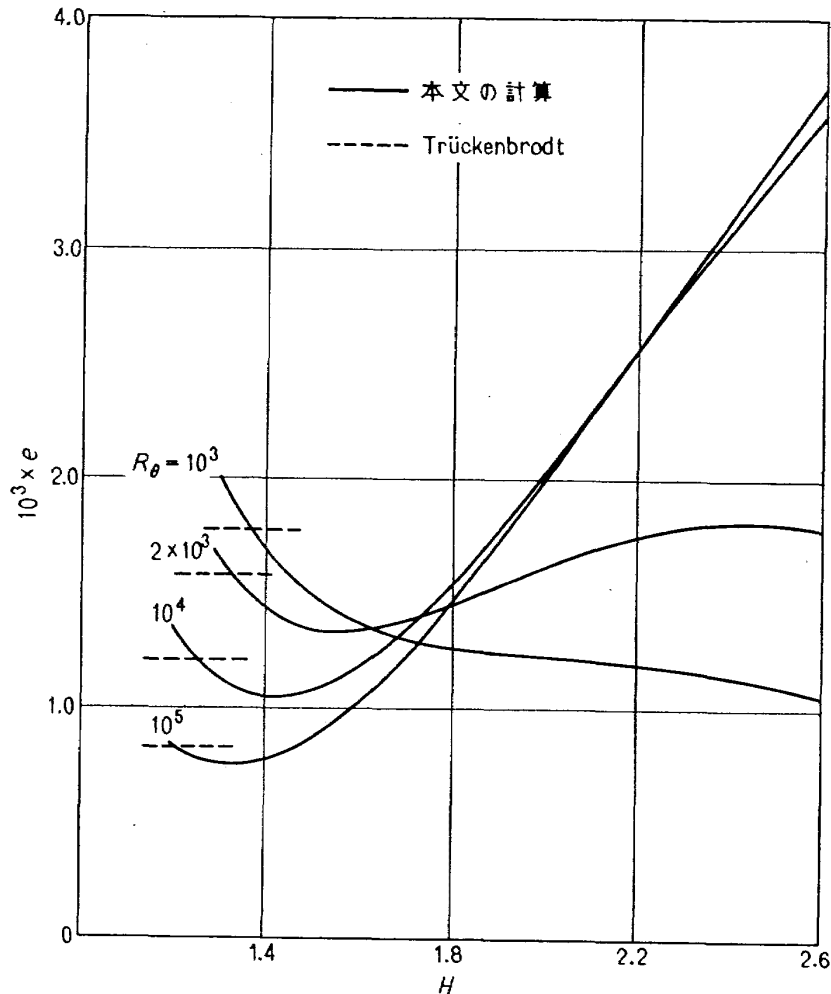


図 6

ない経験式を導いている¹⁾。これを同図中の鎖線で示す。本文の仮定の結果では特に θ レイノルズ数が大きいところで形状パラメータに大きく依存している。また図中に示されていないが、Escudier & Spalding¹³⁾の経験式は θ レイノルズ数が大きいところで同じ傾向を示しているが、全般的な一致はみられない。Rottaの結果は解析されたデータに限られたものである点に疑問を持たれている。

5. 補助方程式

エネルギー積分式は、

$$\frac{d}{dx}(U^3\theta\bar{H}) = 2eU^3 \quad (5.1)$$

と表わされる。左辺を書き下して(1.1)によって $d\theta/dx$ を消去すれば、

$$\theta \frac{d\bar{H}}{dx} = (1-\bar{H})H\Gamma + 2e - \bar{H} \frac{\tau_0}{\rho U^2} \quad (5.2)$$

を得る。 R_θ および H を独立変数として、(5.2)は

$$\theta \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial H} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial H} \right) \frac{dH}{dx} + \theta \frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial R_\theta} \frac{dR_\theta}{dx} = (1-H)\bar{H}\Gamma + 2e - \bar{H} \frac{\tau_0}{\rho U^2} \quad (5.3)$$

である。再び(1.2)によって dR_θ/dx を消去すれば、補助方程式は(1.4)の型にまとめて次のように得られる。

$$\theta \frac{dH}{dx} = \Phi(R_\theta, H) \cdot \Gamma - \Psi(R_\theta, H) \quad (5.4)$$

ここで、

$$\Phi = \frac{(1-H)\bar{H} - (1+H)R_\theta \frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial R_\theta}}{\frac{\partial \bar{H}}{\partial H} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial H}} \quad (5.5)$$

$$\Psi = \frac{\kappa^2 v_*^2 \left(\bar{H} + R_\theta \frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial R_\theta} \right) - 2e}{\frac{\partial \bar{H}}{\partial H} + \frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi} \cdot \frac{\partial \phi}{\partial H}} \quad (5.6)$$

(3.14)を微分して、

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial H} = -1 + \frac{3}{2} \frac{H^2 - 1}{H^2} \frac{g_1 g_3}{g_2^2} \quad (5.7)$$

$$\frac{\partial \bar{H}}{\partial \phi} = \frac{3}{2} \frac{(H-1)^2}{H} \times \frac{g_1' g_2 g_3 - 2g_1 g_2' g_3 + g_1 g_2 g_3'}{g_2^3} \quad (5.8)$$

(3.13)を微分して、

$$\frac{\partial \phi}{\partial H} = \frac{\left(\frac{H-1}{H} g_1 + \frac{2}{H-1} g_2 \right) g_1}{2H(g_1 g_2' - g_1' g_2) + (H-1)g_1(g_1' - 2g_1)} \quad (5.9)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial R_\theta} = \frac{(H-1)g_1^2}{R_\theta [2H(g_1 g_2' - g_1' g_2) + (H-1)g_1(g_1' - 2g_1)]} \quad (5.10)$$

である。ただし'は ϕ の微分を表わすものとして、

$$\left. \begin{aligned} g_1' &= 1 \\ g_2' &= \frac{19}{12} + \frac{52}{35} \phi \\ g_3' &= \frac{265}{144} + \frac{3389}{1225} \phi + \frac{43}{35} \phi^2 \end{aligned} \right\} \quad (5.11)$$

と与えられる。

(5.5)および(5.6)で与えられた Φ および Ψ をそれぞれ図7および図8に示す。

Headはentrainmentの過程に注目し次元解析の結果補助方程式を次のように得た。

$$\theta \frac{dH}{dx} = \Phi_{\text{Head}} \Gamma - \Psi_{\text{Head}} \quad (5.12)$$

$$\Phi_{\text{Head}} = -\frac{dH}{dH_1} H_1 (H+1) \quad (5.13)$$

$$\Psi_{\text{Head}} = -\frac{dH}{dH_1} \left(F - H_1 \frac{\tau_0}{\rho U^2} \right) \quad (5.14)$$

F はentrainmentの速度を表わし、実験結果に基づいてHeadが作成した H_1 と F の関係曲線を次式で近似する。

$$F = \frac{0.0274}{H_1} + \frac{1.3677}{H_1^2} - \frac{9.8192}{H_1^3} + \frac{23.1885}{H_1^4} \quad (5.15)$$

(その他Green¹⁶⁾およびCebeci & Smithによって表示された式もあるが、いずれによっても大差はない)(3.15)、(5.15)および(1.3)によって(5.13)および(5.14)はそれぞれ図7および図8の鎖線のように示される。

(5.5)で与えた Φ におよぼす R_θ の影響はきわめて小さく、(5.13)の Φ_{Head} は R_θ によらない。一方(5.6)の Ψ は R_θ の影響が大きい。(5.14)の Ψ_{Head} の R_θ への依存は(1.3)の $\tau_0/\rho U^2$ が R_θ に依存している結果として表われていて小さい。(5.13)は(5.6)の $R_\theta=10^5$ の方に近い傾向を示している。

