

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-223

球の仮想質量の円筒境界干渉

河野長正

1970年11月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-205 差分法による2次元非定常ノズル流の数値計算  
Finite Difference Calculations of Two-dimensional Nonsteady Nozzle Flows 1970年8月 石黒登美子
- TR-206 航空機の横操縦を行なう人間の動特性についてのシミュレータ実験(1自由度の場合)  
A Simulator Experiment to Investigate the Human Behavior in Tracking Tasks 1970年8月 別府護郎, 坂井紀穂  
吉田純一
- TR-207 境界層内圧力変動による板の振動解析(I)  
——周辺単純支持板——  
Response Analysis of the Simply Supported Plate to Boundary Layer Pressure Fluctuations 1970年9月 藤森義典
- TR-208 ガスタービン燃焼器  
Gas Turbine Combustors 1970年9月 鈴木邦男, 田丸卓  
堀内正司, 斎藤隆
- TR-209 フライングテストベッド用偏向ジェットパイプの模型実験  
Mode Test on Deflected Jet Pipes of NAL Flying Test Bed 1970年9月 田辺義一
- TR-210 自由飛行模型 FFM-10 の空力特性について  
On the Aerodynamic Characteristics of a Free Flight Model FFM-10 1970年8月 河崎俊夫, 斎藤秀夫  
河本巖
- TR-211 ジェット・フラップ・ローターのホバ特性に関する一模型実験  
A Model Test on Hovering Characteristics of Jet-Flapped Rotor 1970年9月 吉田真幸, 戸田亘洋  
岡遠一, 高沢金吾
- TR-212 二重噴流の空力的騒音  
Aerodynamic Noise of a Circular Double Jet 1976年10月 河野長正
- TR-213 ジンバルエンジン駆動用 DPF 方式油圧サーボの試作研究  
A Study of Gimbal-Engine Actuated Hydraulic Servomechanism with DPF Hydro-mechanical Compensation Network 1970年9月 畑山茂樹, 興石肇
- TR-214 軸流圧縮機動翼機取付部の疲労についての実験的研究(隙間のあるピン接合ラグ)  
Experimental Investigation of Fatigue Strength of Axial Flow Compressor Blade Root  
——Pin Joint Lug Having Clearance between Pin and Pin-Hole—— 1970年9月 池田為治, 山岸崇
- TR-215 ジェット輸送機の操縦のタスク・アナリシス  
Tax Analysis of Jet Transport (DC-8) 1970年10月 樋口一雄, 百名盛之  
三好範子, 岡部正典  
川原弘靖
- TR-216 横風中の3次元乱流ジェットの変曲と発達  
Bending and Development Three-dimensional Turbulent Jets in a Gross Wind 1970年9月 遠藤浩, 中村正義
- TR-217 人工粘性付 LAX-WENDROFF およびその変形差分法に関する数値実験  
Numerical Test on Lax-Wendroff Difference Scheme with Artificial Viscosity and its Variations by the Two-Step Method 1970年9月 安喜隆幸
- TR-218 軸流回転機の翼の振動について  
II 翼根部による振動減衰  
On the Vibration of Axial-flow Turbomachine Blade  
II Vibration Damping Capacity of the Blade Mounting 1970年10月 宮地敏雄, 星谷昌二  
祖父江靖, 網干三郎  
熊谷隆王

# 球の仮想質量の円筒境界干渉\*

河野長正\*\*

## Cylindrical Boundary Interference on Virtual Mass of a Sphere

By Nagamasa KONO

Various kinds of interference take place when a dynamic test of a non-lifting body is conducted in a wind tunnel. One of these is dependent on virtual mass, and can be evaluated from potential theory. In order to clarify the virtual mass increment by cylindrical wall interference, the flow field induced by a single doublet locating at an arbitrary point in a cylinder and having its axis oriented parallel to the axial and radial direction and normal to both directions was solved, and closed surfaces were sought by transforming the field to an uniformly translating system. Then the virtual mass was calculated from the kinetic energy. The results were compared with the case of a free field. When a body is placed on the cylinder axis, boundary interference appears both as surface distortion and virtual mass increase: the former is not serious unless the radius ratio of the body to the cylinder does not exceed 0.5, but the latter is remarkable. Results when the body is off-centered at 0.3 radius from the cylinder axis showed complex behaviour depending on the orientation of motion.

### 記号

$A$ : 定数  
 $A_{s,n}$ : 展開係数  
 $a$ : 円筒半径  
 $B$ : 定数  
 $C$ : 定数  
 $C_p^n$ : Chebyshev の多項式  
 $G_m = \frac{\pi}{2 \sin m\pi} [J_{-m}(x) - e^{-im\pi} J_m(x)]$  で定義  
 $I_p$ : 変形第一種  $p$  次ベッセル関数  
 $J_p$ : 第一種  $p$  次ベッセル関数  
 $K_p$ : 変形第二種  $p$  次ベッセル関数  
 $M$ : 仮想質量  
 $P_n^m(\mu)$ : 第一種  $m$  次  $n$  位ルジャンドル関数  
 $r$ : 球の半径  
 $S$ : 閉曲面の面積  
 $T$ : 流体運動エネルギー  
 $U$ : 一様流速度  
 $v_\rho$ : 半径方向の速度

$v_z$ : 円筒軸方向の速度  
 $v_\theta$ : 円周方向の速度  
 $\kappa$ : 変数  
 $\lambda_{p,s}$ : 第一種  $p$  次ベッセル関数の  $s$  番目の根  
 $\lambda_s$ : 第一種零次ベッセル関数の  $s$  番目の根  
 $\mu$ : 変数  
 $\Pi(n-m)$ : ガウスの  $\pi$  関数  
 $\rho'$ : 二重極子の半径方向の位置  
 $\rho_D$ : 流体の密度  
 $\Phi_{1,2,3}$ : 円筒境界条件を満す速度ポテンシャル  
 $\phi_{1,2,3}$ : 自由な二重極子の速度ポテンシャル  
 $\phi^*_{1,2,3}$ :  
 $\phi_{R1,2,3}$ : 動径速度ポテンシャル  
 $\Psi$ : 流れ関数  
 添字 0: 境界のない場合  
 1: 円筒軸に平行な二重極子の軸がある場合  
 2: 半径方向に二重極子の軸がある場合  
 3: 円筒軸および半径方向にそれぞれ直交する方向に二重極子の軸がある場合  
 座標系  
 $(\rho, \varphi, z)$ : 円筒軸上に原点がある円筒座標  
 $(R, \Theta, \phi)$ : 二重極子の位置を原点とする球座標  
 $(R, \Theta, z)$ : 二重極子の位置を原点とする円筒座標

\* 昭和45年9月7日受付

\*\* 空気力学第一部

## 1. 序 論

円筒内で物体を振動させ、それに作用する力を測定する場合、円筒壁の影響として物体の速度および加速度に関係して、それぞれ減衰力や仮想質量による見かけの力の増加が考えられる。境界干渉の研究において揚力をもった物体が振動する場合、振動に伴って発生する渦の後方への移流の機構が比較的明確であるため詳しい研究が行なわれている。しかしながら、揚力をもたない物体が振動する場合、流れのモデル化が困難なため、この境界干渉は実験的、理論的にあまり進展していない。このため、円筒内で加速度運動をする物体の仮想質量を評価する目的で、二重極子を円筒内におき、そのときえられる閉曲面について、それに作用する加速度による力を計算した。

物体が流体中を加速度運動をするとき、物体に見かけ上の質量が付加されたと同様な力が作用し、これを見かけの質量、あるいは仮想質量とよぶ。これは閉曲面をなす流線の中で流体の運動エネルギーが瞬間的な速度の自乗に比例するため、便宜上、見かけの質量とみなしたものである。代表的な計算は H. Lamb によって解かれた回転楕円体の廻転運動と平行運動のときの見かけの質量がある<sup>1)</sup>。そのほか、近似的な取扱いとして細長い物体についてその各断面の二次元ポテンシャルを流れの方向に加えて力を求める Bryson の方法<sup>2),3)</sup> などがある。円筒内の完全流体の定常な流れでは T. C. Benton<sup>4)</sup> によって単独の吹出し、吸込みあるいはそれらのリング状に分布したもの等による流れが解かれている。同様な方法でリング状や円板状に分布した二重極子について P. Levine<sup>5)</sup> が求めている。また Neumann の問題として干渉のある場合が数値解法により J. L. Hess その他によって求められている<sup>6),7),8)</sup>。

一方、非定常な場合について二次元近似の範囲では物体の各断面の二次元ポテンシャルを流れの方向に加えて求めることができる。これは三次元性の影響を無視したため細長比が 10 以上でないときと実際によく合わないことが分っている。この方法によって円筒内におかれた楕円体が円筒の軸に垂直に運動するときの仮想質量を求めることができる。このとき断面を二つの同心円とし、その間を流体が運動するとポテンシャル関数は次のように与えられる、

$$\phi = \left( A\rho + \frac{B}{\rho} \right) \cos \theta \quad (1.1)$$

A および B は次のような境界条件によって決められるものである、

$$\left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)_{\rho=r} = U \cos \theta, \quad \left( \frac{\partial \phi}{\partial \rho} \right)_{\rho=a} = 0 \quad (1.2)$$

したがって、(2) 式より

$$A = \frac{r^2}{a^2 - r^2} U, \quad B = \frac{a^2 r^2}{a^2 - r^2} U \quad (1.3)$$

故に、流れ方向の単位長さについて仮想質量は

$$m = -\frac{\rho_D}{U^2} \int_S \phi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \pi \rho_D r^2 \left( 1 + \frac{2r^2}{1 - \gamma^2} \right) \quad (1.4)$$

ただし、 $\gamma = r/a$  で与えられる。上式を流れ方向に沿う  $z$  軸について積分すると求める仮想質量がえられる。長径  $l$ 、短径  $r$  の回転楕円体の仮想質量  $M$  は次のようになる、

$$M = \frac{4}{3} \pi \rho_D l r^2 \left( 1 + 3\gamma^2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^{2+n/2}}{3^{2+n/3}} \gamma^{2n} \right) \quad (1.5)$$

第 9 図に仮想質量の増加の割合を短径に対する円筒半径の割合について示した。図より明らかなごとく、仮想質量の増加は  $r/a$  が 0.2 より急激に増加し、0.6 で約 2 倍になることがわかる。一般に固定壁で囲まれた流体中を非定常運動する物体に作用する力は流体運動が非廻転的であると、

$$F = \int_V \rho_D \frac{\partial q}{\partial t} dV + \int_S -p n dS \quad (1.6)$$

で与えられ、流体の慣性力と壁におよぼす力の和で与えられる。

以上の仮想質量についての概観と二次元境界干渉の考察のもとに揚力をもたない物体の動的試験のときの風洞壁の影響が相当著しいこと、特に細長比が小さい物体については三次元的な影響を考慮しなければならないことがわかった。このため二重吹出しを円筒内においた場合のポテンシャルを固有関数の級数表示で求め、定常な流れより非定常な流れをうるためによく用いられる方法、すなわち、二重吹出しの分布や列を一定の速度で動く系より見た場合に得られる閉曲面を物体で置き換える方法に従った。本報告では一つの二重極子が円筒軸上にある場合、円筒内の任意の場所にある場合で、いずれもその軸は円筒軸方向、半径方向および両者に直交する三方向について取扱う、これは等価な物体が風洞軸方向、半径方向およびそれらに直交する方向に運動する場合に相当するものである。

## 2. 二重極子ポテンシャルのベッセル関数表示

流体力学における重要な問題は、しばしば有限な境界が円筒で、その中で運動する物体の周りの流れを取扱うことが多い。したがって、円筒座標を用いて色々な量を表示すると便利である。湧き出しのない非廻転

の流れでは速度はポテンシャルをもち、それはラプラスの方程式を満足する。すなわち、

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \phi}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0 \quad (2.1)$$

この一般解は固有関数の無限級数で表示され、次のように示される。

$$\phi = \sum_{s,n} A_{s,n} J_n(\lambda_s \rho) e^{\pm \lambda_s z} \cos n\theta \quad (2.2)$$

