

UDC 517.544 :
536.21 :
621.438-226

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-234

Green 関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算

西 村 英 明

1971 年 1 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-208	ガスタービン燃焼器 Gas Turbine Combustors	1970年 9 月	鈴木 邦男, 田丸 卓 堀内 正司, 斉藤 隆
TR-209	フライングテストベッド用偏向ジェットパイプの模型実験 Mode Test on Deflected Jet Pipes of NAL Flying Test Bed	1970年10月	田辺 義一
TR-210	自由飛行模型 FFM-10 の空力特性について On the Aerodynamic Characteristics of a Free Flight Model FFM-10	1970年 8 月	河崎 俊夫, 斉藤 秀夫 河本 巖
TR-211	ジェット・フラップ・ローターのホバ特性に関する一模型実験 A Model Test on Hovering Characteristics of Jet-Flapped Rotor	1970年 9 月	古茂田真幸, 戸田 亘洋 岡 遠一, 高沢 金吾
TR-212	二重噴流の空力的騒音 Aerodynamic Noise of a Circular Double Jet	1970年10月	河野 長正
TR-213	ジンバルエンジン駆動用 DPF 方式油圧サーボの試作研究 A Study of Gimbal-Engine Actuated Hydraulic Servomechanism with DPF Hydromechanical Compensation Network	1970年 9 月	畑山 茂樹, 興石 肇
TR-214	軸流圧縮機動翼機植込部の疲労についての実験的研究(隙間のあるピン接合) Experimental Investigation of Fatigue Strength of Axial Flow Compressor Blade Root—Pin Joint Lug Having Clearance between Pin and Pin-Hole—	1970年 9 月	池田 為治, 山岸 崇
TR-215	ジェット輸送機の操縦のタスク・アナリシス Task Analysis of Jet Transport (DC-8)	1970年10月	樋口 一雄, 百名 盛之典 三好 範子, 岡部 正典 川原 弘靖
TR-216	横風中の3次元乱流ジェットの湾曲と発達 Bending and Development Three-dimensional Turbulent Jets in a Gross Wind	1970年 9 月	遠藤 浩, 中村 正義
TR-217	人工粘性付 LAX-WENDROFF およびその変形差分法に関する数値実験 Numerical Test on Lax-Wendroff Difference Scheme with Artificial Viscosity and Its Variations by the Two-Step Method.	1970年 9 月	安喜 隆幸
TR-218	軸流回転機の翼の振動について II 翼根部による振動減衰 On the Vibration of Axial-flow Turbomachine Blade. II Vibration Damping Capacity of the Blade Mounting.	1970年10月	宮地 敏雄, 星谷 昌二郎 祖父江 靖, 網干 三郎 熊谷 隆王
TR-219	二次元非圧縮性乱流境界層の近似について On an Approximation of Two-Dimensional Incompressible Turbulent Boundary Layer	1970年10月	尾形 吉和
TR-220	Application of Dorodnitsyn's Technique to Compressible Two-Dimensional Airfoil Theories at Transonic Speeds	1970年10月	Junzo SATO
TR-221	先端のにぶいフレヤつき物体の空力特性 Aerodynamic Characteristics of a Flared Body with Blunt Nose	1970年10月	谷 喬, 河本 巖 榊原 盛一, 野田 順一 樋口 博(東京大学)
TR-222	東北地方太平洋沿岸航空路上における乱気流観測 Measurements and Analysis of Atmospheric Turbulence on the Pacific Coast Air Route of the TOHOKU District	1970年 9 月	竹内 和之, 山根 皓三郎 矢沢 健司, 小野 幸一 外崎 得雄
TR-223	球の仮想質量の円筒境界干渉 Cylindrical Boundary Interference on Virtual Mass of a Sphere	1970年 9 月	河野 長正

Green 関数をラプラス方程式に適用した解法による 冷却タービン翼の温度分布の計算*

西 村 英 明**

A Calculation of Temperature Distribution by Applying Green's Function to a Two-Dimensional Laplace's Equation

By Hideaki NISHIMURA

The progress in the development of the gas turbine is remarkable, and is mainly derived from increasing the operation temperature, and development of materials.

Although the improvement of gas turbine performance is due to high turbine inlet temperature, materials will not always tolerate high temperature condition.

To preserve material properties, the blade of a gas turbine is cooled, but if the temperature distribution in the cooled blade is not proper, then rupture of the material will take place.

Therefore, it is necessary to know the temperature distribution in the cooled blade.

Steady, isotropic, two-dimensional temperature field without a heat source and heat sink is subject to Laplace's equation.

By making use of Green's function in order to solve Laplace's equation, the Fredholm integral equation of the second kind is obtained and this integral equation is solved by direct numerical treatment.

Two examples of calculation of temperature distribution are given, one of them being the case that boundaries are consist of two concentric circles, and the other that in which boundaries consist of three configurations, one is an aerofoil forming the outer boundary and two others being circles forming the inner boundaries.

目 次

1. はじめに	2
2. 単連結領域問題	2
2.1 調和関数 T の不連続性	3
2.2 境界が円の場合	4
2.3 滑らかな閉じた境界の場合	4
2.4 数 値 解 法	7
3. 滑らかな境界をもつ空所を内部に二つ以上含む場合	7
3.1 連立積分方程式の構成	8
3.2 固有値に対する処理	9
3.3 温度勾配の計算法	10
3.4 数 値 解 法	10
3.5 例題 二重同心円の場合	12
3.6 数値解の結果	13
4. ま と め	14
付録 変数分離法	25

* 昭和45年12月10日受付

** 原動機部

1. はじめに

熱的に定常状態にあり、熱伝導に関しては等方性で、かつ熱の発生源ないしは熱の吸収源のない温度場における温度分布はラプラスの偏微分方程式により支配される。

ラプラス型偏微分方程式の解法としては、

- (1) 変数分離法などによる解析解
- (2) 差分法
- (3) モンテカルロ法
- (4) グリーン関数を用い積分方程式を導き解を得る

などの方法がある。

(4) の方法を除いてはすべて偏微分方程式を解いて解を得る方法であり、また別の見方をすれば (1) の方法と (4) の特別な場合を除いてはいわゆる数値解法に属する、最近のように電子計算機の発達により計算そのものは容易になったが、境界値問題を解く場合には、その境界条件によりまた目的により最も適した方法を採用しなければならない。

ここでは、航空用ガスタービンの冷却孔を有するタービン翼に関して翼の背側、腹側および各冷却孔の周辺において温度が与えられている場合に翼の内部温度分布を求める。このような問題においては当然解析的な解を得ることは不可能であり、数値計算に頼らなければならない、熱的に定常状態であり、材質は等方性であり、さらに翼の内部には冷却孔のほかには熱の発生源、吸収源はなく、二次元領域であるとする。

二変数ラプラス方程式を解くために物理的な考察が容易なグリーン関数を用い、さらにポテンシャル論における二重層の考えを導入する。そこで境界条件を与えると数値計算に適した第二種のフレッドホルム型積分方程式を得る、この積分方程式をエルミットの求積法により近似し多元連立方程式を得る。

このような積分方程式を利用すると、非定常な場合や三次元の場合などへの拡張に対して解析的な工夫を特別に行なう必要はあまりなく、解法の原理は全く同じであるなど積分方程式としての有利な点が多い。

まず境界がリアプノフ条件を満足する任意の単純な閉曲線（以後“滑らかな閉曲線”という）から成り、この滑らかな閉曲線によって囲まれる単連結領域の温度場について一般的な方法を述べ、境界が円から成る場合に適用し、温度分布はポアソンの積分により与えられることを示す。

次に、任意の滑らかな閉曲線に囲まれた単連結領域

内にさらに任意の滑らかな閉曲線の境界を有する穴を有限個あけ、これらの滑らかな閉曲線によって囲まれる領域における温度分布を求める、この場合にはまず境界は二重同心円より成る場合について数値解を求め、ラプラス方程式の変数分離法による解析的な結果と比較する。

タービン翼については冷却孔として前縁付近に一個、後縁付近に一個設け、この冷却孔の相互の位置を変えることによって温度場がどのように変化するか、その様子を等温線によって示した。

2. 単連結領域問題

図1に示すように滑らかな閉曲線 C で囲まれた領域 D を考え、 $T(\xi, \eta)$ を境界上で与えられた温度分布とし、 $T(x, y)$ を領域内での温度分布とすると、温度分布 $T(x, y)$ は

$$\nabla^2 T(x, y) = 0 \quad (1)$$

を満足し、境界 C 上では

$$T = T(\xi, \eta) \quad (2)$$

に一致する。

いま、 $T(P)$ を領域 D 内におけるラプラス方程式の解とし、点 Q に特異点を有するグリーン関数を $G(P, Q)$ とする。

グリーン関数 $G(P, Q)$ は次の性質をもつ。

- i) 領域 D 内の一点 Q 以外の点で $G(P, Q)$ は P について調和。
- ii) Q の近傍で $\omega \equiv G(P, Q) + \ln|P - Q|$ は調和。
- iii) 領域 D の境界 C の任意の点を $\zeta = \xi + i\eta$ とするとき、 $G(P, Q) \rightarrow 0$ ($P \in D, P \rightarrow \zeta$)

図1に示すようにグリーン関数の特異点 Q を囲む半径 ε の円の周を C_ε とする。 C_ε と C とで囲まれた領域において、調和関数 $T(P)$ とグリーン関数 $G(P, Q)$ をグリーン関数の第二公式に適用する、

$$\oint_{C_\varepsilon} \left(G(P, Q) \frac{\partial T(P)}{\partial n} - T(P) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right) dc - \oint_{C_\varepsilon} \left(G(P, Q) \frac{\partial T(P)}{\partial n} - T(P) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} \right) dc = 0 \quad (3)$$

ここに n は境界上での内法線とし、 dc は境界の線分を表わす。

グリーン関数の性質 iii) により

$$\oint_{C_\varepsilon} G(P, Q) \frac{\partial T(P)}{\partial n} dc = 0$$

同様にグリーン関数の性質 ii) により

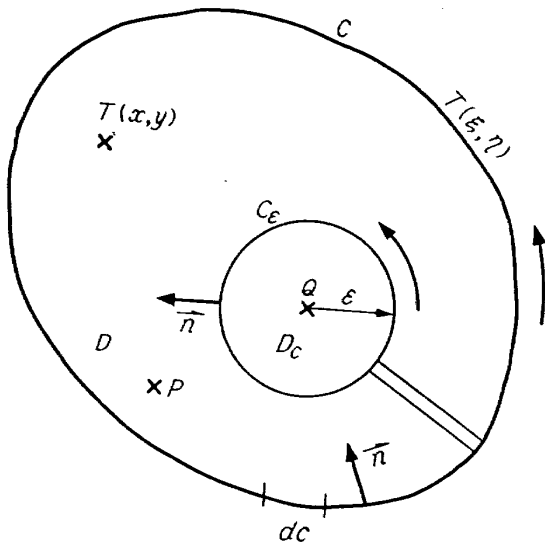


図 1

$$\oint_{C_\epsilon} G(P, Q) \frac{\partial T(P)}{\partial n} dc \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$\oint_{C_\epsilon} T(P) \frac{DG(P, Q)}{\partial n} dc = T(Q) \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

を得る。

したがって (3) 式は

$$T(Q) = \oint_C T(P) \frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} dc \quad (4)$$

となり、 P を境界線上の点と考えれば、(4) 式は境界線上の温度分布を与えると境界線内の領域における温度分布が求められることを意味している。

2.1 調和関数 $T(Q)$ の不連続性

調和関数 T は、境界線上の条件 (2) を満足しなければならない。そこで、内部領域に存在する Q 点が境界線上の点 P に近づく時の調和関数 T の性質を調べる必要がある。

図 2 に示すように境界線を、 P を含む微小長さ ϵ の線分 C' と残りの線分 C'' の 2 つの部分に分ける。

いま、 Q 点が、円周 C'' に沿って C' 線分上の P に近づいた場合を考えると

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow P} T(Q) &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C''} T(P) \frac{\cos(\beta - \gamma)}{r} dc \\ &\quad + \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C'} T(P) \frac{\cos(\beta - \gamma)}{r} dc \\ &= \frac{1}{2\pi} \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{C''} T(P) \frac{\cos(\beta - \gamma)}{r} dc \end{aligned}$$

となる。すなわち Q 点が境界線 C に沿って P 点に近づく時、調和関数 $T(Q)$ は、連続的に $T(P)$ に近づく。

次に、内法線の正の方向から Q 点が境界線上の点に近づいた場合には、 Q 点が境界線 C に沿って P

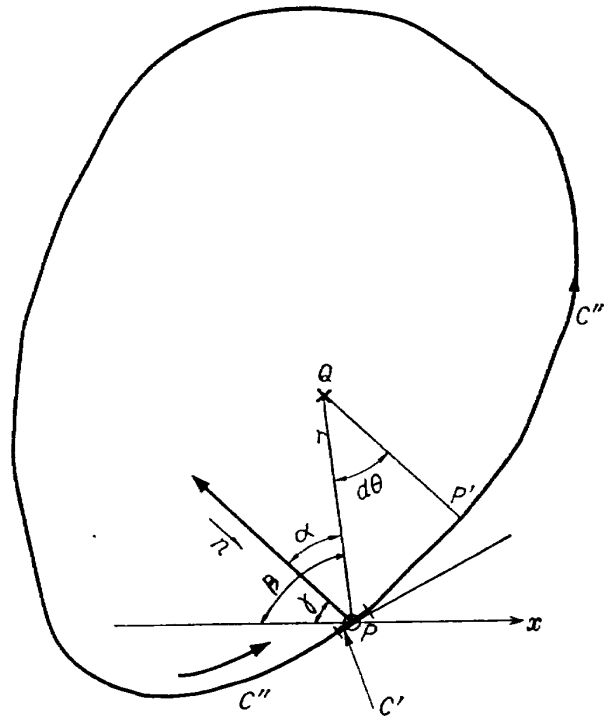


図 2

点に近づいた場合と異なって、 P 点を含む線分 C' についての積分は消えない。 C' では $T(P)$ は一定であるとする、

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow P} \frac{1}{2\pi} \int_{C'} T(P) \frac{\cos(\beta - \gamma)}{r} dc \\ = \lim_{Q \rightarrow P} \frac{T(P)}{2\pi} \int_{C'} d\theta = \frac{T(P)}{2} \end{aligned}$$

となり、一方線分 C'' による寄与は変わらない。

すなわち、 Q 点を境界線 C 上の点とすると、

$$\begin{aligned} \lim_{Q \rightarrow P} T(Q) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C T(P) \frac{\cos(\beta - \gamma)}{r} dc \\ &\quad + \frac{T(P)}{2} \end{aligned} \quad (5)$$