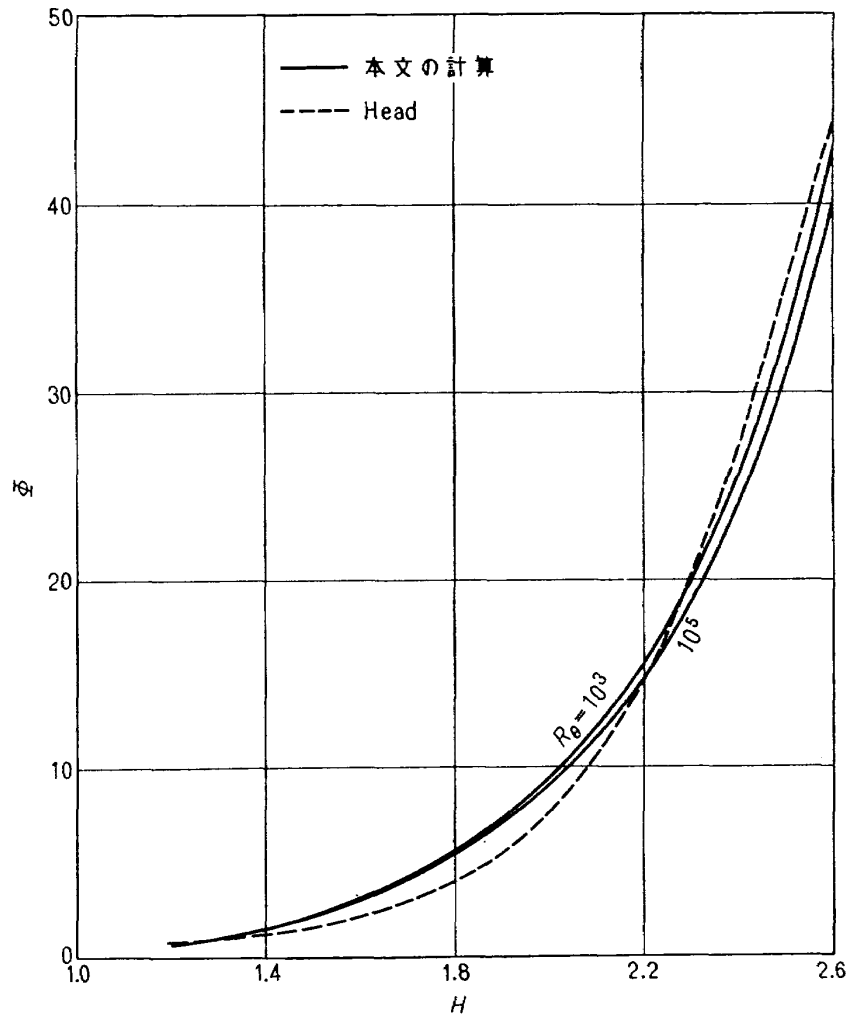


図 7

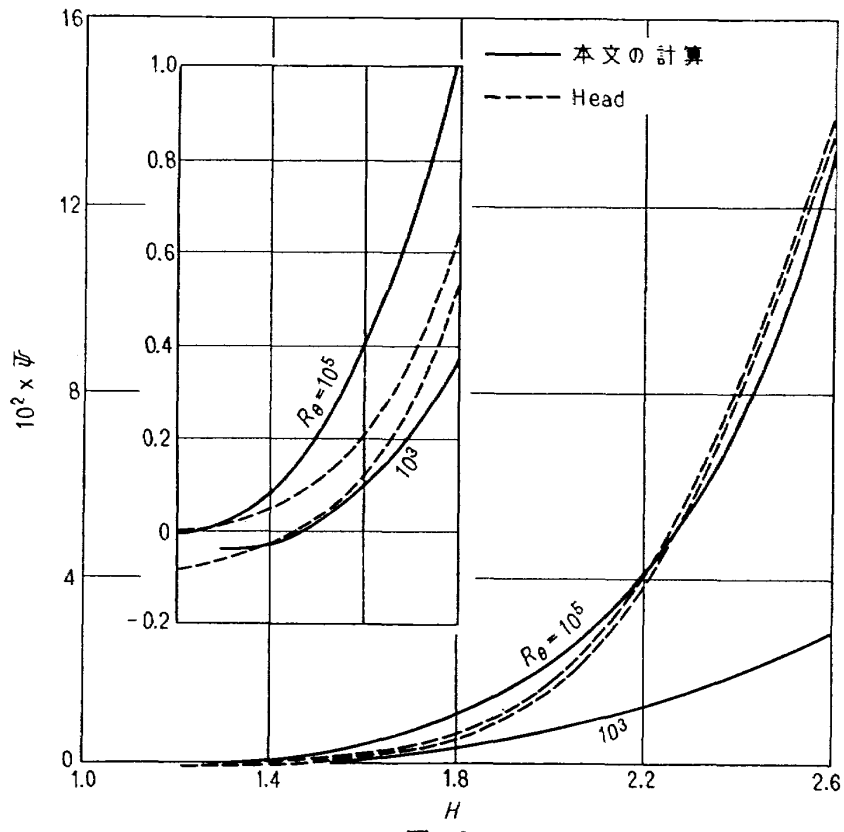


図 8

6. 適用例

以上述べたところを減速流⁸⁾¹⁷⁾, 増速流と減速流¹⁵⁾, および平板¹⁴⁾の実験に適用する。

数値計算は次の二つに別かれる。

(i) 境界層の外の流れの速度 U と運動量厚さ θ の両者の分布および形状パラメータ H の初期値は測定値を使用し, 流れに沿って形状パラメータの変化を計算する。補助方程式を (5.4) によった場合, Head の式 (5.12) によった場合のそれぞれの結果を測定値と比較する。これによって補助方程式の妥当性をみることができる。

図 9-1~図 9-7 に本文の計算を実線で示す。×は Head の式による計算値, ○は測定値をあらわし, 点線は計算に使用した測定値曲線である。計算値と測定値との一致は必ずしも十分とはいえないが, Head の式による計算値とほぼ同程度の結果が得られ大略良好であるといえる。Schubauer & Klebanoff の実験に適

用した例 (図 9-6) では剝離点に近づくと測定値と一致しなくなる。

(ii) 境界層の外の流れの速度の分布の測定値および運動量厚さ θ の初期値と形状パラメータ H の初期値を与え, 運動量積分式 (1.2) と補助方程式 (5.4) を連立して流れに沿った運動量厚さの発達と形状パラメータの変化を計算する。同様に (1.2) と Head の式 (5.12) から求めた値および測定値と比較する。ただし Head の (5.12) と連立する (1.2) に含まれる τ_0 は Ludwig & Tillmann の式 (1.3) で与える。その結果を図 10-1~図 10-7 に示す。

運動量厚さに関しては一般に測定値との一致は良好であろう。ただし計算値は系統的に測定値より小さい, そしてこの傾向は剝離点に近づくと著しくなるといふ他の解法にもみられる欠点がある。これらは壁の摩擦法則が正しくないこと, 運動量積分式にレイノルズ応力の垂直方向成分を省略していること, 静圧の壁に垂直な方向の変化を無視していること, 測定値自体