但し、 $\lambda_s$  および  $n$  は適当な境界条件によって決まる固有値である。(2.2) において二つの境界条件、すなわち、円筒壁上と物体表面上で同時に境界条件を満足するものを求めることが困難である。したがって、ここでは球座標で表示されるポテンシャル関数を円筒座標に変換する。このためベッセル関数とルジャンドル関数の次の関係を用いる<sup>9)</sup>、

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_m(\lambda R) \lambda^n d\lambda = \frac{1}{R^{n+1}} p_n^m(\mu) \quad (2.3)$$

および、

$$\int_0^\infty \sin \left\{ K \cos \phi + (m-n-1) \frac{\pi}{2} \right\} K_m(\kappa \sin \phi) \kappa^n dK = -\frac{\pi}{2} p_n^m(\mu) \quad (2.4)$$

において  $z = R \cos \phi$ ,  $R = R \sin \phi$  および  $\kappa = \lambda R$  とおいた、

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \left\{ \lambda z + (m-n-1) \frac{\pi}{2} \right\} K_m(\lambda R) \lambda^n d\lambda = -\frac{1}{R^{n+1}} p_n^m(\mu) \quad (2.5)$$

ただし、

$$p_n^m(\mu) = \Pi(n-m) P_n^m(\mu) = \frac{\Pi(m+n)}{2^m \Pi(m)} (1-\mu^2)^{\frac{m}{2}} \times F(m-n; m+n+1; m+1; \frac{1-\mu}{z}) \quad (2.1)$$

である。(2.3), (2.5) 式の右辺は球座標系におけるラプラスの方程式の特解、

$$\frac{1}{R^{n+1}} P_n^m(\mu) \begin{cases} \sin m\theta \\ \cos m\theta \end{cases} \quad (2.7)$$

に現われるものであり、 $(R, \theta, \phi)$  なる球座標と  $(R, \theta, z)$  なる円筒座標との間の解の変換を与えるものである。ここで問題を簡単にするためポテンシャル関数を二重極子に限定し以下の議論を行なう。

(2.3) および (2.5) 式において  $m=1, n=0$  の場合、

$$\phi_1^* = \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_0(\lambda R) \lambda d\lambda = \frac{1}{R^2} \cos \phi \quad (2.8)$$

$$\phi_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \sin \lambda z K_0(\lambda R) \lambda d\lambda = \frac{1}{R^2} \cos \phi \quad (2.9)$$

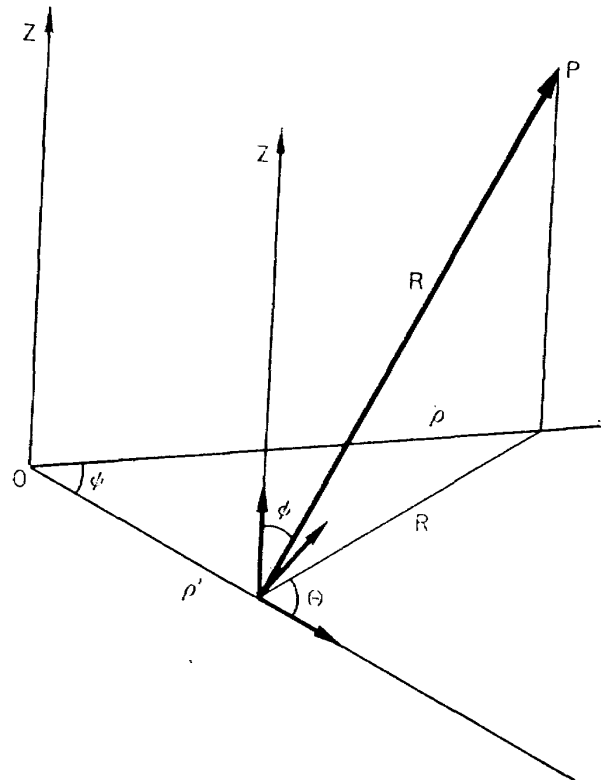


図 1 座標系の変換

となり、第1図に示すごとく円筒の軸方向に軸をもつ二重極子のポテンシャル関数を表わす。

さらに、 $m=1, n=1$  の場合、

$$\int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda R) \lambda d\lambda = \frac{1}{R^2} \sin \phi \quad (2.10)$$

$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \cos \lambda z \cdot K_1(\lambda R) \lambda d\lambda = \frac{1}{R^2} \sin \phi \quad (2.11)$$

となり、第1図に示される如く、それぞれ二重極子の軸の方向により二つの場合が考えられる。二重極子の軸が円筒の半径方向にあるときポテンシャル関数は

$$\phi_2 = \frac{1}{R^2} \sin \phi \cos \theta \quad (2.12)$$

で示され (2.10), (2.11) より

$$\phi_2^* = \cos \theta \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda R) \lambda d\lambda \quad (2.13)$$

$$\phi_2 = \frac{2}{\pi} \cos \theta \int_0^\infty \cos \lambda z K_1(\lambda R) \lambda d\lambda \quad (2.14)$$

となる。また、二重極子の軸が円筒軸および半径方向に直交する場合、ポテンシャル関数は

$$\phi_3 = \frac{1}{R^2} \sin \phi \sin \theta \quad (2.15)$$

となり、(2.10), (2.11) より

$$\phi_3^* = \sin \theta \int_0^\infty e^{-\lambda z} J_1(\lambda R) \lambda d\lambda \quad (2.16)$$

$$\phi_3 = \frac{2}{\pi} \sin \theta \int_0^\infty \cos \lambda z K_1(\lambda R) \lambda d\lambda \quad (2.17)$$

となる。

ここで、二重極子を円筒内の任意の点におくため、円筒座標系  $(R, \Theta, z)$  の原点を  $\rho'$  だけ移動し、新たな円筒座標系  $(\rho, \varphi, z)$  をとる。第 1 図より明らかごとく、

$$R = (\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi)^{1/2} \quad (2.18)$$

$$\cos \Theta = \frac{\rho' - \rho \cos \varphi}{(\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi)^{1/2}} \quad (2.19)$$

の関係が成立つ。さらに、ベッセル関数の Gegenbauer の加法定理、

$$J_n(\lambda R) = \frac{R^n}{\lambda^n} \left( \frac{2}{\rho\rho'} \right)^n \prod_{p=0}^{n-1} (n+p) C_p^n(\cos \varphi) \times J_{n+p}(\lambda\rho) J_{n+p}(\lambda\rho') \quad (2.20)$$

$$K_n(\lambda R) = \frac{R^n}{\lambda^n} \left( \frac{2}{\rho\rho'} \right)^n \prod_{p=0}^{n-1} (n+p) C_p^n(\cos \varphi) \times K_{n+p}(\lambda\rho) I_{n+p}(\lambda\rho') \quad (2.21)$$

特に  $n=0$  の場合

$$J_0(\lambda R) = J_0(\lambda\rho) J_0(\lambda\rho') + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p\varphi J_p(\lambda\rho) J_p(\lambda\rho') \quad (2.22)$$

$$K_0(\lambda R) = I_0(\lambda\rho') K_0(\lambda\rho) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p\varphi I_p(\lambda\rho') K_p(\lambda\rho) \quad (2.23)$$

を利用する、(2.22), (2.23) 式を (2.8), (2.9) 式にそれぞれ代入すると、

$$\phi_1^* = \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \times \left\{ J_0(\lambda\rho) J_0(\lambda\rho') + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p\varphi J_p(\lambda\rho) J_p(\lambda\rho') \right\} \lambda d\lambda \quad (2.24)$$

$$\phi_1 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \sin \lambda z \times \left\{ I_0(\lambda\rho') K_0(\lambda\rho) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p\varphi I_p(\lambda\rho') K_p(\lambda\rho) \right\} \lambda d\lambda \quad (2.25)$$

となり、これは  $\rho'$  点において円筒軸方向に軸をもった二重極子のポテンシャル関数で、 $\rho'$  点を除いてラプラスの方程式を満足することは自明である。次に (2.13), (2.14) 式は幾何学的関係より、

$$\phi_2^* = \frac{\rho' - \rho \cos \varphi}{R} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_1(\lambda R) \lambda d\lambda = -\frac{\partial}{\partial \rho'} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_0(\lambda R) \lambda d\lambda \quad (2.26)$$

$$\phi_2 = \frac{2(\rho' - \rho \cos \varphi)}{\pi R} \int_0^{\infty} \cos \lambda z K_1(\lambda R) \lambda d\lambda = \frac{2}{\pi} \frac{\partial}{\partial \rho'} \int_0^{\infty} \cos \lambda z K_0(\lambda R) \lambda d\lambda \quad (2.27)$$

となり、それぞれ (2.22), (2.23) を代入して、

$$\phi_2^* = -\int_0^{\infty} e^{-\lambda z} \times \left\{ J_0(\lambda\rho) J_0(\lambda\rho') + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p\varphi J_p(\lambda\rho) J_p(\lambda\rho') \right\} \lambda d\lambda \quad (2.28)$$

$$\phi_2 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \lambda z \times \left\{ I_0(\lambda\rho') K_0(\lambda\rho) + 2 \sum_{p=1}^{\infty} \cos p\varphi I_p(\lambda\rho') K_p(\lambda\rho) \right\} \lambda d\lambda \quad (2.29)$$

で動径方向に軸をもつ場合のポテンシャル関数を示すことができる。次に二重極子の軸が円筒軸方向、動径方向に互に垂直な方向にある場合は、前と同様にして

$$\phi_3^* = \frac{\rho \sin \varphi}{R} \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_1(\lambda R) \lambda d\lambda \quad (2.30)$$

$$\phi_3 = \frac{2}{\pi} \frac{\rho \sin \varphi}{R} \int_0^{\infty} \cos \lambda z K_1(\lambda R) \lambda d\lambda \quad (2.31)$$

となり、(2.20), (2.21) 式で  $n=1$  とおいたものを用いると、

$$\phi_3^* = \frac{2 \sin \varphi}{\rho'} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) C_p^1(\cos \varphi) \times \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_{p+1}(\lambda\rho) J_{p+1}(\lambda\rho') d\lambda \quad (2.32)$$

$$\phi_3 = \frac{4 \sin \varphi}{\pi \rho'} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) C_p^1(\cos \varphi) \times \int_0^{\infty} \cos \lambda z K_{p+1}(\lambda\rho) I_{p+1}(\lambda\rho') d\lambda \quad (2.33)$$

となる。ここで  $C_p^1$  は第 2 種の Chebyshev の多項式と呼ばれるもので

$$C_p^1(\cos \varphi) = \frac{\sin(p-1)\varphi}{\sin \varphi} \quad (2.34)$$

で与えられる。したがって、

$$\phi_3^* = \frac{2}{\rho'} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) \sin(p+1)\varphi \times \int_0^{\infty} e^{-\lambda z} J_{p+1}(\lambda\rho) J_{p+1}(\lambda\rho') d\lambda \quad (2.35)$$

$$\phi_3 = \frac{4}{\pi \rho'} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) \sin(p+1)\varphi \times \int_0^{\infty} \cos \lambda z K_{p+1}(\lambda\rho) I_{p+1}(\lambda\rho') d\lambda \quad (2.36)$$

となる。 $\phi_2^*$ ,  $\phi_2$ ,  $\phi_3^*$ , および  $\phi_3$  がラプラスの方程式を満足することは明らかである。なほ、 $\rho$ ,  $\rho'$  について相反法則を満足していないのは円筒座標においてラプラスの方程式が自己共軛型でないためである。

### 3. 円筒内の流れ

円筒壁上で半径方向の速度成分が零でなければならぬ。(2.25), (2.29) および (2.36) 式は二重極子の特異性を示す関数であるが、この境界条件は満足されて