となる。

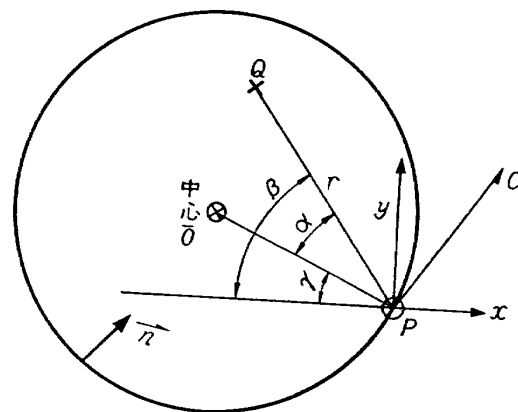


図 3

2.2 境界が円の場合

ここで解析的な解が得られる場合として、境界線が円として与えられた場合を考える。

図3に示すように、境界線上の点 P と内部領域の点 Q との距離を $r=|P-Q|$ とするとき、2変数のラプラス方程式に対するグリーン関数は次式によって与えられる。

$$G(P, Q) = -\frac{1}{2\pi} \ln|P-Q| + \omega = -\frac{1}{2\pi} \ln r + \omega \quad (6)$$

ここで図3に示すように、円の中心 O と境界線上の点 P を結ぶ線と、内部領域に存在する Q 点と P 点を結ぶ線のはさむ角度を α とし、 Q 点と P 点を結ぶ線と x 軸となす角度を β とする。また中心 O と P 点を結ぶ線と x 軸となす角度を γ とする。

グリーン関数の内法線方向の微分は、

$$\frac{\partial G(P, Q)}{\partial n} = -\frac{1}{2\pi r} \cdot \frac{\partial r}{\partial n} + \frac{\partial \omega}{\partial n} = \frac{\cos(\beta-\gamma)}{2\pi r} + \frac{\partial \omega}{\partial n}$$

したがって (4) 式は次のようになる。

$$T(Q) = \frac{1}{2\pi} \oint_C T(P) \frac{\cos(\beta-\gamma)}{r} dc \quad (7)$$

Q 点を境界線上の点とすると、変数を図4に示すようにとると、

$$r = 2R \cos \alpha$$

ここで $\alpha = \beta - \gamma$ であるから (5) 式の右辺第1項の積分は

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C T(P) \frac{dc}{2R} \quad (8)$$

となる。

したがって (5), (7), (8) 式より

$$f(P) = \frac{T(P)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_C T(P) \frac{dc}{2R} \quad (9)$$

を得る。ここに $f(P)$ は、境界線 C 上の点 P で与え

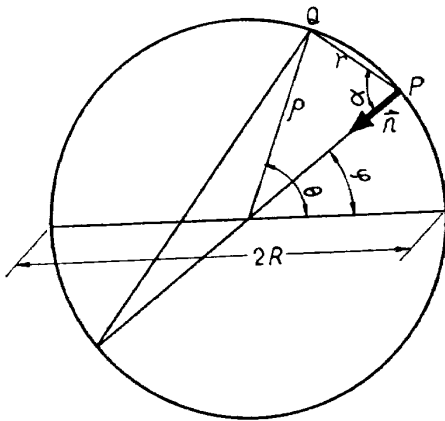


図 4

られた温度分布である。

(9) 式は、フレッドホルムの第2種の積分方程式であり解は次式で与えられる。

$$T(P) = 2f(P) - \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(P)}{R} dc$$

(7) 式の核は、図4に示すように変数 θ, φ をとると、

$$\begin{aligned} \rho^2 &= R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha \\ r^2 &= \rho^2 + R^2 - 2R\rho \cos(\theta - \varphi) \end{aligned}$$

であるから

$$\frac{\cos(\beta-\gamma)}{r} = \frac{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right) \cos(\theta - \varphi)}{R \left\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{\rho}{R}\right) \cos(\theta - \varphi) \right\}}$$

となり、内部領域における温度分布は

$$\begin{aligned} T(Q) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \left\{ 2f(P) - \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{f(P)}{R} dc \right\} \times \\ &\quad \times \frac{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right) \cos(\theta - \varphi)}{R \left\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{\rho}{R}\right) \cos(\theta - \varphi) \right\}} f(P) dc \end{aligned}$$

で与えられる。

積分公式により

$$\oint_C \frac{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right) \cos(\theta - \varphi)}{R \left\{ \left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{\rho}{R}\right) \cos(\theta - \varphi) \right\}} dc = 2\pi$$

であることを利用し、上の式を変形すると、よく知られている次のポアソンの積分を得る。

$$\begin{aligned} T(Q) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{1 - \left(\frac{\rho}{R}\right) \cos(\kappa - \varphi)}{\left(\frac{\rho}{R}\right)^2 + 1 - 2\left(\frac{\rho}{R}\right) \cos(\theta - \varphi)} \times \\ &\quad \times f(P) d\varphi \quad (10) \end{aligned}$$

2.3 滑らかな閉じた境界の場合

二変数ラプラス方程式に対するグリーン関数は次の式で与えられる。

$$G(x, y; \xi, \eta) = -\frac{1}{2\pi} \ln r + \omega \quad (11)$$

ただし $r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}$

ここで (x, y) は滑らかな閉じた曲線の内部領域内の点を表わし、 (ξ, η) は滑らかな閉じた曲線 C 上の点を表わす。

内部領域における温度分布は (7) 式で与えられる。この積分の核 $\cos(\beta-\gamma)/r$ は 2π の整数倍だけ不定となり、無限多価関数である。解析学においては、リーマン面なる考えにより一価関数として取り扱われるが、ここでは二重層の考えを導入することによって、

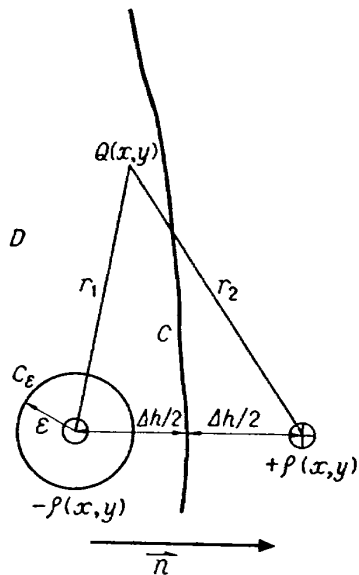


図 5

境界 c を内部領域の点が通過する際にある値だけ跳躍
すると考え一価関数として取り扱う。

図 5 に示すように、いま境界線 c をはさんで、それ
ぞれ $\Delta h/2$ の距離に熱源の強さ $-\rho$, $+\rho$ が存在する。

このとき、領域 D 内の点 Q における温度を $\varphi_T(Q)$
とすると $\varphi_T(Q)$ は次の式によって与えられる。

$$\varphi_T(Q) = -\frac{\rho}{2\pi} \ln r_2 + \frac{\rho}{2\pi} \ln r_1$$

ただし r_1, r_2 はそれぞれ Q 点と $-\rho$ 点および $+\rho$
点の距離を表わす。

$\varphi_T(Q)$ はラプラスの方程式の解である。

$$\nabla^2 \varphi_T = 0$$

次に 2 点 $-\rho$ 点と $+\rho$ 点が近づいた極限の場合に
 Q 点における温度は

$$\begin{aligned} \varphi_T(Q) &= \lim_{\Delta h \rightarrow 0} \frac{\rho \cdot \Delta h}{2\pi} \cdot \frac{1}{\Delta h} [\ln r_1 - \ln r_2] \\ &= \frac{\rho \Delta h'}{2\pi} \cdot \frac{\partial \ln(r_1/r_2)}{\partial h} \end{aligned}$$

ここに $\rho \cdot \Delta h' = -u$ とし、 $\Delta h = |\Delta \vec{n}|$ とすると

$$\varphi_T(Q) = -\frac{u}{2\pi} \cdot \frac{\partial \ln r}{\partial n} \quad (12)$$

を得る。

ここで (12) 式の右辺は、また

$$\varphi_T(Q) = \frac{u}{2\pi} \frac{\cos(\beta - \gamma)}{r} \quad (13)$$

に等しい。

$\beta - \gamma = \alpha$ であるから図 6 において点 Q と点 P を結
ぶ線分が内法線となす角度を α とし、 P 点における
境界線の接線上に B 点をとる、 $\angle QPB$ を θ_2 とし、
 c 点を接線の延長上の点とすると、 $\angle QBC$ を θ_1 と

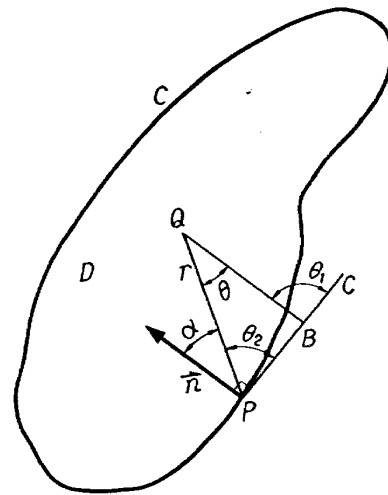


図 6

する。

線分 \overline{PB} について積分を行なうと (13) 式から

$$\varphi_T(Q) = \frac{u}{2\pi} \theta \Big|_{\theta_2}^{\theta_1} = \frac{u}{2\pi} (\theta_1 - \theta_2)$$

を得る。

点 Q が内法線の正の方向から境界に近づくとき
 φ_T^+ とし、内法線の負の方向から境界に近づいた場
合に φ_T^- とすると、

$$\left. \begin{aligned} \varphi_T - \varphi_T^+ &= -\frac{u}{2} \\ \varphi_T - \varphi_T^- &= \frac{u}{2} \\ \text{したがって} \\ \varphi_T^+ - \varphi_T^- &= u \end{aligned} \right\} \quad (14)$$

すなわち φ_T は境界線を通る際に、モーメント
の強さ u ($= -\rho \cdot \Delta h'$) に等しい大きさの跳躍を示す。

したがって、境界上の温度分布が与えられる場合の
問題は次のようになる。

境界上に単位長さ当りのモーメントの強さ u を与
えるとき、内部領域の温度分布は次の式によって求め
ることができる。

$$T(x, y) = -\frac{1}{2\pi} \oint_C u(\xi, \eta) \frac{\partial \ln r}{\partial n} dc \quad (15)$$

ただし、 $r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}$

このとき、 T は境界上では

$$T(\xi, \eta) - T^+(\xi, \eta) = -\frac{u(\xi, \eta)}{2} \quad (16)$$

なる跳躍を示す。

ここで境界線 C 上の温度分布を $f(c)$ とすると (16)
式から次の積分方程式を得る。

$$\frac{u(c)}{2} - \frac{1}{2\pi} \oint_C u(c) \frac{\partial \ln r}{\partial n} dc = f(c)$$

すなわち、境界線上の積分変数として (ξ, η) 、境界線上の点を (ξ_0, η_0) で表わすと、

$$\frac{u(\xi_0, \eta_0)}{2} - \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\xi, \eta) \frac{\partial \ln r(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0)}{\partial n} dc = f(\xi_0, \eta_0)$$

となり、第2種のフレッドホルム型積分方程式を得る。

ここで積分方程式の核は、

$$\begin{aligned} \partial r / \partial \xi &= (\xi - \xi_0) / \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} \\ \partial r / \partial \eta &= (\eta - \eta_0) / \sqrt{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} \end{aligned}$$

であることと、図7に示すように

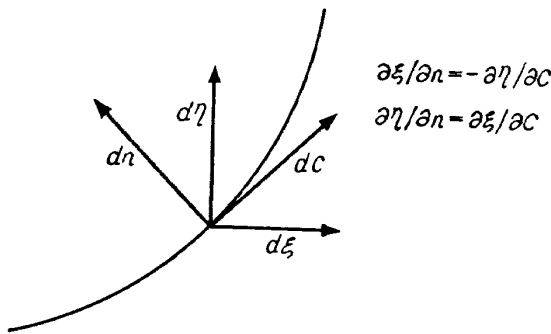


図 7

$$\begin{aligned} \partial \xi / \partial n &= -\partial \eta / \partial c \\ \partial \eta / \partial n &= \partial \xi / \partial c \end{aligned}$$

の関係を利用すると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \ln r(\xi, \eta; \xi_0, \eta_0) \\ = \frac{-(\xi - \xi_0) \cdot \partial \eta / \partial c + (\eta - \eta_0) \cdot \partial \xi / \partial c}{[(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2]} \end{aligned}$$

となる。

すなわち積分方程式は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \frac{u(\xi_0, \eta_0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\xi, \eta) \times \\ \times \frac{(\xi - \xi_0) \partial \eta / \partial c - (\eta - \eta_0) \partial \xi / \partial c}{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2} dc = f(\xi_0, \eta_0) \end{aligned}$$

ここで、さらに座標 (ξ, η) を境界線 C 上のある基準点からの境界線の長さ c の関数として表示する。

$$\begin{aligned} \xi &= \xi(c), \quad \eta = \eta(c) \\ \xi_0 &= \xi(c_0), \quad \eta_0 = \eta(c_0) \end{aligned}$$

とすると、

$$\frac{u(\xi(c_0), \eta(c_0))}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\xi(c), \eta(c)) \times$$

$$\begin{aligned} \times \frac{[\xi(c) - \xi(c_0)] \partial \eta(c) / \partial c - [\eta(c) - \eta(c_0)] \partial \xi(c) / \partial c}{[\xi(c) - \xi(c_0)]^2 + [\eta(c) - \eta(c_0)]^2} dc \\ = f(\xi(c_0), \eta(c_0)) \end{aligned} \quad (17)$$

を得る。

(17) 式において、積分方程式の核は $c=c_0$ のとき $\xi(c)=\xi(c_0)$ 、 $\eta(c)=\eta(c_0)$ であり、形式上は、 $0/0$ となり、この値は求められないが、この値は、次のようにして存在することがわかる。

$\partial \xi / \partial c = \dot{\xi}$ 、 $\partial \eta / \partial c = \dot{\eta}$ 、 $\partial^2 \xi / \partial c^2 = \ddot{\xi}$ 、 $\partial^2 \eta / \partial c^2 = \ddot{\eta}$ で表示すると、

$$\begin{aligned} \lim_{c \rightarrow c_0} \frac{[\xi(c) - \xi(c_0)] \cdot \dot{\eta}(c) - [\eta(c) - \eta(c_0)] \cdot \dot{\xi}(c)}{[\xi(c) - \xi(c_0)]^2 + [\eta(c) - \eta(c_0)]^2} \\ = \frac{\dot{\xi}(c_0) \cdot \dot{\eta}(c_0) - \dot{\eta}(c_0) \cdot \dot{\xi}(c_0)}{2[\dot{\xi}(c_0)^2 + \dot{\eta}(c_0)^2]} \end{aligned}$$

また、次の関係式が成り立つ。

いま、

$$\phi = -\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\partial \ln r}{\partial n} dc$$

なる関係式を考え、積分路 C を図8に示す C とする。この時、 $C \rightarrow C_0$ すなわち $\epsilon \rightarrow 0$ の場合に ϕ は次の値を示す。

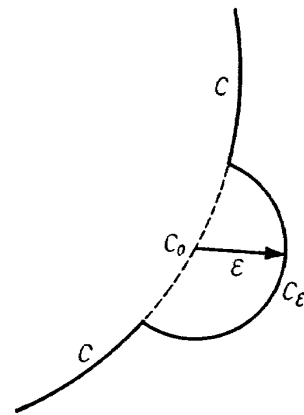


図 8

$$\phi = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} -\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{1}{r} dc = \frac{1}{2}$$