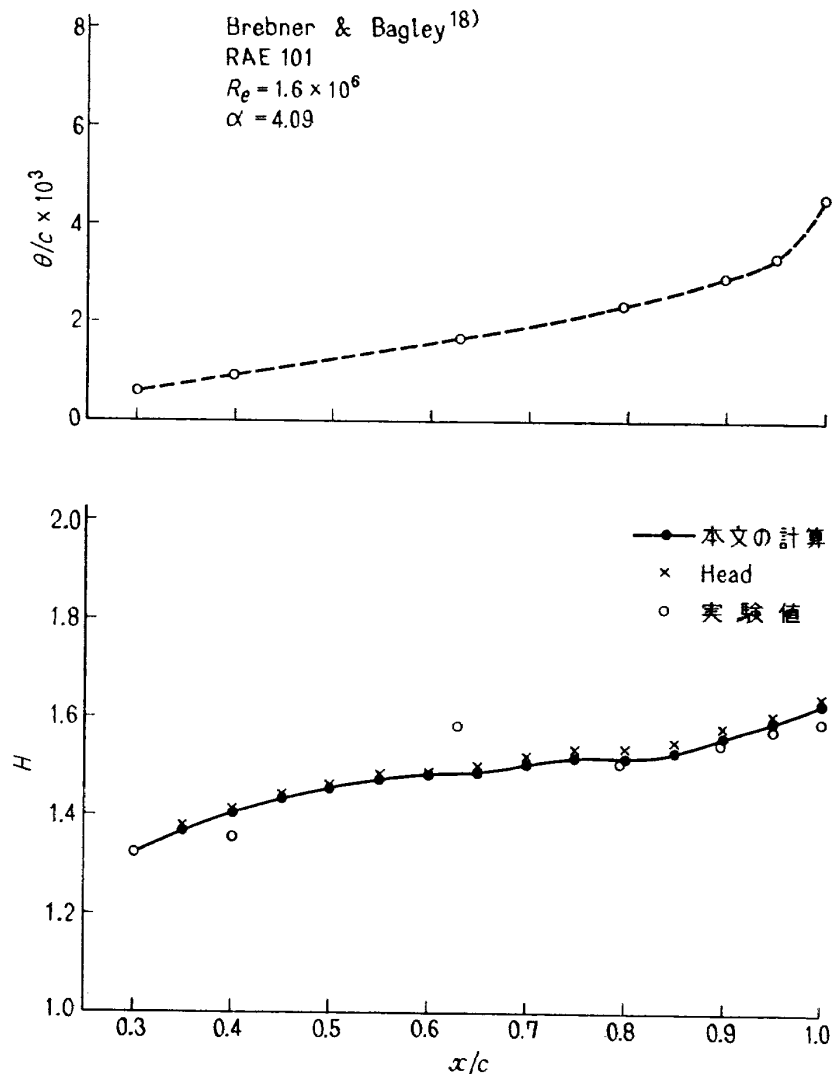


図 9-1

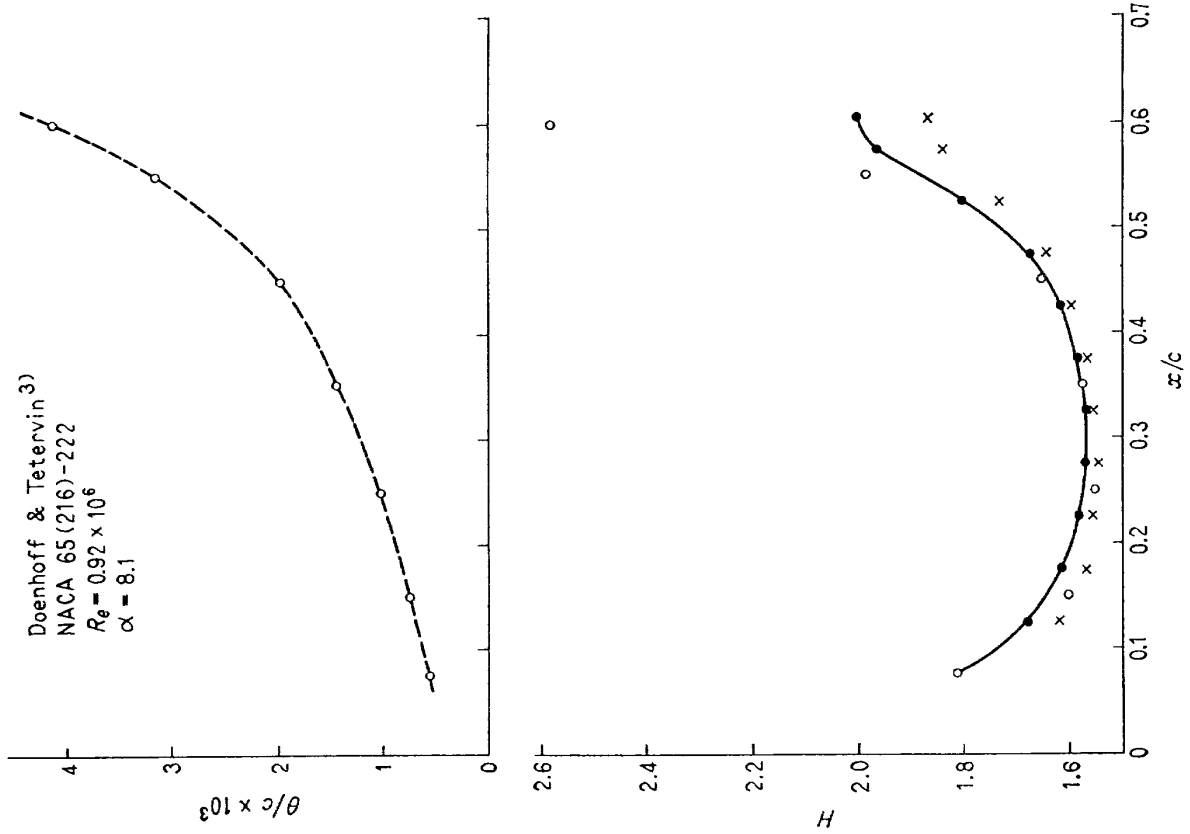


図 9-3

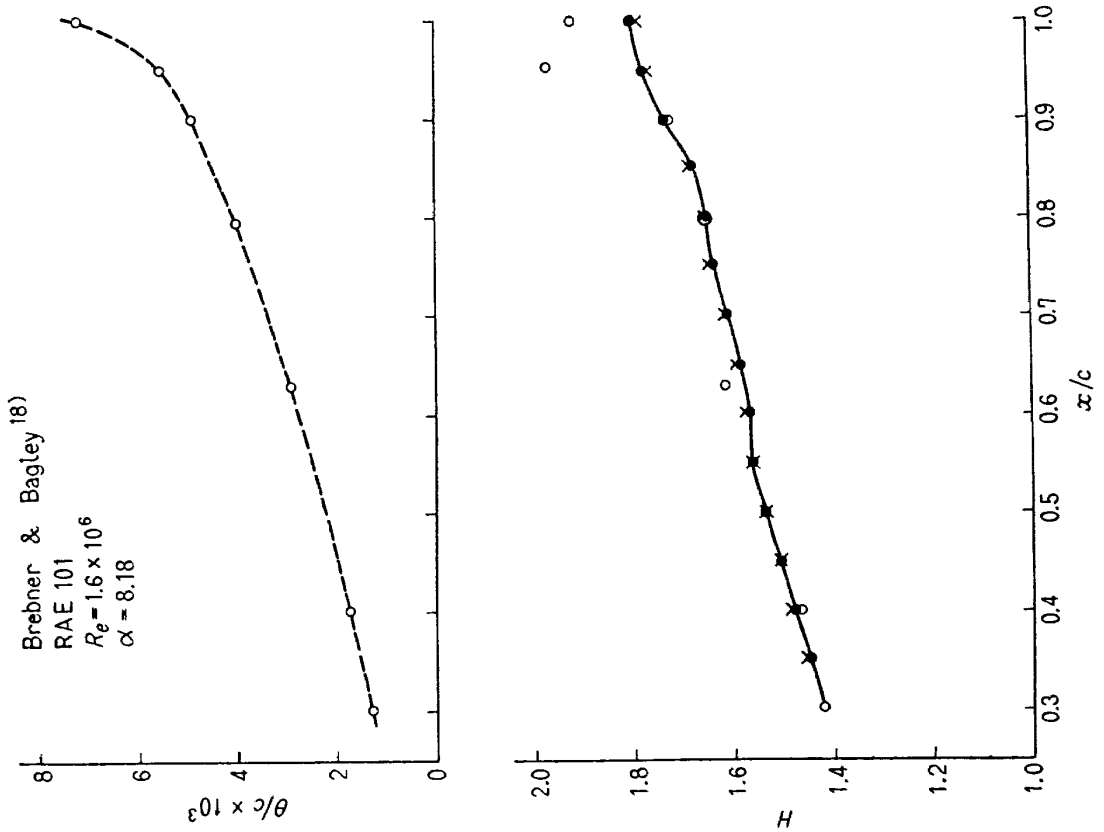