いない。このため境界条件を満足するように、全空間でラプラスの方程式を満足する特異性をもたないポテンシャル関数をつけ加える。これらの関数をそれぞれ  $K_p(\lambda\rho')I_p(\lambda\rho)$ ,  $K_p'(\lambda\rho')I(\lambda\rho)$  および  $K_{p+1}(\lambda\rho') \cdot I_{p+1}(\lambda\rho)$  ととり、未定定数  $A, B, C$  をもちいて次のような動径関数  $\phi_{R1}, \phi_{R2}$  および  $\phi_{R3}$  を考える、

$$\phi_{R1} = I_p(\lambda\rho')K_p(\lambda\rho) - AK_p(\lambda\rho')I_p(\lambda\rho) \quad (3.1)$$

$$\phi_{R2} = I_p'(\lambda\rho')K_p(\lambda\rho) - BK_p'(\lambda\rho')I_p(\lambda\rho) \quad (3.2)$$

$$\phi_{R3} = I_{p+1}(\lambda\rho')K_{p+1}(\lambda\rho) - CK_{p+1}(\lambda\rho')I_{p+1}(\lambda\rho) \quad (3.3)$$

境界条件  $(\partial\phi_{R1}/\partial\rho)_{\rho=a}=0$ ,  $(\partial\phi_{R2}/\partial\rho)_{\rho=a}=0$  および  $(\partial\phi_{R3}/\partial\rho)_{\rho=a}=0$  より、それぞれ  $A, B, C$  を決めると

$$A = \frac{I_p(\lambda\rho')K_p'(\lambda a)}{I_p'(\lambda a)K_p(\lambda\rho')} \quad (3.4)$$

$$B = \frac{I_p'(\lambda\rho')K_p'(\lambda a)}{I_p'(\lambda a)K_p'(\lambda\rho')} \quad (3.5)$$

$$C = \frac{I_{p+1}(\lambda\rho')K_{p+1}'(\lambda a)}{I_{p+1}'(\lambda a)K_{p+1}(\lambda\rho')} \quad (3.6)$$

となり、(2.25), (2.29) および (2.36) 式はそれぞれ次のように示される。

$$\Phi_1 = \frac{4}{\pi} \sum'_{p=0} \cos p\varphi \int_0^\infty \sin \lambda z \frac{I_p(\lambda\rho')}{I_p'(\lambda a)} \times \{I_p'(\lambda a)K_p(\lambda\rho) - I_p(\lambda\rho)K_p'(\lambda a)\} \lambda d\lambda \quad (3.7)$$

$$\Phi_2 = \frac{4}{\pi} \sum'_{p=0} \cos p\varphi \int_0^\infty \cos \lambda z \frac{I_p'(\lambda\rho')}{I_p'(\lambda a)} \times \{I_p'(\lambda a)K_p(\lambda\rho) - I_p(\lambda\rho)K_p'(\lambda a)\} \lambda d\lambda \quad (3.8)$$

ただし、 $\sum'$  の記号は  $p=0$  の場合  $1/2$  をとるものとする。および、

$$\Phi_3 = \frac{4}{\pi\rho'} \sum'_{p=0} (p+1) \sin(p+1)\varphi \int_0^\infty \cos \lambda z \frac{I_{p+1}(\lambda\rho')}{I_{p+1}'(\lambda a)} \times \{I_{p+1}'(\lambda a)K_{p+1}(\lambda\rho) + I_{p+1}(\lambda\rho)K_{p+1}'(\lambda a)\} \lambda d\lambda \quad (3.9)$$

(3.7), (3.8) および (3.9) 式中の右辺の積分を行なうため原点を避けた虚軸上と虚軸の右側の無限大の半円を時計方向に廻る積分路について複素積分を行なう(付録)。その結果はそれぞれ次のように示される、

$$-\frac{\pi}{a} \sum'_{s=1} J_p(\lambda_{p,s}\rho') G_p'(\lambda_{p,s}a) J_p(\lambda_{p,s}\rho) \times \lambda_{p,s} e^{-\lambda_{p,s}z} / J_p''(\lambda_{p,s}a) \quad (3.10)$$

$$\frac{\pi}{a} \sum'_{s=1} J_p'(\lambda_{p,s}\rho') G_p'(\lambda_{p,s}a) J_p(\lambda_{p,s}\rho) \times \lambda_{p,s} e^{-\lambda_{p,s}z} / J_p''(\lambda_{p,s}a) \quad (3.11)$$

$$-\frac{\pi}{a} \sum'_{s=1} J_{p+1}(\lambda_{p+1,s}\rho') G_{p+1}'(\lambda_{p+1,s}a) \times J_{p+1}(\lambda_{p+1,s}\rho) e^{-\lambda_{p+1,s}z} / J_{p+1}''(\lambda_{p+1,s}a) \quad (3.12)$$

ただし、 $\lambda_{p,s}$  は  $J_p'(\lambda a)=0$ ,  $\lambda_{p+1,s}$  は  $J_{p+1}'(\lambda a)=0$  の根の最初から  $s$  番目のものである。

さらに、ベッセル関数についてよく知られた関係式

$$G_m(\lambda a) J_m'(\lambda a) - J_m(\lambda a) G_m'(\lambda a) = \frac{1}{\lambda a} \quad (3.13)$$

より、 $J_m'(\lambda_{m,s}a)=0$  となるため、

$$G_m'(\lambda_{m,s}a) = -\frac{1}{\lambda_{m,s}a J_m(\lambda_{m,s}a)} \quad (3.14)$$

が導かれる、また、

$$(\lambda_{m,s}a)^2 J_m''(\lambda_{m,s}a) = (m^2 - m - \lambda_{m,s}^2 a^2) J_m(\lambda_{m,s}a) + \lambda_{m,s}a J_{m+1}(\lambda_{m,s}a) \quad (3.15)$$

より

$$\lambda_{m,s}a J_m''(\lambda_{m,s}a) = \left\{ \frac{m^2 - (\lambda_{m,s}a)^2}{\lambda_{m,s}a} \right\} J_m(\lambda_{m,s}a) \quad (3.16)$$

をうる。したがって、所要のポテンシャル関数  $\Phi_1, \Phi_2$  および  $\Phi_3$  は (3.10), (3.11), (3.12) および (3.16) 式より、

$$\Phi_1 = 4 \sum'_{p=0} \cos p\varphi \sum'_{s=1} \frac{\lambda_{p,s}^2 J_p(\lambda_{p,s}\rho')}{\{p^2 - (\lambda_{p,s}a)^2\} J_p^2(\lambda_{p,s}a)} \times J_p(\lambda_{p,s}\rho) e^{-\lambda_{p,s}z} \quad (3.17)$$

$$\Phi_2 = -4 \sum'_{p=0} \cos p\varphi \sum'_{s=1} \frac{\lambda_{p,s}^2 J_p'(\lambda_{p,s}\rho')}{\{p^2 - (\lambda_{p,s}a)^2\} J_p^2(\lambda_{p,s}a)} \times J_p(\lambda_{p,s}\rho) e^{-\lambda_{p,s}z} \quad (3.18)$$

および

$$\Phi_3 = \frac{4}{\rho'} \sum'_{p=0} (p+1) \sin(p+1)\varphi \sum'_{s=1} \frac{\lambda_{p+1,s} J_{p+1}(\lambda_{p+1,s}\rho')}{\{(p+1)^2 - (\lambda_{p+1,s}a)^2\} J_{p+1}^2(\lambda_{p+1,s}a)} \times J_{p+1}(\lambda_{p+1,s}\rho) e^{-\lambda_{p+1,s}z} \quad (3.19)$$

をうる。特別な場合として二重極子が円筒軸上にあるとき (3.17) 式で  $\rho' \rightarrow 0$  の極限をとると、

$$\Phi_0 = -2 \sum'_{s=1} \frac{J_0(\lambda_{0,s}\rho')}{a^2 J_0^2(\lambda_{0,s}a)} e^{-\lambda_{0,s}z} \quad (3.20)$$

となり、このとき流れは円筒軸に対して軸対称となり、Stokes の流れ関数が存在し、これを  $\Psi_{10}$  とすると、

$$\Psi_{10} = \int_0^\rho v_z \rho d\rho = -2 \sum'_{s=1} \frac{\rho J_1(\lambda_{0,s}\rho)}{a^2 J_0^2(\lambda_{0,s}a)} e^{-\lambda_{0,s}z} \quad (3.21)$$

で与えられる。また、

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} J_0'(\lambda_{1,s}\rho') = 0 \quad (3.22)$$

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} J_p'(\lambda_{p,s}\rho') = \lim_{\rho' \rightarrow 0} \left\{ \frac{p}{\lambda_{p,s}\rho'} \cdot J_p(\lambda_{p,s}\rho') - J_{p+1}(\lambda_{p,s}\rho') \right\} = \begin{cases} 1/2 & p=1 \\ 0 & p>0 \end{cases} \quad (3.23)$$

を用いると, (3.18) 式は  $\rho' \rightarrow 0$  とすると

$$\Phi_{20} = -2 \cos \varphi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_{1,s}^2 J_1(\lambda_{1,s} \rho)}{[1 - (\lambda_{1,s} a)^2] J_1^2(\lambda_{1,s} a)} e^{-\lambda_{1,s} z} \quad (3.24)$$

また,

$$\lim_{\rho' \rightarrow 0} \frac{J_{p+1}(\lambda_{p+1,s} \rho')}{\rho'} = \begin{cases} \frac{\lambda_{1,s}}{2} & p=0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases} \quad (3.25)$$

より, (3.19) 式は  $\rho' \rightarrow 0$  のとき

$$\Phi_{30} = 2 \sin \varphi \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\lambda_{1,s}^2 J_1(\lambda_{1,s} \rho)}{[1 - (\lambda_{1,s} a)^2] J_1^2(\lambda_{1,s} a)} e^{-\lambda_{1,s} z} \quad (3.26)$$

をうる。

これまで求めた二重極子のポテンシャル関数をまとめて示すと

Axial Doublet;

$$\Phi_1 = 4 \sum_{p=0}^{\infty} \cos p \varphi \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{p,s}^2 J_p(\lambda_{p,s} \rho') \times J_p(\lambda_{p,s} \rho) e^{-\lambda_{p,s} z} / J_p^2(\lambda_{p,s} a) \{p^2 - (\lambda_{p,s} a)^2\} \quad (3.27)$$

$$\Phi_{10} = -2 \sum_{s=1}^{\infty} J_0(\lambda_{0,s} \rho) e^{-\lambda_{0,s} z} / a^2 J_0^2(\lambda_{0,s} a) \quad (3.28)$$

Radial Doublet;

$$\Phi_2 = -4 \sum_{p=0}^{\infty} \cos p \varphi \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{p,s}^2 J_p'(\lambda_{p,s} \rho') \times J_p(\lambda_{p,s} \rho) e^{-\lambda_{p,s} z} / J_p^2(\lambda_{p,s} a) \{p^2 - (\lambda_{p,s} a)^2\} \quad (3.29)$$

$$\Phi_{20} = -2 \cos \varphi \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{1,s}^2 J_1(\lambda_{1,s} \rho) e^{-\lambda_{1,s} z} / J_1^2(\lambda_{1,s} a) \times \{1 - (\lambda_{1,s} a)^2\} \quad (3.30)$$

Normal Doublet;

$$\Phi_3 = \frac{4}{\rho'} \sum_{p=0}^{\infty} (p+1) \sin (p+1) \varphi \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{p+1,s} \times J_{p+1}(\lambda_{p+1,s} \rho') J_{p+1}(\lambda_{p+1,s} \rho) e^{-\lambda_{p+1,s} z} \times / J_{p+1}^2(\lambda_{p+1,s} a) \{(p+1)^2 - (\lambda_{p+1,s} a)^2\} \quad (3.31)$$

$$\Phi_{30} = 2 \sin \varphi \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{1,s}^2 J_1(\lambda_{1,s} \rho) e^{-\lambda_{1,s} z} / J_1^2(\lambda_{1,s} a) \times \{1 - (\lambda_{1,s} a)^2\} \quad (3.32)$$

