

UDC 533.6.011.55/.6 :
66.049.6 :
629.78.076.8

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-239

昇華アブレーションの直接解法

久保田 弘敏

1971 年 6 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-216	横風中の3次元乱流ジェットの湾曲と発達 Bending and Development Three-dimensional Turbulent Jets in a Gross Wind	1970年9月	遠藤 浩, 中村正義
TR-217	人工粘性付 LAX-WENDROFF およびその変形差分法に関する数値実験 Numerical Test on Lax-Wendroff Difference Scheme with Artificial Viscosity and Its Variations by the Two-Step Method	1970年9月	安喜隆幸
TR-218	軸流回転機の翼の振動について II 翼根部による振動減衰 On the Vibration of Axial-flow Turbomachine Blade. II Vibration Damping Capacity of the Blade Mounting	1970年10月	宮地敏雄, 星谷昌二 祖父江靖, 網干三郎 熊谷隆王
TR-219	二次元非圧縮性乱流境界層の近似について On an Approximation of Two-Dimensional in Compressible Turbulent Boundary Layer	1970年10月	尾形吉和
TR-220T	Application of Dorodnitsyn's Technique to Compressible Two-Dimensional Airfoil Theories at Transonic Speeds	1970年10月	Juzo SATO
TR-221	先端のにぶいフレヤつき物体の空力特性 Aerodynamic Characteristic of a Flared Body with Blunt Nose	1970年10月	谷 喬, 河本 徹 榊原盛三, 野田順一 樋口 博 (東京大学)
TR-222	東北地方大平洋沿岸航空路上における乱気流観測 Measurements and Analysis of Atmospheric Turbulence on the Pacific Coast Air Route of the TOHOKU District	1970年9月	竹内和之, 山根皓三郎 矢沢健司, 小野幸一 外崎得雄
TR-223	球の仮想質量の円筒境界干渉 Cylindrical Boundary Interference on Virtual Mass of a Sphere	1970年9月	河野長正
TR-224	吹出しをともなう鈍頭物体の衝撃波離脱距離 Shock Stand-off-Distance with Mass Injection	1970年12月	吉永 崇
TR-225	NAL-35DT 型ロケットの構造試験 Results of Structural Experiments on NAL-35DT Rocket Vehicle	1970年11月	ロケット構造研究グループ
TR-226	薄い片持後退角翼の遷音速フラッタ特性におよぼす集中質量の位置の影響について Some Effects of Systematically Varied Location of One Concentrated Mass on Transonic Flutter Characteristics of Sweptback Thin Cantilever Wings	1970年11月	中井暎一, 森田甫之 高木俊朗
TR-227	高負荷燃焼器の空気孔からの流れについて (II) 一二孔の実験および簡単な解析方法— Investigation of Air Stream from Combustor Liner Air-Entry Holes (II) —Experiments with Paired Air entry Holes and a Numerical Analysis—	1970年12月	相波哲朗, 井上真幸
TR-228	自由飛行模型 FFM-10 の運動特性と飛行試験におけるデータ処理法 Flight Dynamics of Free-Flight Model FFM-10 and Data Analysis Method for Free-flight Tests	1970年2月	高島一明
TR-229	単発 STOL 実験機 (FA-200XS) について Development of the FA-200XS Experimental Airplane	1970年12月	飛行実験部

昇華アブレーションの直接解法*

久保田 弘 敏**

Direct Calculation of Sublimating Ablation

By

Hirotohi KUBOTA

A direct and rapid calculational method of sublimating ablation for a hypersonic heat-shielding device is presented. This is based on a numerical analysis of the Hartree-Womersley method which reduces parabolic partial differential equation to a corresponding ordinary one by means of a kind of implicit difference. The two-point boundary value problem of non-linear ordinary differential equations for the boundary layer thus obtained by the H-W method is solved with a considerably-improved least square error method. The characteristics of ablation such as the ablation rate and surface temperature are directly and uniquely determined from station to station in the stream-wise direction when the conditions of free stream and solid ablators are given.

Numerical calculation carried out for Teflon shows that the cooling effectiveness of ablation increases as the free stream stagnation temperature rises and that the downstream distribution of the ablation rate agrees with the experimental data fairly well in the higher range of stagnation temperatures.

1. 序

宇宙飛行体が大気圏に突入する場合、飛行体のまわりには強い衝撃波ができ、衝撃波の背後での気流は非常に高温となる。このような空気力学的加熱から飛行体を防御するためには、比較的少量の冷却気体あるいは冷却液体を外部流体中に噴き出すという Mass transfer cooling (物質輸送による冷却) が効果的であることが最近の研究で明らかにされてきている。

これは、主として次の三点の効果を利用しているものである。①低温の冷却気体と主流の高温気体との混合により、物体表面付近の気流温度を下げる、②境界層内の質量増加による境界層厚さの増加と、境界層内の速度分布、温度分布の変化による温度勾配の減少、③境界層内あるいは物質表面での化学反応あるいは相変化による吸熱。

この具体的な熱防御法としては、蒸発冷却法 (Transpiration cooling)、薄膜冷却法 (Film cooling)、局所噴き出し冷却法 (Local mass injection cooling)、アブレーション冷却法 (Ablation cooling) 等が考えられており、その利用方法により、それぞれの長所と短所とを有しているので、どれがあらゆる状況のもとで最も効果的であるとは断定するのは困難である。しかしながら、アブレーション冷却法は、先の②、③の二つの効果を含んでおり、浸食された物体表面の補修というような経済的、実的な問題を度外視すれば、依然として有力な熱防御形態の一つであることにはちがいはなく、その冷却効果はかなり高いことが認められる。

この方法は、飛行体の表面物質を、外部からの熱でむしろ積極的に融解させ、飛行体の最も重要な部分は何とかして守り抜こうという思想から出発したものであり、Sutton¹⁾ や Roberts²⁾ らにその初期の研究がみられる。アブレーションの過程においては、一般に物体の表面に液相の境界層と気相の境界層が形成さ

* 昭和46年3月23日受付

** 空気力学第一部

れる。すなわち、固相の物体表面が融解して液相の境界層ができ、この上に蒸発気体と外部気体の混合した気体境界層ができる。高温気流中の熱エネルギーは、これらの境界層を通じて物体表面に伝達され、一部は蒸発の潜熱および融解の潜熱に吸収され、残りの部分は構造材料の熱容量の形で吸収される。

表面物質としては、高分子プラスチック、グラファイト等が主として用いられ、表面で化学反応を起こしたり、物体内部に炭化層(char layer)を生ずることにより熱を防御するものも知られている^{3),4),5),6),7)}。

物体自体が昇華(Sublimation)を行なうものであれば表面物質は固体から直接気体になる。したがって、物体表面上には気体境界層のみが存在することになるが、その解析方法は、液体境界層をも含む二相境界層に対するものの本質を損うものではない。よって、ここでは、昇華アブレーションを考え、その機構を明らかにする。

すでに、著者らは、半球状物体の昇華アブレーションをテフロンを材料として微少擾乱理論を用いて解析したが⁵⁾、よどみ点温度が比較的低いときには、実験値とかなり違った結果を与えている。これを調べる意味と、さらに、理論を一般的にし、電子計算機の助けを借りて、直接数値的に解を得る統一的手法を提出することは意義のあることと思われる。このような観点から、本報告で扱う問題点は、次の三点に集約し得る。

(1) アブレーションの現象は、本質的には、表面物質の化学反応過程と、物体まわりの空力的熱輸送過程の組み合わせによって決まるべきものである。よって、物質内部の条件と、主流の条件を与えれば、物質表面での物性量、特にアブレーション速度、表面温度、熱伝達係数等は一義的に定まる。

(2) 軸対称物体のよどみ点下流では、流れは非相似となる。この領域を記述する境界層方程式の非相似項に対し、HartreeとWomersley⁸⁾によって提唱され、Smithら⁹⁾によって展開されたHartree-Womersley法を適用し、流れ方向の物性量を求める。この方法(以下H-W法と略称)は、放物型偏微分方程式の一変数による微分を差分におきかえて常微分方程式に帰着させる目的をもつものである。

(3) 上記H-W法によって得られた常微分方程式の二点境界値問題に、二乗誤差最小の方法を適用し、一般的な解法を提出する。この方法を単純化したものはNachtheimとSwigert¹⁰⁾によって未知境界条件が2

個の場合までに用いられている。ところが、ここでは常微分方程式の数値積分を遂行するに必要な出発値7個のうち、陽的に与えられているものは1個のみで、あとの6個は未知であり、この6個の出発値(未知境界条件)は3個の拘束条件によって関係づけられている。残りの必要な個数の境界条件は境界層外端で与えられている。この種の問題では、出発値(未知境界条件)を適当に仮定して数値積分を行ない、境界層外端の条件が満たされるまで繰返し計算を続けるという初期値法(initial value method)¹¹⁾や、原方程式を線形化して、低次の近似解から成り立つ非斉次解を求めるという準線形化法(quasi-linearization method)¹²⁾が用いられる。いずれの方法も、仮定すべき出発値(未知境界条件)が少ない場合には、それぞれ良い結果を与えるが、それが多くなると困難度も飛躍的に増加し、しかも、壁上での拘束条件の存在が問題を複雑にしている。

ここで用いる方法は、初期値法を発展させたもので、未知数の数や拘束条件の数がどれほど増えても、基礎方程式との対応がついている限り原則的に適用でき、かつ、境界層型の問題(定義域の上限で漸近的なふるまいをする)であれば、他の問題にも適用できると思われる。

表面後退速度、ひいては、アブレーション速度がほとんど時間によらない、とする準定常アブレーションを仮定する。(詳細な議論は文献5)を参照)アブレーション物質の多くは、その熱的性質、物性量等が明きらかでない⁷⁾。そのうちで、テフロン(Polytetrafluoroethylene)は昇華アブレーションを行ない(溶融過程が存在しそうなことは実験でも観察されるが、その温度範囲はきわめて短かいので、昇華過程のみと仮定する)、物性量も明きらかにされているものの一つである。よって、計算はテフロンをモデルとして行なう。

ここで述べる手法によれば、主流の状態と物体内部の状態を与えさえすれば、先の(1)、(2)、(3)のプロセスが自動的に遂行され、鈍頭物体のよどみ点から、その下流の任意の点までのアブレーション物性量が統一的に計算される。このような直接解法は、普通は計算機の記憶容量に依存するものであるが、H-W法では上流の解は使い捨ててゆくので、そう大きな困難はなく、これも利点の一つとなっている。

2. 記 号

a : 音速

- g : 気相の状態
- n : 第 n 番目の状態
- no : アブレーションのない状態
- s : 固相の状態
- sh : 衝撃波直後の状態
- t : 主流よどみ点の状態
- w : 物体壁上の状態
- 0 : 物体よどみ点上の状態
- 1 : アブレーション気体の状態
- 2 : 外部空気の状態
- ∞ : 主流の状態
-)' : 微分
-) : 有次元量
- *) : 無次元化するための量

表面後退速度が時間によらずほぼ一定であるという準定常アブレーションを考える。アブレーションによる変化はすべて境界層内に限られ、外部流には影響を及ぼさないとする。境界層内では化学反応はなく、境界層はアブレーションによって生じた気体と外部空気との二成分混合気体で成り立っており、境界層厚さは物体曲率半径にくらべて十分小さいとする。

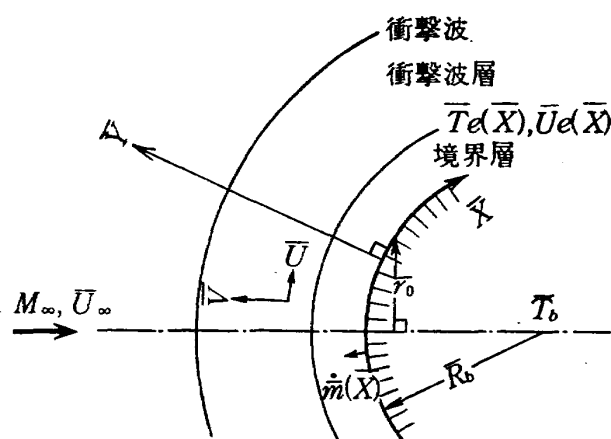


図1に示されたような流れ場において，半球物体に対する圧縮性層流境界層方程式（補遺 A）は，Lees-Dorodnitsyn 変換

によって独立変数変換を行ない，次のように書ける。

- ・：アブレーションのある状態
- ・：物体内部の状態
- ・：境界層外端の状態

$$\begin{cases} (C\phi'')' + \beta \left\{ \frac{\rho_e}{\rho} - (\phi' + 1)^2 \right\} + \phi''(\phi + \eta) = R_1, & (3.2) \\ \left(\frac{C}{Pr} \Psi' \right)' + \Psi'(\phi + \eta) + \left\{ \frac{C(Sc - Pr)}{PrSc} \alpha T z' \right\}' \\ + W u_e^2 \left\{ C \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \phi''(\phi' + 1) \right\}' = R_2, & (3.3) \\ \left(\frac{C}{Sc} z' \right)' + z'(\phi + \eta) = R_3. & (3.4) \end{cases}$$

ここで、()' は η に関する微分であり、

$$\alpha = 1 - Cp_1/Cp_2, \beta = \frac{2s}{u_e} \frac{du_e}{ds} \quad (3.5)$$

である。また、 C, Pr, Sc はそれぞれ Chapman-Rubesin 数, Prandtl 数, Schmidt 数をあらわし(補遺B), いずれも、 ϕ, Ψ, z の関数である。ここで、 ϕ', Ψ, z は、

$$\phi' \equiv u/u_e - 1, \Psi \equiv H/H_e - 1, z \equiv K \quad (3.6)$$

であり、流れ関数 Ω は

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Omega}{\partial y} &= \rho u r_e, \quad \frac{\partial \Omega}{\partial x} = -\rho v r_e, \\ \Omega &\equiv \sqrt{2s} \left\{ \phi(s, \eta) + \eta \right\} \end{aligned} \right\} \quad (3.7)$$

で定義されているので、 ϕ は

$$\phi = -\sqrt{\frac{1}{2s}} \int_0^s \rho v r_e dx - \eta \quad (3.8)$$

であらわされる。

完全気体の状態方程式を用いると、境界層内で y 方向の圧力の変化がないという条件から、

$$\frac{\rho_e}{\rho} = \left\{ 1 - \left(1 - \frac{M_2}{M_1} \right) z \right\} \frac{T}{T_e}. \quad (3.9)$$

また、全エンタルピーの関係式(A・16)式より、温度は

$$\frac{T}{T_e} = \frac{\Psi + 1 - \frac{1}{2} u_e^2 W (\phi' + 1)^2}{(1 - \alpha z) (1 - \frac{1}{2} u_e^2 W)} \quad (3.10)$$

である。

基礎方程式(3.2)式～(3.4)式の右辺の非相似項 R_1, R_2, R_3 は、それぞれ、

$$R_1 = 2s \left\{ (\phi' + 1) \frac{\partial(\phi' + 1)}{\partial s} - \phi'' \frac{\partial(\phi + \eta)}{\partial s} \right\}, \quad (3.11)$$

$$R_2 = 2s \left\{ (\phi' + 1) \frac{\partial(\Psi + 1)}{\partial s} - \Psi' \frac{\partial(\phi + \eta)}{\partial s} \right\}, \quad (3.12)$$

$$R_3 = 2s \left\{ (\phi' + 1) \frac{\partial z}{\partial s} - z' \frac{\partial(\phi + \eta)}{\partial s} \right\} \quad (3.13)$$

と、 s による微分項であらわされ、この取り扱いが一つの問題点となる。すなわち、非相似項 R_1, R_2, R_3 の存在のため、流れ場は一つの相似パラメータ η のみで表現することができず、場所毎に(すなわち、 s のそれぞれの値に対して)、個別に解を求めねばならない。