図 9-2

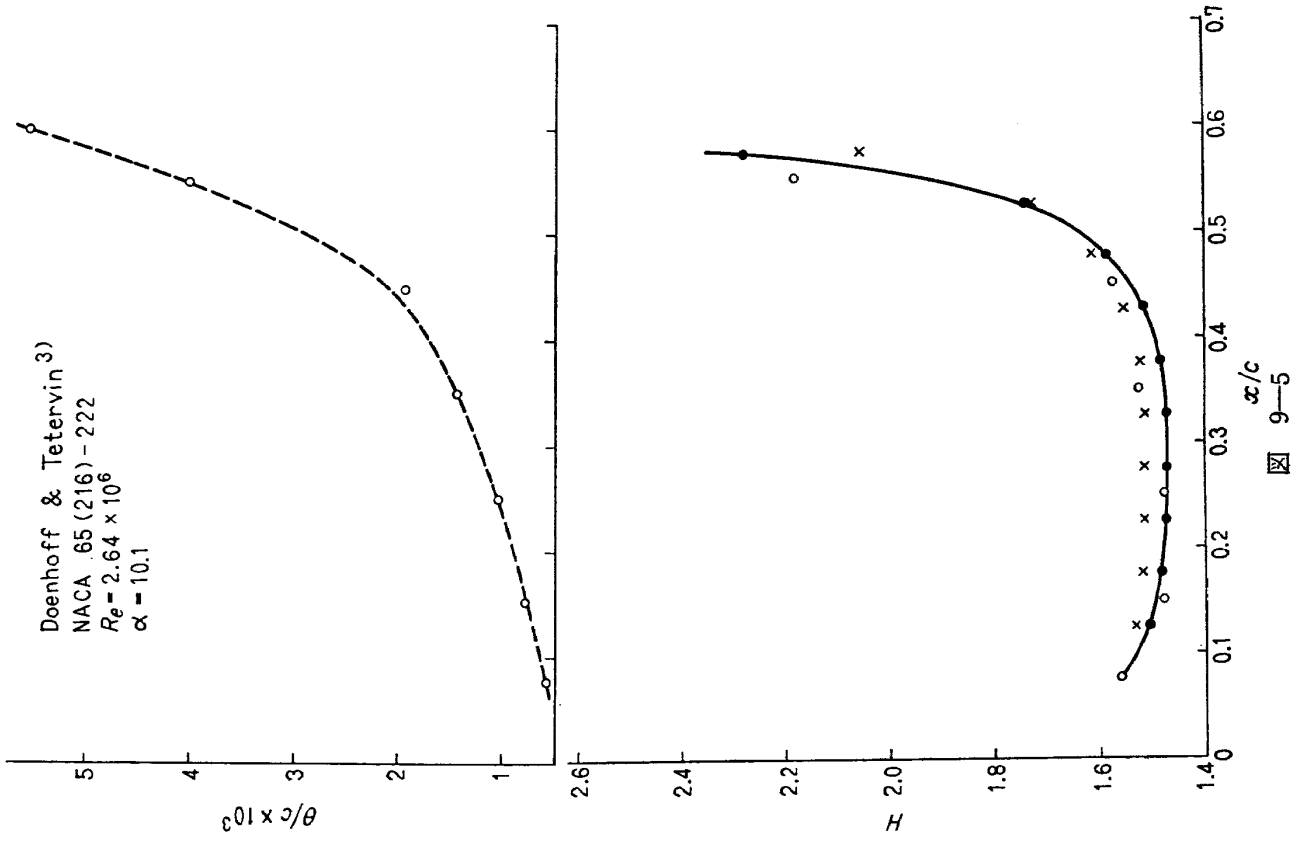


図 9-5

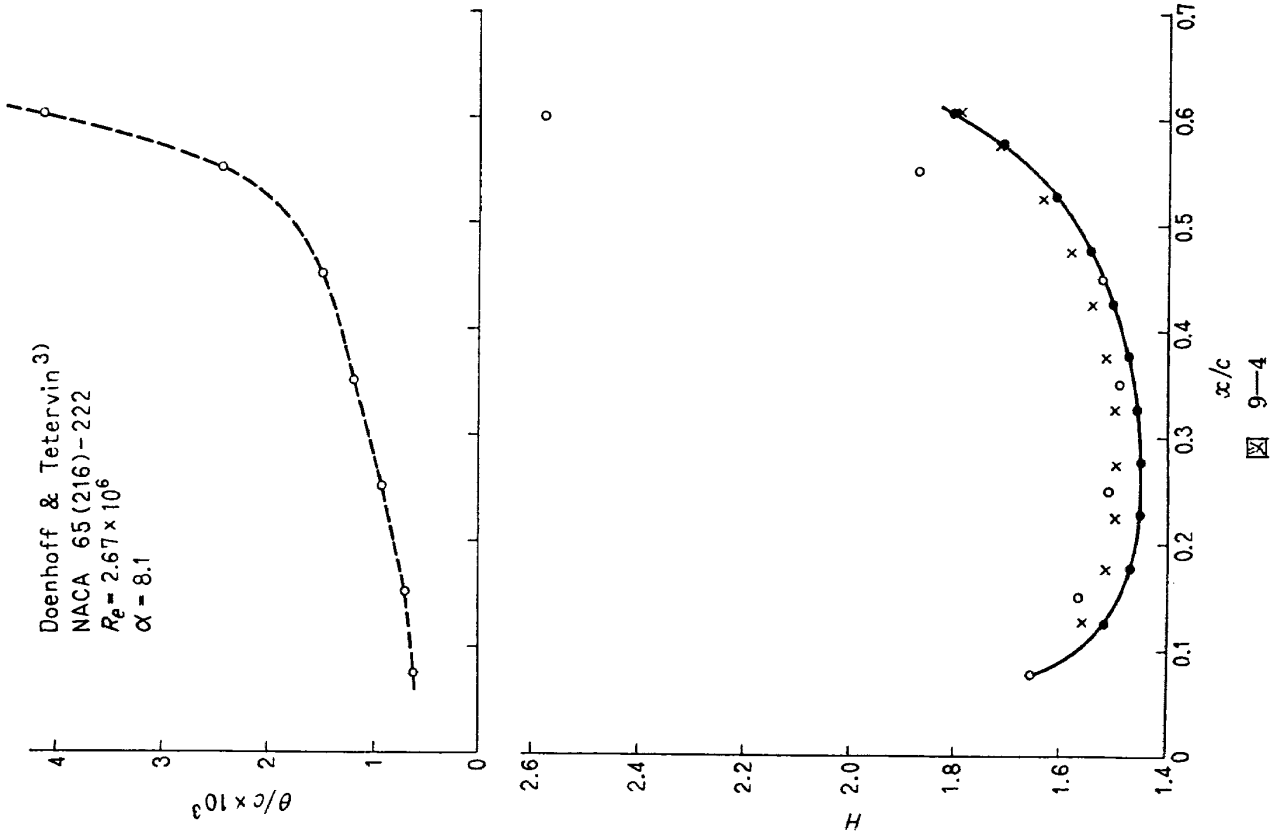


図 9-4

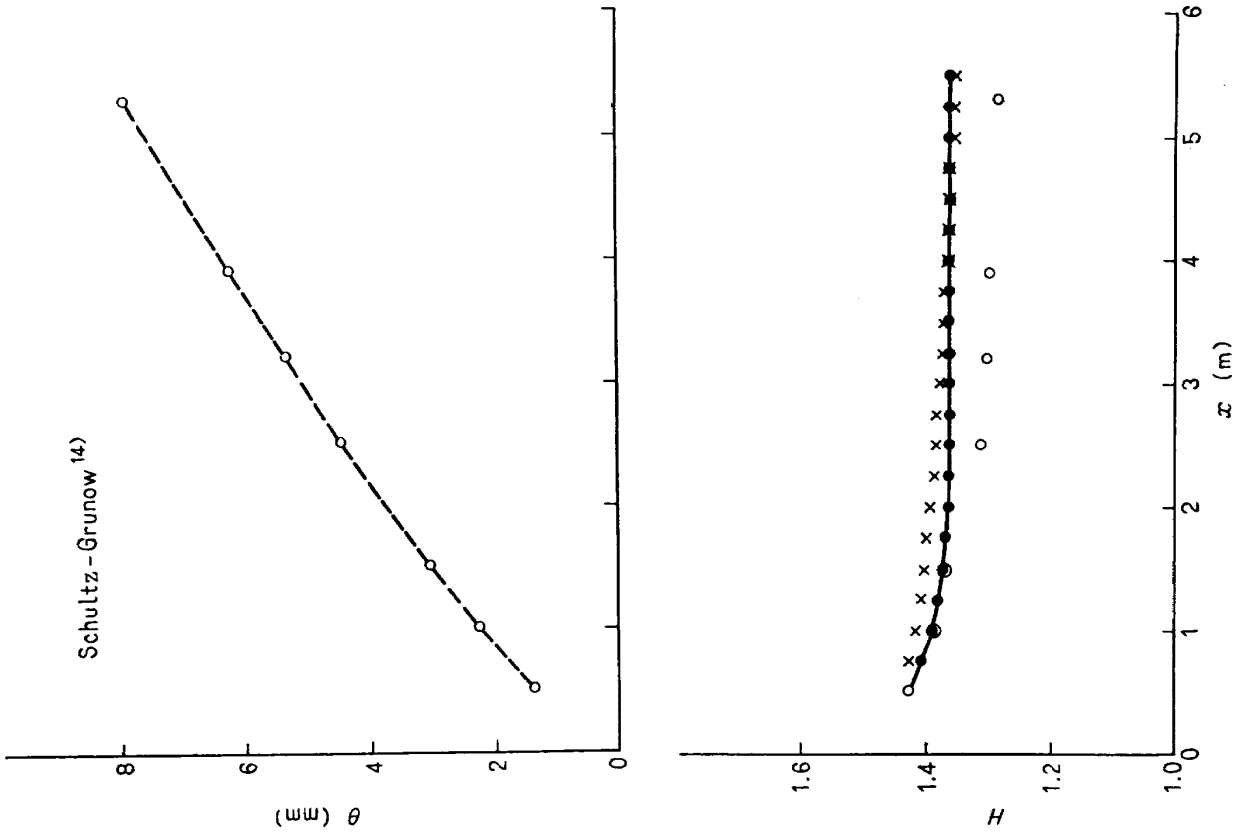