これらの式は  $z=0$  では級数が収斂しない。また,  $z=0$  の近傍でも正確な計算が困難である。特に,  $\Phi_2$ ,  $\Phi_3$  の  $z=0$  での値は岐点の位置を定める重要な量である。このため (3.8), (3.9) 式で  $z=0$ ,  $\varphi=0$  および  $\pi/2$  とおき

$$\Phi_{2(z, \varphi=0)} = \frac{4}{\pi} \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ I_p'(\lambda \rho) K_p(\lambda \rho) - \frac{K_{p+1}'(\lambda a)}{I_{p+1}'(\lambda a)} I_{p+1}(\lambda \rho') I_p(\lambda \rho) \right\} \lambda d\lambda \quad (3.33)$$

$$\Phi_{3(z=0, \varphi=\pi/2)} = \frac{4}{\pi \rho'} \sum_{p=0}^{\infty} \int_0^{\infty} \left\{ I_{p+1}(\lambda \rho') K_{p+1}(\lambda \rho) - \frac{K_{p+1}'(\lambda a)}{I_{p+1}'(\lambda a)} I_{p+1}(\lambda \rho') I_{p+1}(\lambda \rho) \right\} \lambda d\lambda \quad (3.34)$$

より求める,

$\rho' \rightarrow 0$  の場合は

$$\Phi_{20(z, \varphi=0)} = \phi_{20(z, \varphi=\pi/2)} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ K_1(\lambda \rho) - \frac{K_1'(\lambda a)}{I_1'(\lambda a)} I_1(\lambda \rho) \right\} \lambda d\lambda = \frac{1}{\rho^2} - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{K_1'(\lambda a)}{I_1'(\lambda a)} I_1(\lambda \rho) \lambda d\lambda \quad (3.35)$$

より求められる。これらの積分が収斂することは  $\lambda \rightarrow 0$ , あるいは  $\lambda \rightarrow \infty$  でのベッセル関数の振舞より明らかであり, 級数展開によるような困難はない。

さらに, 今まで求めたポテンシャル関数の正当性を示すために次のような原点におかれた  $z$  方向および  $\rho$  方向に軸をもった自由な場合の二重極子のポテンシャル関数

$$\phi_{10}^* = z(\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.36)$$

$$\phi_{20}^* = \rho \cos \theta (\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} \quad (3.37)$$

を考える。これらの式がいま求めた  $\Phi_{10}$ ,  $\Phi_{20}$  で  $a \rightarrow \infty$  とした場合に漸近することは (3.36), (3.37) 式を

$$-\lambda a J_{n+1}(\lambda a) + n J_n(\lambda a) = \lambda a J_n'(\lambda a) = 0 \quad (3.39)$$

の根,  $\lambda_{n,s}$  によって Dini の展開

$$\phi^* = \sum_s A_s J_n(\lambda_{n,s} \rho) \quad (3.39)$$

を行なうことによって証明せられる。すなわち,  $\phi_{10}^*$  の場合,

$$\phi_{10}^* = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 J_0(\lambda_{0,s} \rho)}{a^2 J_0^2(\lambda_{0,s} a)} \int_0^a z \rho (\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} J_0(\lambda_{0,s} \rho) d\rho \quad (3.40)$$

となり,

$$\int_0^{\infty} z \rho (\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} J_0(\lambda_{0,s} \rho) d\rho = e^{-\lambda_{0,s} z} \quad (3.41)$$

の関係を用いると,

$$\Phi_{10} - \phi_{10}^* = \int_a^{\infty} z \rho (\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} J_0(\lambda_{0,s} \rho) d\rho \quad (3.42)$$

$a \rightarrow \infty$  とすると

$$\Phi_{10} = \phi_{10}^* \quad (3.43)$$

をうる。

同様に  $\phi_{20}^*$  の場合

$$\phi_{20}^* = \cos \theta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{2 \lambda_{1,s}^2 a^2 J_1(\lambda_{1,s} \rho)}{a^2 [1 - \lambda_{1,s}^2 a^2] J_1^2(\lambda_{1,s} a)} \times \int_0^a \rho^2 (\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} J_1(\lambda_{1,s} \rho) d\rho \quad (3.44)$$

となり

$$\int_0^{\infty} \rho^2 (\rho^2 + z^2)^{-\frac{1}{2}} J_1(\lambda_{1,s} \rho) d\rho = e^{-\lambda_{1,s} z} \quad (3.45)$$



なる関係より

$$\Phi_{20} - \phi_{20}^* = \int_a^\infty \rho^2 (\rho^2 + z^2)^{-3/2} J_1(\lambda_{1,s}\rho) d\rho \quad (3.46)$$

となる。したがって、 $a \rightarrow \infty$  のとき

$$\Phi_{20} = \phi_{20}^* \quad (3.47)$$

である。

関数  $f(t)$  の Dini の級数表示の絶対収斂の条件は

$$\int_0^1 t^{1/2} f(t) dt \quad (3.48)$$

が存在し、絶対収斂することである、またこれらの級数の微分可能性については

$$\int_1^0 t^{1/2} \left\{ f'(t) - \frac{n}{t} f(t) \right\} dt \quad (3.49)$$

が存在し、絶対収斂することである。したがって求めた円筒内のポテンシャル関数は  $z=0$  を除いてこれらの条件を満足する。

#### 4. 一様速度の移動系より見た閉曲面

我々の目的は円筒内で運動している物体周りの流れをうることであり、このために求めた二重極子による流れに、それぞれ軸の向きと反対方向に一様流  $U$  をつけ加え、このときの流線を描き閉曲面を求める。

二重極子の軸が円筒軸上にある場合には Stokes の流れ関数は

$$\Psi = \frac{U\rho^2}{2} - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \rho_1 J_1(\lambda_{0,s}\rho) e^{-\lambda_{0,s}z} \frac{1}{J_0^2(\lambda_{0,s})} \quad (4.1)$$

となり、岐点の位置  $z_0$  は円筒の軸上で次の式を満足する、

$$U - 2 \sum_{s=1}^{\infty} \lambda_{0,s} e^{-\lambda_{0,s}z} \frac{1}{J_0^2(\lambda_{0,s})} = 0 \quad (4.2)$$

このとき、 $\Psi=0$  となり、(4.2) 式を解き流線を求める。

次に、二重極子の軸が円筒軸に対して直角におかれた場合、 $\varphi=0$  の断面で流線は図2より明らかなごとく、閉曲線の接線方向と流れの方向が等しいことから

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{v_\rho - U}{v_z} \quad (4.3)$$

が成立する。したがって、(3.30) 式より  $\varphi=0$  とおき

$$\frac{d\rho}{dz} = - \frac{2 \sum_{s=1}^{\infty} A_s \lambda_{1,s} J_1'(\lambda_{1,s}\rho) + U}{2 \sum_{s=1}^{\infty} A_s \lambda_{1,s} J_1(\lambda_{1,s}\rho)} \quad (4.4)$$

となる。ただし、

$$A_s = \frac{\lambda_{1,s}^2}{\{1 - (\lambda_{1,s}a)^2\} J_1^2(\lambda_{1,s}a)} e^{-\lambda_{1,s}z} \quad (4.5)$$

(4.4) 式は初期値を与えて Runge-Kutta-Gill の方法により数値的に求められる。次に  $\varphi$  がある角度をもつ

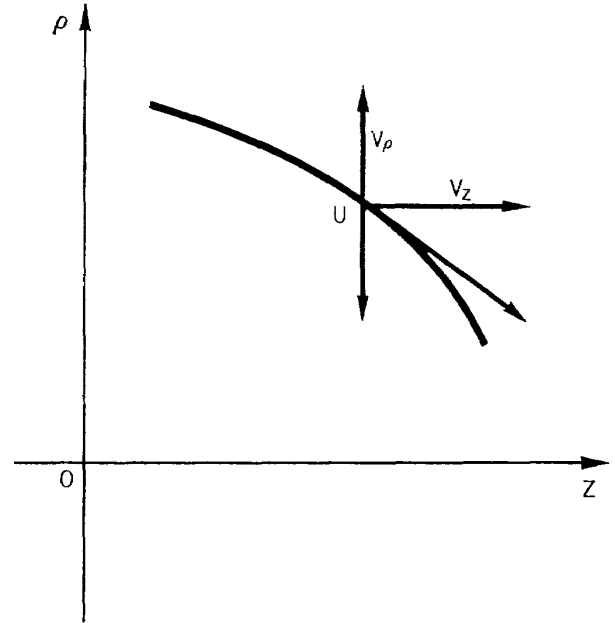


図2 物体面における境界条件

た場合は

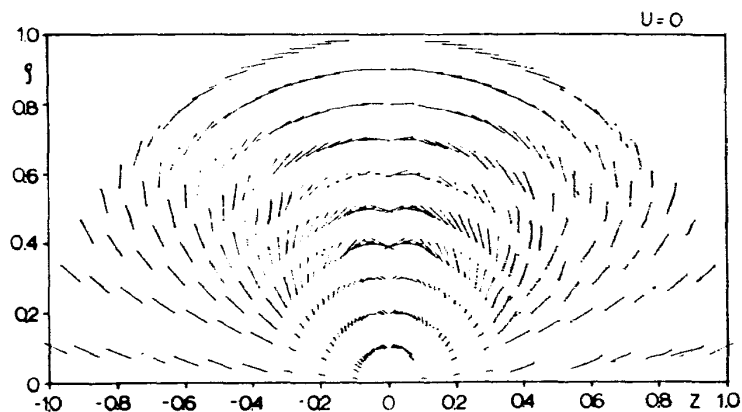
$$\frac{d\rho}{dz} = - \frac{2 \cos \varphi \sum_{s=1}^{\infty} A_s \lambda_{1,s} J_1'(\lambda_{1,s}\rho) - U \cos \varphi}{2 \cos \varphi \sum_{s=1}^{\infty} A_s \lambda_{1,s} J_1(\lambda_{1,s}\rho)} \quad (4.6)$$

となり、これは  $\varphi$  に無関係に (4.4) 式を満足し、(4.4) 式の解を母線とする  $z$  軸を軸にした回転面となる。

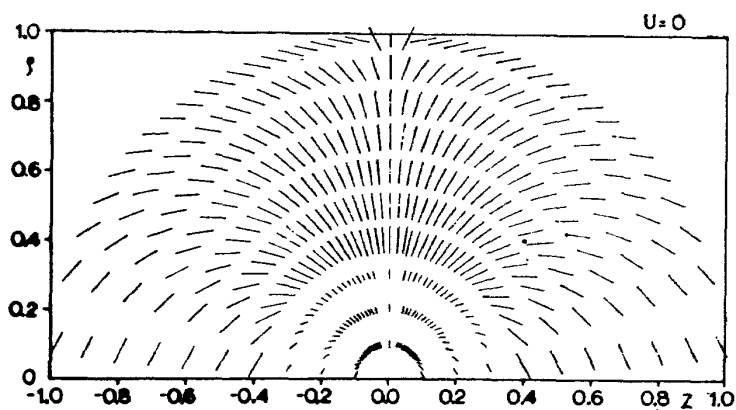
#### 5. 仮想質量および数値計算結果

前節までに求められた円筒内の二重極子によって誘導される流れから一様速度で運動する閉曲面が求められるが、これらの解は必ずしも解析的に求められるものではない。特に、二重極子が円筒軸上でない場合は閉曲面を数値解法により求めることになり、これを厳密に行なうには高速度電子計算機といえどもかなりの計算時間を要するであろう。しかしながら、現状で必要な境界干渉量として高精度を要求される場合は少なく、ただ干渉の程度を評価するに足る数値で充分である場合が多い。そこで、流れの場の数多くの点で流れ方向を示す線分を描き、これらを連続的に滑らかに結ぶ曲線により流線を求める方法に従った。

図3 (a), (b) に二重極子が円筒軸上にあり、その軸の向きがそれぞれ円筒軸方向およびそれと直交する方向に向いた場合で、円筒軸と二重極子の軸を含む断面の流線の模様を示す。図より明らかなごとく流れは境界条件を満足している。これに一様流  $U$  をつけ加えると、その大きさにしたがって図4 (a), (b) および図5 (a), (b) に示す如く大きさの異なる閉じた流線が存在することがわかる。これは境界のない場合は完