4. 境界条件

基礎方程式(3.2)式～(3.4)式は、 ϕ, Ψ, z に関してそれぞれ3階、2階、2階の微分方程式であるから、合計7個の境界条件が必要である。ところが、陽的に与えられている条件は、壁上で滑りが無いという条件($u_w = 0$)と、境界層端でその外部流と接続するという条件($u \rightarrow u_e, H \rightarrow H_e, z \rightarrow 0; y \rightarrow y_e$)の合計4個のみである。これらは、変換形で書くと、

$$\eta = 0; \phi' = -1, \quad (4.1)$$

$$\eta = \infty; \phi' = 0, \Psi = 0, z = 0 \quad (4.2)$$

である。

ところで、アブレーションを行なっている物体表面での物理的な条件から、次の3個の拘束条件が生ずる。

(i) 壁温 \bar{T}_w と質量損失速度 $\dot{\bar{m}}$ との関係

あるアブレーション物質を考えたとき、その質量損失速度 $\dot{\bar{m}}$ は壁温 \bar{T}_w と圧力 \bar{p} によって決まる固有の関数であって

$$\dot{\bar{m}} = F(\bar{T}_w, \bar{p}) \quad (4.3)$$

という形で書ける。ところが、種々の実験結果やデータ¹³⁾から、温度の低い領域では圧力による影響はほとんど無視できるほど小さい。この関係は、テフロンに対しては、Rashis と Hopko¹⁴⁾ によって図2のように

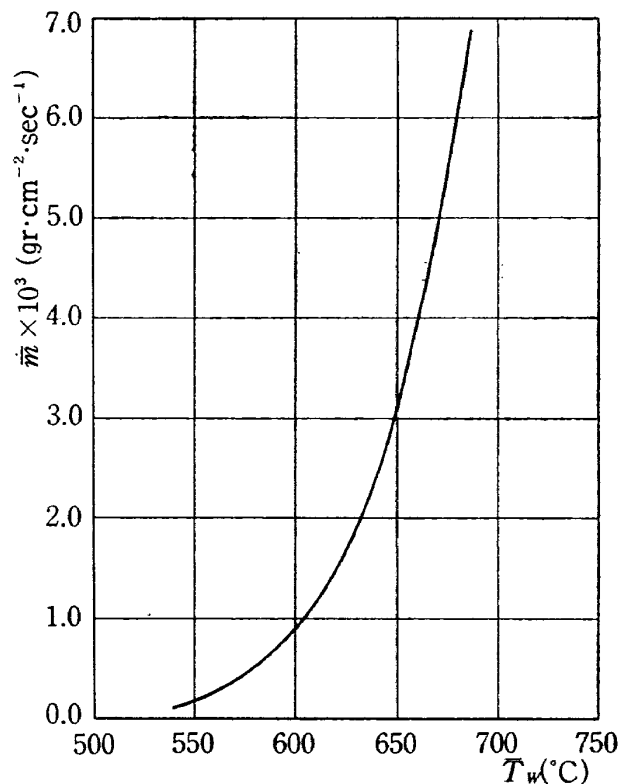


図2 テフロンに対する壁温と質量損失速度との化学的関係¹⁴⁾

得られている。これを、二次式に近似すると

$$\begin{aligned}\dot{m} &= -\bar{\rho}_s \bar{v}_s = (\bar{\rho} \bar{v})_w \\ &= \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \bar{T}_w + \bar{A}_3 \bar{T}_w^2\end{aligned}\quad (4.4)$$

となり、(4.3)式に代わる近似式が得られる。

一方、空気力学的な観点からは、主流の状態を与えれば、壁温 \bar{T}_w と噴き出しの強さ \dot{m} とは、次のような関係式

$$\dot{m} = G(\bar{T}_w, \bar{Q}) \quad (4.5)$$

で記述される。ここで、 \bar{Q} は主流マッハ数、主流よどみ点状態、物体形状等から決まる量である。(4.4)式と(4.5)式において、 \bar{T}_w と \dot{m} とは未知であり、この二式を連立させることにより、種々の周囲条件に対して二つの未知数が一義的に定まることが予想される。実際、文献5)では、(4.5)式の関係は図3のように得られており*、図式的には、図2と図3とを重ね合わせることで、その交点の \bar{T}_w と \dot{m} とが解となるものである。

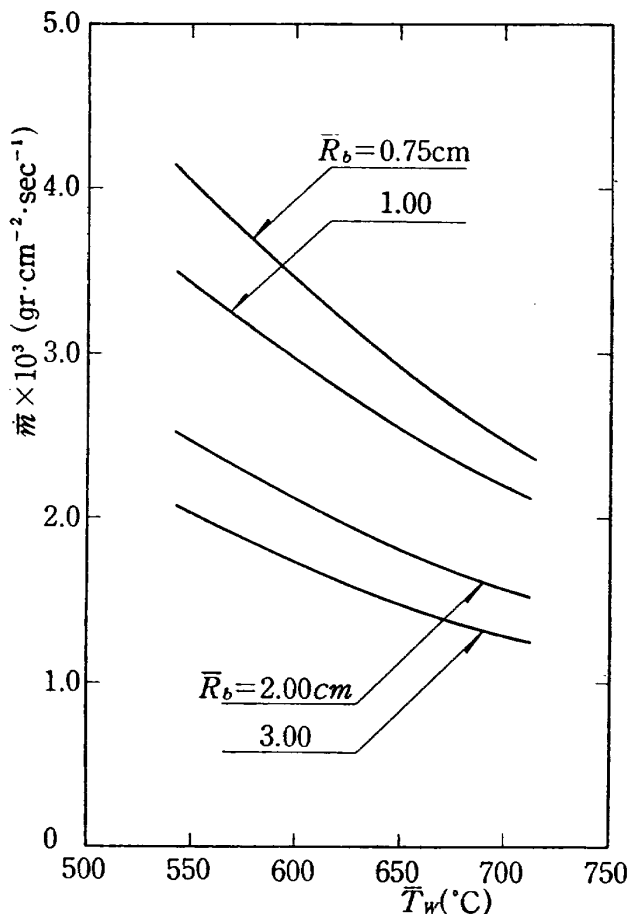


図3 テフロンに対する壁温とアブレーション速度の空気力学的関係

半球よどみ点 $M_\infty = 5.74$, $\bar{T}_i = 925^\circ\text{C}$, $\bar{p}_i = 1\text{atm}$.

本報告では、さらに一歩進んで、(4.4)式も境界条件として含めておき、包括的な解を得ようとするもの

である。(4.4)式を変換された形で書くと、

$$\begin{aligned}(\bar{\rho} \bar{v})_w &= \phi_w + 2s \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)_w = -\frac{\sqrt{2s}}{\rho_e \mu_e U_e T_e} \frac{1}{\rho_{sk} \bar{v}} * \\ &\times \left\{ \bar{A}_1 + \bar{A}_2 \bar{T}_i T_w + \bar{A}_3 (\bar{T}_i T_w)^2 \right\}\end{aligned}\quad (4.6)$$

となる。

(ii) 物体表面での質量のつりあい

物体表面における各成分気体の濃度 K_{iw} は、噴き出し速度 \bar{v}_w に無関係に指定することはできず、 \bar{v}_w が決まれば K_{iw} が決定される。一般に、 i 番目の気体の y 方向への速度 \bar{v}_i は、拡散速度 $-\frac{\bar{D}}{K_i} \frac{\partial K_i}{\partial y}$ と対流速度 \bar{v} との和であるから

$$\bar{\rho} K_i \bar{v}_i = -\bar{\rho} \bar{D} \frac{\partial K_i}{\partial y} + \bar{\rho} K_i \bar{v} \quad (4.7)$$

物体表面からは、昇華してできた気体成分のみが噴き出されるから、この表面を通して外部空気の出入りはない、という物理的条件をおくと、外部空気(添字2)に対して \bar{v}_{2w} は0となり、 $K_2 = 1 - K$ であることを用いると、

$$\bar{\rho}_w \bar{D}_w \left(\frac{\partial K}{\partial y} \right)_w + \bar{\rho}_w \bar{v}_w (1 - K_w) = 0 \quad (4.8)$$

が得られる。

変換された形に書きなおすと(4.8)式は、

$$\left(\frac{C}{Sc} \right)_w \frac{z'_w}{1 - z_w} = \phi_w + 2s \left(\frac{\partial \phi}{\partial s} \right)_w \quad (4.9)$$

となる。

(iii) 物体表面でのエネルギーのつりあい

アブレーションを行なっている物体表面では、境界層内を通して物体に伝達されようとする熱量 $\left(\bar{\kappa} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_w$

がアブレーションの潜熱に一部分吸収され、残りの部分が物体内に伝わる。よって、物体内の x 方向への熱伝導も考慮に入れて、物体表面でのエネルギーのつり合いは、

$$\begin{aligned}\left(\bar{\kappa} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_{q,w} &= \bar{L} (\bar{\rho} \bar{v})_w + \bar{\kappa}_b \left\{ \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \right)_{s,w}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \bar{T}}{\partial x} \right)_{s,w}^2 \right\}^{\frac{1}{2}}\end{aligned}\quad (4.10)$$

と書ける。右辺第二項は、物体内部の熱伝導方程式

$$\bar{\kappa}_b \left(\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial x^2} \right) = \bar{\rho}_b \bar{C}_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial t} = \dot{m} \bar{C}_p \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (4.11)$$

の解として得られるものである。しかしながら、(4.10)

* 一定よどみ点温度に対して、 \bar{T}_w が増加すれば境界層内の温度勾配は減少し、よって、物体表面への熱入力が減少し、アブレーション速度は小さくなる。

11) 式は楕円型偏微分方程式であるので、放物型の境界層方程式と連立させてH-Wを適用するのは無理があり、また、扱っている範囲のよどみ点温度では、 x 方向への熱の拡散は y 方向へのそれに比して無視できるほど小さい⁵⁾ので、(4・11)式は

$$-\frac{\partial^2 \bar{T}}{\partial y^2} = \frac{\dot{m}}{m C_p} \frac{\partial \bar{T}}{\partial y} \quad (4 \cdot 12)$$

と書ける。ここで、 $\dot{m} = -\rho_b \bar{v}_b = (\rho \bar{v})_w$ である。

$$\left. \begin{aligned} \bar{y} = 0; \bar{T} = \bar{T}_w, \\ y = -\bar{y}_b; \bar{T} = \bar{T}_b \end{aligned} \right\} \quad (4 \cdot 13)$$

の境界条件のもとで解くと、無次元形で

$$T = c_1 \exp\left(\frac{P}{R} y\right) + c_2 \quad (4 \cdot 14)$$

となる。ここで、

$$\left. \begin{aligned} c_1 &= (T_b - T_w) / \left\{ \exp\left(-\frac{P}{R} y_b\right) - 1 \right\}, \\ c_2 &= T_w - c_1, \\ \frac{P}{R} &= \frac{\bar{C}_{p2} \rho_{b2} \bar{v}_b^* \bar{R}_b}{\kappa_2} \frac{N}{\sqrt{Re}} - \frac{(\rho v)_w C_p}{\kappa_b} \end{aligned} \right\} \quad (4 \cdot 15)$$

これより、

$$\left. \begin{aligned} \left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)_{s, w} &= \frac{P}{R} \frac{T_b - T_w}{\exp\left(-\frac{P}{R} y_b\right) - 1}, \\ \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)_{s, w} &= \rho_e \mu_e u_e r_o^2 \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_{s, w} \end{aligned} \right\} \quad (4 \cdot 16)$$

となり、(4・16)式を(4・11)式に代入することにより、変換された形でのエネルギーのつり合いの式は

$$\psi'_{w} = -\frac{\alpha z'_{w} (\psi_w + 1)}{1 - \alpha z_w} + \frac{(1 - \alpha z_w)(1 - \frac{1}{2} W u_e^2) \sqrt{2s}}{\rho_w \kappa_w u_e r_o T_e} \left\{ \frac{P}{R} \frac{\kappa_b}{C_p b} l + \kappa_b \sqrt{E_{1w} + E_{2w}} \right\} \quad (4 \cdot 17)$$

である。ここで、

$$\left. \begin{aligned} E_{1w} &= \left\{ \frac{P}{R} \frac{T_b - T_w}{\exp\left(-\frac{P}{R} y_b\right) - 1} \right\}^2, \\ E_{2w} &= \left\{ \frac{N}{\sqrt{Re}} \rho_e \mu_e u_e r_o^2 \left(\frac{\partial T}{\partial s}\right)_w \right\}^2, \\ l &= \bar{L} / \bar{C}_{p2} \bar{T}_1. \end{aligned} \right\} \quad (4 \cdot 18)$$

各式にあらわれる壁温 T_w は、(3・10)式より

$$T_w = (\psi_w + 1) / (1 - \alpha z_w) \quad (4 \cdot 19)$$

で、 ψ_w 、 z_w と関係づけられる。

5. 計 算 方 法

5. 1 Hartree-Womersley 法

序でも述べた H-W 法は、放物型偏微分方程式である基礎方程式の右辺の非相似項 R_1 、 R_2 、 R_3 、および、

各境界条件に含まれる $\partial F / \partial s$ の形の微分項を差分形式におきかえて、陰伏的な常微分方程式に帰着させるものである。ここでは、等間隔の二点差分

$$\frac{\partial F}{\partial s} = \frac{F - F_{n-1}}{\Delta s} \quad (5 \cdot 1)$$

を用いたが、可変間隔の三点差分を用いれば、さらに精度は向上する。しかしながら、アブレーションの問題では、表面での対流速度分布は滑らかであるため、文献15)で取りあげた不連続対流速度分布に対するような差分形式の議論は必要でなく、二点差分の使用で十分である。

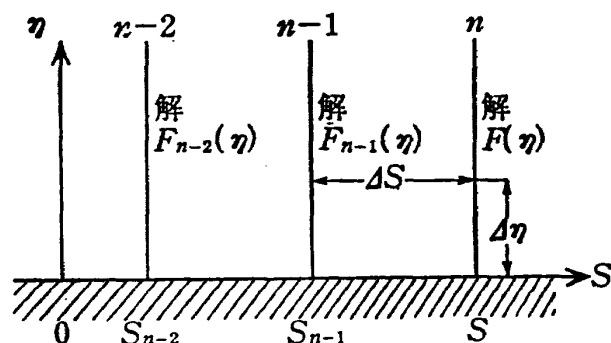


図 4 H-W法の計算図式

図4に示した計算図式にしたがい、第 n 番目の点の解(式を見易くするため添字 n を省略)は、その上流の解を含んで定まる。すなわち、第 n 番目の点では、その上流の既知解 F_{n-1} を用いて、 η に関する常微分方程式を η 方向に解くことになる。基礎方程式の右辺の非相似項は

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= \frac{2s}{\Delta s} \left\{ (\phi' + 1)(\phi' - \phi'_{n-1}) - \phi''(\phi - \phi_{n-1}) \right\} \\ R_2 &= \frac{2s}{\Delta s} \left\{ (\phi' + 1)(\psi - \psi_{n-1}) - \psi'(\phi - \phi_{n-1}) \right\} \\ R_3 &= \frac{2s}{\Delta s} \left\{ (\phi' + 1)(z - z_{n-1}) - z'(\phi - \phi_{n-1}) \right\} \end{aligned} \right\} \quad (5 \cdot 2)$$

と書かれ、上述のように、 ϕ_{n-1} 、 ϕ'_{n-1} 、 ψ_{n-1} 、 z_{n-1} は既知解である。鈍頭物体のよどみ点では、計算の出発点となるため、その上流の解は存在しないが、この点では、有限差分幅 Δs に対して $2s/\Delta s = 0$ であるから、 $R_1 = R_2 = R_3 = 0$ とおいたものに対応した解が得られる(相似解)。

5. 2 二点境界値問題

上で得られた常微分方程式は、壁上で必要な個数の境界条件を有していないので、序で述べたような二点境界値問題となる。

問題に一般性をもたせるため、次のような設定を行

なう。

「 n 階の境界層型常微分方程式 (漸近的ふるまいをする) において, 定義域の下限で m 個 ($m < n$) の境界条件が与えられていて, $(n-m)$ 個の条件は未知である。この $(n-m)$ 個の未知境界条件は l 個 ($l < n-m$) の拘束条件によって結びつけられている。定義域の上限では $(n-m-l)$ 個の境界条件が与えられている。このような条件を満たす解を求める。」