図 9-7

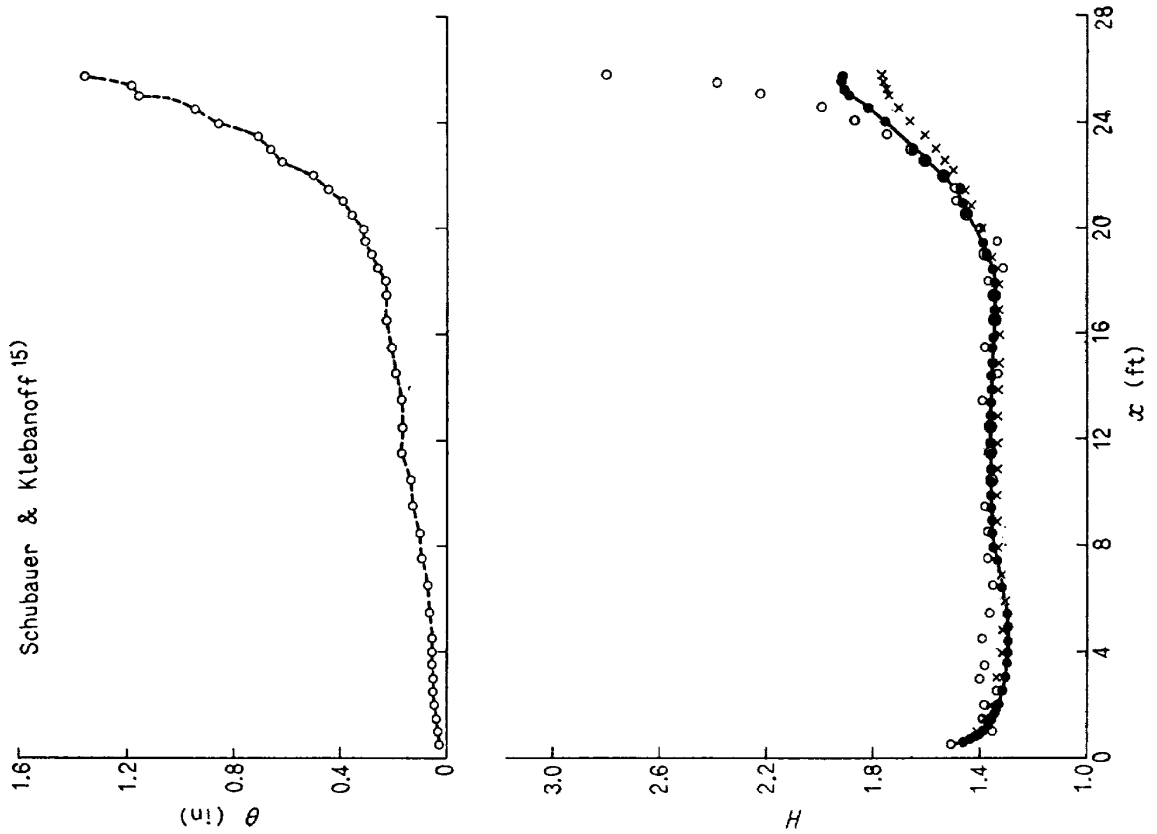


図 9-6

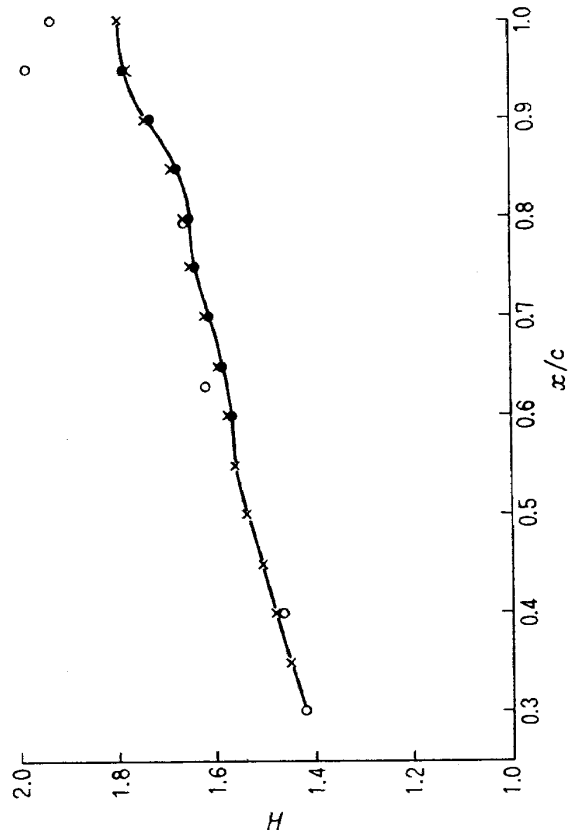
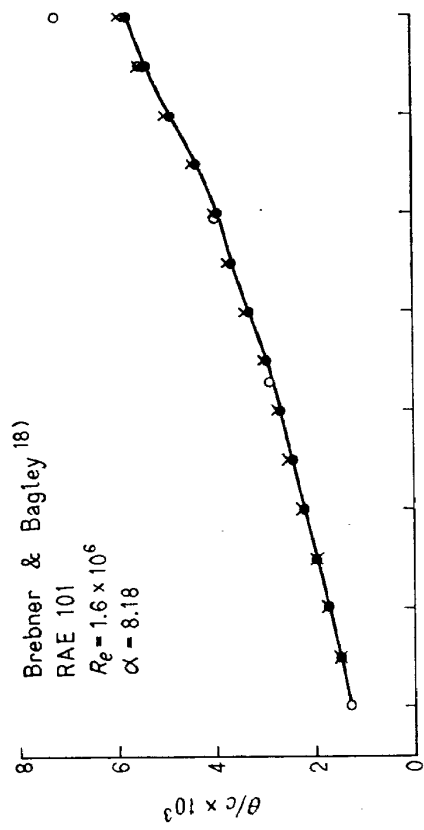