ここに、 $\partial r / \partial n = -1$ である。

すなわち、

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\partial \ln r}{\partial n} dc = -\frac{1}{2} \quad (C \rightarrow C_0) \quad (18)$$

となる。

さきに 2.2 で境界が円の場合には、 T について解析解が得られたが、境界線 C が任意の滑らかな曲線からなる場合には、解析解が求められない。それで、ここでは u について数値解を求める。

2.4 数値解法

周期 P を持つ周期関数を $f(x)$ とする。境界線 c 上に任意の $(n+1)$ 個の等間隔分割点をとる。このとき、周期関数の 1 周期にわたる積分を次のような近似式で求める。

$$\oint_c f(\varphi) d\varphi = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n f_k + \bar{R}_n$$

ただし、 φ_k を k 番目の分割点とすると、 $f_k = f(\varphi_k)$ とする。

文献 5) によれば、全体の算術平均誤差評価 $|\bar{R}_n|$ は $C(n)$ を定数とすると、

$$|\bar{R}_n| \leq |C(n)| \cdot M_{AX} |\phi(f)|$$

$$\text{ただし、} \quad \phi(f) = \frac{d^{2n+2} f}{d\varphi^{2n+2}}$$

$$C(n) = \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^{2\pi} [\pi(\varphi)]^2 d\varphi$$

$$\pi(\varphi) = (\varphi - \varphi_0)(\varphi - \varphi_1) \cdots (\varphi - \varphi_n)$$

で与えられる。

次の変数変換を行なう。

$$v(\varphi) \cdot d\varphi = u(c) \cdot dc$$

すると

$$u(c) = v(\varphi) / \sqrt{\xi^2(\varphi) + \eta^2(\varphi)}$$

(17) 式の積分核を $K(\varphi, \psi)$ とすると

$$\begin{aligned} K(\varphi, \psi) &= \frac{[\xi(\psi) - \xi(\varphi)] \cdot \eta(\psi) - [\eta(\psi) - \eta(\varphi)] \cdot \xi(\psi)}{[\xi(\psi) - \xi(\varphi)]^2 + [\eta(\psi) - \eta(\varphi)]^2} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\xi^2(\psi) + \eta^2(\psi)}} \end{aligned} \quad (20)$$

ただし $\xi(\psi) = \partial \xi(\psi) / \partial \psi$, $\eta(\psi) = \partial \eta(\psi) / \partial \psi$ 。

この変数変換により (17) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{v(\varphi)}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi^2(\varphi) + \eta^2(\varphi)}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v(\psi) \cdot K(\varphi, \psi) d\psi \\ = f(\varphi) \end{aligned} \quad (21)$$

滑らかな閉じた境界線 C 上の分割点を $0, 1, 2, \dots, 2N-1$ の合計 $2N$ 個にとり、境界線を規定する関数 $\xi(\varphi), \eta(\varphi)$ は

$$\varphi_\mu = \mu \cdot \frac{2\pi}{2N} \quad (\mu = 0, 1, 2, \dots, 2N-1)$$

の位置において

$$\xi_\mu = \xi(\varphi_\mu) \quad (22)$$

$$\eta_\mu = \eta(\varphi_\mu)$$

で与えられる。ここで φ は、

$$\varphi_{\mu+2N} = \varphi_\mu + 2\pi$$

であり、関数 $\xi(\varphi), \eta(\varphi)$ も周期として 2π を有しており、

$$\xi_{\mu+2N} = \xi(\varphi_\mu + 2\pi) = \xi_\mu \quad (23)$$

$$\eta_{\mu+2N} = \eta(\varphi_\mu + 2\pi) = \eta_\mu$$

となる。

さらに、文献 7) によれば、 $\xi(\varphi_\mu), \eta(\varphi_\mu)$ の微分に関しては次の関係式が成り立つ。

$$\xi_\mu = \xi(\varphi_\mu) = \sum_{\nu=1}^{2N-1} B_\nu \cdot \xi_{(\mu+\nu)} \quad (24)$$

$$\eta_\mu = \eta(\varphi_\mu) = \sum_{\nu=1}^{2N-1} B_\nu \cdot \eta_{(\mu+\nu)}$$

ただし、

$$B_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1}}{2} \cdot \cot \frac{\varphi_\nu}{2} \quad (\nu = 1, 2, \dots, 2N-1)$$

このような表示を用いると (21) 式は次のようになる。

$$\frac{v_\mu}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_\mu^2 + \eta_\mu^2}} + \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} v_\nu \cdot K_{\mu,\nu} = f_\mu \quad (25)$$

ただし、

$$f_\mu = f(\varphi_\mu)$$

$$\begin{aligned} K_{\mu,\nu} &= \frac{(\xi_\nu - \xi_\mu) \cdot \eta_\nu - (\eta_\nu - \eta_\mu) \cdot \xi_\nu}{(\xi_\nu - \xi_\mu)^2 + (\eta_\nu - \eta_\mu)^2} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2}} \quad (\mu \neq \nu) \end{aligned}$$

$\mu = \nu$ の場合、さきに示したように二次の微係数が現われ、その精度の良い数値的評価が困難である。そこで (18) 式を利用すると、

$$\frac{1}{N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} K_{\mu,\nu} = 1$$

であるから

$$K_{\mu,\mu} = N - \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N-1} K_{\mu,\nu}$$

を利用し、 $\mu = \nu$ の場合の $K_{\mu,\mu}$ を求めることができる。

(25) 式から v_μ を求めることができ、滑らかな閉じた境界線 C の内部領域の点 (x, y) における温度分布は、(15), (17), (20) 式から次の式により得られる。

$$T(x, y) = \frac{1}{2N} \sum_{\nu=0}^{2N-1} v_\nu \cdot K_{(x,y),\nu}$$

ただし、

$$\begin{aligned} K_{(x,y),\nu} &= \frac{(\xi_\nu - x) \cdot \eta_\nu - (\eta_\nu - y) \cdot \xi_\nu}{(\xi_\nu - x)^2 + (\eta_\nu - y)^2} \times \\ &\times \frac{1}{\sqrt{\xi_\nu^2 + \eta_\nu^2}} \end{aligned}$$

3. 滑らかな境界をもつ空所を内部に二つ以上含む場合

ここで問題とするのは、図 9 に示すような領域 D に

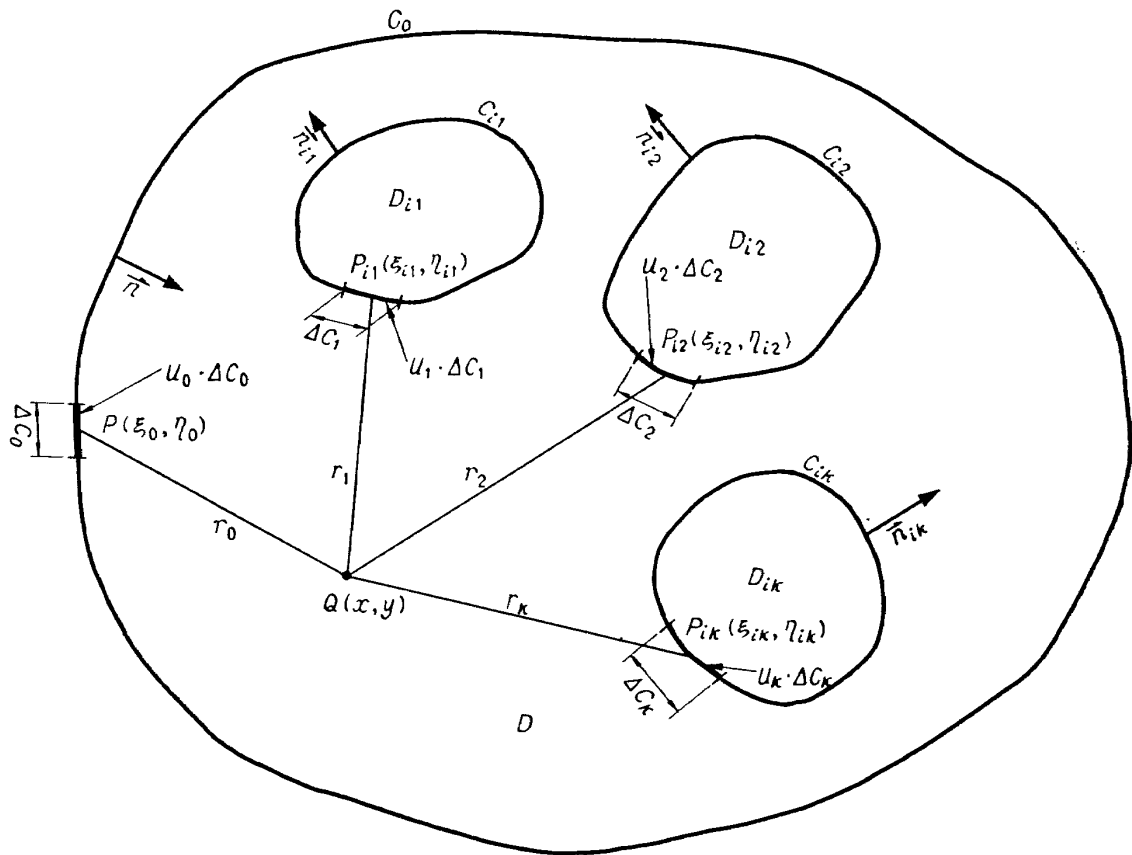


図 9

おける温度分布である。すなわち、滑らかな閉じた境界線 C_0 によって囲まれる領域内で、同じく滑らかな閉じた境界線 $C_{i,k}$ ($k=1, 2, \dots$) によって囲まれる領域 $D_{i,k}$ ($k=1, 2, \dots$) を除いた領域を考える。

2. で述べたように、二変数ラプラス方程式に対するグリーン関数は (11) 式で与えられる。

(14) 式で表わされるような性質を有する単位長さ当りのモーメントの強さ u が境界線 $C_0, C_{i,k}$ ($k=1, 2, \dots$) 上において、それぞれ u_0, u_k ($k=1, 2, \dots$) で分布しているものとする。

3.1 連立積分方程式の構成

境界線 $C_0, C_{i,k}$ ($k=1, 2, \dots$) 上の点 $P_0, P_{i,k}$ ($k=1, 2, \dots$) における $u_0, u_{i,k}$ が代表値となるような微小線分 $\Delta C_0, \Delta C_k$ ($k=1, 2, \dots$) を考える。さらにこれらの点 $P_0, P_{i,k}$ からそれぞれ r_0, r_k ($k=1, 2, \dots$) の距離にある D 領域内の点 $Q(x, y)$ における温度は次の式によって得られる。

$$\begin{aligned} & \frac{u_0}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{C_0}} \ln \left(\frac{1}{r_0} \right) \Delta C_0 + \frac{u_1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{C_{i1}}} \ln \left(\frac{1}{r_1} \right) \Delta C_1 + \\ & + \frac{u_2}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{C_{i2}}} \ln \left(\frac{1}{r_2} \right) \Delta C_2 + \dots \\ & + \frac{u_k}{2\pi} \frac{\partial}{\partial n_{C_{ik}}} \ln \left(\frac{1}{r_k} \right) \Delta C_k + \dots \end{aligned}$$

ただし $\partial/\partial n_{C_0}, \partial/\partial n_{C_{i,k}}$ はそれぞれ境界線 C_0 および $C_{i,k}$ 上における内法線方向微分を表わす。

境界線 $C_0, C_{i,k}$ 上での温度分布が与えられる場合境界上の反時計方向の回転を正方向とすると内部領域における温度分布は、ふたたび $T(x, y)$ を内部領域における温度とすると次の積分式によって与えられる。

$$\begin{aligned} T(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u_0(c_0) \frac{\partial}{\partial n_{C_0}} \ln \left(\frac{1}{r_0} \right) dc_0 - \\ & - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_{i1}} u_1(c_{i1}) \frac{\partial}{\partial n_{C_{i1}}} \ln \left(\frac{1}{r_1} \right) dc_{i1} - \\ & - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_{i2}} u_2(c_{i2}) \ln \left(\frac{1}{r_2} \right) dc_{i2} - \\ & \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_{ik}} u_k(c_{ik}) \ln \left(\frac{1}{r_k} \right) dc_{ik} \dots \end{aligned}$$

ここで、境界線 $C_0, C_{i,k}$ 上の温度分布を $f_0(c_0), f_k(c_{i,k})$ とするとき、2. と同様にして次の連立積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} & \frac{u^0(\xi(c_0), \eta(c_0))}{2} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_0, c) dc \\ & - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_{i1}} u^{(1)}(\xi(c), \eta(c)) \times \\ & \times K(c_0, c) dc - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{2\pi} \oint_{c_{i1}} u^{(1)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_0, c) dc - \dots \\
& \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{ik}} u^{(k)}(\xi(c), \eta(c)) \times \\
& \quad \times K(c_0, c) dc = f_0(\xi(c_0), \eta(c_0)), \\
& \frac{u^{(1)}(\xi(c_{i1}), \eta(c_{i1}))}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_{c_0} u^{(0)}(\xi(c), \eta(c)) \times \\
& \quad \times K(c_{i1}, c) dc - \\
& -\frac{1}{2\pi} \oint_{c_{i1}} u^{(1)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_{i1}, c) dc - \dots \\
& \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{ik}} u^{(k)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_{i1}, c) dc \dots \\
& \dots = f_1(\xi(c_{i1}), \eta(c_{i1})), \\
& \dots, \\
& \frac{u^{(k)}(\xi(c_{ik}), \eta(c_{ik}))}{2} + \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \oint_{c_0} u^{(0)}(\xi(c), \eta(c)) \times \\
& \quad \times K(c_{ik}, c) dc - \\
& -\frac{1}{2\pi} \oint_{c_{i1}} u^{(1)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_{ik}, c) dc - \dots \\
& \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{ik}} u^{(k)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_{ik}, c) dc \\
& \dots = f_k(\xi(c_{ik}), \eta(c_{ik})), \\
& \dots \dots \dots \quad (26)
\end{aligned}$$

ここに、 $u^{(0)}(\xi(c_0), \eta(c_0))$ および $u^{(k)}(\xi(c_{ik}), \eta(c_{ik}))$ は滑らかな境界線 C_0 および C_{ik} 上のモーメントの強さ分布である。また積分方程式の核は

$$\begin{aligned}
K(c_0, c) &= \frac{[\xi(c) - \xi(c_0)] \cdot \eta(c) - [\eta(c) - \eta(c_0)] \cdot \xi(c)}{[\xi(c) - \xi(c_0)]^2 + [\eta(c) - \eta(c_0)]^2} \\
K(c_{ik}, c) &= \frac{[\xi(c) - \xi(c_{ik})] \cdot \eta(c) - [\eta(c) - \eta(c_{ik})] \cdot \xi(c)}{[\xi(c) - \xi(c_{ik})]^2 + [\eta(c) - \eta(c_{ik})]^2} \quad (27)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\dot{\eta}(c) = \partial \eta(c) / \partial c, \quad \dot{\xi}(c) = \partial \xi(c) / \partial c$$