いま, 境界条件を X_j ($j=1, 2, \dots, n$) であらわすと, まず, 陽的に与えられている条件は, X_1, X_2, \dots, X_m (m 個) である。初期値法では, これと, 拘束条件 l 個を除いた $(n-m-l)$ 個の境界条件を, 数値積分の出発値として仮定する必要がある。この仮定すべき境界条件を, $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{n-l}$ ($(n-m-l)$ 個) であらわす。この $(n-m-l)$ 個の条件を仮定してやれば, あとの l 個の条件は拘束条件より決められるから, 定義域内の解を支配するのは, 独立に仮定される $X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{n-l}$ であり, 解を S_j であらわしたとき,

$$S_j = S_j(X_{m+1}, X_{m+2}, \dots, X_{n-l}) \quad (5.3)$$

$$(j=1, 2, \dots, n)$$

と書ける。

現在の問題では, $n=7, m=1, l=3$ であって,
陽的に与えられている条件: $X_1 = \phi'_w = -1$ (5.4)
仮定すべき条件: $X_2 = \phi''_w, X_3 = \psi_w, X_4 = z_w$ (5.5)

拘束条件を介して定まる条件:

$$\left. \begin{aligned} X_5 &\equiv \phi_w = X_5(X_2, X_3, X_4) = (4.6) \text{ 式} \\ X_6 &\equiv z'_w = X_6(X_2, X_3, X_4) = (4.9) \text{ 式} \\ X_7 &\equiv \psi'_w = X_7(X_2, X_3, X_4) = (4.17) \text{ 式} \end{aligned} \right\} (5.6)$$

境界層内の解:

$$\left. \begin{aligned} S_1 &\equiv \phi = S_1(X_2, X_3, X_4) \\ S_2 &\equiv \phi' = S_2(X_2, X_3, X_4) \\ S_3 &\equiv \phi'' = S_3(X_2, X_3, X_4) \\ S_4 &\equiv \psi = S_4(X_2, X_3, X_4) \\ S_5 &\equiv \psi' = S_5(X_2, X_3, X_4) \\ S_6 &\equiv z = S_6(X_2, X_3, X_4) \\ S_7 &\equiv z' = S_7(X_2, X_3, X_4) \end{aligned} \right\} (5.7)$$

境界層端での条件は, 先述のように $(n-m-l)$ 個, すなわち, 今の場合には 3 個必要であり, それは, (4.2) 式で与えられている。ところで, 序でも述べたように, この境界層型の方程式は, すべての物性量が, $\eta \rightarrow \infty$ で漸近的なふるまいをすることから,

$$\eta = \infty; \quad \phi'' = 0, \quad \psi' = 0, \quad z' = 0 \quad (5.8)$$

も補足的には成り立つはずである。しかも, (5.8) 式

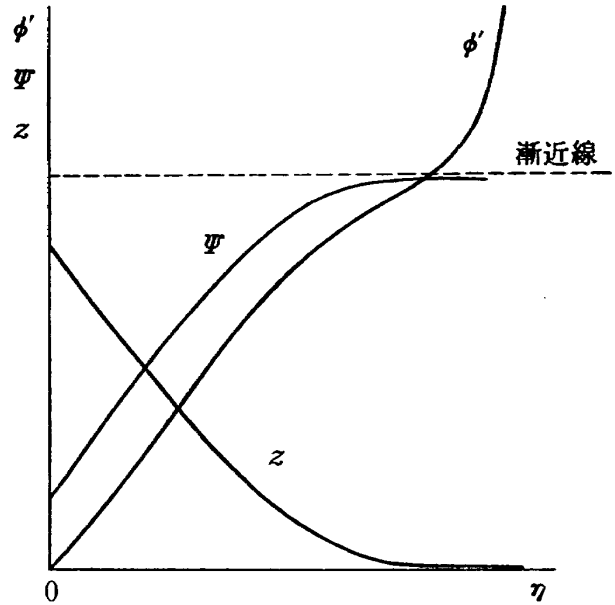


図 5 途中でオーバーシュートする解の説明

の条件がないと, ある量が途中でオーバーシュートするようなもの (図 5) でも解となってしまう, 漸近解とはならなくなる。このようなことを避けるために, (5.8) 式の補足的な条件が, 十分条件として必要とってくる。

繰返し計算による境界層外端 (定義域の上限) での解の第一近似, 第二近似を, それぞれ, I, II なる添字であらわすと, 出発値 (仮定した未知境界条件, および, 拘束条件により定まる境界条件) の修正量と, 解の修正量とは,

$$\Delta X_i = (X_i)_{II} - (X_i)_I, \quad (i=2, 3, 4) \quad (5.9)$$

$$\Delta S_j = (S_j)_{II} - (S_j)_I, \quad (j=2, 3, \dots, 7) \quad (5.10)$$

である。また, 変分原理より,

$$\Delta S_j = \sum_{i=2}^4 \frac{DS_j}{DX_i} \Delta X_i \quad (j=2, 3, \dots, 7) \quad (5.11)$$

ここで, オペレータ $\frac{D}{DX_i}$ は

$$\frac{D}{DX_i} \equiv \frac{\partial}{\partial X_i} + \sum_{k=5}^7 \frac{\partial X_k}{\partial X_i} \frac{\partial}{\partial X_k} \quad (5.12)$$

で定義されるものである。(5.10) 式, (5.11) 式より,

$$(S_j)_{II} = (S_j)_I + \sum_{i=2}^4 \frac{DS_j}{DX_i} \Delta X_i \quad (j=2, 3, \dots, 7) \quad (5.13)$$

$(S_j)_{II}$ の境界層外端での, あるべき条件は, (4.2) 式と (5.8) 式であるから, $(S_j)_{II}$ とそれらとの誤差を δ_j とすると,

$$-\delta_j = S_j + \sum_{i=2}^4 \frac{DS_j}{DX_i} \Delta X_i \quad (j=2, 3, \dots, 7) \quad (5.14)$$

である。ここで、近似の一般性を持たせるため、添字 II を省略した。明きらかなように、 δ_j を 0 にすることが解の収束の必要十分条件である。このために、二乗誤差

$$E = \sum_{j=2}^7 \delta_j^2 \quad (5.15)$$

をとり、これが 0 になるときを収束解とする。実際には、ある小さな正数をとる、

$$E \leq \varepsilon \quad (5.16)$$

を収束の判定条件とする。

二乗誤差最小の条件は、

$$\frac{\partial E}{\partial (\Delta X_i)} = 0 \quad (i=2, 3, 4) \quad (5.17)$$

より得られる。現在の問題では、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial (\Delta X_2)} = 0 \text{ より } \theta_{21} + \sum_{i=2}^4 \theta_{2i} \Delta X_i &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial (\Delta X_3)} = 0 \text{ より } \theta_{31} + \sum_{i=2}^4 \theta_{3i} \Delta X_i &= 0, \\ \frac{\partial E}{\partial (\Delta X_4)} = 0 \text{ より } \theta_{41} + \sum_{i=2}^4 \theta_{4i} \Delta X_i &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.18)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} \theta_{ii} &= \sum_{j=2}^7 \left(\frac{DS_j}{DX_i} \right)^2, \\ \theta_{ik} &= \sum_{j=2}^7 \left(\frac{DS_j}{DX_i} \right) \left(\frac{DS_j}{DX_k} \right), \\ \theta_{i1} &= \sum_{j=2}^7 \left(\frac{DS_j}{DX_i} \right) S_j, \end{aligned} \right\} \quad (i=2, 3, 4, k=2, 3, 4) \quad (5.19)$$

上の連立方程式より、

$$\left. \begin{aligned} \Delta X_2 &= - \begin{vmatrix} \theta_{21} & \theta_{23} & \theta_{24} \\ \theta_{31} & \theta_{33} & \theta_{34} \\ \theta_{41} & \theta_{43} & \theta_{44} \end{vmatrix} / \text{DEM}, \\ \Delta X_3 &= - \begin{vmatrix} \theta_{22} & \theta_{21} & \theta_{24} \\ \theta_{32} & \theta_{31} & \theta_{34} \\ \theta_{42} & \theta_{41} & \theta_{44} \end{vmatrix} / \text{DEM}, \\ \Delta X_4 &= - \begin{vmatrix} \theta_{22} & \theta_{23} & \theta_{21} \\ \theta_{32} & \theta_{33} & \theta_{31} \\ \theta_{42} & \theta_{43} & \theta_{41} \end{vmatrix} / \text{DEM}, \\ \text{DEM} &= \begin{vmatrix} \theta_{11} & \theta_{12} & \theta_{13} \\ \theta_{21} & \theta_{22} & \theta_{23} \\ \theta_{31} & \theta_{32} & \theta_{33} \end{vmatrix} \end{aligned} \right\} \quad (5.20)$$

が得られ、一回の試行で、 X_i は ΔX_i だけの修正項を付加されて $X_i + \Delta X_i$ となり、次の試行に移ることになる。

ところで、(5.20)式のようにして ΔX_i を得るためには(5.19)式中の DS_j/DX_i の形の値を何らかの方法で見い出す必要がある。これは、境界層内のあらゆる場所で必要とされ、基礎方程式を X_i ($i=2, 3, \dots, 7$) で微分した擾乱微分方程式

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial (C\phi'')'}{\partial X_i} + \beta \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ \frac{\rho_e}{\rho} - (\phi' + 1)^2 \right\} + \frac{\partial \phi''}{\partial X_i} (\phi + \eta) \\ + \phi'' \frac{\partial \phi}{\partial X_i} = \frac{\partial R_1}{\partial X_i}, \end{aligned} \right. \quad (5.21)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{C}{Pr} \psi' \right)' + \frac{\partial \psi'}{\partial X_i} (\phi + \eta) + \psi' \frac{\partial \phi}{\partial X_i} \\ + \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ \frac{C(Sc - Pr)}{Pr Sc} \alpha T z' \right\}' \\ + W u_e^2 \frac{\partial}{\partial X_i} \left\{ C \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \phi'' (\phi' + 1) \right\}' = \frac{\partial R_2}{\partial X_i}, \end{aligned} \right. \quad (5.22)$$

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial X_i} \left(\frac{C}{Sc} z' \right)' + \frac{\partial z'}{\partial X_i} (\phi + \eta) + z' \frac{\partial \phi}{\partial X_i} = \frac{\partial R_3}{\partial X_i} \end{aligned} \right. \quad (i=2, 3, \dots, 7) \quad (5.23)$$

を、境界条件

$$\left. \begin{aligned} \eta = 0; \frac{\partial S_j}{\partial X_i} = 1 \quad (i=j) \\ = 0 \quad (i \neq j) \\ (i, j=2, 3, \dots, 7) \end{aligned} \right\} \quad (5.24)$$

のもとに解いた解を、 $\partial X_k / \partial X_i$ ($i=2, 3, 4, k=5, 6, 7$) の値 (境界条件間の拘束条件より既知) とともに、 $\frac{D}{DX_i}$ の定義式(5.12)式に代入することにより得られる。なお、(5.24)式の S_j は(5.7)式のように定められる関数である。ここに得られた擾乱微分方程式に対しては、境界条件 (出発値) は(5.24)式のようにすべて与えられており、 $3(n-m)$ 個の擾乱微分方程式 (現在の問題では18個) と原方程式3個との合計21個の微分方程式を連立させて解き、各計算点 (η 方向の数値積分の刻み幅ごと) で二乗誤差を計算する。Nachtheim と Swigert¹⁰⁾ は、適当な η_{stop} (計算打ち切り点) をあらかじめ定めておき、その値が解に与える影響をしらべたが、本報告では、

$$|S_j(\eta)| \leq \omega_j \quad (\omega_j = \text{定数}) \quad (5.25)$$

という判定条件をおき、この条件をはずれたものは発散解とし、そこで計算を打ち切り、その点を $\eta = \eta_{stop}$ とし、次の試行に移る。また、あらかじめ与えた計算領域の終端をも $\eta = \eta_{stop}$ としておく。このようにして、(5.25)式の条件を満たしながら、(5.16)式の条件に合う解を収束解とする。したがって、(5.16)式の条

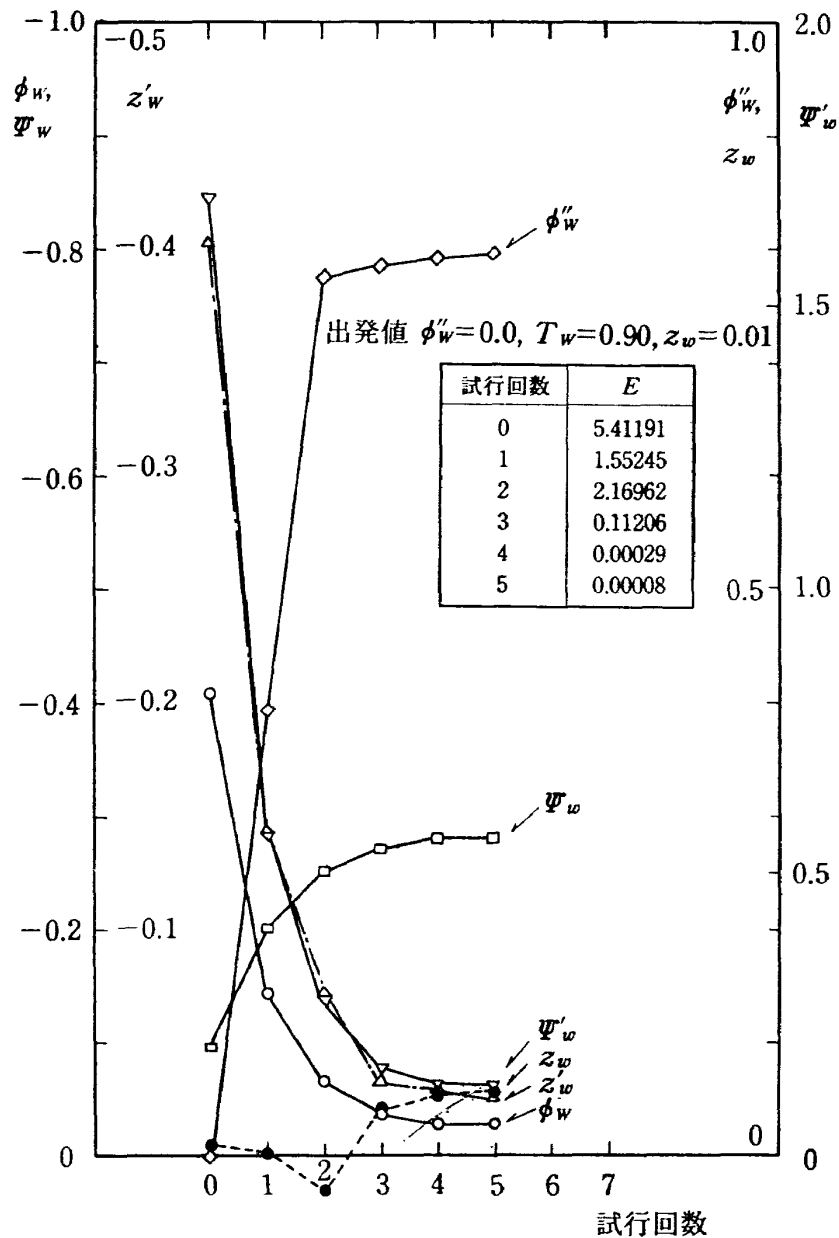


図 7 解の収束状況

(a) 初期値の収束 $x=0, \bar{T}_i=1000^\circ\text{C}, \bar{R}_i=1.00\text{cm}, \bar{p}_i=1\text{atm}.$

ノマーに分解し, Madorsky¹⁶⁾によれば, 90%以上を C_2F_4 が占める。よって, ここでは, C_2F_4 をアブレーション気体とみなし, 境界層は, 空気と C_2F_4 気体の二成分混合気体から成ると考える。それらの物性値は次のようである。