図 10-2

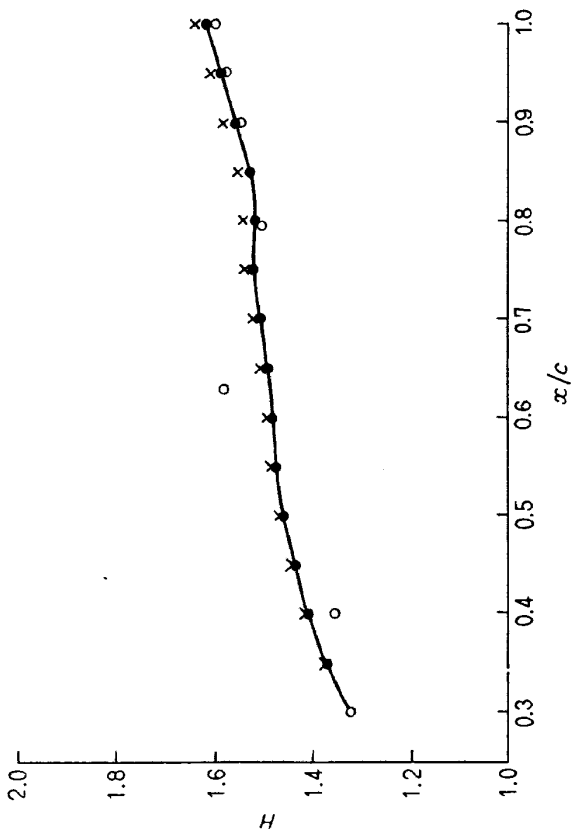
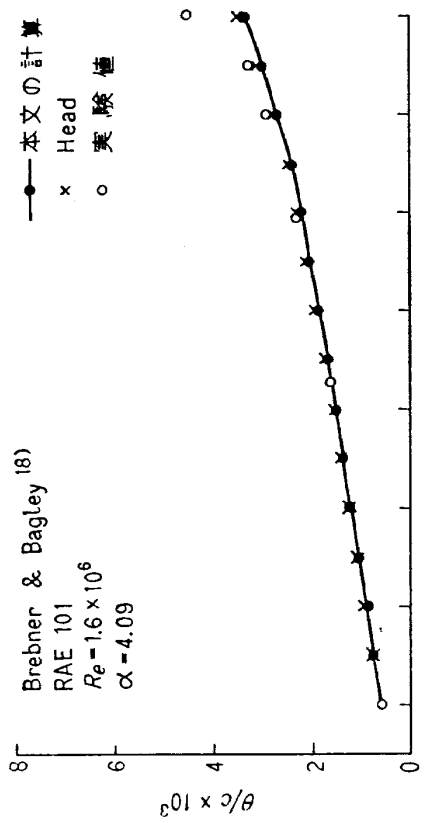