である。

(26) 式の第二式以下は、図 9 において、領域 D 内の点 $Q(x, y)$ が滑らかな閉じた境界線 C_{ik} に内法線の正の方向から近づいたとき境界線 C_{ik} 上での値は (14) 式で示される跳躍が現われる、さらに積分方向を考慮に入れると 2. の場合と同様にして得られる。

この連立積分方程式は、方程式の数だけ境界条件が存在するので解は求まるはずであるが、積分方程式の核 K は、

$$\oint_{c_p} K(c_p, c) dc = \pi \quad (28)$$

ただし、 C_p は任意の閉じた曲線。

なる値を有する、すなわち (26) 式の第二式以下は固

有値をもつことになり、このままでは解は一意には決定できない。

3.2 固有値に対する処理

図 10 に示すように滑らかな閉じた境界線 C_{ik} (C_0 は除く) によって囲まれた領域内の点を Z_m とする。

文献 2) によれば連立積分方程式 (26) は次のように変形することができる。

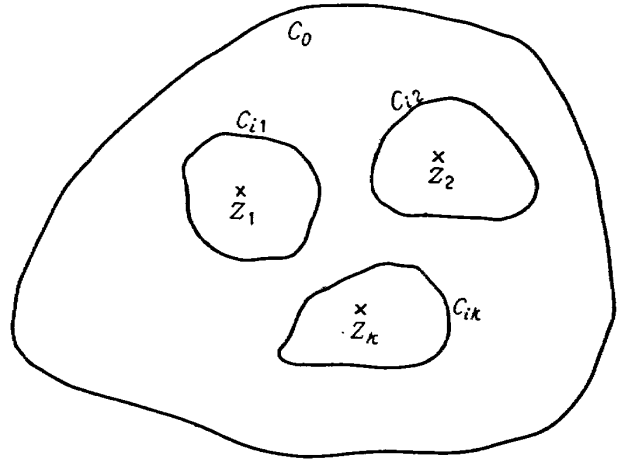


図 10

$$\begin{aligned}
& \frac{u^{(0)}(\xi(c_0), \eta(c_0))}{2} + \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \oint_{c_0} u^{(0)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_0, c) dc - \\
& \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{i1}} u^{(1)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_0, c) dc - \\
& \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{ik}} u^{(k)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_0, c) dc \dots \\
& = f_0(\xi(c_0), \eta(c_0)) - \sum_{m=1} A_m \cdot \ln |c_0 - Z_m|, \\
& \frac{u^{(1)}(\xi(c_{i1}), \eta(c_{i1}))}{2} + \\
& \quad + \frac{1}{2\pi} \oint_{c_0} u^{(0)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_{i1}, c) dc - \\
& -\frac{1}{2\pi} \oint_{c_{i1}} u^{(1)}(\xi(c), \eta(c)) \times \\
& \quad \times (K(c_{i1}, c) + U) dc - \\
& \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{ik}} u^{(k)}(\xi(c), \eta(c)) \times \\
& \quad \times K(c_{i1}, c) dc \dots \\
& = f_1(\xi(c_{i1}), \eta(c_{i1})) - \sum_{m=1} A_m \cdot \ln |c_{i1} - Z_m|, \\
& \dots \dots \dots \\
& \frac{u^{(k)}(\xi(c_{ik}), \eta(c_{ik}))}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_{c_0} u^{(0)}(\xi(c), \eta(c)) \times \\
& \quad \times K(c_{ik}, c) dc - \\
& -\frac{1}{2\pi} \oint_{c_{i1}} u^{(1)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot K(c_{ik}, c) dc -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{ik}} u^{(k)}(\xi(c), \eta(c)) \cdot (K(c_{ik}, c) + \\ & + U) dc \dots = f_k(\xi(c_{ik}), \eta(c_{ik})) - \\ & - \sum_{m=1} A_m \ln |c_{ik} - Z_m| \dots \end{aligned} \quad (29)$$

ここで定数 A_m は次の条件より決定できる。

$$\oint_{c_{ik}} u^{(k)}(\xi(c_{ik}), \eta(c_{ik})) dc = 0 \quad (30)$$

ただし, U は任意の定数とする。

この変形の結果得られた連立積分方程式 (29) は一意の解をもち, 内部領域内の任意の点の温度は次の関係式より求めることができる。

$$\begin{aligned} T(x, y) = & \frac{1}{2\pi} \oint_{c_0} u^{(0)} \cdot K(x, y; c) dc - \\ & - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{i1}} u^{(1)} \cdot K(x, y; c) dc - \dots \\ & \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{ik}} u^{(k)} \cdot K(x, y; c) dc \dots \\ & + \sum_{m=1} A_m \ln |Q(x, y) - Z_m| \end{aligned} \quad (31)$$

ここに $Q(x, y)$ は座標 (x, y) の点である。

3.3 温度勾配の計算法

内部領域内の点 $Q(x, y)$ における x 軸方向および y 軸方向の温度勾配は (31) 式を x, y について微分を行えばただちに求めることができる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{2\pi} \oint_{c_0} u^{(0)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} K(x, y; c) dc - \\ & - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{i1}} u^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} K(x, y; c) dc - \\ & \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{ik}} u^{(k)} \cdot \frac{\partial}{\partial x} K(x, y; c) dc \\ & \dots + \sum_{m=1} A_m \cdot \frac{\partial}{\partial x} \ln |Q(x, y) - Z_m| \end{aligned} \quad (32)$$

同様に y について微分を行なうと,

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = & \frac{1}{2\pi} \oint_{c_0} u^{(0)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} K(x, y; c) dc \\ & - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{i1}} u^{(1)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} K(x, y; c) dc \\ & \dots - \frac{1}{2\pi} \oint_{c_{ik}} u^{(k)} \cdot \frac{\partial}{\partial y} K(x, y; c) dc \dots \\ & \dots + \sum_{m=1} A_m \cdot \frac{\partial}{\partial y} \ln |Q(x, y) - Z_m| \end{aligned} \quad (33)$$

ここに

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} K(x, y; c) = & \frac{(\xi - x)^2 \cdot \eta - (\eta - y) \{ (\eta - y) \cdot \eta + 2(\xi - x) \cdot \xi \}}{\{ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} K(x, y; c) = & \frac{-(\eta - y)^2 \cdot \xi + (\xi - x) \{ (\xi - x) \cdot \xi + 2(\eta - y) \cdot \eta \}}{\{ (\xi - x)^2 + (\eta - y)^2 \}^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} A_m \cdot \ln |Q(x, y) - Z_m| = & A_m \frac{x - x_m}{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} A_m \cdot \ln |Q(x, y) - Z_m| = & A_m \frac{y - y_m}{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2} \end{aligned}$$

3.4 数値解法

2. の 2.4 の場合と同様に $v(\varphi) d\varphi = u(c) dc$ の変数変換により (29) の連立積分方程式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{v^{(0)}(\varphi)}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2(\varphi) + \eta_0^2(\varphi)}} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\phi) \cdot K_{0,0}(\varphi, \phi) d\phi - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\phi) \cdot K_{1,0}(\varphi, \phi) d\phi \dots \\ & \dots - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(k)}(\phi) \cdot K_{k,0}(\varphi, \phi) d\phi \dots \\ & = f_0(\varphi) - \sum_{m=1} A_m \ln |c_0 - Z_m| \\ & \frac{v^{(1)}(\varphi)}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_{i1}^2(\varphi) + \eta_{i1}^2(\varphi)}} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\phi) \cdot K_{0,1}(\varphi, \phi) d\phi - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\phi) \cdot (K_{1,1}(\varphi, \phi) + U) d\phi \dots \\ & \dots - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(k)}(\phi) \cdot K_{k,1}(\varphi, \phi) d\phi \dots \\ & = f_1(\varphi) - \sum_{n=1} A_n \ln |c_{i1} - Z_n| \\ & \dots \\ & \frac{v^{(k)}(\varphi)}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_{ik}^2(\varphi) + \eta_{ik}^2(\varphi)}} + \\ & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\phi) \cdot K_{0,k}(\varphi, \phi) d\phi - \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\phi) \cdot K_{1,k}(\varphi, \phi) d\phi \dots \\ & \dots - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(k)}(\phi) \cdot (K_{k,k}(\varphi, \phi) + U) d\phi \\ & = f_k(\varphi) - \sum_{m=1} A_m \ln |c_{ik} - Z_m| \dots \end{aligned} \quad (34)$$

ここに,

$$\begin{aligned} K_{0,0}(\varphi, \phi) = & \frac{[\xi_0(\phi) - \xi_0(\varphi)] \cdot \eta_0(\phi) - [\eta_0(\phi) - \eta_0(\varphi)] \cdot \xi_0(\phi)}{[\xi_0(\phi) - \xi_0(\varphi)]^2 + [\eta_0(\phi) - \eta_0(\varphi)]^2} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2(\phi) + \eta_0^2(\phi)}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
K_{k,0}(\varphi, \psi) &= \frac{[\xi_0(\psi) - \xi_{ik}(\varphi)] \cdot \eta_0(\psi) - [\eta_0(\psi) - \eta_{ik}(\varphi)] \cdot \xi_0(\psi)}{[\xi_0(\psi) - \xi_{ik}(\varphi)]^2 + [\eta_0(\psi) - \eta_{ik}(\varphi)]^2} \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{\xi_0^2(\psi) + \eta_0^2(\psi)}} \\
K_{k,l}(\varphi, \psi) &= \frac{[\xi_{jl}(\psi) - \xi_{ik}(\varphi)] \cdot \eta_{jl}(\psi) - [\eta_{jl}(\psi) - \eta_{ik}(\varphi)] \cdot \xi_{jl}(\psi)}{[\xi_{jl}(\psi) - \xi_{ik}(\varphi)]^2 + [\eta_{jl}(\psi) - \eta_{ik}(\varphi)]^2} \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{\xi_{jl}^2(\psi) + \eta_{jl}^2(\psi)}} \quad (35)
\end{aligned}$$

A_m は次の条件より決定される

$$\int_0^{2\pi} v^{(k)}(\psi) d\psi = 0 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (36)$$

(34) の連立積分方程式の解, $v^{(0)}(\varphi), v^{(1)}(\varphi), \dots, v^{(k)}(\varphi), \dots$ が求められ, これらの解から次の関係式により点 (x, y) の温度 $T(x, y)$ が決まる。

$$\begin{aligned}
T(x, y) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\psi) \cdot K_{0,(x,y)}(\psi) d\psi - \\
&\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\psi) \cdot K_{1,(x,y)}(\psi) d\psi \dots \dots \\
&\quad \dots \dots - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(k)}(\psi) \cdot K_{k,(x,y)}(\psi) d\psi \dots \dots \\
&\quad + \sum_{m=1} A_m \cdot \ln |Q(x, y) - Z_m| \quad (37)
\end{aligned}$$

滑らかな閉じた境界線 $C_0, C_{i1}, C_{i2}, \dots, C_{ik}, \dots$ 上に分割点をそれぞれ $2N_0, 2N_1, 2N_2, \dots, 2N_k, \dots$ ととり, 境界線を等分割する変数 φ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mu 0} &= \mu_0 \cdot \frac{2\pi}{2N_0}, \quad (\mu_0 = 0, 1, 2, \dots, 2N_0 - 1) \\
\varphi_{\mu 1} &= \mu_1 \cdot \frac{2\pi}{2N_1}, \quad (\mu_1 = 0, 1, 2, \dots, 2N_1 - 1) \\
\varphi_{\mu 2} &= \mu_2 \cdot \frac{2\pi}{2N_2}, \quad (\mu_2 = 0, 1, 2, \dots, 2N_2 - 1) \\
&\dots \dots \dots \\
\varphi_{\mu k} &= \mu_k \cdot \frac{2\pi}{2N_k}, \quad (\mu_k = 0, 1, 2, \dots, 2N_k - 1) \\
&\dots \dots \dots
\end{aligned}$$

にとる。

変数に関しては, 2.4 の場合と同様に次のように表示する,

$$\begin{aligned}
\xi_{\mu k} &= \xi_{ik}(\varphi_{\mu k}) \\
\eta_{\mu k} &= \eta_{ik}(\varphi_{\mu k}) \\
\dot{\xi}_{\mu k} &= \dot{\xi}_{ik}(\varphi_{\mu k}) = \sum_{\nu=1}^{2N-1} B_\nu \cdot \xi_{ik}(\varphi_{\mu k} + \varphi_\nu) \\
\dot{\eta}_{\mu k} &= \dot{\eta}_{ik}(\varphi_{\mu k}) = \sum_{\nu=1}^{2N-1} B_\nu \cdot \eta_{ik}(\varphi_{\mu k} + \varphi_\nu) \quad (38)
\end{aligned}$$

ただし

$$B_\nu = \frac{(-1)^{\nu+1}}{2} \cdot \cot \frac{\varphi_\nu}{2} \quad (\nu = 1, 2, \dots, 2N-1)$$

周期を有する積分の近似式 (19) を用いて (34) 式を書き換えると次の式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{v_{\mu}^{(0)}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_{\mu 0}^2 + \eta_{\mu 0}^2}} &+ \frac{1}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot K_{\mu 0, \nu 0} - \\
&- \frac{1}{2N_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu}^{(1)} \cdot K_{\mu 0, \nu 1} - \\
&- \frac{1}{2N_2} \sum_{\nu=0}^{2N_2-1} v_{\nu}^{(2)} \cdot K_{\mu 0, \nu 2} \dots \dots \dots \\
&- \frac{1}{2N_k} \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\nu}^{(k)} \cdot K_{\mu 0, \nu k} - \\
&\dots \dots = f_{\mu 0} - \sum_{m=1} A_m \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \{ (\xi_{\mu 0} - x_m)^2 \\
&\quad + (\eta_{\mu 0} - y_m)^2 \} \\
\frac{v_{\mu}^{(1)}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_{\mu 1}^2 + \eta_{\mu 1}^2}} &+ \frac{1}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot K_{\mu 1, \nu 0} - \\
&- \frac{1}{2N_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu}^{(1)} \cdot (K_{\mu 1, \nu 1} + U) - \\
&- \frac{1}{2N_2} \sum_{\nu=0}^{2N_2-1} v_{\nu}^{(2)} \cdot K_{\mu 1, \nu 2} \dots \dots \dots \\
&- \frac{1}{2N_k} \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\nu}^{(k)} \cdot K_{\mu 1, \nu k} \dots \dots \dots \\
&= f_{\mu 1} - \sum_{m=1} A_m \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \{ (\xi_{\mu 1} - x_m)^2 \\
&\quad + (\eta_{\mu 1} - y_m)^2 \} \\
&\dots \dots \dots \\
\frac{v_{\mu}^{(k)}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\xi_{\mu k}^2 + \eta_{\mu k}^2}} &+ \frac{1}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot K_{\mu k, \nu 0} - \\
&- \frac{1}{2N_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu}^{(1)} \cdot K_{\mu k, \nu 1} - \\
&- \frac{1}{2N_2} \sum_{\nu=0}^{2N_2-1} v_{\nu}^{(2)} \cdot K_{\mu k, \nu 2} \dots \dots \dots \\
&- \frac{1}{2N_k} \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\nu}^{(k)} \cdot (K_{\mu k, \nu k} + U) \dots \dots \dots \\
&= f_{\mu k} - \sum_{m=1} A_m \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \{ (\xi_{\mu k} - x_m)^2 \\
&\quad + (\eta_{\mu k} - y_m)^2 \} \quad (39)
\end{aligned}$$