C_2F_4 気体: $M_1=100$

$$\bar{C}_{p1}=0.32 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\bar{\sigma}_1=5.00\text{\AA}$$

$$\Omega_1(2,2)=0.90$$

(補遺B. 参照)

空 気: $M_2=29$

$$\bar{C}_{p2}=0.28 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\bar{\sigma}_2=3.62\text{\AA}$$

$$\Omega_2(2,2)=0.76$$

(補遺B. 参照)

$$\text{固体テフロン: } \bar{C}_p=0.22 \text{ cal} \cdot \text{gr}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\bar{\rho}_s=2.19 \text{ gr} \cdot \text{cm}^{-3}$$

$$\bar{\kappa}_s=6.00 \times 10^{-4} \text{ cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}$$

$$\bar{L}=35 \text{ kcal} \cdot \text{mol}^{-1}$$

また, 主流の条件として,

$$M_\infty=5.74, \bar{T}_i=800^\circ\text{C} \sim 1500^\circ\text{C}, \bar{T}_s=20^\circ\text{C},$$

$$\bar{p}_i=0.5\text{atm} \sim 2\text{atm}, \bar{R}_i=0.75\text{cm} \sim 3.00\text{cm}$$

をとる。

前章で述べたような手法にしたがって計算したときの, 二点境界値問題の出発値の収束の状況を図 7(a), (b) に示す。計算は, 航究宇宙技術研究所の HITAC 5020 を用いて行なった。図 7(a) には最初に任意に与えた

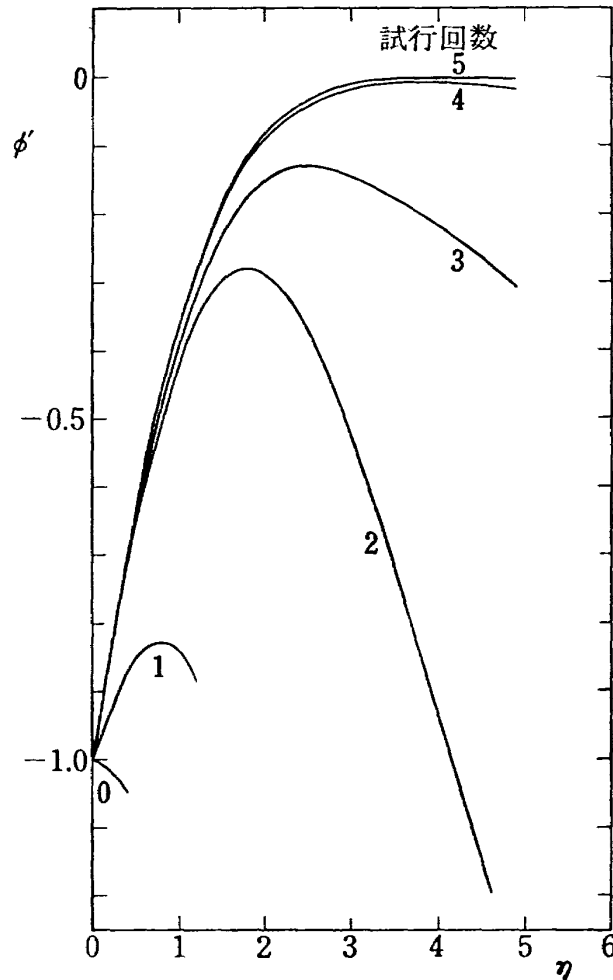


図 7 解の収束状況

(b) 速度のプロファイル, $x=0$, $\bar{T}_f=1000^\circ\text{C}$, $\bar{R}_f=1.00\text{cm}$, $\bar{p}_f=1\text{atm}$.

(試行回数=0) ϕ''_w , ψ_w , z_w と, それらによって決まる ϕ'_w , ψ'_w , z'_w との収束のありさまと, 各試行における二乗誤差 E とが示されている。ここで, 二乗誤差は, $\eta=\eta_c$ において計算されたものであって, (5.25)式の判定条件を逸脱した発散解に対しては, (5.25)式の条件を満たしている限りでの最大の η 位置 (η_{stop})におけるものである。(5.25)式の条件として採用したのは

$$\left. \begin{array}{ll} \omega_2=1.5 & (\phi' \text{ に対して}) \\ \omega_3=1.0 & (\phi'' \text{ に対して}) \\ \omega_4=0.5 & (\psi \text{ に対して}) \\ \omega_5=2.0 & (\psi' \text{ に対して}) \\ \omega_6=0.5 & (z \text{ に対して}) \\ \omega_7=2.0 & (z' \text{ に対して}) \end{array} \right\} \quad (6.1)$$

である。図 7 (b)は, 速度プロファイルの収束の状況

を示している。

(5.16)式のように小さな正数 ε を定めると, それが境界層厚さ \bar{d} を決めるパラメタとなるので, その値の選び方が問題となってくる。境界層内の物性量が主流の99%になったときを境界層の外端とすれば, 誤差は 0.01 であるから, $E \leq 0.01^2 \times 6 = 0.0006$ が望ましい。よって, $\varepsilon = 10^{-4}$ とすれば十分である。実際, 計算結果より, ε と \bar{d} ($\varepsilon = 10^{-4}$ としたときの \bar{d} で正規化) との関係は図 8 のようになり, ε を大きくとれば境界層を薄く評価することになるのは当然のことながら, $\varepsilon = 10^{-4}$ より小さくしても, その程度はかなり小さくなるのがわかる。以上のことより, $E \leq \varepsilon = 10^{-4}$ を収束の判定条件として用いた。

次に, 出発値の如何にかかわらず, 一定な解が得られるかどうか(初期値による解の一義性)が重要な問

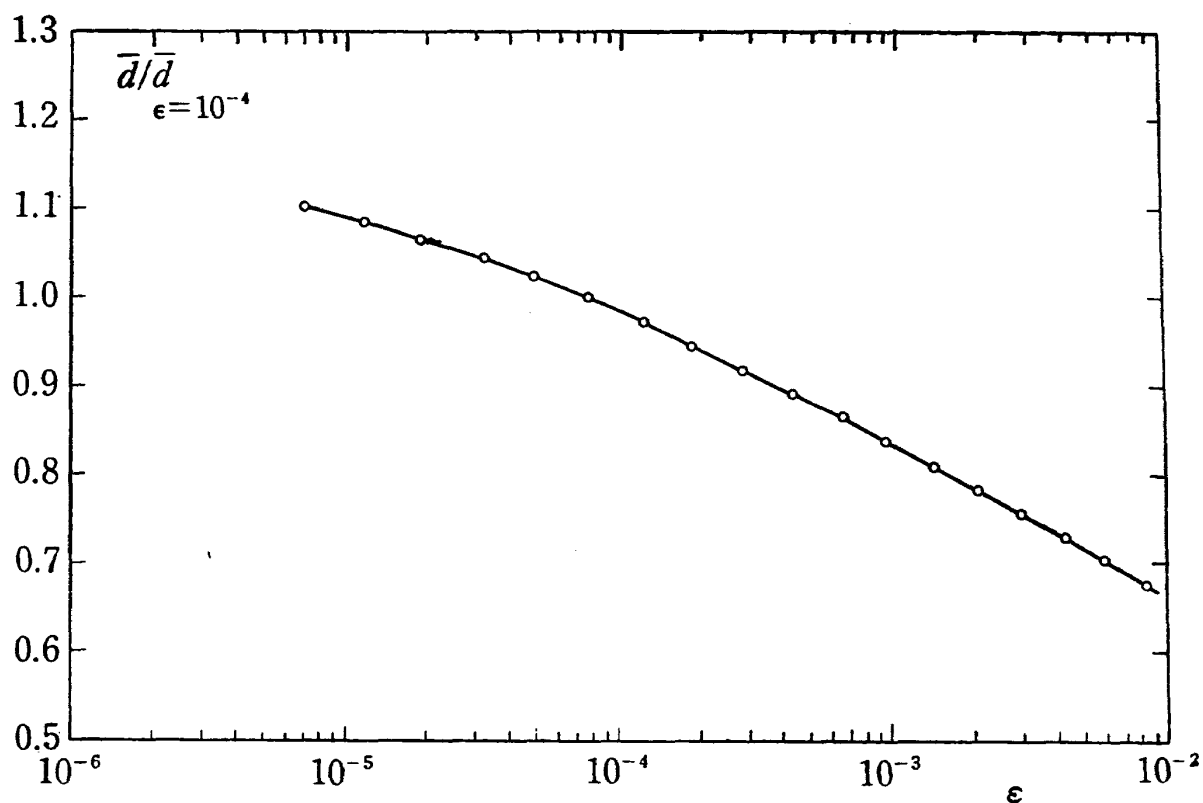


図 8 収束判定条件が境界層厚さにおよぼす影響
 $x=0, \bar{T}_i=1000^\circ\text{C}, \bar{R}_i=1.00\text{cm}, \bar{p}_i=1\text{atm}.$

題となる。ここでは、その数値的一義性をみるために、仮定すべき出発値を、 $\phi''_w=0.0, 0.25, 0.50, 0.75, 1.00$; $T_w=0.7, 0.9$; $z_w=0.01, 0.21, 0.41$ と変化させて計算した結果、いずれの場合も、一定な解に収束することを確認した。図9はその一例で、試行回数の相違はあっても、等しい解が得られている。これらの出発値は任意にとっていいわけであるが、予想される値の近傍に選ぶのが計算を速く行なうのに寄与するのはもちろんのことである。

ここでの計算は未知境界条件（出発値）が3個と拘束条件が3個の場合であるが、出発値が1個および2個の場合¹⁵⁾も、同様な手法（拘束条件がないため、はるかに簡単ではあるが）で、この方法の妥当性が知られている。それゆえ、未知境界条件が4個以上の場合も、§5.2の一般的な議論は成立すると考えられる。（数値的な確かめは後の課題にゆずる。）

§5.2でも述べたように、補足的な条件(5・8)式を考慮した方が必要十分条件として完全であるが、省略しても必要条件としては不備はない筈である。前者をCase1.とし、後者をCase2.として、 $\bar{T}_i=1273^\circ\text{K}$, $\bar{R}_i=1.00\text{cm}$, $\bar{p}_i=1.0\text{atm}$, 出発値 $\phi''_w=0.0$, $z_w=0.01$, $T_w=0.90$ 条件のもとで計算を行ない、両者を比較す

	Case 1	Case 2
試行回数	6	5
ϕ_w	-0.02873	-0.02895
ϕ_w''	0.79907	0.79922
T_w	0.71379	0.71418
z_w	0.05375	0.05381
z'_w	-0.02719	-0.02749
E	0.00008	0.00007
η_e	3.7	3.7
計算時間 (HITAC5020S)	132 秒	104 秒

表 1. 境界層外端での境界条件の相違による計算結果の比較

(Case 1: 補足的な条件(5・8)式を含めたもの,
 Case 2: 補足的な条件(5・8)式を除いたもの)

ると、表1のような結果（出発値の収束値）が得られ、そう大きな相違はなく、計算時間は当然のことながら、Case 2.の方が少ない。収束値に相違がないということは、§5.2で述べたようなオーバーシュート(図5)解等がなく、いずれの物性量も0に向かって漸近してゆくという解の性質に由来していると思われる。以下

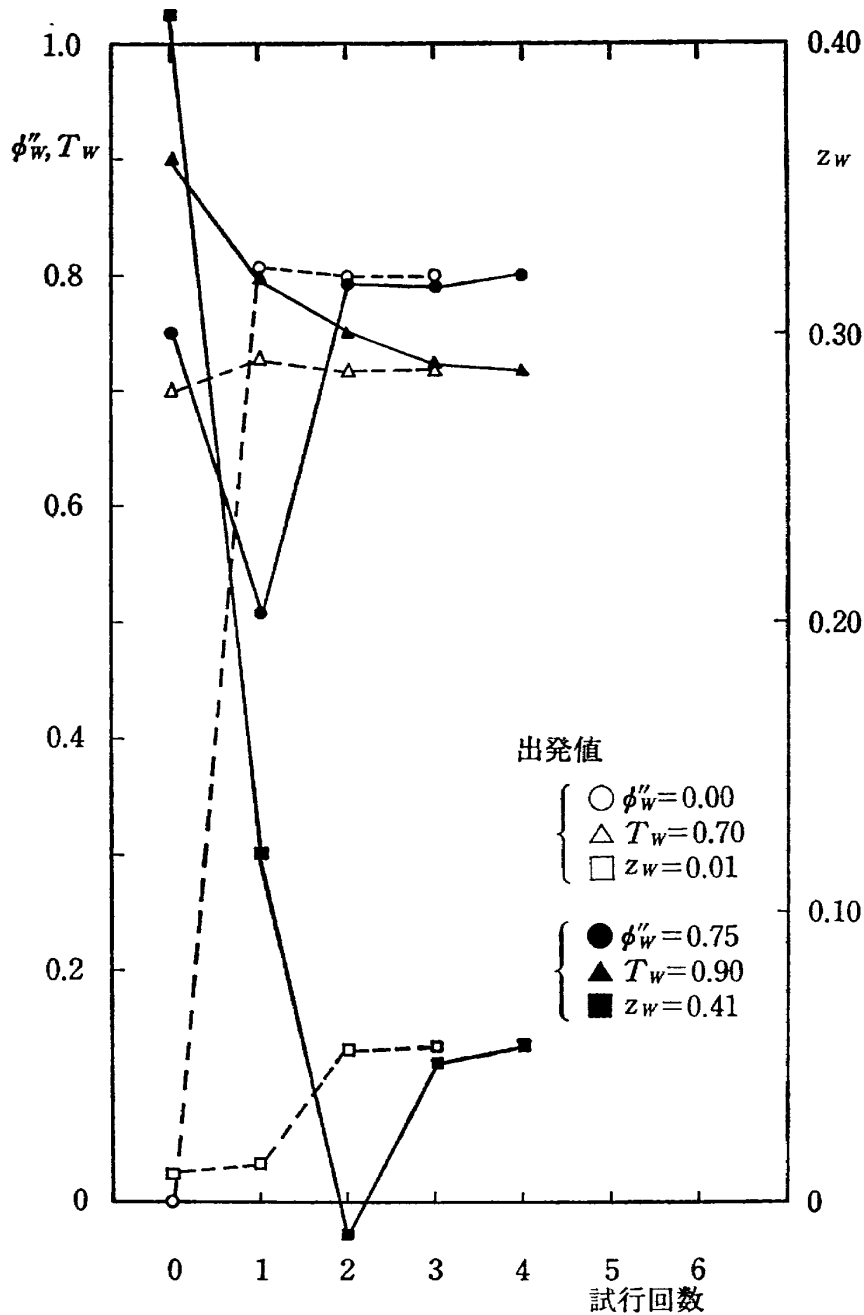


図 9 初期値の一義性

$x=0$, $M_\infty=5.74$, $\bar{T}_i=1573^\circ\text{K}$, $\bar{R}_b=0.75\text{cm}$, $\bar{p}_i=1\text{atm}$.