図 10-1

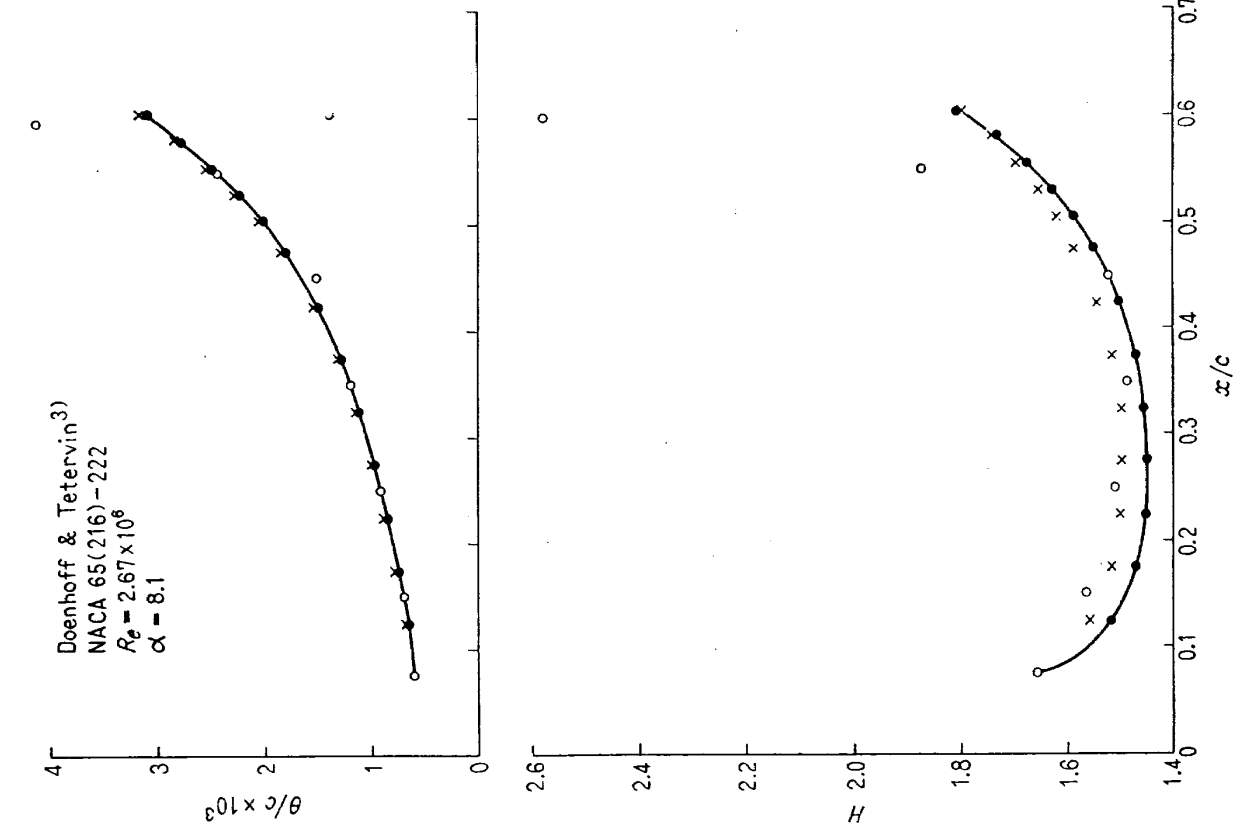


図 10-4

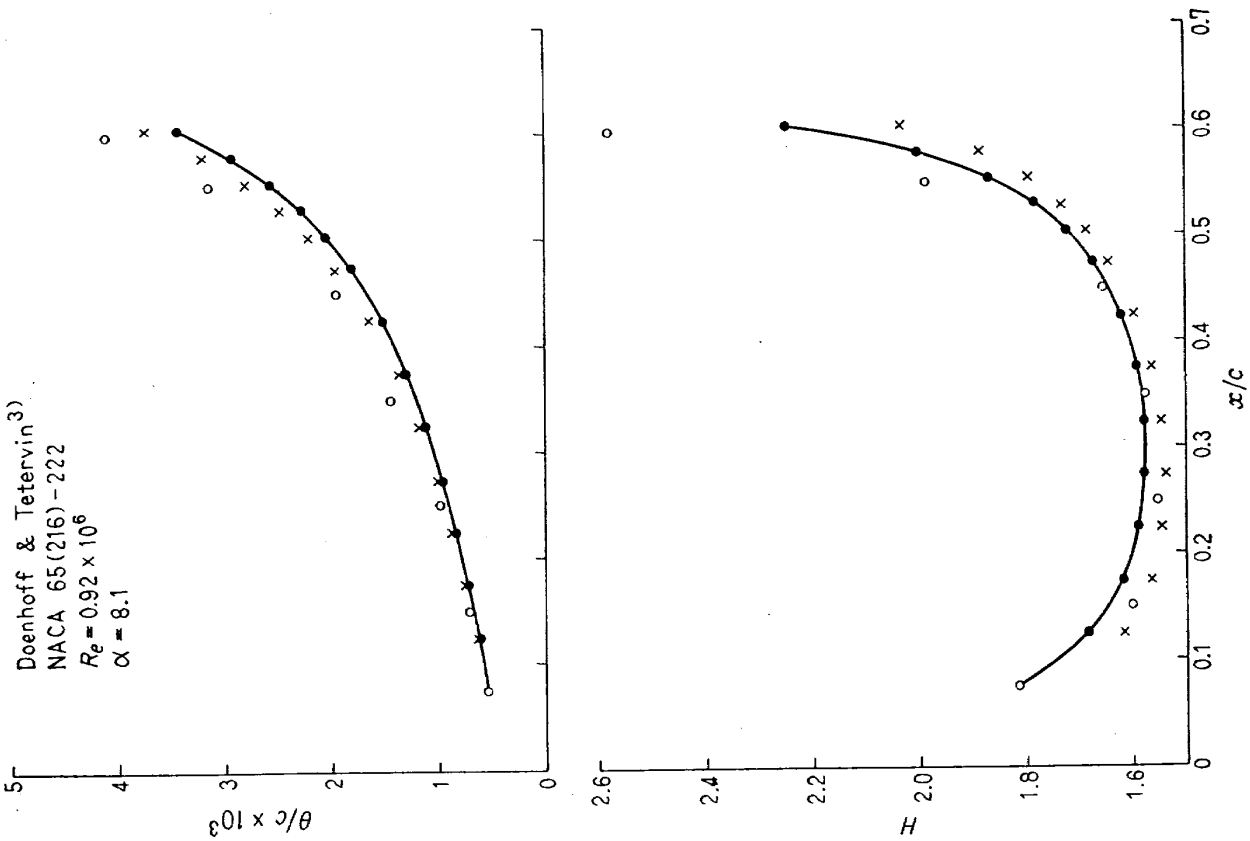


図 10-3

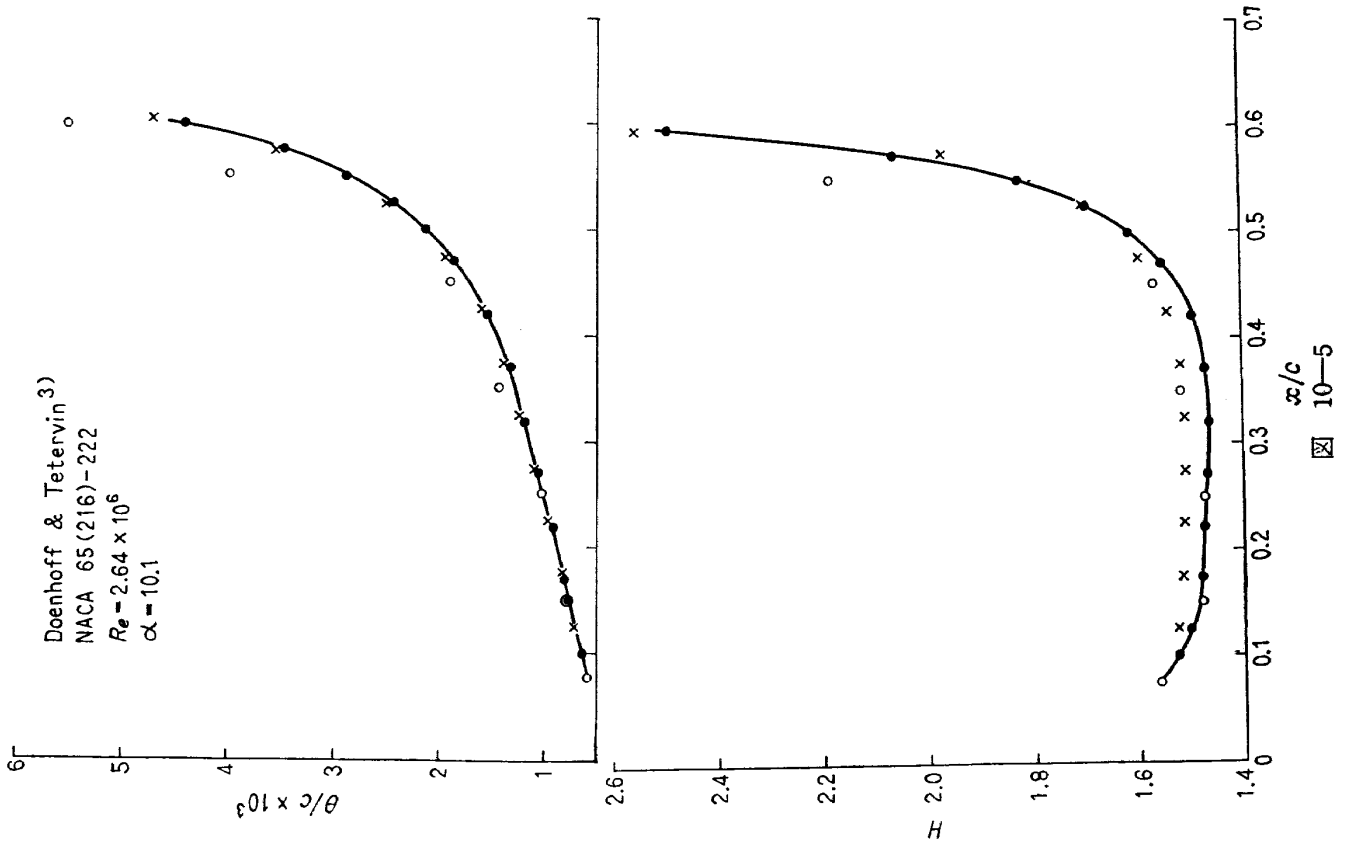


図 10-5

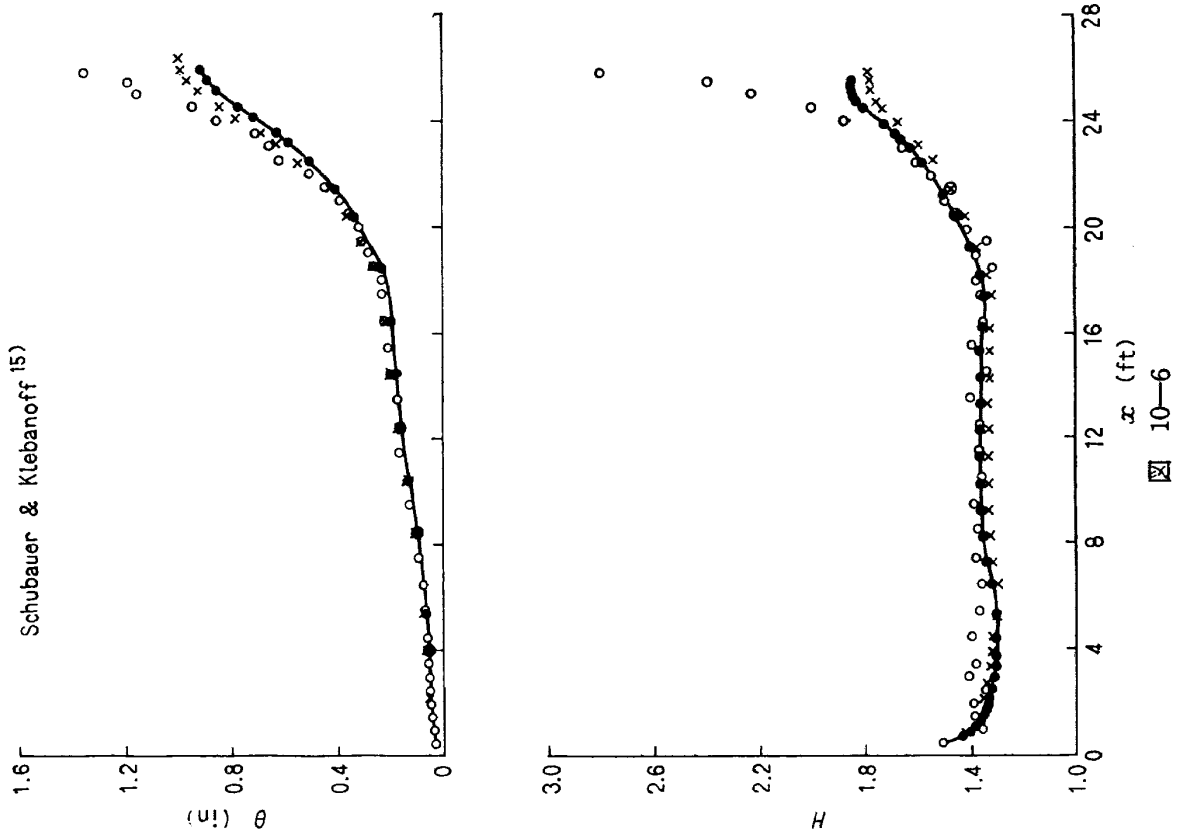


図 10-6

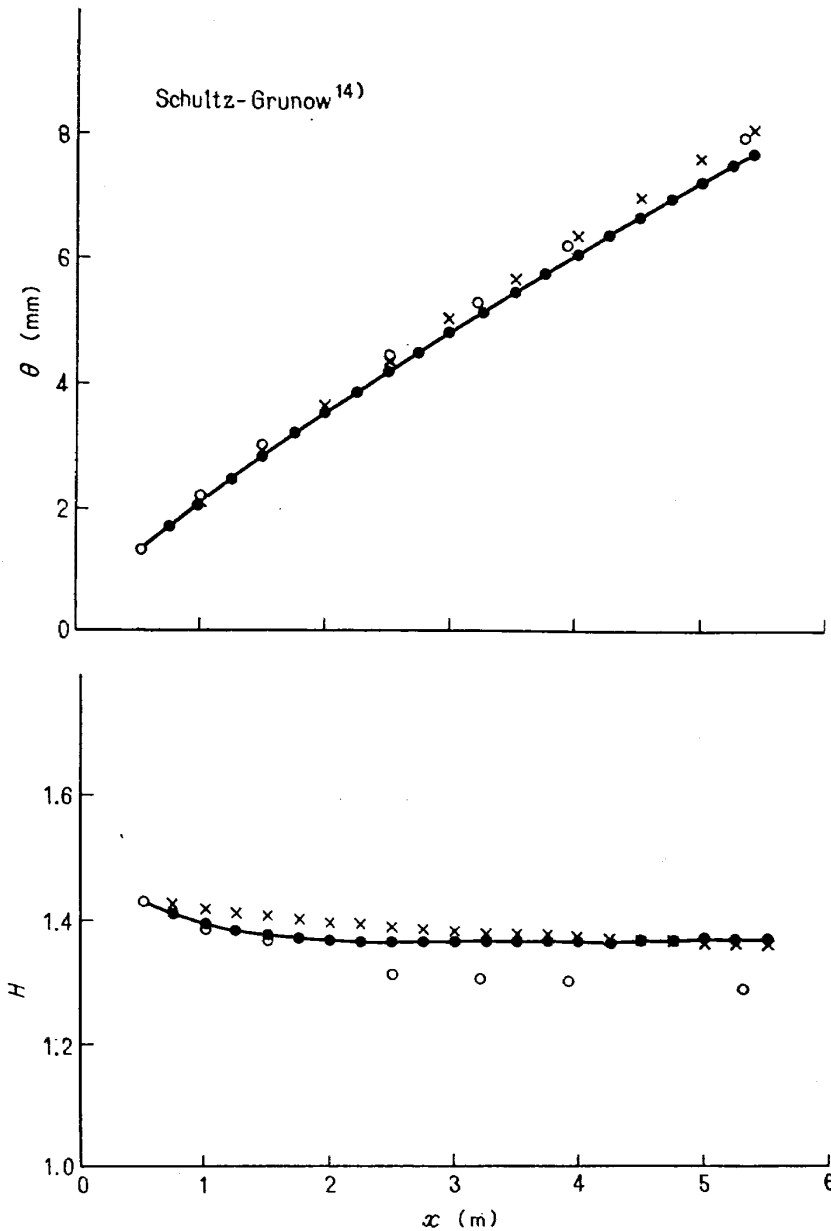


図 10-7

実験の二次元性に問題があること、等に起因していることが知られている。Ludwig & Tillmann の τ_0 と Head の式を用いた場合の方が、本文の計算よりいずれかといえば良い結果を与えているが、その差はきわめて小さい。形状パラメータに関しては本文の計算も Head の式による計算も測定値との一致は同じ程度であるといえる。

7. 結 び

乱流剪断応力の特性が明確にされない限り乱流境界層の計算には経験式が入り込む余地がある。本文では乱流境界層内の平均速度分布を、壁面の状態によって支配される成分すなわち本質的には対数法則と、境界層の外の流れの影響を表わす成分とによって表示し

た。これは Coles の “the law of wall, the law of wake” と一致する。この速度分布と混合距離を仮定することから境界層諸特性パラメータ間の関係を組立てた。従来の経験式に替えてこれらの関係を用いて境界層の発達を計算した。

- (1) Coles の the law of wake に相当する項が簡単な多項式で導かれた。
- (2) 平均速度分布から構成される境界層諸特性パラメータ間の関係は経験式とよく一致する。
- (3) 混合距離の仮定の上で導かれた補助方程式は他の補助方程式の中で Head の entrainment の式に最も近い。
- (4) 実際の流れに適用すると測定値との一致は、本文の計算との式による計算は同程度である。

数値計算は繁雑であるが計算機の使用によって十分実用に供することができる。補助方程式を二階微分方程式の型で与えることは今後の課題である。

最後に御討論頂きました河崎室長に感謝します。

文 献

- 1) Schlichting, H., Boundary Layer Theory. McGraw-Hill, (1960)
- 2) Ludwig, H. and Tillmann, W., Engl. Transl. in NACA TM 1285, (1950)
- 3) von Doenhoff, A.E. and Tetervin, N., Determination of General Relations for the Behavior of Turbulent Boundary Layers. NACA Rep. 772, (1943)
- 4) Garner, H.C., The Development of Turbulent Boundary Layers. ARC R & M 2133, (1944)
- 5) Kawasaki, T., On an Approximate Solution of Two-Dimensional Turbulent Boundary Layer. Trans. of Japan Soc. for Aero. and Space Sciences, Vol. 4, No. 5, (1961)
- 6) Head, M.R., Entrainment in the Turbulent Boundary Layer. ARC R & M 3152, (1958)
- 7) Thompson, B.G.J., A Critical Review of Existing Methods of Calculating the Turbulent Boundary Layer. ARC R & M 3447, (1967)
- 8) Bradshaw, P., Turbulent Boundary Layers. Aero. J. Royal Aero. Soc., Vol. 72, May, (1968)
- 9) Nash, J.F., Turbulent-Boundary-Layer Behaviour and the Auxiliary-Equation, ARC CP 835, (1965)