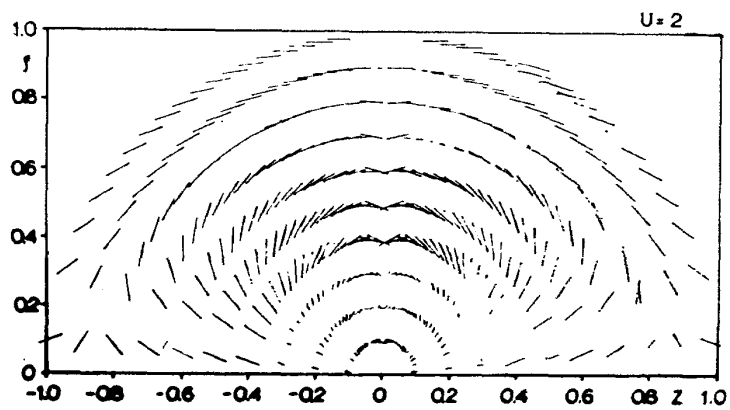


(a) 二重極子の軸が円筒軸と一致した場合

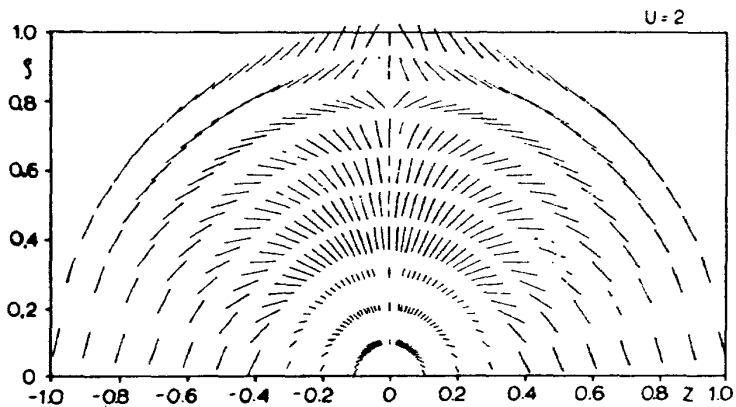


(b) 二重極子の軸が円筒軸と直交する場合

図 3 二重極子が円筒軸上にある場合の流線

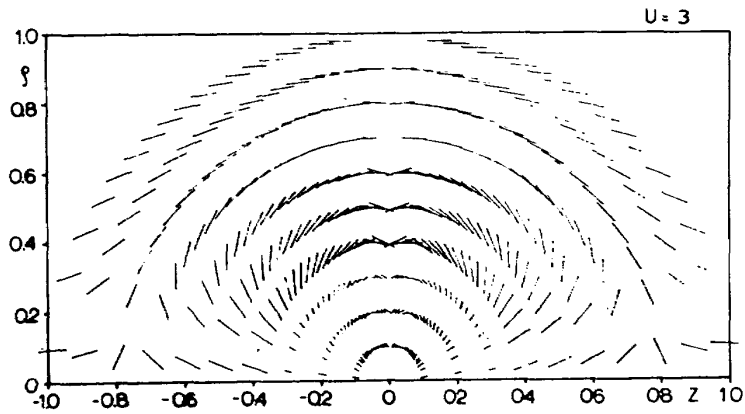


(a) 二重極子の軸が円筒軸と一致した場合

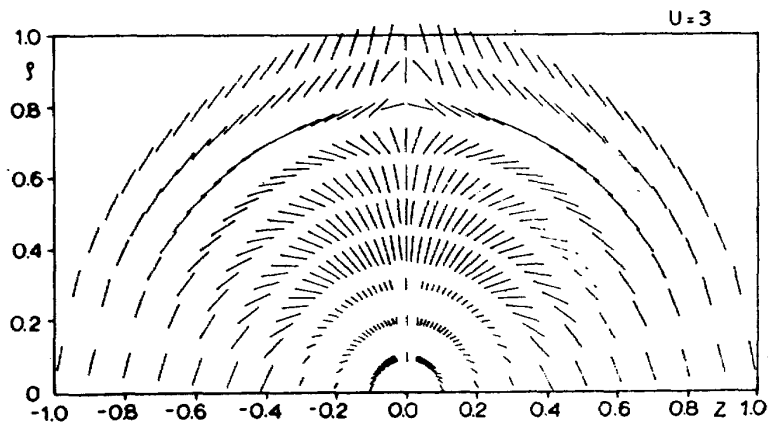


(b) 二重極子の軸が円筒軸と直交する場合

図 4 二重極子による流れに、その軸の向きに反対の一樣流  $U=2$  をつけ加えた場合の流線



(a) 二重極子の軸が円筒軸と一致した場合



(b) 二重極子の軸が円筒軸と直角する場合

図 5 二重極子による流れに、その軸の向きに反対の一流  $U=3$  をつけ加えた場合の流れ

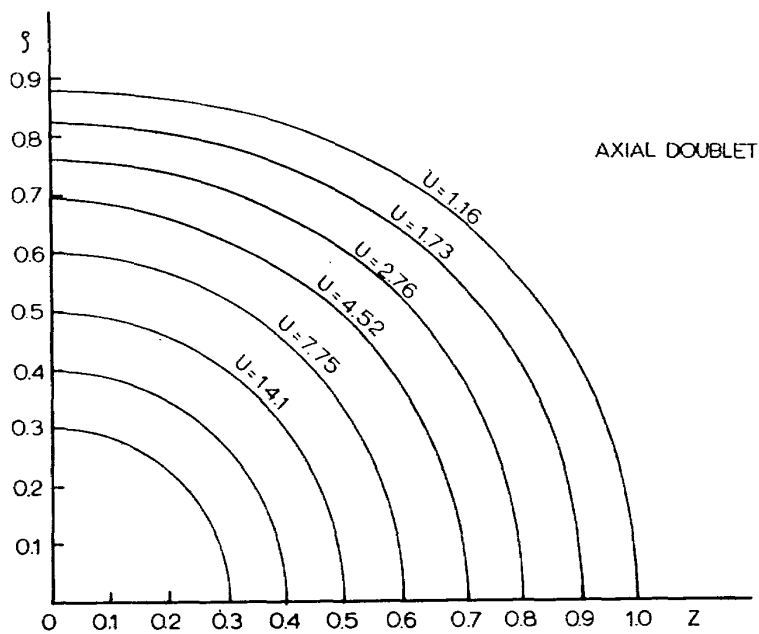


図 6 RKG 法によって解かれた二重極子の軸が円筒軸と一致する場合の閉曲面の形

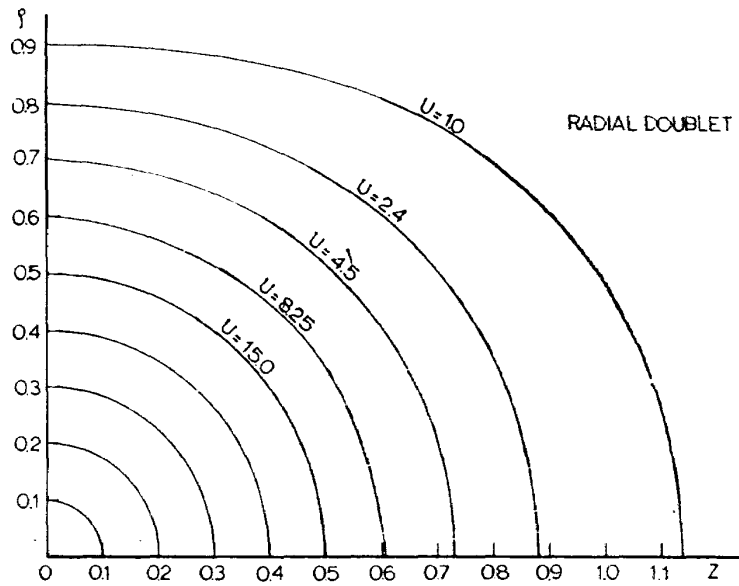


図 7 RKG によって解かれた二重極子の軸が円筒軸に直交する場合の閉曲面の形

全な円となるが、円筒壁によって流れが止められこの方向に流線が圧迫され扁平となる。この変形は  $U$  が小さいほど、すなわち、閉曲面が大きいほど著しく、 $U$  が大きくなると壁の影響は少なくなり、自由な場合の閉曲面、すなわち、球に近づくことがわかる。これらの閉じた流線は他の方法により、もっと詳しく求めることができる。すなわち、axial doublet の場合、岐点の位置  $z_0$  を与えてこれが岐点となるための速度  $U$  を (4.2) 式より求め、(4.1) 式を用いて  $\Psi=0$  を満足する解を数値解法により求める。また、radial doublet の場合 (3.35) 式より岐点の位置  $\rho_0$  に対応する速度を求め、Runge-Kutta の方法で (4.2) 式を解き閉じた流線を追跡することができる。これらの結果をそれぞれ図 6、図 7 に示す。前者の場合、半径が約 0.6 より、後者の場合、約 0.5 より大きいとき変形が始まり、漸次扁平度が大きくなることがわかる。また、岐点に対応する一様速度の大きさは自由な場合と比較すると両者とも小さくなっている。

次に、この閉曲面の仮想質量を求めるためこの中の流体の運動エネルギーを計算する。今の場合、閉曲面は円筒軸について廻転対称であるので断面の曲線を

$$\rho = f(z) \tag{5.1}$$

で与えると、運動エネルギー、 $T$  は

$$T = -\frac{\rho_D}{2} \int_S \Phi \frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \frac{MU^2}{2} \tag{5.2}$$

で与えられる。

$$\frac{\partial \Phi}{\partial n} dS = \left( v_z \frac{d\rho}{dz} - v_\rho \right) \rho dz d\theta \tag{5.3}$$

となるため、axial doublet の場合

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{v_\rho}{v_z - U} \tag{5.4}$$

より

$$T = -\pi \rho_D \int_0^r \Phi U \rho \frac{d\rho}{dz} dz \tag{5.5}$$

ゆえに

$$M = \frac{\pi \rho_D}{U} \int_0^r \Phi \rho \frac{d\rho}{dz} dz \tag{5.6}$$

また、radial doublet の場合、

$$\frac{d\rho}{dz} = \frac{v_\rho - U}{v_z} \tag{5.7}$$

より

$$\begin{aligned} T &= -\rho_D \int_0^r \int_0^{2\pi} \Phi_{\varphi=0} \cdot U \cos^2 \theta \rho d\theta dz \\ &= -\pi \rho_D \int_0^r U \Phi_{\varphi=0} \rho dz \end{aligned} \tag{5.8}$$

ゆえに

$$M = \frac{\pi \rho_D}{U} \int_0^r \Phi_{\varphi=0} \rho dz \tag{5.9}$$

計算結果を図 8 に示す。図で横軸は円筒半径に対する原点より岐点までの距離、すなわち閉曲面の運動方向の半径の割合を示し、縦軸は仮想質量の境界干渉による増分を自由な場合の仮想質量に対する割合で示したものである。図より明らかなごとく radial 方向では二次元理論は三次元理論より大きな値となっている。これは円筒軸方向の流れが考慮されていないので当然の結果である。また axial doublet と radial doublet を比較すると axial な場合が radial な場合より干渉量が