の計算は必要十分条件を考えて、すべて Case 1. で行った。

このようにして得られた境界層内の各物性量のプロファイルを図10に示す。これから、 ϕ_w , T_w がわかる

$$\dot{m} = -\rho_{sk} v^* \frac{\rho_s \mu_s u_s r_s^2}{\sqrt{2s}} \left[\phi_w \left(1 + \frac{2s}{\Delta s} \right) - \frac{2s}{\Delta s} \phi_{n-1w} \right] \quad (6.2)$$

$$\bar{T}_w = \bar{T}_i T_w \quad (6.3)$$

より、アブレーション速度 \dot{m} と表面温度 \bar{T}_w が得られ

る。図11(a), (b)は、物体曲率半径をパラメタとして、アブレーション速度と表面温度のよどみ点温度による効果を示す。物体の厚さを無限大 ($\bar{y}_b = \infty$), すなわち、中実半球とした場合と、物体の厚さを有限 (物体曲率半径の $1/2$; $\bar{y}_b = 0.5\bar{R}_b$), すなわち、物体厚さが物体曲率半径の半分の中空半球とした場合との比較を行なうと、後者では、アブレーション速度と表面温度とはむしろ低いのに対し、図11(d)で示される熱伝達率は逆に大きくなる。これは、 $\bar{y} = \bar{y}_b$ で一定温度 \bar{T}_b を仮定したため、後者では、物体表面での温度を

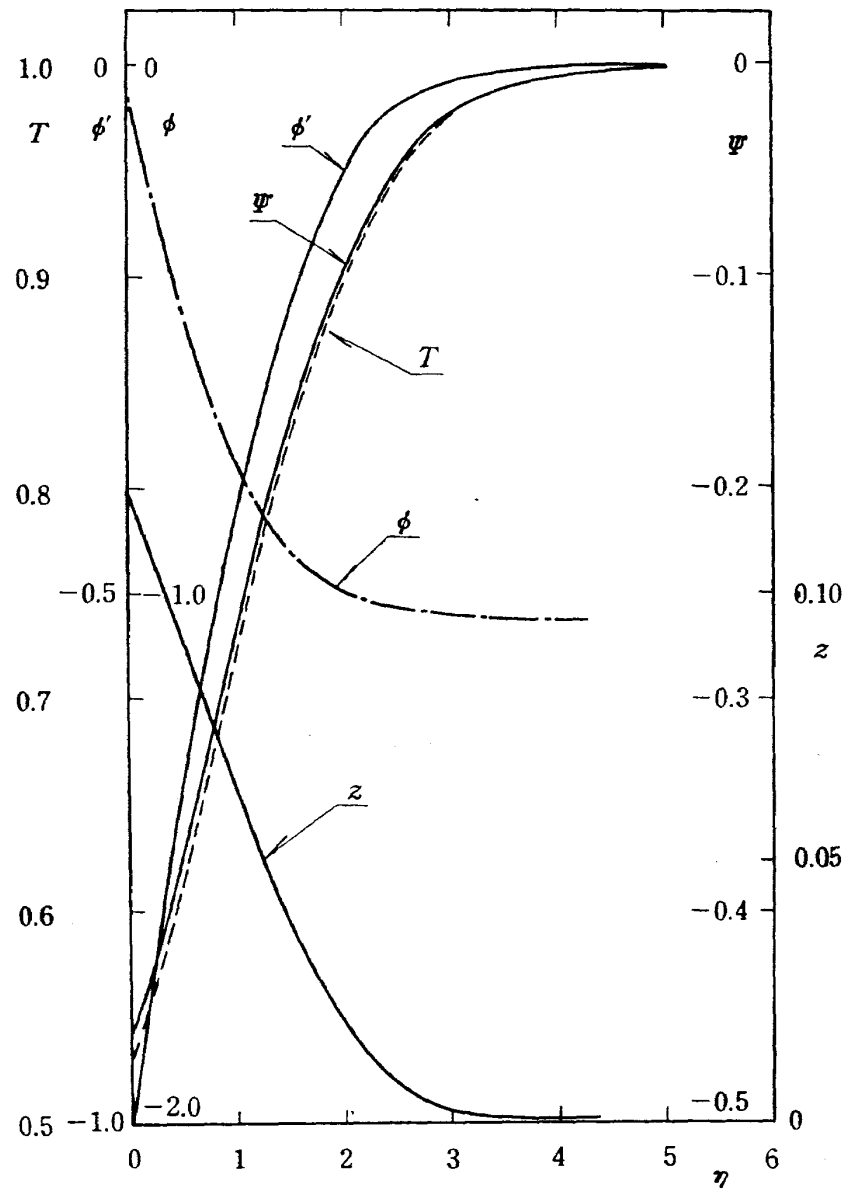


図 10 境界層内の各物性量のプロファイル
 $x=0$, $\bar{T}_t=1500^\circ\text{C}$, $\bar{R}_b=1.00\text{cm}$, $\bar{p}_t=1\text{atm}$.

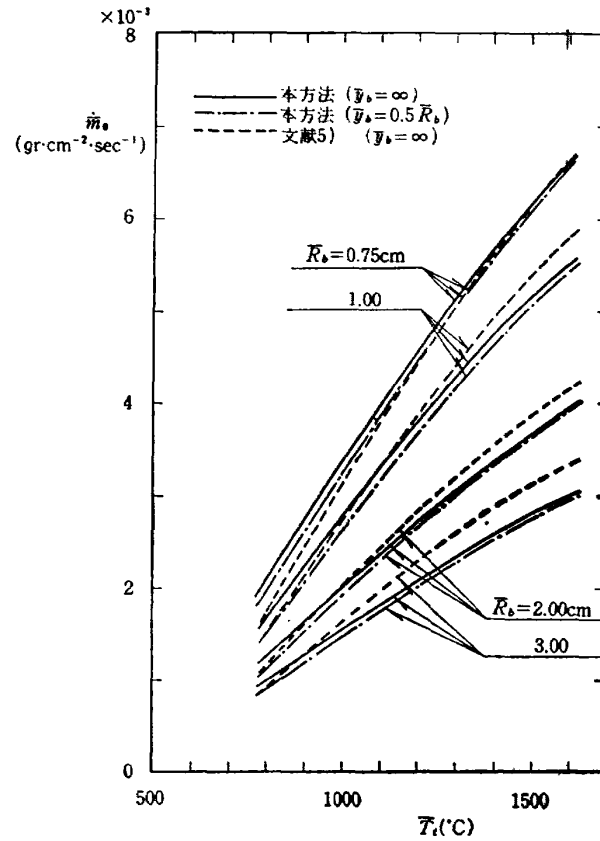


図 11 (a) アブレーション速度. $x=0$, $M_\infty=5.74$, $\bar{p}_t=1\text{atm}$.

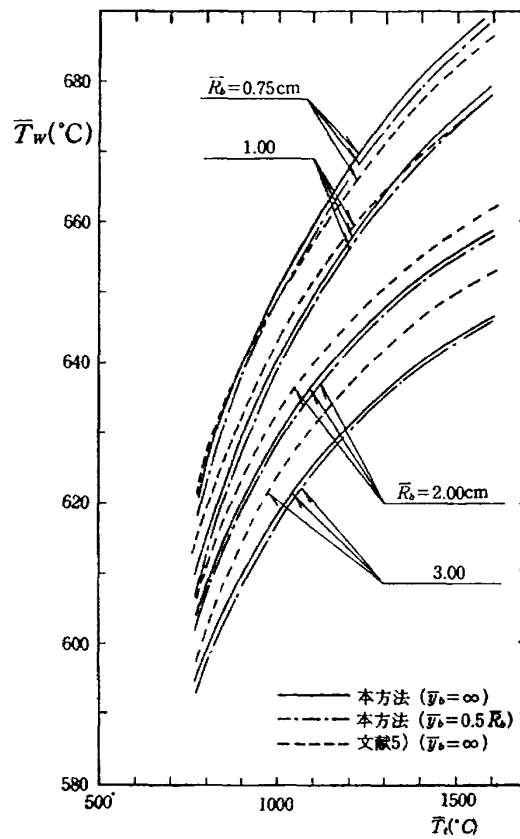


図 11 (b) 表面温度. $x=0$, $M_\infty=5.74$, $\bar{p}_t=1\text{atm}$.

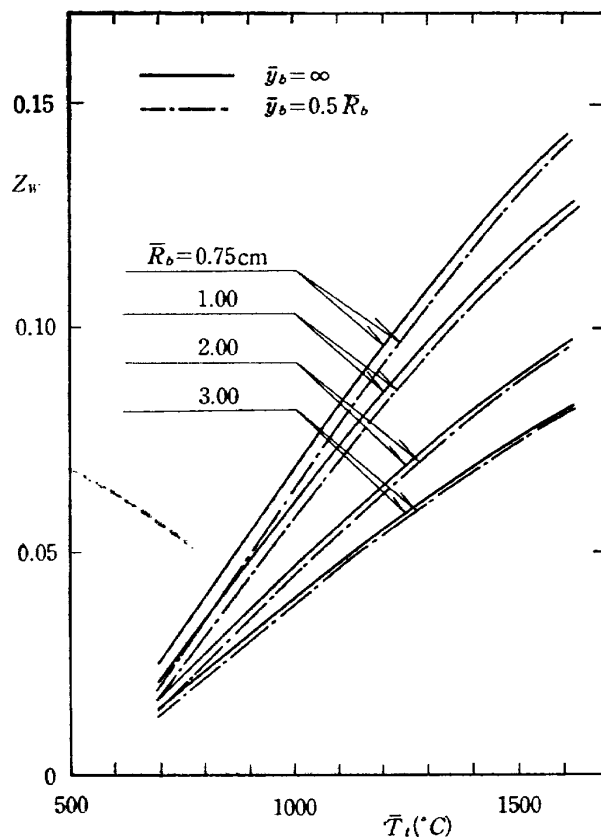


図 11 (c) 物体表面上のアブレーション気体の濃度 $x=0$, $M_\infty=5.74$, $\bar{p}_t=1\text{atm}$.

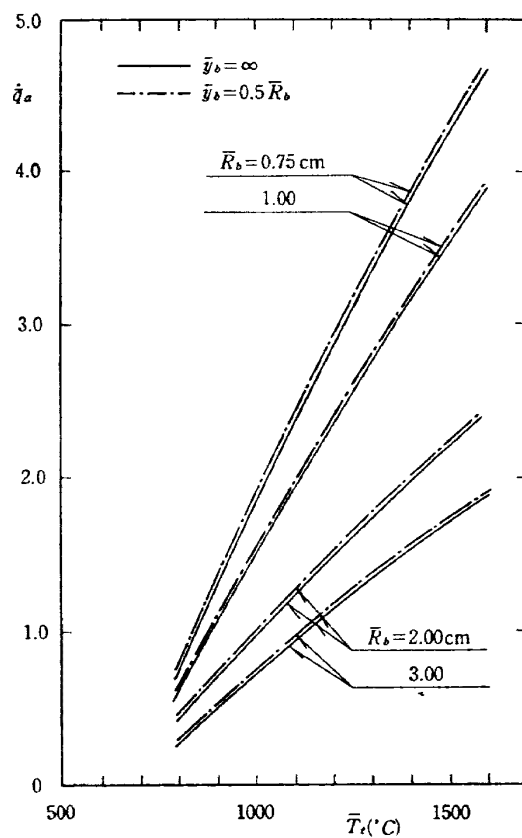


図 11 (d) アブレーションのあるときの表面熱伝達率 $x=0$, $M_\infty=5.74$, $\bar{p}_t=1\text{atm}$.

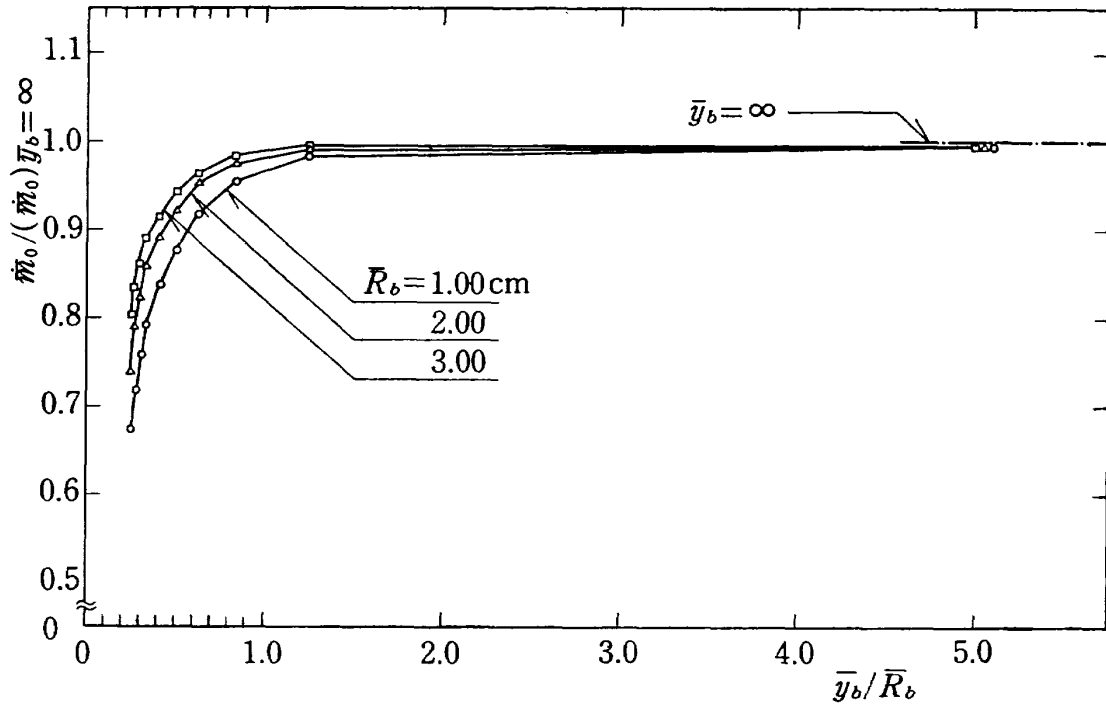


図 12 (a) 物体厚さがアブレーション速度におよぼす効果
 $x=0$, $M_\infty=5.74$, $\bar{T}_i=1273^\circ\text{K}$, $\bar{p}_i=1\text{ atm}$.

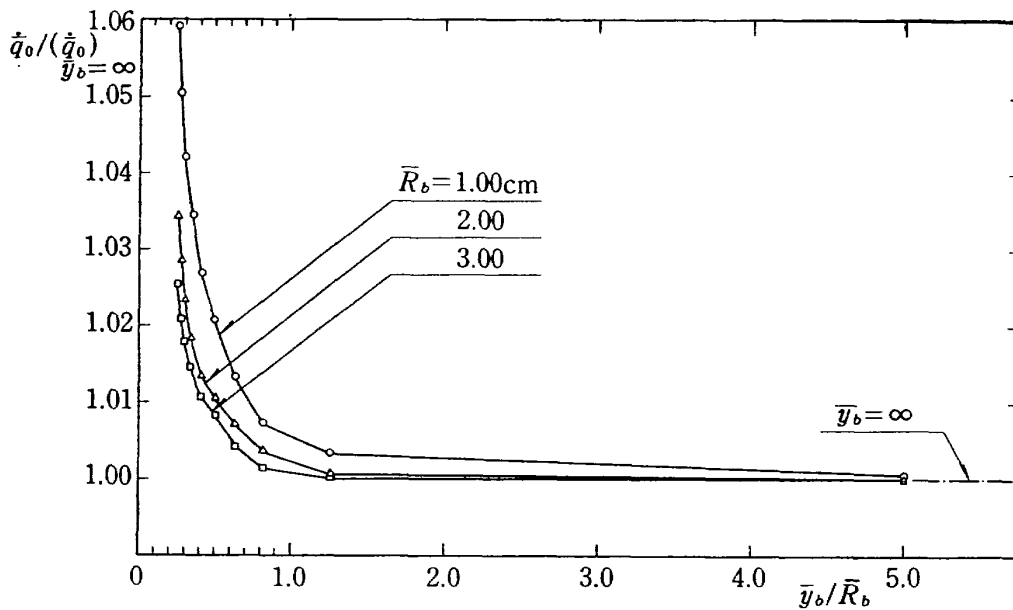


図 12 (b) 物体厚さが表面熱伝達率におよぼす効果
 $x=0$, $M_\infty=5.74$, $\bar{T}_i=1273^\circ\text{K}$, $\bar{p}_i=1\text{ atm}$.