ただし,

$$\begin{aligned}
\xi_{\mu 0} &= \xi_0(\varphi_{\mu 0}), \quad \eta_{\mu 0} = \eta_0(\varphi_{\mu 0}), \quad \dot{\xi}_{\mu 0} = \dot{\xi}_0(\varphi_{\mu 0}), \\
\dot{\eta}_{\mu 0} &= \dot{\eta}_0(\varphi_{\mu 0})
\end{aligned}$$

とすると, (35) 式は次のように書くことができる。

$$\begin{aligned}
K_{\mu k, \nu l} &= \frac{(\xi_{\nu l} - \xi_{\mu k}) \cdot \dot{\eta}_{\nu l} - (\eta_{\nu l} - \eta_{\mu k}) \cdot \dot{\xi}_{\nu l}}{(\xi_{\nu l} - \xi_{\mu k})^2 + (\eta_{\nu l} - \eta_{\mu k})^2} \times \\
&\quad \times \frac{1}{\sqrt{\xi_{\nu l}^2 + \eta_{\nu l}^2}} \quad (40) \\
f_{\mu k} &= f_k(\varphi_{\mu k}) \\
Z_m &= Z_m(x_m, y_m)
\end{aligned}$$

(36) 式は

$$\frac{2\pi}{2N_k} \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\mu k}^{(k)} = 0 \quad (k=1, 2, \dots) \quad (41)$$

となり, この関係式により A_m を決定する。

(40) 式により $K_{\mu k, \mu k}$ は (28) 式を利用して求めることができる。

$$\frac{1}{2N_k} \cdot K_{\mu k, \mu k} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2N_k} \sum_{\substack{\nu=0 \\ \nu \neq \mu}}^{2N_k-1} K_{\mu k, \nu k} \quad (42)$$

連立方程式(39) から, $v_{\mu 0} (\mu_0=0, 1, \dots, 2N_0-1)$, $v_{\mu 1} (\mu_1=0, 1, \dots, 2N_1-1)$, $\dots, v_{\mu k} (\mu_k=0, 1, \dots, 2N_k-1) \dots$ が求まる, したがって, 点 (x, y) における温度は次の式から求めることができる。

$$\begin{aligned} T(x, y) = & \frac{1}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu(0)} \cdot K_{(x, y), \nu 0} - \\ & - \frac{1}{2N_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu(1)} \cdot K_{(x, y), \nu 1} \dots \dots \dots \\ & - \frac{1}{2N_k} \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\nu(k)} \cdot K_{(x, y), \nu k} \dots \dots \dots \\ & + \sum_{m=1} A_m \cdot \frac{1}{2} \cdot \ln \{ (x-x_m)^2 + (y-y_m)^2 \} \end{aligned} \quad (43)$$

ここに

$$\begin{aligned} K_{(x, y), \nu k} = & \frac{(\xi_{\nu k} - x) \cdot \eta_{\nu k} - (\eta_{\nu k} - y) \cdot \xi_{\nu k}}{(\xi_{\nu k} - x)^2 + (\eta_{\nu k} - y)^2} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\xi_{\nu k}^2 + \eta_{\nu k}^2}} \end{aligned}$$

また温度勾配の数値計算法も同様にして表示できる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, y)}{\partial x} = & \frac{1}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu(0)} \cdot DK_{X(x, y), \nu 0} - \\ & - \frac{1}{2N_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu(1)} \cdot DK_{X(x, y), \nu 1} \\ & \dots \dots - \frac{1}{2N_k} \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\nu(k)} \cdot DK_{X(x, y), \nu k} \dots \dots \dots \\ & + \sum_{m=1} A_m \cdot \frac{(x-x_m)}{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} \end{aligned} \quad (44)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(x, y)}{\partial y} = & \frac{1}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu(0)} \cdot DK_{Y(x, y), \nu 0} - \\ & - \frac{1}{2N_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu(1)} \cdot DK_{Y(x, y), \nu 1} \\ & \dots \dots - \frac{1}{2N_k} \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\nu(k)} \cdot DK_{Y(x, y), \nu k} \dots \dots \dots \\ & \dots \dots + \sum_{m=1} A_m \cdot \frac{y-y_m}{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} \end{aligned} \quad (45)$$

ただし,

$$\begin{aligned} DK_{X(x, y), \nu k} = & \frac{(\xi_{\nu k} - x)^2 \cdot \eta_{\nu k} - (\eta_{\nu k} - y) \{ \eta_{\nu k} (\eta_{\nu k} - y) + 2(\xi_{\nu k} - x) \cdot \xi_{\nu k} \}}{\{ (\xi_{\nu k} - x)^2 + (\eta_{\nu k} - y)^2 \}^{\frac{3}{2}}} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\xi_{\nu k}^2 + \eta_{\nu k}^2}} \end{aligned}$$

$$DK_{Y(x, y), \nu k} =$$

$$\begin{aligned} & - \frac{(\eta_{\nu k} - y)^2 \cdot \xi_{\nu k} + (\xi_{\nu k} - x) \{ \xi_{\nu k} (\xi_{\nu k} - x) + 2(\eta_{\nu k} - y) \cdot \eta_{\nu k} \}}{\{ (\xi_{\nu k} - x)^2 + (\eta_{\nu k} - y)^2 \}^{\frac{3}{2}}} \\ & \times \frac{1}{\sqrt{\xi_{\nu k}^2 + \eta_{\nu k}^2}} \end{aligned}$$

3.5 例題 二重の同心円境界

図 11 に示すような半径 R_0 の円周上および半径 R_1 の円周上にそれぞれ温度分布 $f_0(\varphi)$ および $f_1(\varphi)$ が与えられる場合に二つの境界線 C_0, C_1 で囲まれる領域 D における温度分布 $T(r, \varphi)$ を求める。

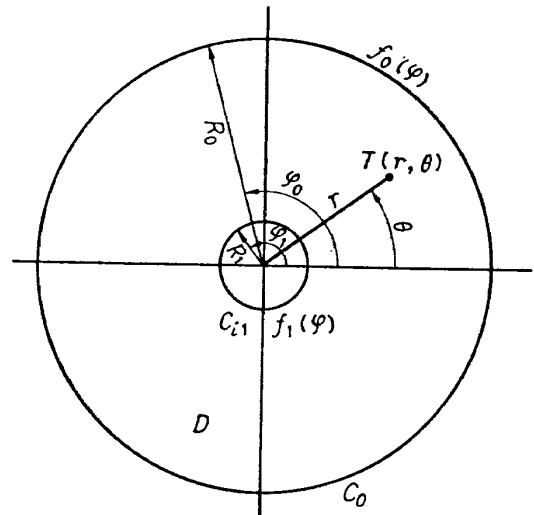


図 11

境界線 $C_0(\xi_0, \eta_0)$, $C_1(\xi_1, \eta_1)$ は次の関係式で表示される。

$$\xi_0 = R_0 \cdot \cos \varphi, \quad \eta_0 = R_0 \cdot \sin \varphi$$

$$\xi_1 = R_1 \cdot \cos \varphi, \quad \eta_1 = R_1 \cdot \sin \varphi$$

積分方程式の核 K は (33) 式により

$$K_{0,0}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2R_0}$$

$$K_{1,1}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2R_1}$$

$$K_{1,0}(\varphi, \psi) = \frac{R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)}{R_0^2 + R_1^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)} \cdot \frac{1}{R_1}$$

$$K_{0,1}(\varphi, \psi) = \frac{R_0^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)}{R_0^2 + R_1^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)} \cdot \frac{1}{R_0}$$

このとき連立積分方程式 (34) から次の連立方程式を得る。

$$\begin{aligned} & v^{(0)}(\varphi) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\psi) d\psi - \frac{1}{\pi} \left(\frac{R_0}{R_1} \right) \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\psi) \times \\ & \quad \times \frac{R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)}{R_0^2 + R_1^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)} d\psi \\ & = 2(f_0(\varphi) - A_1 \ln R_0) \times R_0 \\ & v^{(1)}(\varphi) + \frac{1}{\pi} \left(\frac{R_1}{R_0} \right) \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\psi) \times \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \frac{R_0^2 - R_0 R_1 \cos(\varphi - \psi)}{R_0^2 + R_1^2 - 2 R_0 R_1 \cos(\varphi - \psi)} d\psi \\ & = 2(f_1(\varphi) - A_1 \times \ln R_1) \times R_1 \end{aligned} \quad (46)$$

ここに、任意の定数 $U = -\frac{1}{2R_1}$ とする。

A_1 は $v^{(1)}$ が次の関係式を満たすことから決定できる。

$$\int_0^{2\pi} v^{(1)}(\psi) d\psi = 0 \quad (47)$$

温度分布は、

$$\begin{aligned} T(r, \varphi) = & \frac{1}{2\pi R_0} \int_0^{2\pi} \frac{R_0^2 - R_0 r \cos(\varphi - \psi)}{R_0^2 + r^2 - 2 R_0 r \cos(\varphi - \psi)} v^{(0)}(\psi) d\psi - \\ & - \frac{1}{2\pi R_1} \int_0^{2\pi} \frac{R_1^2 - R_1 r \cos(\varphi - \psi)}{R_1^2 + r^2 - 2 R_1 r \cos(\varphi - \psi)} v^{(1)}(\psi) d\psi \\ & + A_1 \cdot \ln r \end{aligned} \quad (48)$$

により求まる。

(19) の近似式を直接利用すると (39) 式に相当する連立方程式がただちに得られる。

ここで数値解法によって解 $v^{(0)}(\varphi_{\mu_0})$, ($\mu_0=0, 1, 2, \dots, 2N_0-1$), $v^{(1)}(\varphi_{\mu_1})$, ($\mu_1=0, 1, 2, \dots, 2N_1-1$) を得るために A_1 を決定しなければならない。

(46) 式は線型積分方程式であるから、いま $v^{(0)} = v_1^{(0)} + A_1 v_2^{(0)}$ とし、 $v^{(1)} = v_1^{(1)} + A_1 v_2^{(1)}$ とする。 $v_1^{(0)}$ は (46) 式の第一式の右辺 $= 2f_0(\varphi) \times R_0$ に対する解とし、 $v_2^{(0)}$ を同式の右辺 $= -2 \cdot \ln R_0 \times R_0$ に対する解とする。同様に $v_1^{(1)}$ は第二式の右辺 $= 2f_1(\varphi) \times R_1$ の解、 $v_2^{(1)}$ は第二式の右辺 $= -2 \cdot \ln R_1 \times R_1$ に対する解とする。

したがって、(47) 式は

$$\int_0^{2\pi} v_1^{(1)}(\psi) d\psi + A_1 \int_0^{2\pi} v_2^{(1)}(\psi) d\psi = 0 \quad (49)$$

となり A_1 を決定することができ、 $v^{(0)}$ および $v^{(1)}$ が求まる。

$R_0=10$, $R_1=2$ とし、 $f_0=100+25 \cos \varphi$, $f_1=20+5 \sin \varphi$ と与え、分割点の数 $2N_0=2N_1=24$ および 36 の場合の結果を図 13, 図 14 に示す。

3.6 数値解の結果

境界線は円よりなり、中心が一致する二重同心円の場合について数値計算した結果を述べる。外側の円 C_0 は半径 10 とし、等分割点は図 12 に示すように円の中心 0 に原点が一致するような座標系 (x, y) をとるとき、点 $(10, 0)$ を $\mu_0=0$ とし反時計方向に進み $2N_0-1$ まで分割する。内側の円 C_{i1} についても同様に $\mu_1=0$ から $2N_1-1$ まで等分割する、半径は 2 とする。

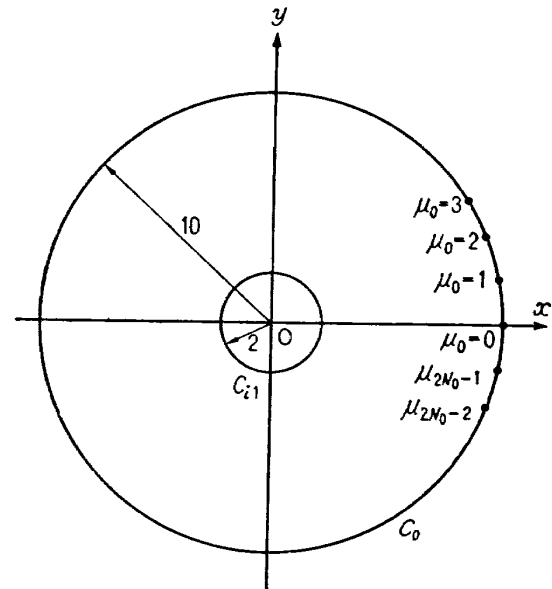


図 12

境界条件として、外円の周上に

$$f_0(\varphi) = 100 + 25 \cos \varphi, \quad R_0 = 10$$

なる温度分布を与え、内円の周上に

$$f_1(\varphi) = 20 + 5 \sin \varphi, \quad R_1 = 2$$

なる温度分布を与えた場合の解、 $v_1^{(0)}$, $v_2^{(0)}$, $v^{(0)}$ および $v_1^{(1)}$, $v_2^{(1)}$, $v^{(1)}$ を表 1, 表 2, 表 3 に示す。

表 1 には、分割点は外円、内円の周上に共に 36 点とし、任意にとれる定数 U は 1 とした結果を示す、なお (49) 式によって A_1 は 49.3 となる。

表 2 には、分割点を外円、内円の周上に共に 24 点とり、他の条件は表 1 と同じとした場合の結果を示す、このとき A_1 は 49.2 である。

3.5 の例題で (48) 式に (19) 式の近似式を適用して、 $U = -\frac{1}{2R_1} = -\frac{1}{4}$ としたときの解を表 3 に示す。

分割点は表と同様に 24 点とする、 A_1 は 50.0 である。

表 4 から表 7 までは半径 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 における温度分布を示す。

表 7 には二変数ラプラス方程式を変数分離法によって解いて得た結果を示す。

図 17 から図 20 までは翼型に穴が二つあいた場合の温度場の計算結果を描いた、なお境界上の数値は無次元量 T_{ra} の値を記した。ここに T_{ra} は次の式で与えられる。

$$T_{ra} = \frac{T - T_{omin}}{T_{bmax} - T_{omin}}$$

T_{bmax} は翼型上の最高温度を表わし、 T_{omin} は二つの境界円上の最低温度を表わしている。

領域内の実線は等温線を表わしている。

4. ま と め

一つの滑らかな任意の形状をした閉じた境界線があり、その内部領域内に有限個の滑らかな任意の形状をした閉じた境界線が存在する、これらの境界線上にある温度分布を与えるとこれらの境界線によって囲まれる領域内の温度分布を決定することができる。しかし、円の場合など特別な境界線の形状の場合を除いては一般にはこの領域内の温度分布を解析的に求めることはできない。そのため二変数ラプラス方程式を物理的な解釈にも都合の良いグリーン関数を用い、さらにポテンシャル論における二重層の考えを導入して、数値計算に適した第二種のフレッドホルム型積分方程式を得る。