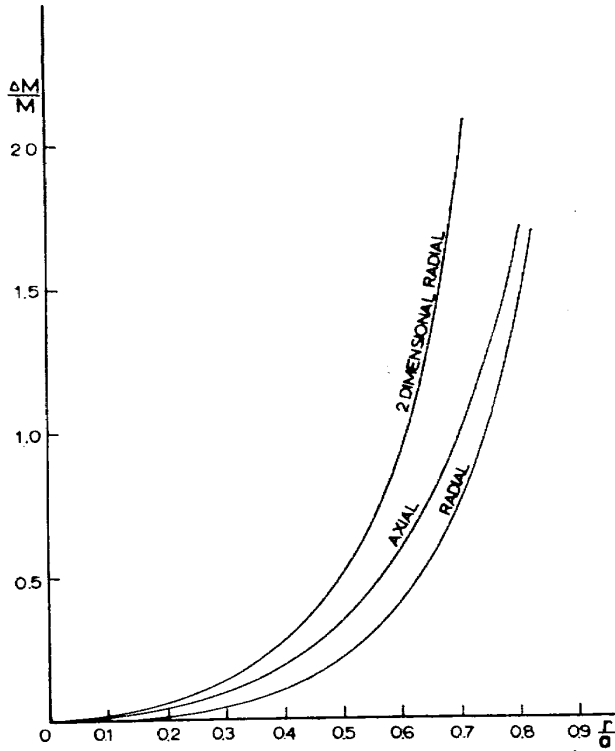


図 8 円筒軸上に球の中心がある場合の境界干渉による仮想質量の増加の割合

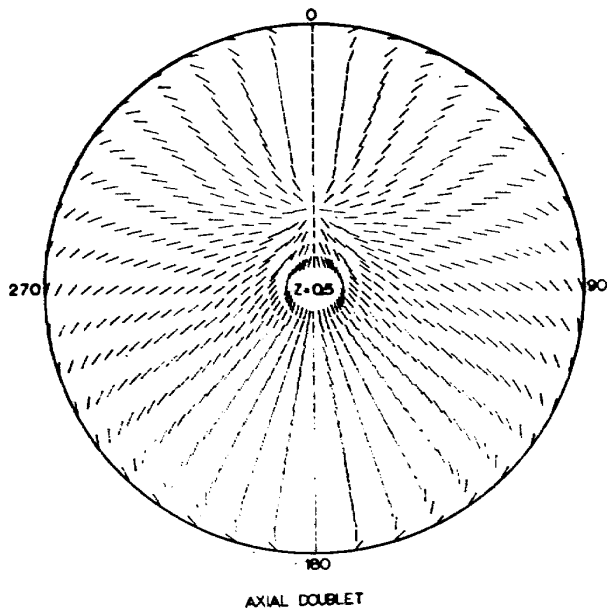


図 9  $\rho\phi$  断面における axial doublet による流線 ( $\rho'=0.3$ )

大きくなっている。これは axial な運動がより多く壁の影響を受けていることを示す。

二重極子が円筒軸上にない場合については先に述べたごとく、詳しい計算は行なわないで大まかな流線を求め、この中で閉じた閉曲面内について仮想質量を計算した。この一例として  $\rho'=0.3$  に二重極子をおき、それぞれ円筒軸方向 (axial), 半径方向 (radial) およ

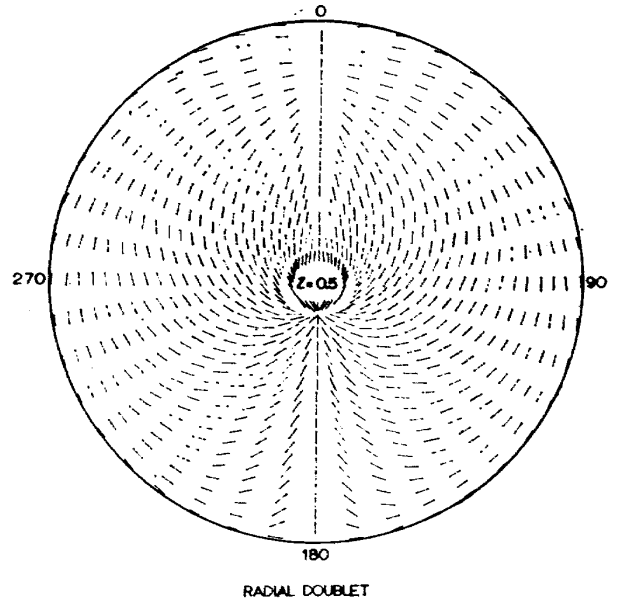


図 10  $\rho\phi$  断面における radial doublet による流線 ( $\rho'=0.3$ )

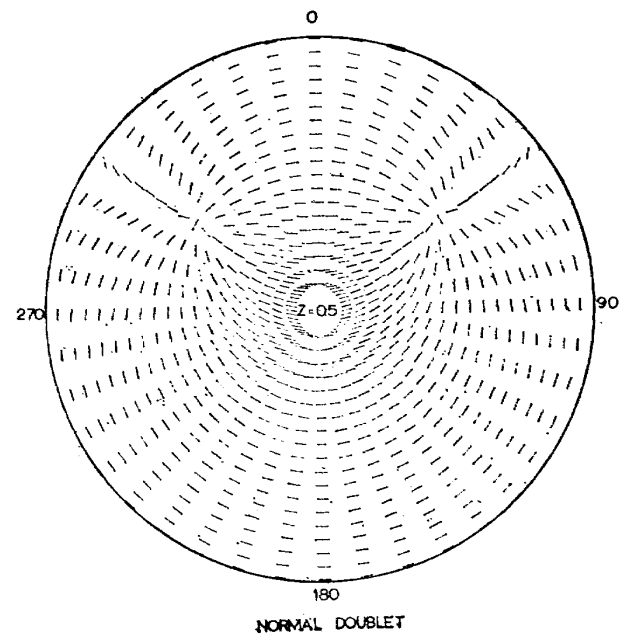


図 11  $\rho\phi$  断面における normal doublet による流線 ( $\rho'=0.3$ )

び両者に直交する方向 (normal) に二重極子の軸が向いている場合の結果について述べる。図 9, 10 および 11 に  $z=0.5$  における円筒軸に垂直な断面内の流線をそれぞれ axial, radial および normal doublet について示す。axial な場合、周辺部に円周方向の流れが生じているが一般的に軸方向の流れが卓越している。また、吹出点の流れが  $\rho=0.3$  のところにみられる。これに対して、radial な場合は円周方向の流れが卓越し、吹出点の影響はみられない。しかし  $\rho=0.12$ ,  $\phi=\pi$  の場所に流線の集中がみられる。normal な場合は図 12 にみられるごとく  $\rho=0.55$  で  $v_\rho=0$  となり、

ここで流線は円を描く、すなわち dividing stream line を形成している。また、流線は  $\rho=0.5$ ,  $\varphi=\pm 60^\circ$  の二つの場所に集中していることがわかる。次に、 $\rho z$  面で  $\varphi=0, \pi$  の場合をそれぞれ axial および radial doublet について図 12, 13 に示す。axial な場合 dividing stream line が存在し、 $\rho=0.3$ ,  $z=0$  より  $\rho=1.0$ ,  $z=0.75$  に終って二重極子の片側の流線を閉じている。これに軸方向の一樣流  $U=8$  をつけ加える

と同図右側にみられるごとく、半径約 0.6 の半円を描く閉じた流線をうる。この場合、岐点の位置は僅かながら円筒軸より遠ざかる方向に移動し、この方向の圧力分布は非対称となる。したがって、物体は円筒軸方向に引き戻される揚力を受けることがわかる。radial な場合、流線はほぼ予想通りのものであるが  $z=0.5$  の  $\rho\varphi$  面でみられた流線の集中は  $v_\rho=0$  による見かけ上のものであることがわかる。これに  $U=15$  の

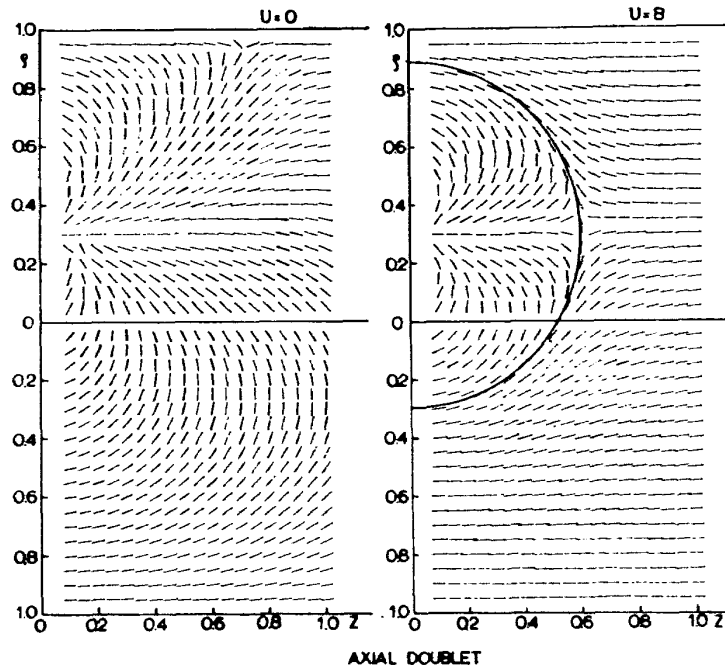


図 12  $\varphi=0, \pi$  における axial doublet の一樣流がない場合とある場合の流線 ( $\rho'=0.3$ )

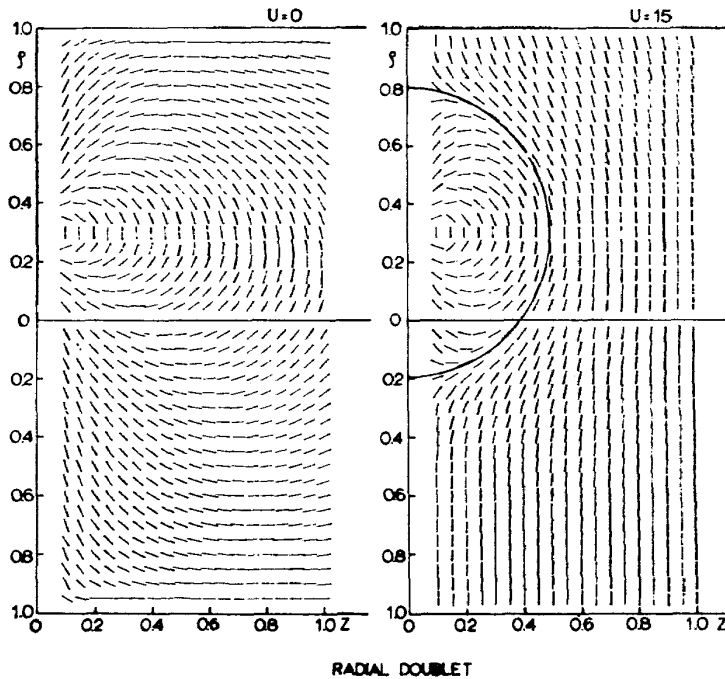


図 13  $\varphi=0, \pi$  における radial doublet の一樣流がない場合とある場合の流線 ( $\rho'=0.3$ )

一様流を  $\rho$  方向につけ加えると半径約 0.5 の半円を描く閉じた流線をうる。この場合、前のような揚力は生じないで流線は対称となる。次に、normal doublet について同様な操作を行なう。 $\rho z$  面で  $\varphi = \pi/2, \pi/3$  の断面を示すと図 14 に見られるように  $\rho = 0.3$  の所に見かけ上の吹出しが現われるが、これに  $U = 4.5$  の一様流を重ね合せると半径約 0.5 の半円を描く閉じた流線をうる。これを  $z = 0.2$  の円筒軸に垂直な断面で見ると  $U = 0$  の場合、図 15 に示すごとく、 $z = 0.5$  の

場合にみられた dividing stream line は縮小されている。これに  $U = 12$  の一様流を重ね合せると図 16 のように半径 0.42 の円い閉じた流線が存在することがわかる。この場合も流線は非対称となり、物体に揚力が作用していることは明らかである。

以上、三つの方向に軸をもった二重極子による閉曲面が明らかになったので、この中の流体の運動エネルギーを計算して仮想質量を求めるが、いずれの場合も偏平度が小さいとしてこれを無視し、 $\rho'$  を中心とす

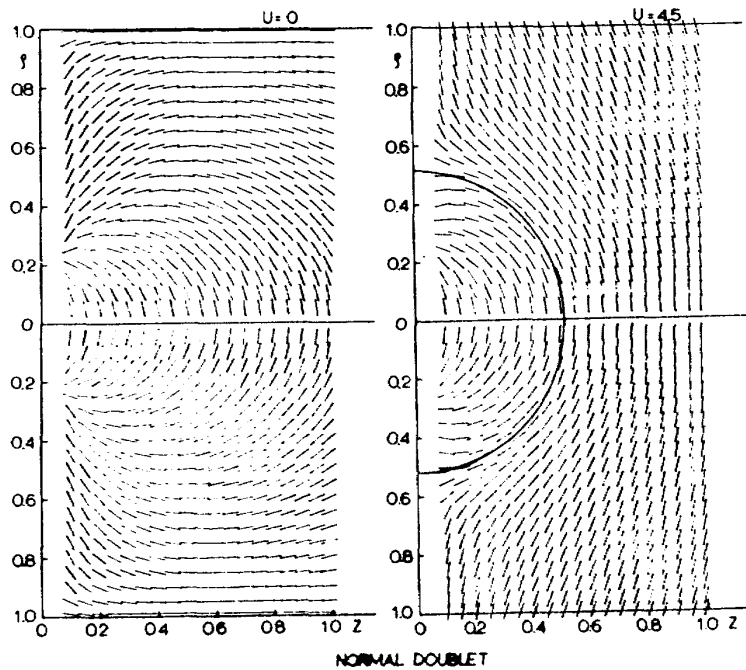


図 14  $\varphi = \pi/2, 3\pi/2$  における normal doublet の一様流がない場合とある場合の流線 ( $\rho' = 0.3$ )