低く保って、アブレーションの作用を低くおさえておかねばならず、そのため、熱入力が増加するものである。

物体厚さの効果を具体的に示すために、物体よどみ点におけるアブレーション速度、表面熱伝達率を、 $\bar{T}_i=1000^\circ\text{C}$ に対して計算し、その結果を図12(a), (b)に

示した。この結果によれば、同一熱入力に対し、物体が薄くなると、アブレーション速度を小さくおさえておかねばならぬことにより熱伝達率が増加し、アブレーション冷却効果が悪くなることが見られる。物体厚さ \bar{y}_b が小さくなるにつれ、冷却効果の劣化は急速に進み、あまりに薄い物体の使用の可能性は小さいが、

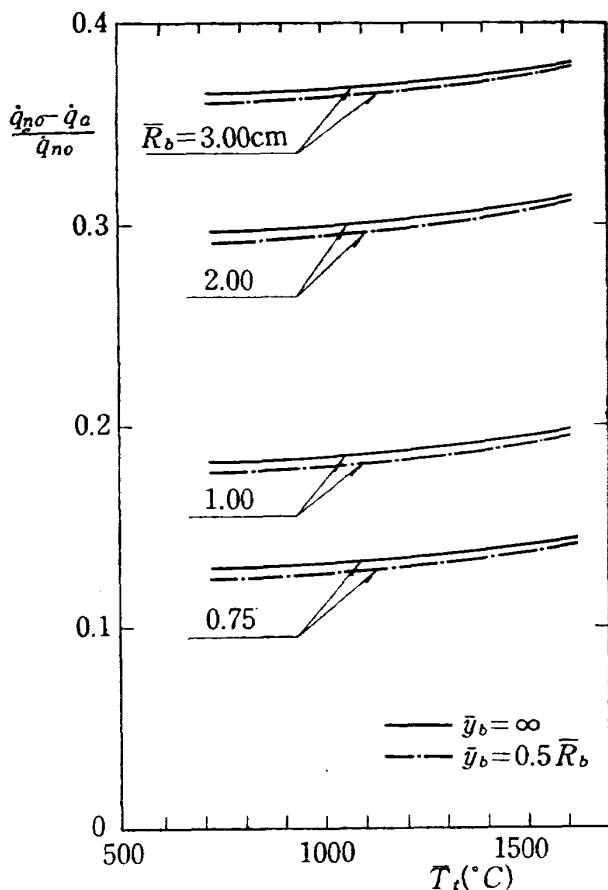


図 13 (a) アブレーションによる熱防御効果
 $x=0, M_\infty=5.74, \bar{p}_t=1 \text{ atm.}$

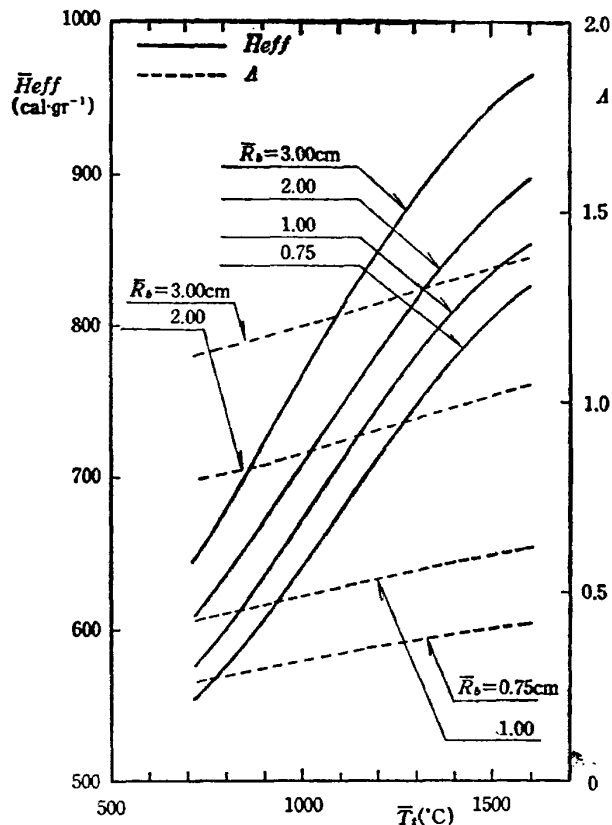


図 13 (b) アブレーションの冷却効果
 $x=0, M_\infty=5.74, \bar{p}_t=1 \text{ atm, } \bar{y}_b=\infty$

$\bar{R}_b=1.00 \text{ cm}$ の半球を例にとると、 $\bar{y}_b=0.25\bar{R}_b \sim 0.5\bar{R}_b$ の物体の表面熱伝達率と、 $\bar{y}_b=\infty$ (中実半球) のそれとの相違は高々6%であり、この程度での実用化は可能であると思われる。これは、アブレーション物質自体の熱絶縁性の良さに由来するものである。

図11(c)は同時に計算された、物体表面でのアブレーション気体の濃度を示し、アブレーション速度と同様の傾向をもつことが知られる。

図13(a), (b)は、アブレーションによる冷却効果を示すものである。まず、アブレーションによって防御される熱量 $(\dot{q}_{no} - \dot{q}_a)$ と、アブレーションのないときの熱量 \dot{q}_{no} との比は図13(a)で示され、主流よどみ点温度の増加に伴って増加し、冷却効果は、より高い温度において向上することがわかる。中空半球よりも中実半球の方が冷却効果が良好であることは、アブレーションの作用の大きい方が良好な冷却効果を与えるという合理的な結果を示している。さらに、アブレーションの冷却効果を

$$A = \frac{\dot{q}_{no} - \dot{q}_a}{\bar{H}_w \dot{m}_a} \quad (6.4)$$

のように定義すると、この値は図13(b)の破線で示すように、上と同様な結果を示している。アブレーションの効果の指標としてよく用いられる有効アブレーション熱 (Effective heat of ablation)¹⁷⁾

$$H_{eff} = \frac{\dot{q}_{no}}{\dot{m}_a} \quad (\text{cal. gr}^{-1}) \quad (6.5)$$

を計算すると、図13(b)の実線が示すように、これもまた、 A と同様な結果を与える。

曲率半径の大きい方が冷却効果がすぐれているのは、境界層が厚くなり、主流からの同一熱入力に対して境界層内で防御される熱量が大きくなるからであると説明できる。文献⁵⁾の結果と若干相違があるのは、(4.4)式の評価の仕方によるもので、(4.4)式をさらに精密化すれば、この差は小さくなるものと思われる。これらの解の間に大きな相違が無いことから、この直接解法の解の一義性が保証されている。

主流よどみ点圧力が増加するとアブレーションは促進される。これは、(6・2)式において、 \bar{v}^* は $\bar{\rho}_{sh}$ の $-\frac{1}{2}$ 乗に比例するから((A・23)式参照)、他の条件が一定なら、 $\bar{m} \propto \bar{\rho}_{sh} \bar{v}^* \propto \bar{\rho}_{sh}^{\frac{1}{2}}$ となり、 $\bar{\rho}_{sh} \propto \bar{p}_t$ であるから、結局、アブレーション速度はよどみ点圧力の $\frac{1}{2}$ 乗によることになる。

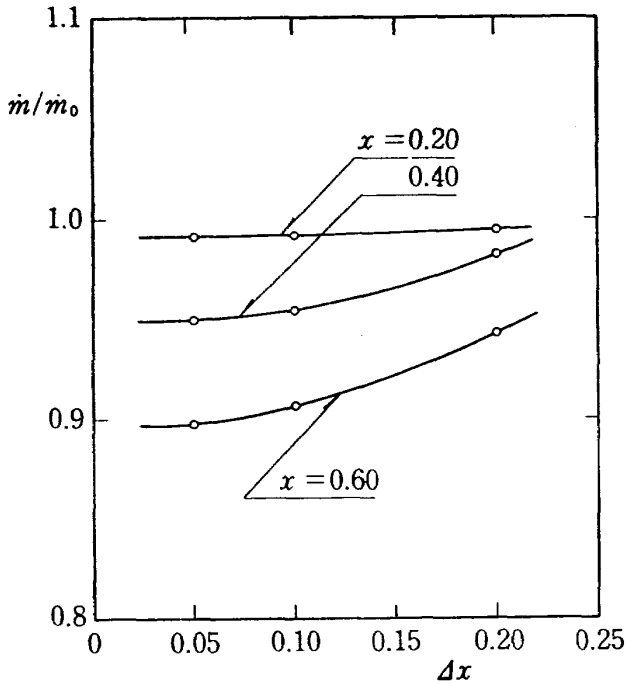


図 14 H-W法における刻み巾 Δx の効果
 $\bar{T}_t = 970^\circ\text{C}$, $\bar{R}_b = 2.83\text{cm}$.

H-W法による数値計算で、まず問題になるのは、 x 方向の刻み幅 Δx の効果である。この効果は図14に示される。すなわち、 $\Delta x = 0.20, 0.10, 0.05$ の三種の刻み幅によって計算された、各点 ($x = 0.20, 0.40, 0.60$) でのアブレーション速度を、 $\Delta x \rightarrow 0$ とした仮想のアブレーション速度とくらべることにより、 $\Delta x = 0.05$ とすれば、高々 0.3% の誤差しか与えないことがわかる。また、 Δs は、(3・1) 式より計算できて、 $\Delta x = 0.05$ のとき、 η 方向の刻み幅 $\eta = 0.1$ に対し、

$$\Delta s / (\Delta \eta)^2 < \frac{0.0013}{0.01} \leq \frac{1}{2} \quad (6 \cdot 6)$$

となり、放物型偏微分方程式の差分解の安定条件をも満たしており、数値的取り扱い上、適当と考えられる。よどみ点近傍では $s = \frac{1}{2} x^2$ ゆえ、 $\Delta x = 0.10$ でも $\Delta s = 0.003$ となり、 $\Delta s / (\Delta \eta)^2 = 0.3 < \frac{1}{2}$ で安定条件は満足しているが、その下流では不安定となる。以上の結果より、 $\Delta x = 0.05$ を用いて計算を行なった。

図15(a), (b), (c)には、そのようにして計算した流れ方向のアブレーション速度 $\dot{m}(x)$ を、よどみ点におけ

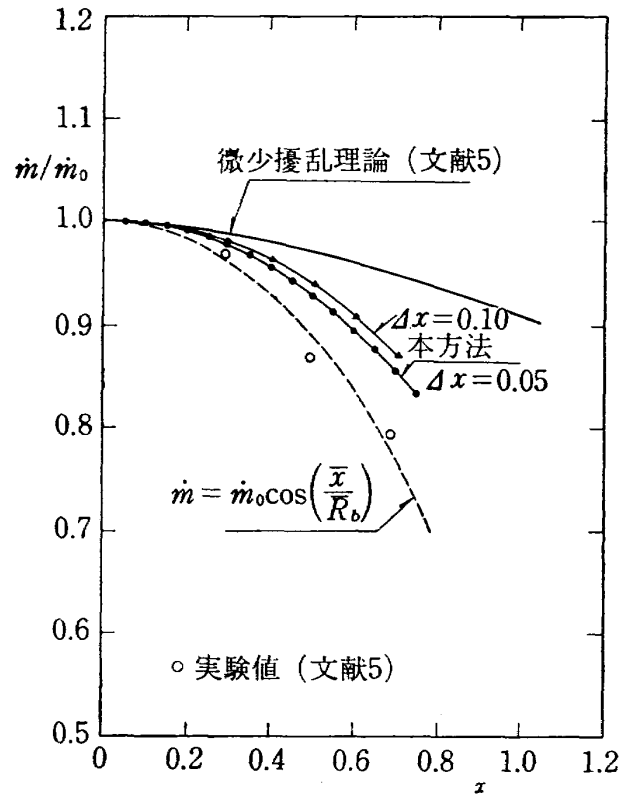


図 15 アブレーション速度の流れ方向分布

(a) $M_\infty = 5.74$, $\bar{T}_t = 970^\circ\text{C}$,
 $\bar{R}_b = 2.83\text{cm}$, $\bar{p}_t = 1\text{atm}$.

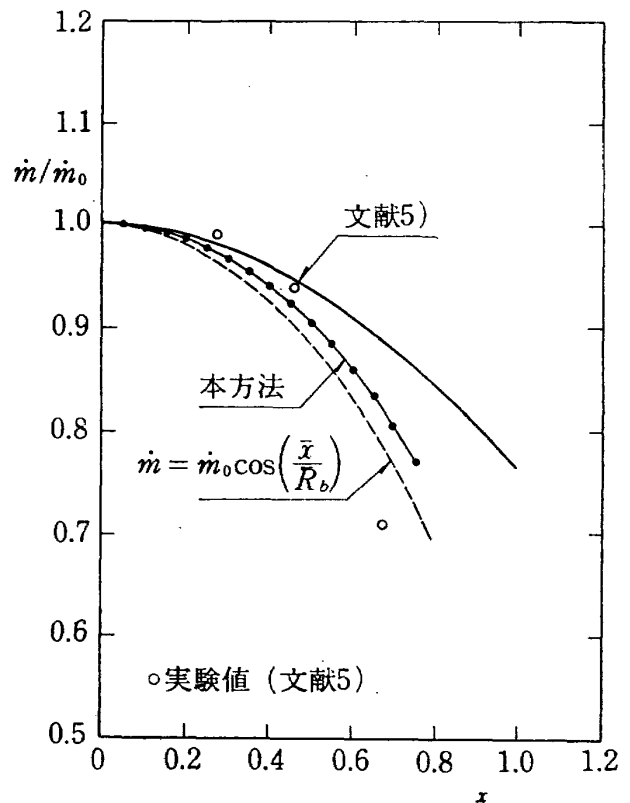


図 15 アブレーション速度の流れ方向分布

(b) $M_\infty = 5.74$, $\bar{T}_t = 1045^\circ\text{C}$,
 $\bar{R}_b = 1.40\text{cm}$, $\bar{p}_t = 1\text{atm}$, $\Delta x = 0.05$

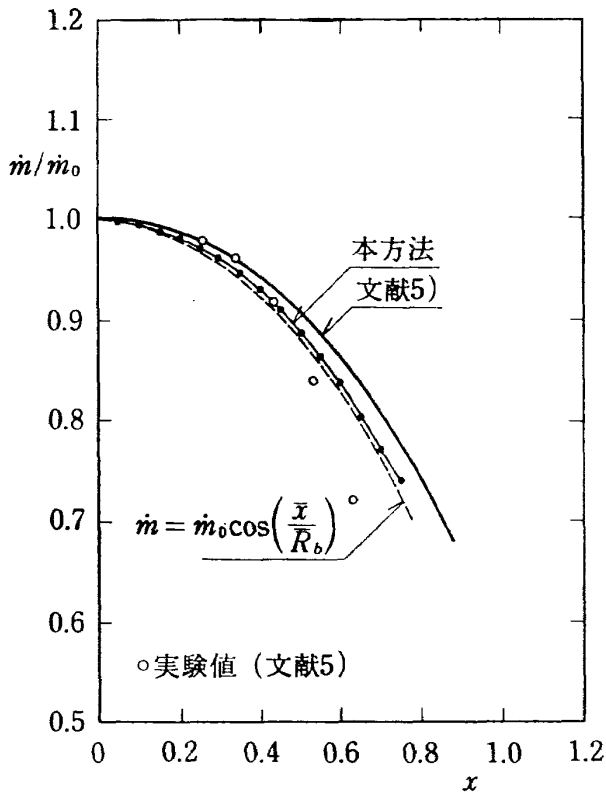


図 15 アブレーション速度の流れ方向分布
(c) $M_\infty=5.74$, $\bar{T}_f=1120^\circ\text{C}$, $\bar{R}_0=1.15\text{cm}$,
 $\bar{p}_f=1\text{atm}$, $\Delta x=0.05$.