第二種のフレッドホルム型積分方程式の解き方には直接に解く方法と、繰り返し計算法があるがここでは(19)式の近似により直接法により解を求める。積分方程式は多元連立方程式となり、この連立方程式の元は境界線の分割点の数と一致する。また(39)式の左辺は境界線の形状のみに依存し、右辺は境界線上の温度分布のみに依存している。そのため境界線の形状は変わらず温度分布のみが異なる場合には、左辺の各項は改めて計算する必要はなく、右辺の温度分布の項のみを計算すれば良いという特徴がある。

境界線が二重同心円の場合の計算結果を図13, 図14,

図15および表4, 表5, 表6, 表7に示す。なお図15と表7は二変数ラプラス方程式を変数分離法により解析的に求めた温度分布である。分割点の数は表4においては36点, 表5, 表6では24点である。

図13においてわかるように分割点が24の場合には外側の境界線付近の領域で $\theta=180$ 付近においては温度分布に矛盾が生じているが、他の条件が同じで分割点の数を36個に増すとこの矛盾は消滅するが境界線付近の誤差は大きい。

図16には温度勾配の計算結果を示す。矢印の向きは熱流の方向とは逆になっている。境界上に与えた温度分布は図13, 図14, 図15の場合と同じである。

図17から図20までジェットエンジンの空冷タービン翼の温度分布の計算結果を等温線で示す。この計算においては冷却通路は円とし、この冷却通路の配置によって翼内部の温度分布がどのように変化するか、また冷却通路相互の温度場の干渉によってどのように温度分布が変化するかを冷却通路が二個ある場合について等温線を描いて比較することができた。

今回の報告では境界線は滑らかな曲線からなり、任意の形状を有する場合に境界線上に温度分布が与えられたとき内部領域の温度分布の計算を境界線が二重同心円の場合と穴のあいた翼型の場合について計算を行なったが、なお cusp のある場合や誤差評価など数学的な追求を今後とも続けるつもりである。

表 1. 二重同心円の場合の解 (積分方程式の数値解法)

$R_0=10$ $R_1=2$ $f_0(\varphi)=100+25\cos\varphi$, $f_1(\varphi)=20+5\sin\varphi$
 分割点 $2N_0=2$ $N_1=36$

$U=1.0$

$A_1=49.3$

$v^{(0)}=v_1^{(0)}+A_1\cdot v_2^{(0)}$, $v^{(1)}=v_1^{(1)}+A_1\cdot v_2^{(1)}$

μ_0	$v_1^{(0)}$	$v_2^{(0)}$	$v^{(0)}$	μ_1	$v_1^{(1)}$	$v_2^{(1)}$	$v^{(1)}$
0	1456.9	-21.7	387.1	0	-12388.8	251.0	-14.5
1	1304.0	-18.8	277.2	1	-12440.7	252.1	-12.2
2	1147.0	-16.2	348.3	2	-12490.8	253.3	-3.1
3	993.0	-14.0	302.8	3	-12542.0	254.4	-0.1
4	847.2	-12.1	250.7	4	-12593.2	255.5	3.0
5	713.5	-10.8	181.1	5	-12645.5	256.7	9.8
6	594.2	-9.9	106.1	6	-12698.7	257.9	15.8
7	490.8	-9.5	22.5	7	-12753.2	259.1	20.4
8	404.1	-9.6	-69.2	8	-12809.1	260.3	23.7
9	334.6	-10.0	-158.4	9	-12866.7	261.6	30.2
10	282.9	-10.8	-249.5	10	-12926.0	262.8	30.0
11	249.3	-11.9	-337.4	11	-12987.0	264.1	33.1
12	234.2	-13.2	-416.6	12	-13050.0	265.5	39.2
13	237.8	-14.7	-486.9	13	-13114.7	266.8	38.5
14	260.2	-16.4	-548.3	14	-13181.1	268.1	36.2
15	201.5	-18.3	-600.7	15	-13249.0	269.5	37.4
16	361.3	-20.2	-634.6	16	-13318.5	270.8	31.9
17	438.8	-22.2	-655.7	17	-13389.2	272.2	30.3
18	532.9	-24.1	-655.2	18	-13461.0	273.6	27.5
19	642.1	-26.1	-644.6	19	-13533.7	275.0	23.8
20	764.1	-28.0	-616.3	20	-13606.9	276.4	19.6
21	896.5	-29.9	-577.6	21	-13680.4	277.8	15.1
22	1036.1	-31.6	-521.8	22	-13754.0	279.1	5.6
23	1179.2	-33.1	-452.6	23	-13827.3	280.5	1.4
24	1321.9	-34.4	-374.0	24	-13900.2	281.9	-2.5
25	1459.5	-35.5	-290.7	25	-13972.2	283.2	-10.4
26	1587.2	-36.3	-202.4	26	-14043.3	284.6	-12.5
27	1700.7	-36.7	-109.3	27	-14113.2	285.9	-18.3
28	1792.7	-36.8	-21.5	28	-14181.8	287.2	-22.8
29	1860.5	-36.4	66.0	29	-14248.9	288.5	-25.9
30	1899.0	-35.6	143.9	30	-14314.7	289.8	-27.6
31	1904.9	-34.2	218.8	31	-14378.7	291.1	-27.5
32	1876.3	-32.4	279.0	32	-14441.7	292.4	-26.4
33	1813.4	-30.1	329.5	33	-14502.3	293.6	-28.3
34	1718.8	-27.5	363.1	34	-14563.7	294.9	-25.1
35	1597.3	-24.6	384.5	35	-14621.9	296.1	-24.2

表 2. 二重同心円の場合の解 (積分方程式の数値解法)

$R_0=10$ $R_1=2$ $f_0(\varphi)=100+25\cos\varphi$, $f_1(\varphi)=20+5\sin\varphi$
 分割点 $2N_0=2N_1=24$

$U=1.0$

$A_1=49.2$

$v^{(0)}=v_1^{(0)}+A_1\cdot v_2^{(0)}$, $v^{(1)}=v_1^{(1)}+A_1\cdot v_2^{(1)}$

μ_0	$v_1^{(0)}$	$v_2^{(0)}$	$v^{(0)}$	μ_1	$v_1^{(1)}$	$v_2^{(1)}$	$v^{(1)}$
0	1341.6	-19.3	392.0	0	-18960.0	385.2	- 8.2
1	933.0	-11.5	367.2	1	-19116.1	388.5	- 1.9
2	558.7	- 5.1	307.8	2	-19272.6	391.8	4.0
3	246.5	- 0.6	219.0	3	-19433.1	395.3	15.7
4	16.1	1.9	109.6	4	-19597.8	398.8	23.2
5	-136.2	2.3	- 23.0	5	-19768.3	402.4	29.8
6	-212.0	1.1	-157.6	6	-19945.0	406.1	35.1
7	-216.6	- 1.5	-290.4	7	-20128.3	410.0	43.6
8	-155.6	- 5.3	-416.4	8	-20318.4	413.9	45.5
9	- 34.3	- 9.9	-521.4	9	-20514.8	417.9	45.9
10	141.7	-15.0	-596.3	10	-20717.0	422.0	45.4
11	366.2	-20.5	-642.4	11	-20924.0	426.1	40.1
12	631.1	-26.2	-657.9	12	-21135.0	430.3	35.8
13	926.4	-31.7	-633.2	13	-21348.8	434.5	28.6
14	1239.3	-36.8	-571.3	14	-21564.0	438.7	20.0
15	1554.2	-41.5	-487.6	15	-21779.3	442.9	11.4
16	1852.3	-45.2	-371.5	16	-21993.6	447.1	3.7
17	2112.2	-48.0	-249.4	17	-22205.6	451.2	- 6.6
18	2310.3	-49.2	-110.3	18	-22414.3	455.3	-13.5
19	2422.6	-48.7	26.6	19	-22619.3	459.4	-16.8
20	2427.6	-46.3	149.6	20	-22820.3	463.4	-21.0
21	2311.3	-41.8	254.7	21	-23017.1	467.4	-21.0
22	2074.1	-35.4	332.4	22	-23211.4	471.4	-18.5
23	1736.4	-27.6	378.5	23	-23401.4	475.3	-16.6

表 3. 二重同心円の場合の解 (積分方程式の数値解法)

$R_0=10$ $R_1=2$ $f_0(\varphi)=100+25 \cos \varphi$, $f_1(\varphi)=20+5 \sin \varphi$
 分割点 $2 N_0=2 N_1=24$

$$U = -\frac{1}{2 R_1}$$

$$A_1 = 50.0$$

$$v^{(0)} = v_1^{(0)} + A_1 \cdot v_2^{(0)}, \quad v^{(1)} = v_1^{(1)} + A_1 \cdot v_2^{(1)}$$

μ_0	$v_1^{(0)}$	$v_2^{(0)}$	$v^{(0)}$	μ_1	$v_1^{(1)}$	$v_2^{(1)}$	$v^{(1)}$
0	1520.8	-23.0	376.3	0	-340.8	6.4	-20.8
1	1497.7	-23.0	353.2	1	-334.7	6.4	-14.7
2	1440.6	-23.0	296.1	2	-327.6	6.4	-7.6
3	1353.6	-23.0	209.0	3	-320.0	6.4	0.0
4	1242.4	-23.0	97.8	4	-312.4	6.4	7.6
5	1114.7	-23.0	-29.9	5	-305.3	6.4	14.7
6	979.2	-23.0	-165.4	6	-299.2	6.4	20.8
7	845.1	-23.0	-299.5	7	-294.5	6.4	25.5
8	721.5	-23.0	-423.0	8	-291.5	6.4	28.5
9	617.0	-23.0	-527.6	9	-290.5	6.4	29.5
10	538.5	-23.0	-606.0	10	-291.5	6.4	28.5
11	491.5	-23.0	-653.0	11	-294.5	6.4	25.5
12	479.2	-23.0	-665.4	12	-299.2	6.4	20.8
13	502.3	-23.0	-642.2	13	-305.3	6.4	14.7
14	559.4	-23.0	-585.2	14	-312.4	6.4	7.6
15	646.5	-23.0	-498.1	15	-320.0	6.4	0.0
16	757.6	-23.0	-386.9	16	-327.6	6.4	-7.6
17	885.3	-23.0	-259.2	17	-334.7	6.4	-14.7
18	1020.8	-23.0	-123.7	18	-340.8	6.4	-20.8
19	1154.9	-23.0	10.4	19	-345.5	6.4	-25.5
20	1278.5	-23.0	133.9	20	-348.5	6.4	-28.5
21	1383.0	-23.0	238.5	21	-349.5	6.4	-29.5
22	1461.5	-23.0	316.9	22	-348.5	6.4	-28.5
23	1508.5	-23.0	363.9	23	-345.5	6.4	-25.5

表 4. 温度分布 (積分方程式の数値解法)

$R_0=10$ $R_1=2$ $f_0(\varphi)=100+25\cos\varphi$, $f_1(\varphi)=20+5\sin\varphi$
 分割点 $2N_0=2$ $N_1=36$

r	3	4	5	6	7	8	9
0	44.9	62.6	76.7	88.7	99.1	108.5	118.0
1	46.3	62.9	76.2	87.5	97.3	106.2	114.9
2	46.0	60.9	72.9	82.9	91.6	99.1	106.4
3	44.3	57.4	67.6	76.1	83.3	89.5	94.7
4	41.7	53.1	62.0	69.0	74.8	79.7	82.9
5	38.8	49.4	57.3	63.5	68.4	72.4	74.3
6	36.5	47.2	55.0	61.0	65.7	69.5	71.0
7	35.3	47.0	55.6	62.2	67.5	71.8	74.1
8	35.5	48.9	58.9	66.8	73.3	78.8	82.6
9	37.0	52.3	64.0	73.5	81.5	88.5	94.3
10	39.5	56.5	69.7	80.6	90.0	98.3	106.1
11	42.3	60.2	74.3	86.1	96.4	105.6	114.7

表 5. 温度分布 (積分方程式の数値解法)

$R_0=10$ $R_1=2$ $f_0(\varphi)=100+25\cos\varphi$, $f_1(\varphi)=20+5\sin\varphi$
 分割点 $2N_0=2$ $N_1=24$

r	3	4	5	6	7	8	9
0	45.0	62.6	76.6	88.7	99.2	108.7	120.5
1	46.5	62.3	75.0	85.6	94.9	103.4	112.7
2	44.6	57.6	67.8	76.2	83.4	89.5	93.7
3	40.6	51.4	59.6	66.1	71.3	75.4	74.8
4	36.7	47.3	55.1	61.1	65.8	69.2	66.9
5	35.3	47.7	57.0	64.2	70.0	74.6	74.7
6	37.0	52.3	64.0	73.5	81.5	88.4	93.6
7	40.8	58.4	72.2	83.6	93.6	102.5	112.6

表 6. 温度分布 (積分方程式の数値解法)