- 10) van Driest, E.R., On Turbulent Flow Near a Wall. J. Aero. Sci., Vol. 23, Nov., (1956)
- 11) Coles, D., The Law of Wake in the Turbulent Boundary Layer. J. Fluid Mech., Vol. 1, 1956
- 12) Nash, J.F., A Note on Skin-Friction Laws for the Incompressible Turbulent Boundary Layer, ARC CP 862, (1966)
- 13) Escudier, M.P. and Spalding, D.B., A Note on the Turbulent Uniform-Property Hydrodynamic Boundary Layer on a Smooth Impermeable Wall; Comparisons of Theory with Experiment; ARC CP 875, (1965)
- 14) Schultz-Grunow, F., Engl. Transl. in NACA TM 986
- 15) Schbauer, G.B. and Klebanoff, P.S., Investigation of Separation of the Turbulent Boundary Layer. NACA Rep. 1030, (1951)
- 16) Green, J.E., The Prediction of Turbulent Boundary Layer Development in Compressible Flow. J. Fluid Mech., Vol. 31, part 4, (1968)
- 17) Cebeci, T. and Smith, A.M.O., Calculation of Profile Drag of Airfoils at Low Mach Numbers, J. Aircraft, Vol. 5, No. 6, Nov.-Dec., (1968)
- 18) Brebner, G.G. and Bagley, J.A., Pressure and Boundary-layer Measurements on a Two-Dimensional Wing at Low Speed. ARC R & M 2886, (1956)

- | | | | |
|--------|--|----------|----------------------------------|
| TR-215 | ジェット輸送機の操縦のタスク・アナリシス
Tax Analysis of Jet Transport (DC-8) | 1970年10月 | 樋口一雄, 百名盛之
三好範子, 岡部正典
川原弘靖 |
| TR-216 | 横風中の3次元乱流ジェットの湾曲と発達
Bending and Development Three-dimensional Turbulent Jets in a Gross Wind | 1970年9月 | 遠藤浩, 中村正義 |
| TR-217 | 人工粘性付 LAX-WENDROFF およびその変形差分法に関する数値実験
Numerical Test on Lax-Wendroff Difference Scheme with Artificial Viscosity and Its Variations by the Two-Step Method. | 1970年9月 | 安喜隆幸 |
| TR-218 | 軸流回転機の翼の振動について II 翼根部による振動減衰
On the Vibration of Axial-flow Turbo-machine Blade. II Vibration Damping Capacity of the Blade Mounting. | 1970年10月 | 宮地敏雄, 星谷昌二
祖父江靖, 網干三郎
熊谷隆王 |

航空宇宙技術研究所報告219号

昭和45年10月発行

発行所	航空宇宙技術研究所 東京都調布市深大寺町1880 電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)☎182
印刷所	有限会社啓文堂松本印刷 東京都文京区水道2-7-5