るそれとの比の形で示した。図には、文献5) によって得られている微少擾乱理論による解と、実験値も比較のため同時に示し、現在の解の、実験値とのよりよい一致をみた。安定した解の得られるのは、せいぜい $x=0.7$ までで、本質的な仮定の妥当性、数値的誤差の集積のため、これより下流での解を求めるのは無理である。なお、この計算に用いたモデルは中実半球($\bar{y}_0=\infty$)である。

理論を展開するにあたって用いた準定常アブレーションの仮定は、変化量が時間によらないか、あるいはその依存性が非常に小さいということであり、アブレーション速度は x のみの関数と考えてさしつかえない。これは図16に示すように、実験¹⁸⁾でも、ある一定時間経ったあとは表面後退距離 \bar{x} と時間 \bar{t} との関係はほぼ線形となり、 $\bar{m} \propto \frac{d\bar{x}}{d\bar{t}}$ は時間に無関係であるか、あるいは非常に小さい依存性しかないことが観察されている*。完全に定常なアブレーションを考えれば、¹⁹⁾

* 図16において、 \bar{x} が初期に負方向に増加するのは、模型の熱膨張による伸びを示している。

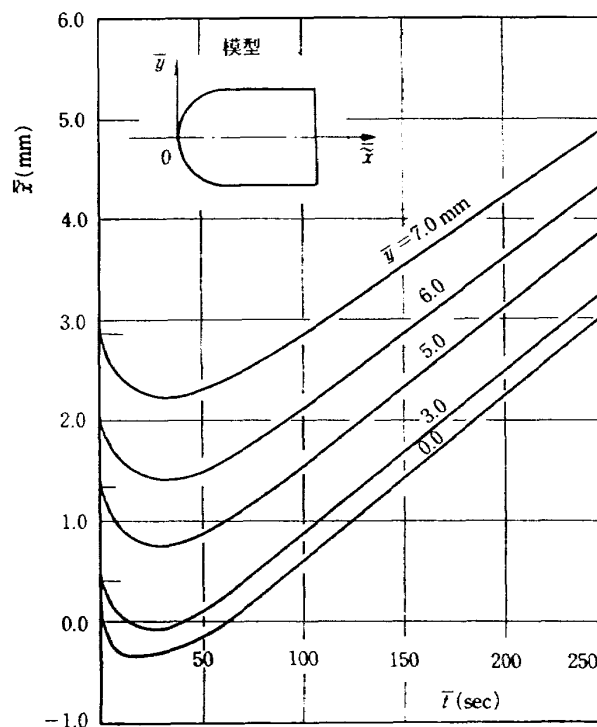


図16 表面後退距離の測定値¹⁸⁾テフロン, $M_\infty=5.74$, $\bar{p}_f=1\text{atm}$, $\bar{T}_f=1200^\circ\text{C}$, $\bar{R}_0=1.21\text{cm}$.

$$\dot{\bar{m}}(\bar{x}) = \dot{\bar{m}}_0 \cos\left(\frac{\bar{x}}{\bar{R}_b}\right) \quad (6.7)$$

であり、これをそれぞれの場合について図に示した。若干の相違は、時間に対する依存性のためであると思われる。主流よどみ点温度の低い範囲では、実験上では熱入力そのものが小さく、加熱は物体よどみ点近傍以外では小さくなる。よって、表面後退速度の分布は、よどみ点から下流にむかって小さくなってゆき、準定常の仮定が成り立ちにくくなっている。

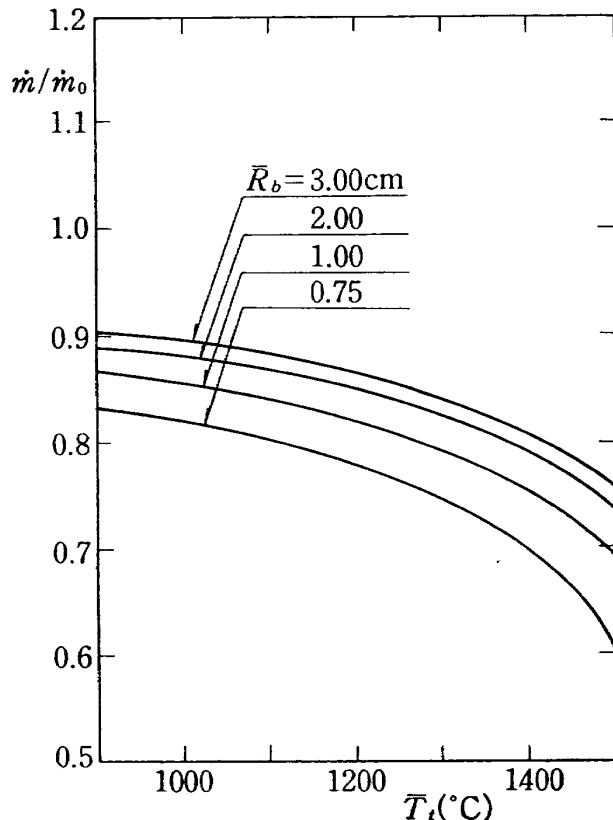


図 17 $x=0.6$ におけるアブレーション速度
 $M_\infty=5.74$, $\bar{p}_i=1 \text{ atm}$.

計算の結果をまとめ、 $x=0.6$ におけるアブレーション速度を、物体曲率半径をパラメタとしてあらわすと図17のようになる。表面温度、熱伝達率の x 方向分布も、これに準じて計算される。

ここで問題となるのは物体内の、 x 方向への熱の伝導である。ここで扱っている主流よどみ点温度範囲では、それは、 y 方向へのものに比べて無視できるほど小さい⁵⁾が、さらに高い温度範囲ではそれが妥当であるかどうか疑わしくなる。Popper, Toong, Sutton²⁰⁾は、温度の低い範囲での、著者らの微少擾乱理論による結果を認めつつ、さらに高い温度に対して、ベリリウムとグラファイトを材料とし、三次元熱伝導効果を含めた試みを行ない、良い結果を得ている。

7. 結 論

極超音速再突入物体の熱防御法として、最も効果的なものの一つである昇華アブレーションの直接解法を、次の三つの観点から統一的に検討した。

(1) アブレーションの現象は、本質的には、表面物質の化学反応過程と、物体まわりの空力的熱輸送過程の組み合わせによって決まるべきものである。ここでは、物体内部と、主流の条件とを与えて、表面物質の化学的性質を物体表面での境界条件として含め、かつ、物体内部の熱伝導を物体表面でのエネルギーバランスの形で境界条件とすることにより、境界層方程式を解けば、アブレーション速度や表面温度のような物性量が一義的に得られることを数値的に見出した。

(2) 放物型偏微分方程式の、一変数による微分項を差分項におきかえて常微分方程式に帰着させるというHartree-Womersley法を適用し、よどみ点から、下流 $x=0.7$ までの解を、上記(1)のようにして得た。アブレーション速度の x 方向分布は滑らかなので、差分をとる場合の安定条件はそう厳しくはない。

(3) (2)で得られる常微分方程式は、壁上での境界条件の数が必要な個数を満たしていないので、二点境界値問題になる。壁上での境界条件は、1個が既知、あとの6個のうち、3個は全く独立で、残りの3個は拘束条件で関係づけられていて、拘束条件の存在が問題をより困難にしている。本報告では従来の初期値法を発展させて、境界層端での二乗誤差最小の方法を提出し、それが未知境界条件の数、拘束条件の数によらず一般的に適用できるであろうことを昇華アブレーションの問題に例をとって数値的に見出した。

以上の方法に従って、テフロンをアブレーション物質とし、主流マッハ数5.74、主流よどみ点温度 $800^\circ\text{C} \sim 1500^\circ\text{C}$ 、主流よどみ点圧力 $0.5 \text{ atm} \sim 2.0 \text{ atm}$ 、物体曲率半径 $0.75 \text{ cm} \sim 3.00 \text{ cm}$ 、物体内部温度 20°C の条件のもとで計算を行なった。計算結果から

(i) アブレーションの熱防御効果は、ここで計算した範囲では、主流よどみ点温度の増加に伴い向上し、アブレーション冷却法の利点を示している。

(ii) 物体曲率半径の大きい方が、境界層が厚くなることにより熱防御効果は大きくなる。

(iii) 中空模型よりも中実模型の方が熱防御効果は良好であるが、アブレーション物質自体の熱絶縁性の良さにより、その差は小さくなく、曲率半径の25%程度の薄肉の物体でも実用化できる可能性を示している。

(iv) 流れ方向下流へのアブレーション速度分布は、微少擾乱理論による解、および実験値と比較して、主流よどみ点温度が1000°C以上で、かなり良く一致し、この方法の、この種の問題に対する適用の有用性を示している。

物体内部の熱伝導の二次元効果を考慮すれば、さらに良い結果が得られることが予想されるが、そのときは、H-W法以外の方法によらねばならず、より高い温度範囲での解析は今後の課題となろう。

なお、二点境界値問題の解法に対して、解のふるまいをアナログ計算機で検討する便宜をはかって下さった計測部堀川室長、渡辺技官に心から感謝の意を表したい。

補遺A. 境界層方程式

図1に示される流れのパターンに対して、空間に固定した座標系 (\bar{X}, \bar{Y}) で書いた境界層方程式は、

$$\text{質量保存: } \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{r}_0)}{\partial\bar{t}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{U}\bar{r}_0)}{\partial\bar{X}} + \frac{\partial(\bar{\rho}\bar{V}\bar{r}_0)}{\partial\bar{Y}} = 0, \quad (\text{A} \cdot 1)$$

$$\begin{aligned} \text{運動量保存: } \bar{\rho} \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{t}} + \bar{\rho}\bar{U} \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{X}} + \bar{\rho}\bar{V} \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}} \\ = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{X}} + \frac{\partial}{\partial\bar{Y}} \left(\bar{\mu} \frac{\partial\bar{U}}{\partial\bar{Y}} \right), \quad (\text{A} \cdot 2) \\ \bar{\rho} \frac{\bar{U}^2}{\bar{R}_b} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{Y}}, \quad (\text{A} \cdot 3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{エネルギー保存: } \bar{\rho} \frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{t}} + \bar{\rho}\bar{U} \frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{X}} + \bar{\rho}\bar{V} \frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{Y}} = \frac{\partial\bar{p}}{\partial\bar{t}} \\ + \frac{\partial}{\partial\bar{Y}} \left\{ \frac{\bar{\mu}}{\bar{Pr}} \frac{\partial\bar{H}}{\partial\bar{Y}} + \bar{\mu} \left(1 - \frac{1}{\bar{Pr}} \right) \frac{1}{2} \frac{\partial\bar{U}^2}{\partial\bar{Y}} \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial\bar{Y}} \left\{ \left(\frac{1}{Le} - 1 \right) \bar{\rho} \bar{D} (\bar{C}_{p1} - \bar{C}_{p2}) \bar{T} \frac{\partial\bar{K}}{\partial\bar{Y}} \right\}, \quad (\text{A} \cdot 4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{拡散: } \bar{\rho} \frac{\partial\bar{K}}{\partial\bar{t}} + \bar{\rho}\bar{U} \frac{\partial\bar{K}}{\partial\bar{X}} + \bar{\rho}\bar{V} \frac{\partial\bar{K}}{\partial\bar{Y}} \\ = \frac{\partial}{\partial\bar{Y}} \left(\bar{\rho} \bar{D} \frac{\partial\bar{K}}{\partial\bar{Y}} \right) \quad (\text{A} \cdot 5) \end{aligned}$$

である。ここで、添字1, 2の無い量は、二成分混合気体の平均の量であり、

$$\bar{C}_p = \bar{C}_{p1}K + \bar{C}_{p2}(1-K) \quad (\text{A} \cdot 6)$$

である。濃度は、 $K_1 \equiv K$ とおき、 $K_1 + K_2 = 1$ より、 $K_2 = 1 - K$ であるので、以下の解析は、濃度は K で統一してある。

物体表面が \bar{v}_b なる速度で後退することから、物体表面に固定した座標 (\bar{x}, \bar{y}) への変換

$$\left. \begin{aligned} \bar{t} = \bar{t}, \quad \bar{x} = \bar{X}, \quad \bar{y} = \bar{Y} - \bar{v}_b(\bar{x}) \bar{t}, \\ \bar{u} = \bar{U}, \quad \bar{v} = \bar{V} - \bar{v}_b(\bar{x}) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 7)$$

を用い、準定常の仮定を用いると

$$\frac{\partial}{\partial\bar{t}} = \frac{\partial}{\partial\bar{y}} \frac{\partial\bar{y}}{\partial\bar{t}} = -\bar{v}_b \frac{\partial}{\partial\bar{y}}. \quad (\text{A} \cdot 8)$$

これらによって、(A・1)式から(A・5)式は (\bar{x}, \bar{y}) 座標系での連立方程式に変換される。さらに、

$$\left. \begin{aligned} x = \bar{x}/\bar{R}_b, \quad y = \bar{y}/\bar{y}^*, \quad r_0 = \bar{r}_0/\bar{R}_b, \\ u = \bar{u}/\bar{u}^*, \quad v = \bar{v}/\bar{v}^*, \quad \rho = \bar{\rho}/\bar{\rho}_{bh}, \\ T = \bar{T}/\bar{T}_i, \quad H = \bar{H}/\bar{C}_{p2}\bar{T}_i, \quad p = \bar{p}/\bar{\rho}_{bh}\bar{u}^*, \\ D = \bar{D}/(\bar{\mu}_{bh}/\bar{\rho}_{bh}), \quad \kappa = \bar{\kappa}/\bar{\kappa}_2, \quad \mu = \bar{\mu}/\bar{\mu}_{bh} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A} \cdot 9)$$

であらわされる無次元化量を用いると、次のような無次元連立偏微分方程式が得られる。

$$\frac{\partial(\rho u r_0)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v r_0)}{\partial y} = 0, \quad (\text{A} \cdot 10)$$

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (\text{A} \cdot 11)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{N}{\sqrt{R_e}} \rho u^2 \approx 0, \quad (\text{A} \cdot 12)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\mu}{Pr} \frac{\partial H}{\partial y} \right) \\ + W \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \mu \left(1 - \frac{1}{Pr} \right) \frac{1}{2} \frac{\partial u^2}{\partial y} \right\} \\ - \frac{\partial}{\partial y} \left\{ \left(\frac{1}{Le} - 1 \right) \rho D (C_{p1} - C_{p2}) T \frac{\partial K}{\partial y} \right\}, \quad (\text{A} \cdot 13) \end{aligned}$$

$$\rho u \frac{\partial K}{\partial x} + \rho v \frac{\partial K}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho D \frac{\partial K}{\partial y} \right), \quad (\text{A} \cdot 14)$$

$$p = \rho R T, \quad (\text{A} \cdot 15)$$

$$H = C_p T + \frac{1}{2} W u^2. \quad (\text{A} \cdot 16)$$

衝撃波層は定密度、非粘性であるとする。非粘性極超音速流理論 (Hayes & Probstein²¹⁾) より得られる物体表面での速度成分は、境界層端の速度成分 u_e に等しいと考えられるから、

$$u_e = \bar{u}_\infty \sqrt{\frac{8\tau}{3}} \frac{1}{1+\lambda} \sin x \quad (\text{A} \cdot 17)$$

$$\text{ここで, } \tau = \frac{(\gamma-1) M_\infty^2 + 2}{(\gamma+1) M_\infty^2}, \quad \lambda = \tau / (1 + \sqrt{\frac{8\tau}{3}} - \tau) \quad (\text{A} \cdot 18)$$

である。いま、

$$\bar{u}^* = \sqrt{\frac{8\tau}{3}} \frac{1}{1+\lambda} \bar{u}_\infty \quad (\text{A} \cdot 19)$$

$$\text{ととれば, } u_e = \sin x \equiv u_e(x). \quad (\text{A} \cdot 20)$$

$$\text{また, } H_e = C_p T_e + \frac{1}{2} W u_e^2 \quad (\text{A} \cdot 21)$$

より、 $H_e = 1$ の条件のもとに、

$$T_e = \frac{1}{Cp_e} (1 - \frac{1}{2} Wu_e^2) \equiv T_e(x) \quad (\text{A} \cdot 22)$$

となり、境界層端での条件が与えられる。

もとの境界層方程式が無次元化されて (A・10) 式～ (A・14) 式のような形になるためには、無次元化する

ための量は

$$\bar{y}^* = (\bar{\mu}_{sh} \bar{R}_b / \bar{\rho}_{sh} \bar{u}^*)^{\frac{1}{2}}, \quad \bar{v}^* = \bar{y}^* \bar{u}^* / \bar{R}_b \quad (\text{A} \cdot 23)$$