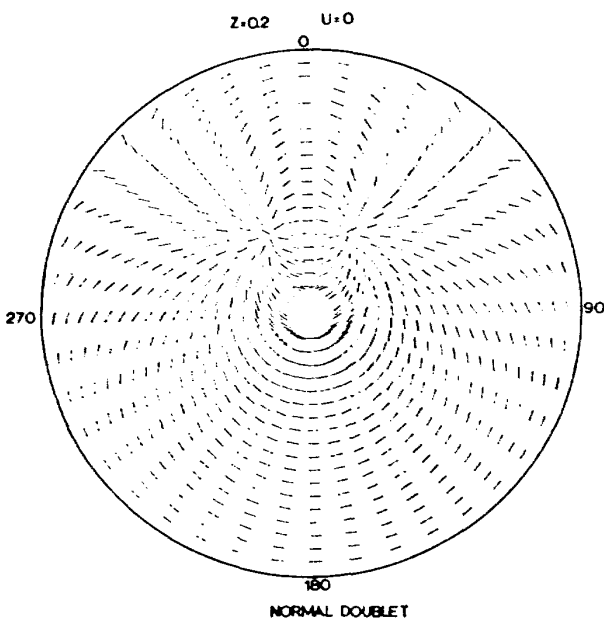


図 15 一様流がない場合の  $\rho\varphi$  面の normal doublet による流線 ( $\rho' = 0.3$ )

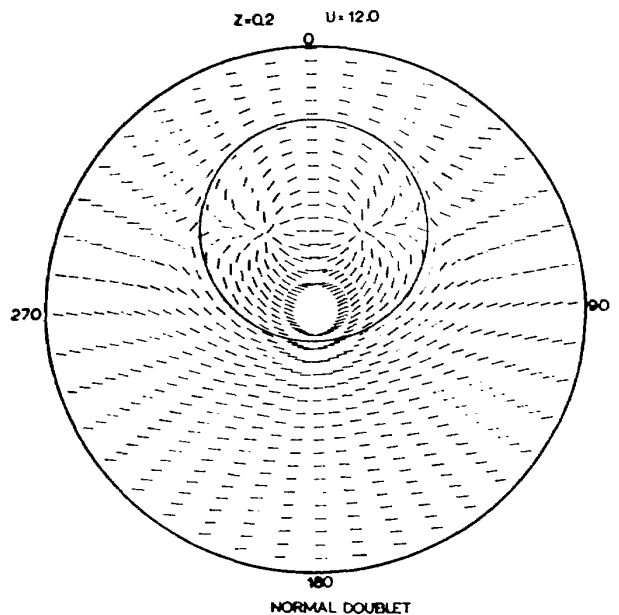


図 16 一様流がある場合の  $\rho\varphi$  面の normal doublet による流線 ( $\rho' = 0.3$ )

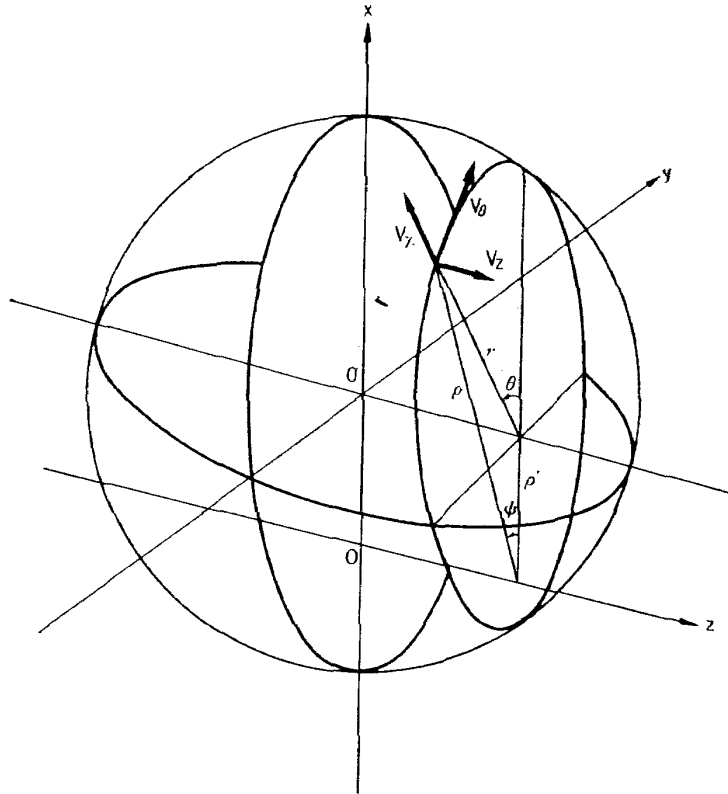


図 17 閉曲面上の座標および速度

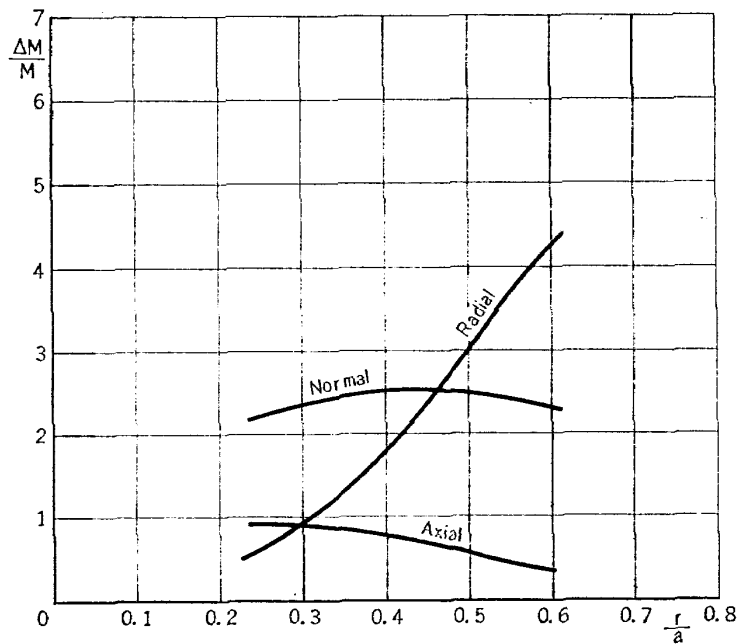


図 18 円筒軸より 0.3 離れておかれた球の仮想質量の境界干渉による増加の割合

る球を仮定する。図 17 を参照して

$$\begin{aligned}
 2T &= -\rho_D \int_S \Phi \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial z} \frac{z}{r} + \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right\} d\theta dz \\
 &= -\rho_D \int_S \Phi \left\{ \frac{\partial \Phi}{\partial z} z + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} (\rho - \rho' \cos \varphi) \right. \\
 &\quad \left. + \frac{\partial \Phi}{\partial \rho} \rho' \sin \varphi \right\} d\theta dz \quad (5.10)
 \end{aligned}$$

をうる。

図 18 に仮想質量の境界干渉による増分を自由な場合に対する割合で示す。図より normal と radial な場合が干渉量の割合が大きく、axial な場合は小さい。干渉量の割合の球と円筒の半径比に対する関係は、normal の場合、半径比が増すとほぼ一定となる、



radial の場合、半径比が約0.2から急激に増加する傾向を示し、axial の場合、単調に増加しそして減少する、このとき干渉量は円筒軸上にある場合より小さい。これらの物理的意味はあまり明らかでないが、二重極子の位置が円筒軸上を離れると境界干渉は複雑となることがわかる。

6. 結 論

風洞内で物体が加速度運動をする場合の非定常風洞壁干渉を調べるため、二重極子を円筒内におき一様速度で運動する系よりみた場合の閉曲面を求め、この中の運動エネルギーより仮想質量を求めた。物体は円筒内の任意の場所で、運動の方向はそれぞれ円筒軸方向、半径方向および両者に直角な方向について求められ、したがってこれらの重ね合せにより任意の方向に運動する場合も容易に求められる。得られた結果は円筒軸上に中心がある場合は二次元理論で求められるものより小さな値を示しているが、半径比が約0.5より急激に干渉量が増加する。また、円筒軸上にない場合は半径比で0.3の場所におかれた球について計算され、軸上にある場合の仮想質量に比して境界干渉は複雑となる。干渉による仮想質量の増加は球が半径方向および円筒軸と半径に直交する方向に運動するとき著しく大きく、円筒軸方向に運動する場合は球と円筒の半径比が大きくなると干渉量は減少した。いずれの場合も干渉による球の変形は半径比が小さい場合は僅かで計算は完全な球として行なった。

終りに本研究の電子計算機による流線の作図ならびに数値計算に多大の協力をいただいた空気力学第一部菊地技官に対し深甚なる謝意を表す。

付 録

複素積分により、次のような変形ベッセル関数を被積分関数に含む積分を行なう。

$$I_1 = \int_0^\infty \sin \lambda z \frac{I_p(\lambda \rho')}{I_p'(\lambda a)} \{I_p'(\lambda a) K_p(\lambda \rho) - I_p(\lambda \rho) K_p'(\lambda a)\} \lambda d\lambda \quad (A.1)$$

$$I_2 = \int_0^\infty \cos \lambda z \frac{I_p'(\lambda \rho')}{I_p'(\lambda a)} \{I_p'(\lambda a) K_p(\lambda \rho) - I_p(\lambda \rho) K_p'(\lambda a)\} \lambda d\lambda \quad (A.2)$$

$$I_3 = \int_0^\infty \cos \lambda z \frac{I_{p+1}(\lambda \rho')}{I_{p+1}'(\lambda a)} \{I_{p+1}'(\lambda a) K_{p+1}(\lambda \rho) - I_{p+1}(\lambda \rho) K_{p+1}'(\lambda a)\} d\lambda \quad (A.3)$$