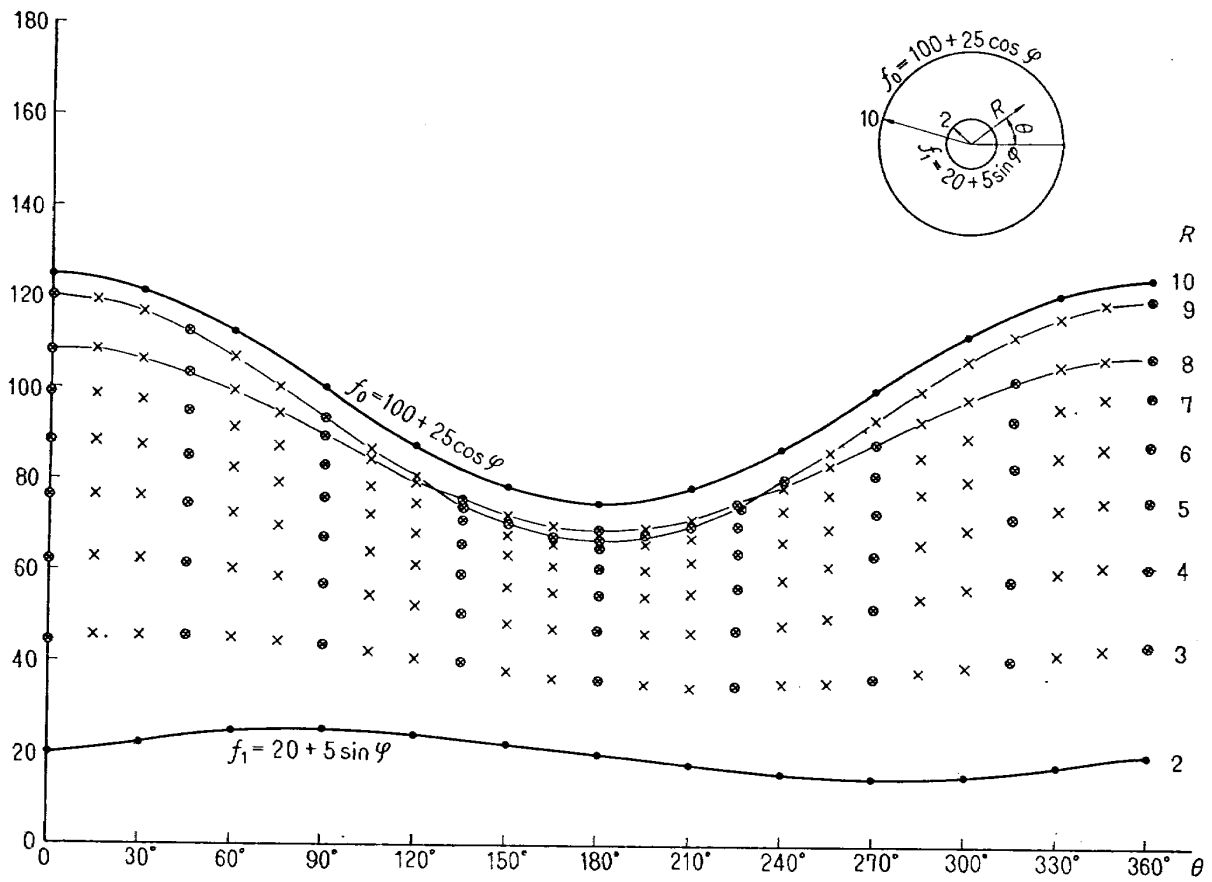
$R_0=10$ $R_1=2$ $f_0(\varphi)=100+25\cos\varphi$, $f_1(\varphi)=20+5\sin\varphi$
 分割点 $2N_0=2N_1=24$

r	3	4	5	6	7	8	9
0	44.5	62.3	76.5	88.5	99.0	108.6	120.3
1	45.2	62.6	76.5	88.3	98.7	108.1	119.4
2	45.5	62.3	75.8	87.2	97.2	106.2	116.8
3	45.5	61.5	74.4	85.2	94.7	103.2	112.5
4	45.1	60.3	72.4	82.5	91.3	99.3	107.0
5	44.3	58.6	69.9	79.3	87.3	94.4	100.5
6	43.3	56.6	67.1	75.7	83.0	89.3	93.6
7	42.1	54.6	64.2	72.1	78.7	84.2	86.6
8	40.7	52.4	61.4	68.6	74.6	79.3	80.1
9	39.3	50.5	58.9	65.6	71.0	75.2	74.6
10	38.0	48.8	56.9	63.1	68.1	71.9	70.3
11	36.8	47.5	55.4	61.5	66.3	69.9	67.6
12	35.8	46.6	54.6	60.7	65.5	69.1	66.7
13	35.1	46.3	54.6	60.9	65.9	69.6	67.6
14	34.8	46.6	55.3	62.0	67.4	71.5	70.3
15	34.9	47.4	56.7	64.0	69.9	74.5	74.5
16	35.3	48.7	58.7	66.7	73.2	78.6	80.1
17	36.0	50.3	61.2	69.9	77.2	83.3	86.5
18	37.0	52.3	64.0	73.5	81.5	88.4	93.5
19	38.2	54.4	66.9	77.1	85.9	93.5	100.4
20	39.6	56.5	69.7	80.6	90.0	98.3	106.9
21	41.0	58.4	72.2	83.6	93.6	102.5	112.5
22	42.3	60.1	74.2	86.1	96.4	105.7	116.7
23	43.5	61.4	75.7	87.7	98.3	107.8	119.4

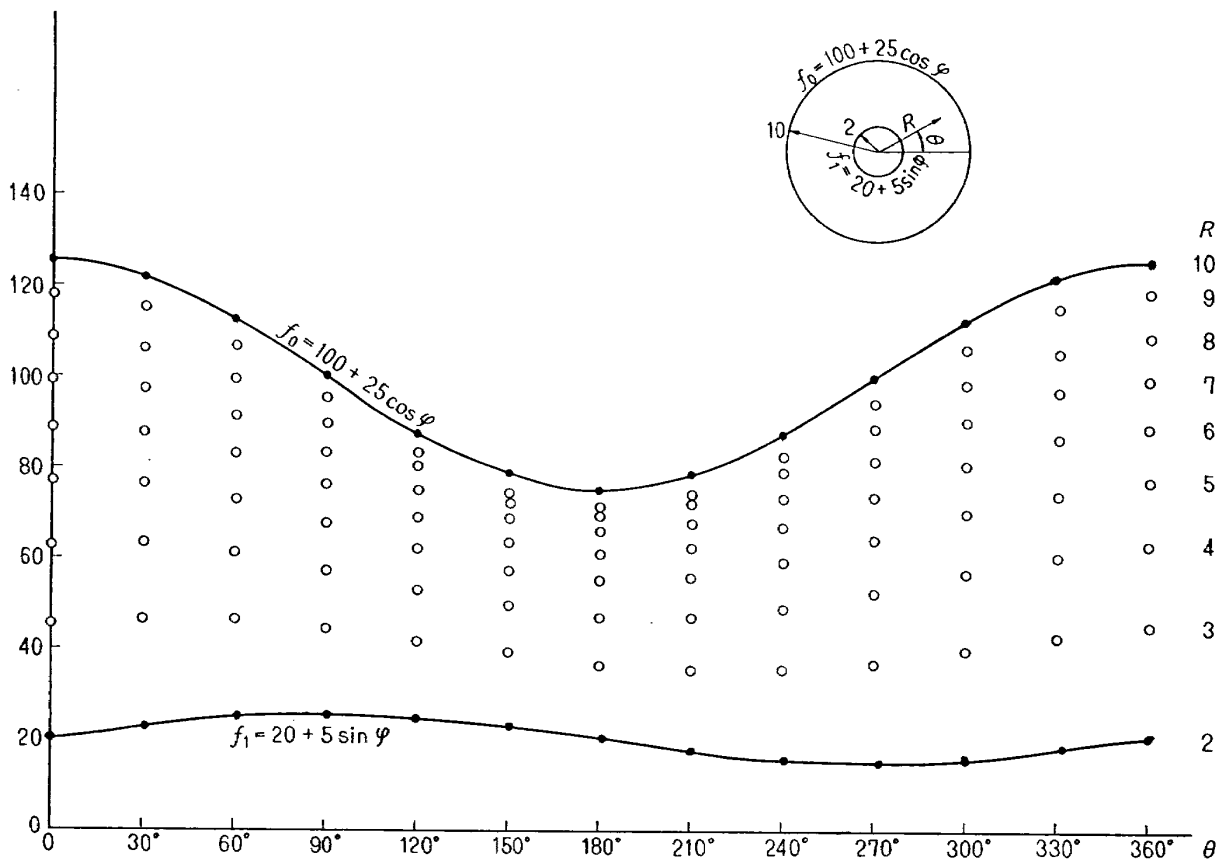
表 7. 温度分布 (変数分離法による)

$$R_0=10 \quad R_1=2 \quad f_0(\varphi)=100+25 \cos \varphi, \quad f_1(\varphi)=20+5 \sin \varphi$$

r	3	4	5	6	7	8	9
0	44.5	62.3	76.5	88.5	99.0	108.4	117.0
1	44.5	62.1	76.2	88.1	98.5	107.8	116.3
2	44.2	61.4	75.2	86.7	96.8	105.9	114.1
3	43.7	60.3	73.5	84.6	94.2	102.8	110.5
4	42.9	58.7	71.3	81.7	90.8	98.8	105.9
5	41.9	56.9	68.7	78.4	86.8	94.1	100.6
6	40.8	54.9	65.9	74.8	82.4	89.0	94.8
7	39.6	52.9	63.0	71.2	78.1	83.9	89.0
8	38.5	50.9	60.3	67.9	74.0	79.2	83.7
9	37.5	49.2	58.0	64.9	70.5	75.2	79.0
10	36.7	47.9	56.0	62.7	67.8	72.0	75.5
11	36.1	47.0	55.0	61.3	66.1	70.1	73.3
12	35.8	46.6	54.6	60.7	65.5	69.4	72.5
13	35.8	46.8	54.9	61.1	66.1	70.0	73.2
14	36.1	47.5	55.9	62.5	67.7	71.9	75.4
15	36.6	48.6	57.6	64.6	70.3	75.0	79.0
16	37.4	50.2	59.8	67.5	73.8	79.1	83.6
17	38.4	52.0	62.4	70.8	77.8	83.8	89.0
18	39.5	54.0	65.2	74.4	82.1	88.8	94.7
19	40.7	56.1	68.1	78.0	86.5	93.9	100.5
20	41.8	58.0	70.7	81.4	90.5	98.6	105.9
21	42.8	60.0	73.1	84.3	94.0	102.7	110.5
22	43.6	61.0	74.9	86.5	96.7	105.8	114.0
23	44.2	61.0	76.0	88.0	98.4	107.7	116.3

図 13 温度分布 (分割点 $2N=24$)

但し ×印は“例題”における方法により求めた温度分布である(表 3 参照)

図 14 温度分布 (分割点 $2N=36$)

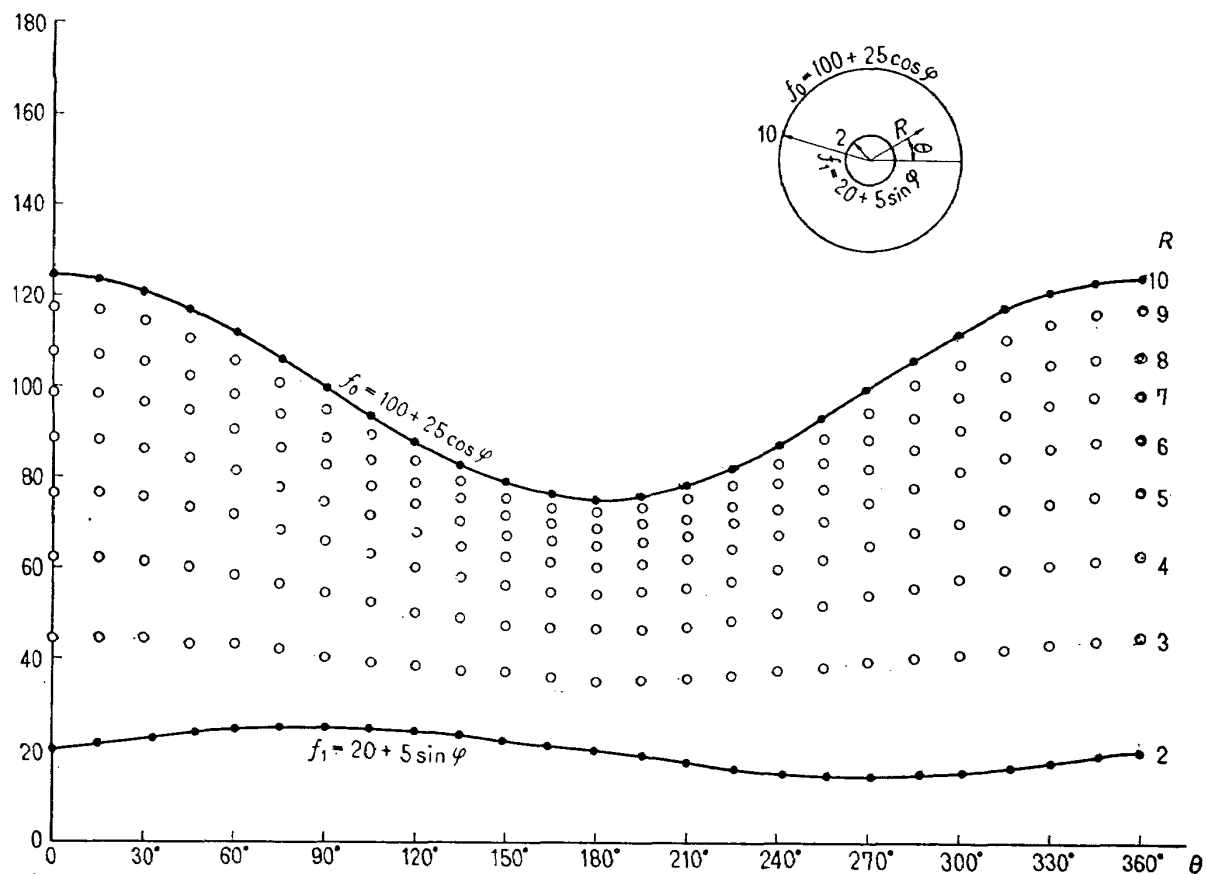


図 15 変数分離法 (フーリエ級数展開による) (表 7 参照)