であればよい。 \bar{y}^* の右辺を、主流の状態を用いて書き換えると、

$$\begin{aligned} \bar{y}^* &= (\bar{\mu}_{\infty} / \bar{\rho}_{\infty} \bar{u}_{\infty} \bar{R}_b)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{\left\{ 2r M_{\infty}^2 - (r-1) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ (r-1) M_{\infty}^2 + 2 \right\}^{\frac{1}{2}} \bar{R}_b / (r+1) M_{\infty}}{\sqrt{\frac{8r}{3}} / (1+\lambda)} \right]^{\frac{1}{2}} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\bar{R}_b}} \frac{\left\{ 2r M_{\infty}^2 - (r-1) \right\}^{\frac{1}{2}} \left\{ (r-1) M_{\infty}^2 + 2 \right\}^{\frac{1}{2}} \bar{R}_b}{(r+1) M_{\infty}^{\frac{3}{2}} \left\{ 8r/3(1+\lambda) \right\}^{\frac{1}{2}}} \quad (\text{A} \cdot 24) \end{aligned}$$

$$\equiv \frac{N}{\sqrt{\bar{R}_b}} \bar{R}_b \quad (\text{A} \cdot 25)$$

$$\text{また, } W \equiv \bar{u}^{*2} / \bar{C} p_2 \bar{T}_1 = \left\{ \sqrt{\frac{8r}{3}} / (1+\lambda) \right\}^2$$

$$\times M_{\infty}^2 a_{\infty}^2 / \bar{C} p_2 \bar{T}_1 \quad (\text{A} \cdot 26)$$

とすると、 $\bar{a}_1 = r \bar{R} \bar{T}_1$, $\bar{C} p_2 / \bar{C} v_2 = r$, $\bar{C} p_2 - \bar{C} v_2 = \bar{R}$ を用いて書き直せて

$$W = \left\{ \sqrt{\frac{8r}{3}} / (1+\lambda) \right\}^2 M_{\infty}^2 (r-1) / \left(1 + \frac{r-1}{2} M_{\infty}^2 \right) \quad (\text{A} \cdot 27)$$

である。

補遺 B. 二成分気体の輸送係数

ここで考えているような二成分混合気体に対して Chapman-Enskog 理論の第一近似が成り立つと仮定し²²⁾、粒子間力には、Lennard-Jones (6, 12) ポテンシャルを適用する。

(1) 粘性係数

$$\bar{\mu} = \bar{\mu}_1 / \left(1 + G_{12} \frac{M_1}{M_2} \frac{1-K}{K} \right) + \bar{\mu}_2 / \left(1 + G_{21} \frac{M_2}{M_1} \frac{1-K}{K} \right), \quad (\text{B} \cdot 1)$$

ここで、

$$\begin{aligned} G_{12} &= \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{\mu}_1}{\bar{\mu}_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 / \sqrt{8} \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ G_{21} &= \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{\mu}_2}{\bar{\mu}_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 / \sqrt{8} \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B} \cdot 2)$$

$\bar{\mu}_1$, $\bar{\mu}_2$ は各成分気体の粘性係数で、

$$\bar{\mu}_i = 266.93 \times 10^{-7} (M_i \bar{T})^{\frac{1}{2}} / \bar{\sigma}_i^2 \Omega_i^{(2,2)} (\text{gr} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1}) \quad (\text{B} \cdot 3)$$

であらわされる。これは単原子気体に対して導かれた関係であるが、多原子気体にも適用できることが知られている²³⁾。ここで、 $\bar{\sigma}_i$ は衝突半径 (Å), $\Omega_i^{(2,2)}$ は無次元衝突積分をあらわし、Lennard-Jones 分子間ポテンシャル関数にともなう量である。(B・3) 式を (B・1) 式に代入して、無次元化すると、

$$\begin{aligned} \mu / \mu_e &= \left[\bar{\mu} z / \left\{ \bar{\mu} G + (1 - \bar{\mu} G) z \right\} \right. \\ &\quad \left. + (1 - z) / \left\{ 1 + (\bar{m} G - 1) z \right\} \right] (T / T_e)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B} \cdot 4)$$

$$\text{但し, } G = G_{21}, \quad \bar{\mu} = \mu_1 / \mu_2, \quad \bar{m} = M_2 / M_1 \quad (\text{B} \cdot 5)$$

であり、同一空間にある各成分気体は同一温度をもつと仮定している。

(2) 熱伝導係数

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \bar{\kappa}_1 Eu_1 / \left(1 + 1.065 \bar{G}_{12} \frac{M_1}{M_2} \frac{1-K}{K} \right) \\ &\quad + \bar{\kappa}_2 Eu_2 / \left(1 + 1.065 \bar{G}_{21} \frac{M_2}{M_1} \frac{1-K}{K} \right). \end{aligned} \quad (\text{B} \cdot 6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{G}_{12} &= \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{\kappa}_1}{\bar{\kappa}_2} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 / \sqrt{8} \left(1 + \frac{M_1}{M_2} \right)^{\frac{1}{2}}, \\ \bar{G}_{21} &= \left\{ 1 + \left(\frac{\bar{\kappa}_2}{\bar{\kappa}_1} \right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{1}{2}} \right\}^2 / \sqrt{8} \left(1 + \frac{M_2}{M_1} \right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \quad (\text{B} \cdot 7)$$

$\bar{\kappa}_1$, $\bar{\kappa}_2$ は各成分気体の熱伝導係数で

$$\kappa_i = \frac{15}{4} \frac{\bar{R}}{M_i} \bar{\mu}_i \quad (\text{cal} \cdot \text{cm}^{-1} \cdot \text{sec}^{-1} \cdot ^\circ\text{K}^{-1}) \quad (\text{B} \cdot 8)$$

である。Eucken factor Eu_i は、多原子気体の熱伝導係数を近似するための係数で、

$$Eu_i = 0.115 + 0.354 \bar{C} p_i M_i / \bar{R} \quad (\text{B} \cdot 9)$$

である。無次元化すると、

$$\begin{aligned} \kappa / \kappa_e &= \left[\bar{\kappa} z / \left\{ \bar{\mu} \bar{G} + (1 - \bar{\mu} \bar{G}) z \right\} \right. \\ &\quad \left. + (1 - z) / \left\{ 1 + (\bar{m} \bar{G} - 1) z \right\} \right] (T / T_e)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned} \quad (\text{B} \cdot 10)$$

但し、

$$\begin{aligned} \bar{\kappa} &= \bar{\kappa}_1 Eu_1 / \bar{\kappa}_2 Eu_2 = \bar{m} \bar{\mu} (0.115 \bar{R} + 0.354 M_1 \bar{C} p_1) \\ &\quad / (0.115 \bar{R} + 0.354 M_2 \bar{C} p_2), \\ \bar{G} &= 1.065 \bar{G}_{21} \end{aligned} \quad (\text{B} \cdot 11)$$

である。

(3) Chapman-Rubeson 数

Chapman-Rubeson 数は

$$C = \bar{\rho} \bar{\mu} / \bar{\rho}_e \bar{\mu}_e \quad (\text{B} \cdot 12)$$

で定義され、(3・9) 式、(B・4) 式より

$$C = \left[\bar{\mu} z / \left\{ \bar{\mu} G + (1 - \bar{\mu} G) z \right\} + (1 - z) / \left\{ 1 + (\bar{m} G - 1) z \right\} \right] \cdot \left(\frac{T_e}{T} \right)^{\frac{1}{2}} / \left\{ 1 - (1 - \bar{m}) z \right\} \quad (\text{B} \cdot 13)$$

(4) Prandtl 数

$$Pr = \bar{C}_p \bar{\mu} / \bar{\kappa} = Pr_2 C_p \frac{\mu}{\mu_e} / \frac{\kappa}{\kappa_e} \quad (\text{B} \cdot 14)$$

ここで、 Pr_2 は境界層外端での空気の Prandtl 数である。(B・14) 式より、

$$Pr = Pr_2 (1 - \alpha z) \left[\bar{\mu} z / \left\{ \bar{\mu} G + (1 - \bar{\mu} G) z \right\} + (1 - z) / \left\{ 1 + (\bar{m} G - 1) z \right\} \right] / \left[\bar{\kappa} z / \left\{ \bar{\mu} G + (1 - \bar{\mu} G) z \right\} + (1 - z) / \left\{ 1 + (\bar{m} G - 1) z \right\} \right] \quad (\text{B} \cdot 15)$$

(5) Schmidt 数

$$Sc = \bar{\mu} / \bar{\rho} \bar{D} = Sc_2 \left\{ 1 - (1 - \bar{m}) K \right\} \frac{\mu}{\mu_e} \left(\frac{T_e}{T} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{B} \cdot 16)$$

ここで、 Sc_2 は境界層外端での空気の Schmidt 数であり、二成分拡散係数 \bar{D} は

$$\bar{D} = 262.8 \times 10^{-8} \left(\frac{M_1 + M_2}{2 M_1 M_2} \right)^{\frac{1}{2}} \bar{T}^{\frac{3}{2}} / \bar{p} \bar{\sigma}_{12}^2 \Omega^{(1,1)}, \quad (\text{cm}^2 \cdot \text{sec}^{-1}) \quad (\text{B} \cdot 17)$$

$$\bar{\sigma}_{12} = (\bar{\sigma}_1 + \bar{\sigma}_2) / 2 \quad (\text{\AA}),$$

$\Omega^{(1,1)}$ は無次元衝突積分

を用いた。(B・17) 式より、

$$Sc = Sc_2 \left\{ 1 - (1 - \bar{m}) z \right\} \left[\bar{\mu} z / \left\{ \bar{\mu} z + (1 - \bar{\mu} G) z \right\} + (1 - z) / \left\{ 1 + (\bar{m} G - 1) z \right\} \right] \quad (\text{B} \cdot 18)$$

参 考 文 献

- 1) G.W. Sutton; The Hydrodynamics and Heat Conduction of a Melting Surface, J. Aero/Space Sci., Vol. 25, (1958) pp. 29-32, 36.
- 2) L. Roberts; Stagnation-Point Shielding by Melting and Vaporization, NASA TR R-10, (1959).
- 3) L. Steg and H. Lew; Hypersonic Ablation, The High Temperature Aspect of Hypersonic Flow, (1964), pp. 629-680, Pergamon Press.
- 4) R.T. Swann and J. South; A Theoretical Analysis of Effects of Ablation on Heat Transfer to an Arbitrary Axisymmetric Body, NASA TND-741, (1961).
- 5) K. Karashima, H. Kubota and K. Sato; An Aerodynamic Study of Ablation Near the Region of Stagnation Point of Axially Symmetric Bodies at Hypersonic Speeds, ISAS Rept. No. 425, Inst. Space and Aero. Sci., Univ. Tokyo, (1968).
- 6) A.F. Mills, A.V. Gomez and G. Strouhal; The Effect of Gas Phase Chemical Reactions on Heat Transfer to a Charring Ablator, AIAA Paper No. 70-869, (1970).
- 7) 野村茂昭; アブレーションによるよどみ点空力加熱の減少の測定, 航技研報告 TR-167, (1968).
- 8) D.R. Hartree and J.R. Womersley; A Method for the Numerical or Mechanical Solution of Certain Types of Partial Differential Equations, Proc. Royal Soc., 161A, (1937), pp. 353-366.
- 9) A.M.O. Smith and D.W. Clutter; Machine Calculation of Compressible Laminar Boundary Layers, AIAA J., Vol. 3, No. 4, (1965), pp. 639-647.
- 10) P.R. Nachtheim and P. Swigert; Satisfaction of Asymptotic Boundary Conditions in Numerical Solution of Systems of Nonlinear Equations of Boundary-Layer Type, NASA TND-3004, (1965).
- 11) L. Fox, ed.; Numerical Solution of Ordinary and Partial Differential Equations, (1962), Pergamon Press.
- 12) J.M. Lewallen; A Modified Quasilinearization Concept for Solving the Nonlinear Two-Point Boundary Value Problem, NASA TND-4025, (1967).
- 13) E.P. Bartlett, W.E. Nicolet and J.T. Howe; Heat-Shield Ablation at Super-orbital Reentry Velocities, AIAA Paper 70-202, (1970).
- 14) B. Rashis and R.N. Hopko; An Analytical Investigation of Ablation, NASA TMX-

- 300, (1960).
- 15) H. Kubota; An Aerodynamic Study of Hypersonic Heat Shielding Problem with Local Mass Injection at Multiple Stations, ISAS Rept. No. 460, Inst. Space and Aero. Sci., Univ. Tokyo, (1971).
- 16) S.L. Madorsky; Thermal Degradation of Organic Polymers, Polymer Reviews, Vol. 7, (1964), pp. 130-140, Interscience.
- 17) J.J. Martin; Atmospheric Reentry, An Introduction to Its Science and Engineering, (1966), Prentice-Hall.
- 18) 辛島桂一, 佐藤清, 久保田弘敏; 極超音速軸対称鈍頭物体のよどみ点近傍におけるアブレーションの実験, 東京大学宇宙航空研究所報告, Vol. 4, No. 3 (A), (1968), pp. 335-347.
- 19) F.D. Hains; Equilibrium Shape of an Ablating Nose in Laminar Hypersonic Flow, AIAA J., Vol. 8, No. 7, (1970), pp. 1354-1355.
- 20) L.A. Popper, T.Y. Toong and G.W. Sutton; Three-Dimensional Ablation Considering Shape Changes and Internal Heat Conduction, AIAA Paper No. 70-199, (1970); also Axisymmetric Ablation with Shape Changes and Internal Heat Conduction, AIAA J., Vol. 8, No. 11, (1970), pp. 2071-2074.
- 21) W.D. Hayes and R.F. Probstein; Hypersonic Flow Theory, (1960), Academic Press.
- 22) W.H. Dorrance; Viscous Hypersonic Flow, (1962), McGraw Hill.
- 23) R.B. Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot; Transport Phenomena, (1960), John Wiley & Sons.

TR-230	アナログトルク平衡方式による浮動振子型加速度計の研究 Study on the Analog Torque Rebalance Floated Pendulum Type Accelerometers for Guidance and Control Applications	1971年1月	大月正男, 鈴木孝雄 円居繁治
TR-231	高温タービンノズル翼二次元翼列試験 (第1報 対流冷却翼の実験結果について) Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle. (Part I On the Experimental Results of a Convection-Cooled Blade)	1971年1月	吉田豊明, 高原北雄 能瀬弘幸, 井上重雄 三村富嗣雄, 臼井 弘
TR-232	高温タービンノズル翼二次元翼列試験 (第2報 対流冷却翼の数値計算およびアナログ法による翼表面温度分布について) Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle (Part II On the Temperature Distributions of a Convection-Cooled Blade by Numerical Calculation and Analogue Simulation Test)	1971年1月	吉田豊明, 高原北雄 能瀬弘幸, 井上重雄 三村富嗣雄, 臼井 弘
TR-223	PSD法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点 Studies on PSD Method to Aircraft Structural Design for Atmospheric Turbulence	1971年1月	竹内和之, 山根皓三郎
TR-234	Green関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算 A Calculation of Temperature Distribution with applying Green Function to Two-Dimensional Laplace's equation	1971年1月	西村英明
TR-235	自動着陸予備実験 (1) 電波高度計の性能試験 Preliminary Experiments for Automatic Landing (1) On the Performance Tests of Radio Altimeters	1971年4月	樋口一雄, 堀川勇壮 森 幹彦, 小川 鑽 真柳光美, 渡辺 顕 名越孝行
TR-236T	Small-Strain Deformations Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials. Part I - Constitutive Equation	June 1971	Tatsuzo KOGA
TR-237	自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しょう実験 Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristics of FFM-10 Model	1971年4月	河崎俊夫, 塙 武敏 斉藤秀夫, 高島一明 河本 巖
TR-238	リフトジェットエンジン JH100H の動特性について Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR100H	1971年5月	西尾健二, 遠藤征紀 杉山七契, 越沼 威 大畑 敏美

航空宇宙技術研究所報告 239 号

昭和 46 年 6 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) T182
印刷所 第一印刷株式会社
東京都新宿区富久町 58