図1Aに示すごとく原点を避けた虚軸上と虚軸の右側の無限大の半円を時計方向に廻る積分路について複素積分を行なう。このとき上の式は次の関係により虚軸

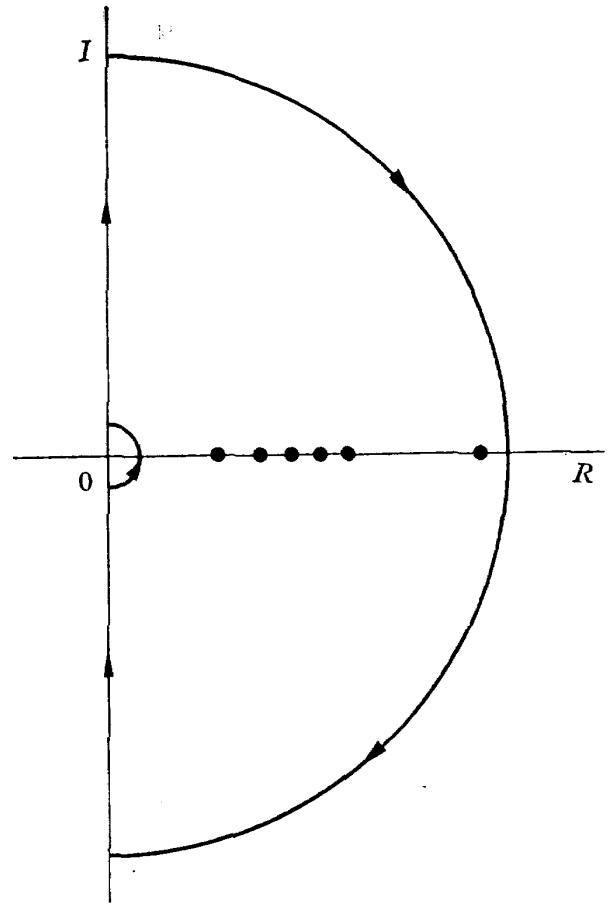


図1A 積分路

上についての積分に変換される、すなわち

$$K_0(z) = e^{1/2 \pi \nu} G_\nu(iz) \quad (A.4)$$

$$K_\nu'(z) = -e^{1/2 \pi (\nu+1)} G_\nu'(iz) \quad (A.5)$$

$$I_\nu(z) = e^{-1/2 \pi \nu} J_\nu(iz) \quad (A.6)$$

$$I_\nu'(z) = -e^{1/2 \pi (\nu+1)} J_\nu'(iz) \quad (A.7)$$

の関係より

$$I_1 = \frac{i}{2} \int_0^\infty (e^{\lambda z} - e^{-\lambda z}) \frac{J_p(i\lambda \rho')}{J_p'(i\lambda a)} \{J_p'(i\lambda a) G_p(i\lambda \rho) - J_p(i\lambda \rho) G_p'(i\lambda a)\} i\lambda d(i\lambda) \quad (A.8)$$

$$= \frac{1}{2i} \left[ \int_{-\infty}^0 e^{-\lambda z} \frac{J_p(i\lambda \rho')}{J_p'(i\lambda a)} \{J_p'(i\lambda a) G_p(i\lambda \rho) - J_p(i\lambda \rho) G_p'(i\lambda a)\} i\lambda d(i\lambda) + \int_0^\infty e^{-\lambda z} \frac{J_p(i\lambda \rho')}{J_p'(i\lambda a)} \{J_p'(i\lambda a) G_p(i\lambda \rho) - J_p(i\lambda \rho) G_p'(i\lambda a)\} i\lambda d(i\lambda) \right] \quad (A.9)$$

$$= \frac{1}{2i} \oint e^{-\lambda z} \frac{J_p(\lambda \rho')}{J_p'(\lambda a)} \{J_p'(\lambda a) G_p(\lambda \rho) - J_p(\lambda \rho) G_p'(\lambda a)\} \lambda d\lambda \quad (A.10)$$

ただし、(A.8) 式中の {} 内が偶関数であることは

$$J_\nu(-z) = (-1)^\nu J_\nu(z) \quad (A.11)$$

$$-J_\nu'(-z) = (-1)^\nu J_\nu'(z) \quad (A.12)$$

$$G_\nu(-z) = (-1)^\nu G_\nu(z) \quad (A.13)$$

$$-G_0'(-z) = (-1)^p G_0'(z) \quad (\text{A.14})$$

より明らかである。また、(A.9) より (A.10) を導くとき虚軸右側の無限大の半円についての積分は

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} e^{-\lambda z} [ \quad ] \rightarrow 0 \quad (\text{A.15})$$

により、また原点を避ける半円については次のような極限形式

$$J_\nu(z) \sim \left(\frac{1}{2}z\right)^\nu / \Gamma(\nu+1) \quad (\text{A.16})$$

$$J_\nu'(z) \sim \nu \left(\frac{1}{2}z\right)^{\nu-1} / \Gamma(\nu+1)$$

$$\text{ただし } J_0'(z) = -J_1(z) \quad (\text{A.17})$$

および

$$G_0(z) \sim \ln z \quad \text{ただし } G_0'(z) = -G_1(z) \quad (\text{A.18})$$

$$G_\nu(z) \sim -\frac{1}{2} \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-\nu} \quad (\nu > 0) \quad (\text{A.19})$$

$$G_\nu'(z) \sim \frac{1}{2} \nu \Gamma(\nu) \left(\frac{1}{2}z\right)^{-(\nu+1)} \quad (\nu > 0) \quad (\text{A.20})$$

を用いて

$$\begin{aligned} & \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{J_p(\lambda \rho')}{J_p'(\lambda a)} \{J_p'(\lambda a) G_p(\lambda \rho) - J_p(\lambda \rho) G_p'(\lambda a)\} \lambda^2 \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{(\frac{1}{2}\lambda \rho')^p}{p(\frac{1}{2}\lambda a)^{p-1}} \left\{ -\frac{p(\frac{1}{2}\lambda a)^{p-1}}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{1}{2} \frac{\Gamma(p)}{(\frac{1}{2}\lambda \rho')^p} \right. \\ & \quad \left. - \frac{(\frac{1}{2}\lambda \rho)^p}{\Gamma(p+1)} \cdot \frac{1}{2} \frac{p\Gamma(\rho)}{(\frac{1}{2}\lambda a)^{p+1}} \right\} \lambda^2 = 0 \quad p \geq 0 \quad (\text{A.21}) \end{aligned}$$

$$\lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{1}{\frac{1}{2}\lambda a} \left\{ \frac{1}{2} \lambda a \ln \rho + \frac{1}{2} \lambda \rho (\lambda a)^{-1} \right\} \lambda^2 = 0 \quad p=0 \quad (\text{A.22})$$

により (A.10) 式をうる。

同様にして (A.2) より

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{i}{2} \int_0^\infty (e^{\lambda z i} + e^{-\lambda z i}) \frac{J_p'(i\lambda \rho')}{J_p'(i\lambda a)} \{J_p'(i\lambda a) G_p(i\lambda \rho) \\ & \quad - J_p(i\lambda \rho) G_p'(i\lambda a)\} i\lambda d(i\lambda) \\ &= \frac{i}{2} \int_0^\infty e^{-\lambda z i} [ \quad ] i\lambda d(i\lambda) + \frac{i}{2} \int_0^\infty e^{\lambda z i} [ \quad ] i\lambda d(i\lambda) \\ &= -\frac{1}{2i} \int e^{-\lambda z} \frac{J_p'(\lambda \rho')}{J_p'(\lambda a)} \{J_p'(\lambda a) G_p(\lambda \rho) \\ & \quad - J_p(\lambda \rho) G_p'(\lambda a)\} \lambda d\lambda \quad (\text{A.23}) \end{aligned}$$

をうる。また (A.3) より

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{i}{2} \int_0^\infty (e^{\lambda z i} + e^{-\lambda z i}) \frac{J_{p+1}(i\lambda \rho')}{J_{p+1}'(i\lambda a)} \\ & \quad \times \{J_{p+1}'(i\lambda a) G_{p+1}(i\lambda \rho) - J_{p+1}(i\lambda \rho) G_{p+1}'(i\lambda a)\} \\ & \quad \times d(i\lambda) \\ &= \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{-\lambda z i} [ \quad ] d(i\lambda) + \frac{1}{2i} \int_0^\infty e^{\lambda z i} [ \quad ] d(i\lambda) \\ &= \frac{1}{2i} \int e^{-\lambda z} \frac{J_{p+1}(\lambda \rho')}{J_{p+1}'(\lambda a)} \{J_{p+1}'(\lambda a) G_{p+1}(\lambda \rho) \\ & \quad - J_{p+1}(\lambda \rho) G_{p+1}'(\lambda a)\} d\lambda \quad (\text{A.24}) \end{aligned}$$

となり、(A.1), (A.2), (A.3) の積分はそれぞれ (A.10), (A.23) および (A.24) の如き複素積分におきかえられる。これらの被積分関数は  $J_p'(\lambda a) = 0$  の根として実軸上に一次の極を有する。したがって、留数の定理により

$$\begin{aligned} I_1 &= -\frac{\pi}{a} \sum_{s=1}^\infty J_p(\lambda_{p,s} \rho') G_p'(\lambda_{p,s} a) J_p(\lambda_{p,s} \rho) \\ & \quad \times \lambda_{p,s} e^{-\lambda_{p,s} z} / J_p''(\lambda_{p,s} a) \quad (\text{A.25}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \frac{\pi}{a} \sum_{s=1}^\infty J_p'(\lambda_{p,s} \rho') G_p'(\lambda_{p,s} a) J_p(\lambda_{p,s} \rho) \\ & \quad \times \lambda_{p,s} e^{-\lambda_{p,s} z} / J_p''(\lambda_{p,s} a) \quad (\text{A.26}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3 &= -\frac{\pi}{a} \sum_{s=1}^\infty J_{p+1}(\lambda_{p+1,s} \rho') G_{p+1}'(\lambda_{p+1,s} a) \\ & \quad \times J_{p+1}(\lambda_{p+1,s} \rho) e^{-\lambda_{p+1,s} z} / J_{p+1}''(\lambda_{p+1,s} a) \quad (\text{A.27}) \end{aligned}$$

となる。ただし、 $\lambda_{p,s}$  は  $J_p'(\lambda a) = 0$ ,  $\lambda_{p+1,s}$  は  $J_{p+1}'(\lambda a) = 0$  の根の最初から  $s$  番目のものである。

## REFERENCE

- 1) H. Lamb; Hydrodynamics, Dover Publications, New York (1945)
- 2) A.E. Bryson; Stability derivatives for a slender missile with application to a wing body vertical-tail configuration, Jour. of the Aeronautical Science, Vol. 20, No. 5 (1953/5)
- 3) Nielsen; Missile Aerodynamics, McGraw Hill (1960)
- 4) T.C. Benton; Three dimensional flows inside a cylinder, Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 19 (1961/7)
- 5) P. Levine; Incompressible potential flow about axially symmetric bodies in ducts, Jour. of the Aeronautical Science, Vol. 25 (1958/1)
- 6) J.L. Hess and A.M.O. Smith; Calculation of non-lifting potential flow about arbitrary three dimensional bodies, Report No. ES 40622, Douglas Aircraft Division, Long Beach, Calif. (1962/3)
- 7) J.L. Hess; Calculation of potential flow about bodies of revolution having axes perpendicular to the free stream direction, Report No. ES 29812, Douglas Aircraft Company (1960/10)
- 8) A.M.O. Smith and J. Pierce; Exact solution of the Neumann problem: Calculation of non-circulatory plane and axially symmetric flows about or within arbitrary boundaries, Report No. ES 26988, Douglas Aircraft Company, El Segundo, Calif. (1958/4)
- 9) A. Gray and G. Mathews; A treatise on Bessel functions and their applications to physics, Macmillan, London 2nd Ed. (1931)

- 10) I. Tani and M. Taima; The boundary influence of a circular wind tunnel of the pitching moment of the tailplane, Jour. of the Aeronautical Research Institute of Tokyo Imperial University, Nr. 121 (1935)
- 11) Van Baranoff; Tunnel correction for compressible subsonic flow, NACA TM No. 1162 (1947)
- 12) G. N. Watson; Theory of Bessel functions, 2nd Ed. Cambridge (1958)

- |         |   |          |   |
|---------|---|----------|---|
| TR-219  | 二次元非圧縮性乱流境界層の近似について<br>On an Approximation of Two-Dimensional<br>Incompressible Turbulent Boundary Layer                                      | 1970年10月 | 尾形吉和  |
| TR-220T | Application of Dorodnitsyn's Technique to<br>Compressible Two-Dimensional Airfoil<br>Theories at Transonics Speeds                            | 1970年10月 | 佐藤淳造  |
| TR-221  | 先端のにおいフレヤつき物体の空力特性<br>Aerodynamic Characteristics of a Flared<br>Body with Blunt Nose   | 1970年10月 | 谷 原 喬, 河 本 巖<br>榑 盛 一, 野 田 順 一<br>樋 口 博 (東京大学)    |
| TR-222  | 東北地方太平洋沿岸航空路上における乱気流<br>観測<br>Measurements and Analysis of Atmospheric<br>Turbulence on the Pacific Coast Air Route<br>of the Tohoku District | 1970年9月  | 竹 内 和 之, 山 根 皓 三 郎<br>矢 沢 健 司, 小 野 幸 一<br>外 崎 得 雄 |

---

## 航空宇宙技術研究所報告223号

昭和45年11月発行

発行所	航空宇宙技術研究所 東京都調布市深大寺町1880 電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) ☎182
印刷所	株式会社 東京プレス 東京都板橋区桜川 2~27~12

---