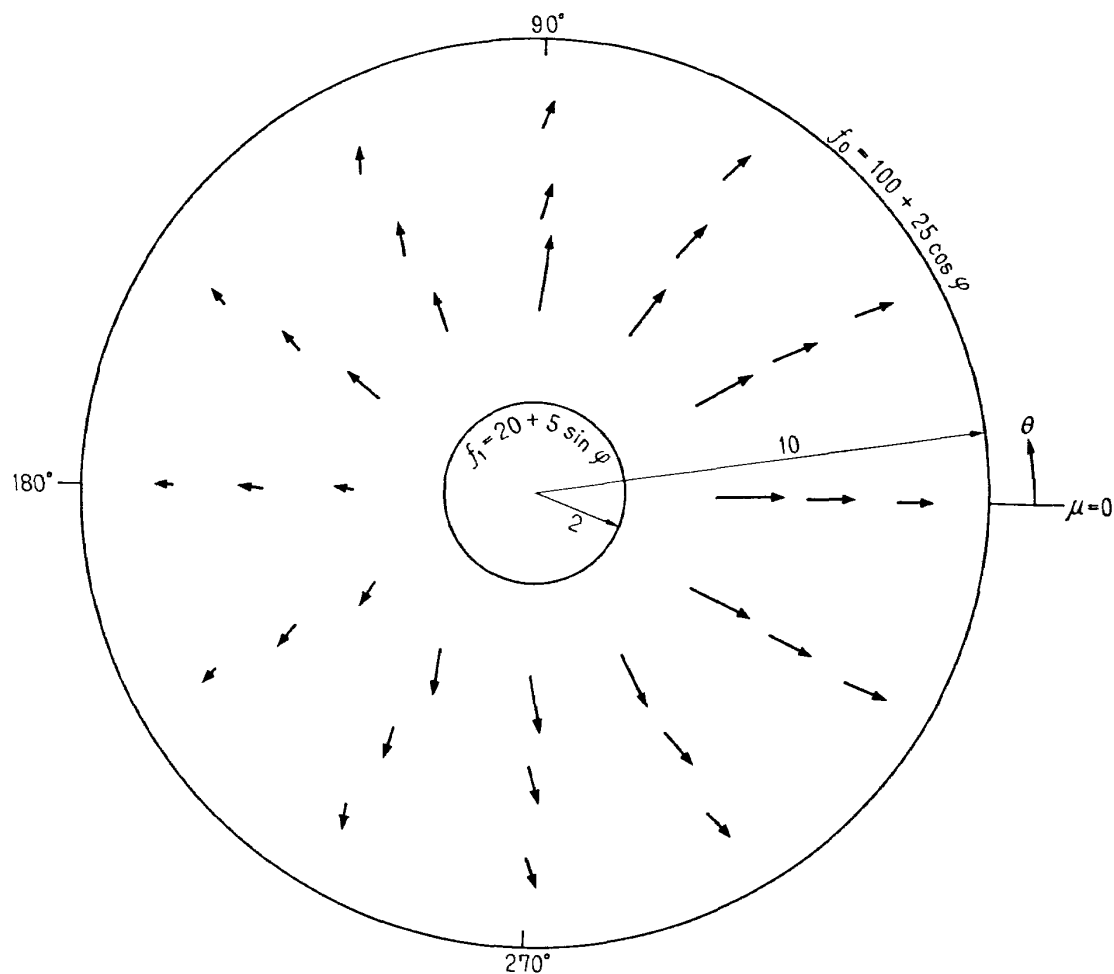
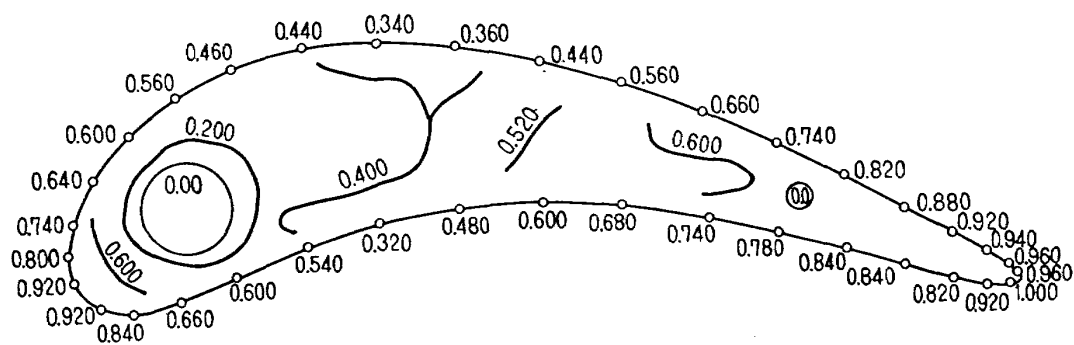


図 16 温度勾配

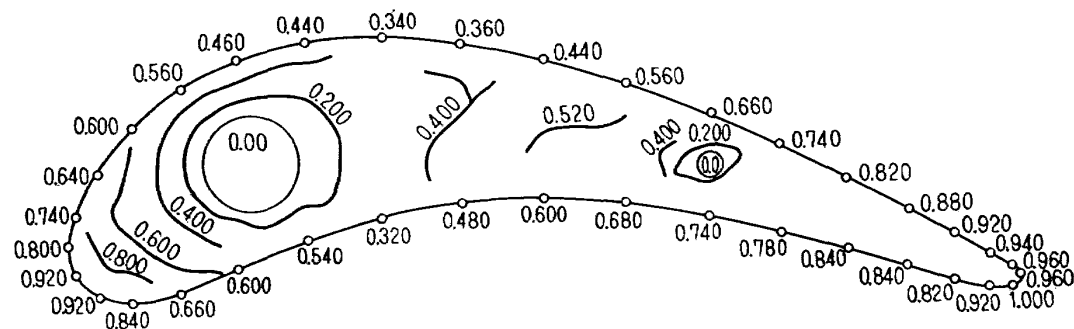


$$T_{ra} = \frac{T - T_{c \min}}{T_{b \max} - T_{c \min}}$$

$T_{b \max}$; 最高温度

$T_{c \min}$; 最低温度

図 17 翼の温度分布 (等温線)

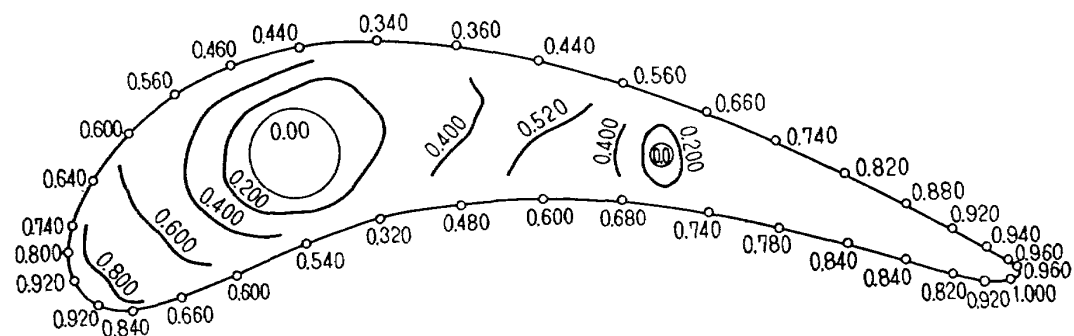


$$T_{ra} = \frac{T - T_{c \min}}{T_{b \max} - T_{c \min}}$$

$T_{b \max}$; 最高温度

$T_{c \min}$; 最低温度

図 18 翼の温度分布 (等温線)

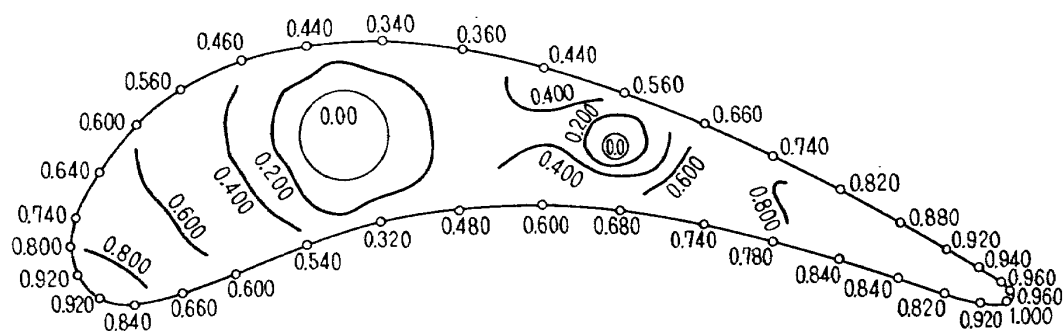


$$T_{ra} = \frac{T - T_{c \min}}{T_{b \max} - T_{c \min}}$$

$T_{b \max}$; 最高温度

$T_{c \min}$; 最低温度

図 19 翼の温度分布 (等温線)



$$T_{ra} = \frac{T - T_{c \min}}{T_{b \max} - T_{c \min}}$$

$T_{b \max}$; 最高温度

$T_{c \min}$; 最低温度

図 20 翼の温度分布 (等温線)

参 考 文 献

- 1) 近藤次郎; 積分方程式
- 2) MIKHLIN; Integral Equations
- 3) MUSKHELISHVILI; Singular Integral Equations
- 4) Д. Е. ДОЛИДЗЕ; Некоторые Вопросы Нестационарного Течения Вязкой Жидкости
- 5) G. Hämmerlin; Zur numerischen Integration periodischer Funktionen ZAMM, 39 (1959), S. 80-82
- 6) G.T. Symm; Integral equation methods in potential theory. II Proc. Roy. Soc. A, 275 p. 33-46
- 7) E. Martensen; Berechnung der Druckverteilung an Gitterprofilen in ebener Potentialströmung mit einer Fredholmschen Integralgleichung Arch. Rational Mech. Anal. 3, 1959, p. 235-270
- 8) T.V. Karman; Berechnung der Druckverteilung an Luftschiffkörpern Abhandlungen aus dem Aerodynamischen Institut an der Technischen Hochschule, Aachen, 6 (1927) 3-17, p. 253~273

付録 変数分離法

二変数ラプラス方程式を (r, θ) 表示する。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0$$

この方程式は次のように書き換えられる。

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

ただし、 T は図 A1 に示すような半径 r_0 の円周と半径 r_1 の円周に囲まれた領域内の温度分布とする。

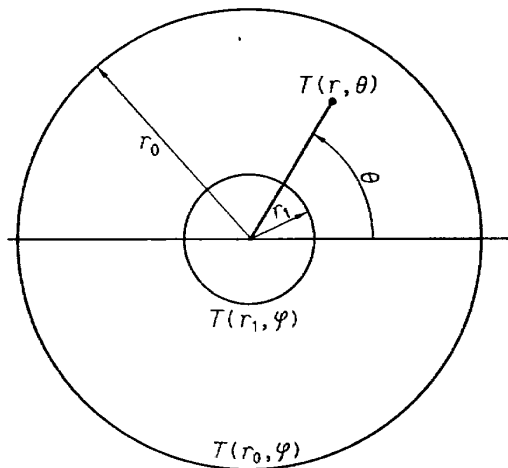


図 A1

(1) 式の解は次のように半径 r のみの関数 $R(r)$ と θ 方向のみの関数 $\Theta(\theta)$ に変数分離できるものとする。

$$T_s(r, \theta) = R(r) \cdot \Theta(\theta)$$

(1) 式より

$$\frac{r^2}{R(r)} \frac{d^2 R(r)}{dr^2} \cdot \frac{dR(r)}{dr} = -\frac{1}{\Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = \pm n^2 \quad (2)$$

を得る。

ここに n は、正の整数である。

Θ は周期関数であることを考慮すると、(2) 式の解は、

$$\Theta(\theta) = q_{n1} \cdot \cos n\theta + q_{n2} \cdot \sin n\theta \quad (3)$$

$$R(r) = \frac{p_{n1}}{2n} \cdot r^n + p_{n2} \cdot r^{-n}$$

となる。

ただし、 $p_{n1}, p_{n2}, q_{n1}, q_{n2}$ は定数。

$n=0$ の場合は

$$R(r) = a_0 \cdot \ln r + b_0$$

ただし、 a_0, b_0 は積分定数。

したがって (1) の一般解は、

$$T(r, \theta) = a_0 \cdot \ln r + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \{ r^n (a_n \cdot \cos n\theta + b_n \cdot \sin n\theta) + r^{-n} (a'_n \cdot \cos n\theta + b'_n \cdot \sin n\theta) \} \quad (4)$$

で与えられる。

ここに、 $a_n = p_{n1} \cdot q_{n1}$, $b_n = p_{n2} \cdot q_{n2}$, $a'_n = \frac{p_{n1}}{2n} \cdot q_{n1}$,

$b'_n = \frac{p_{n1}}{2n} \cdot q_{n2}$ である。

境界条件として、次の温度分布が与えられる場合を考える。

$$T(r_0, \varphi) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cdot \cos n\varphi + B_n \cdot \sin n\varphi) \times r_0^n$$

$$T(r_1, \varphi) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n \cdot \cos n\varphi + D_n \cdot \sin n\varphi) \times r_1^n \quad (5)$$

ここに、 $A_0, A_n, B_n, C_0, C_n, D_n$ は定数。

(4) 式の係数を (5) の条件によって決定すると次の関係式を得る。

$$a_0 = \frac{A_0 - C_0}{\ln r_0 - \ln r_1}$$

$$b_0 = \frac{C_0 \cdot \ln r_0 - A_0 \cdot \ln r_1}{\ln r_0 - \ln r_1}$$

$$a_n = r_0^n \cdot r_1^n (A_n - C_n) / \left\{ \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^n - \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^n \right\}$$

$$b_n = r_0^n \cdot r_1^n (B_n - D_n) / \left\{ \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^n - \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^n \right\}$$

$$a'_n = \left\{ \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^n \cdot A_n - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^n \cdot C_n \right\} / \left\{ \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^n - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^n \right\}$$

$$b'_n = \left\{ \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^n \cdot B_n - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^n \cdot D_n \right\} / \left\{ \left(\frac{r_0}{r_1} \right)^n - \left(\frac{r_1}{r_0} \right)^n \right\} \quad (6)$$

これらの係数を (4) 式に適用すると点 (r, θ) における温度が求まる。

$r_0=10$, $r_1=2$ および $T(r_0, \varphi) = (100 + 25 \times \cos \varphi) \times r_0$, $T(r_1, \varphi) = (20 + 5 \sin \varphi) \times r_1$ として求めた結果を図 15 に示す。

TR-224	吹出しをともなう鈍頭物体の衝撃波離脱距離 Shock Stand-off-Distance with Mass Injection	1970年12月	吉 永 崇
TR-225	NAL-35 DT 型ロケットの構造試験 Results of Structural Experiments on NAL-35 DT Rocket Vehicle	1970年11月	ロケット構造研究グループ
TR-226	薄い片持後退角翼の遷音速フラッタ特性におよぼす集中質量の位置の影響について Some Effects of Systematically Varied Location of One Concentrated Mass on Transonic Flutter Characteristics of Sweptback Thin Cantilever Wings	1970年11月	中井 暎 一, 森田 甫 之 高木 俊 朗
TR-227	高負荷燃焼器の空気孔からの流れについて(II) —二孔の実験および簡単な解析方法— Investigation of Air Stream from Combustor-Liner Air-Entry Holes (II) —Experiments with Paired Air-Entry Holes and A Numerical Analysis—	1970年12月	相波 哲 朗, 井上 真 幸
TR-228	自由飛行模型 FFM-10 の運動特性と飛しょう試験におけるデータ処理法 Flight Dynamics of Free-Flight Model FFM-10 and Data Analysis Method for Free-flight Tests	1970年12月	高 島 一 明
TR-229	単発 STOL 実験機 (FA-200 XS) について Development of the FA-200 XS Experimental-Airplane	1970年12月	飛行実験部
TR-230	アナログトルク平衡方式による浮動振子型加速度計の研究 Study on the Analog Torque Rebalance Floated Pendulum Type Accelerometers for Guidance and Control Applications	1971年 1 月	大月 正 男, 鈴木 孝 雄 円居 繁 治
TR-231	高温タービンノズル翼二次元翼列試験(第1報対流冷却翼の実験結果について) Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle (Part I On the Experimental Results of a Convection-Cooled Blade	1971年 1 月	吉田 豊 明, 高原 北 雄 能瀬 弘 幸, 井上 重 雄 三村 富 嗣 雄, 白 井 弘
TR-232	高温タービンノズル翼二次元翼列試験(第2報対流冷却翼の数値計算およびアナログ法による翼表面温度分布について) Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle (Part II On the Temperature Distributions of a Convection-Cooled Blade by Numerical Calculation and Analog Simulation Test	1971年 1 月	吉田 豊 明, 高原 北 雄 能瀬 弘 幸, 井上 重 雄 三村 富 嗣 雄, 白 井 弘
TR-233	PSD 法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点 Studies on PSD Method to Aircraft Structural Design for Atmospheric Turbulence	1971年 1 月	竹内 和 之, 山根 皓 三 郎

航空宇宙技術研究所報告 234 号

昭和 46 年 1 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)☎182
印刷所 有限会社啓文堂 松本印刷
東京都文京区水道 2-7-5

