

UDC 533.661:  
629.735.45.015.7

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-245

ヘリコプタ高度・速度線図および臨界決定点の  
解析的推定法

古茂田真幸

1971年8月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-221 先端のにおいフレヤつき物体の空力特性  
Aerodynamic Characteristics of a Flared  
Body with Blunt Nose 1970年10月 谷 喬, 河本 巖  
榊原盛三, 野田順一  
樋口 博 (東京大学)
- TR-222 東北地方太平洋沿岸航空路上における乱気流  
観測  
Measurements and Analysis of Atmospheric  
Turbulence on the Pacific Coast Air Route  
of the Tohoku District 1970年9月 竹内和之, 山根皓三郎  
矢沢健司, 小野幸一  
外崎得雄
- TR-223 球の仮想質量の円筒境界干渉  
Cylindrical Boundary Interference on Virtual  
Mass of a Sphere 1970年9月 河野長正
- TR-224 吹出しをともなう鈍頭物体の衝撃波離脱距離  
Shock Stand-off-Distance with Mass Injection 1970年12月 吉永 崇
- TR-225 NAL-35 DT 型ロケットの構造試験  
Results of Structural Experiments on NAL-  
35 DT Rocket Vehicle 1970年11月 ロケット構造研究グルー  
プ
- TR-226 薄い片持後退角翼の遷音速フラッタ特性にお  
よぼす集中質量の位置の影響について  
Some Effects of Systematically Varied Loca-  
tion of One Concentrated Mass on Transo-  
nic Flutter Characteristics of Sweptback  
Thin Cantilever Wings 1970年11月 中井暎一, 森田甫之  
高木俊朗
- TR-227 高負荷燃焼器の空気孔からの流れについて(II)  
—二孔の実験および簡単な解析方法—  
Investigation of Air Stream from Combustor-  
Liner Air-Entry Holes (II) Experiments  
with Paired Air-Entry Holes and A  
Numerical Analysis— 1970年12月 相波哲朗, 井上真幸
- TR-228 自由飛行模型 FFM-10 の運動特性と飛しょ  
う試験におけるデータ処理法  
Flight Dynamics of Free-Flight Model  
FFM-10 and Data Analysis Method for  
Free-Flight Tests 1970年12月 高島一明
- TR-229 単発 STOL 実験機 (FA-200 XS) について  
Development of the FA-200 XS Experi-  
mental Airplane 1970年12月 飛行実験部
- TR-230 アナログトルク平衡方式による浮動振り子型加  
速度計の研究  
Study on the Analog Torque Rebalance  
Floated Pendulum Type Accelerometers  
for Guidance and Control Applications 1971年1月 大月正男, 鈴木孝雄  
円居繁治
- TR-231 高温タービンノズル翼二次元翼列試験  
(第1報 対流冷却翼の実験結果について)  
Two-Dimensional Cascade Test of an Air-  
Cooled Turbine Nozzle  
(Part 1 On the Experimental Results  
of a Convection-Cooled Blade) 1971年1月 吉田豊明, 高原北雄  
能瀬弘幸, 井上重雄  
三村富嗣雄, 白井 弘
- TR-232 高温タービンノズル翼二次元翼列試験  
(第2報 対流冷却翼の数値計算およびア  
ナログ法による翼表面温度分布について)  
Two-Dimensional Cascade Test of an Air-  
Cooled Turbine Nozzle  
(Part 2 On the Temperature Distribu-  
tions of a Convection-Cooled Blade by  
Numerical Calculation and Analogue  
Simulation Test) 1971年1月 吉田豊明, 高原北雄  
能瀬弘幸, 井上重雄  
三村富嗣雄, 白井 弘
- TR-233 P S D法の大気乱れに対する航空機強度設計  
への応用とその問題点  
Studies on PSD Method to Aircraft Struc-  
tural Design for Atmospheric Turbulence 1971年1月 竹内和之, 山根皓三郎

# ヘリコプタ高度・速度線図及び臨界決定点の 解析的推定法\*

古茂田真幸\*\*

## An Analytical Method to Predict Height-Velocity Diagram and Critical Decision Point of Rotorcraft

By Masaki KOMODA

An analytical method utilizing the optimization techniques to estimate the height-velocity diagram and the critical decision point of rotorcraft is proposed. It is pointed out that the control inputs of the pilot to the system equations describing rotorcraft dynamics are obtained as the solution of an adequately stated optimization problem, in which the final rotor rpm is maximized, or equivalently, the height loss is minimized or maximized. It is also shown that the degree of optimality of controls can be evaluated by means of impulsive response functions associated with the optimal trajectories thus obtained. In order to show the applicability of this approach, sample calculations are presented for high hover point, knee point and for low hover point of height-velocity boundary, as well as for a partial power climb and a rejected take-off from critical decision point. State equations which are linearized with respect to acceleration factors at G.G. are used for simplicity. A comparison with FAA flight test data as to the high hover point is included.

### まえがき

従来から開発あるいは提案されてきた数多くの VTOL 機のなかで、恐らく唯一の実用機型式であるヘリコプタが、実はほとんど STOL 機型の運用を余儀なくされており真の VTOL 機として用いられている例が極めてまれであることは案外認識されていない。民間用旅客輸送を目的とした耐空類別 TA/TB 級\*\*\* の機体についてその理由を考えてみれば、発動機故障時の飛行の安全を確保する為の要求事項が、VTOL 運航によって得られる運用上の利益をあきらめさせるほどに厳しい事がその原因と考えられる。すなわち、あるヘリコプタが型式証明をうる為にはいわゆる“安全を確保するための技術上の基準”をみたすことが必要であって、その要求事項をまとめた耐空性審

査要領<sup>1)</sup>によれば、“臨界発動機\*\*\*\* が停止し、他の発動機（もしあれば）が離昇馬力で運転されているとき、零を含むすべての速度において安全な着陸をすることができないような高度限界があれば、その限界および前進速度に対するその変化量を定めておく”ことが要

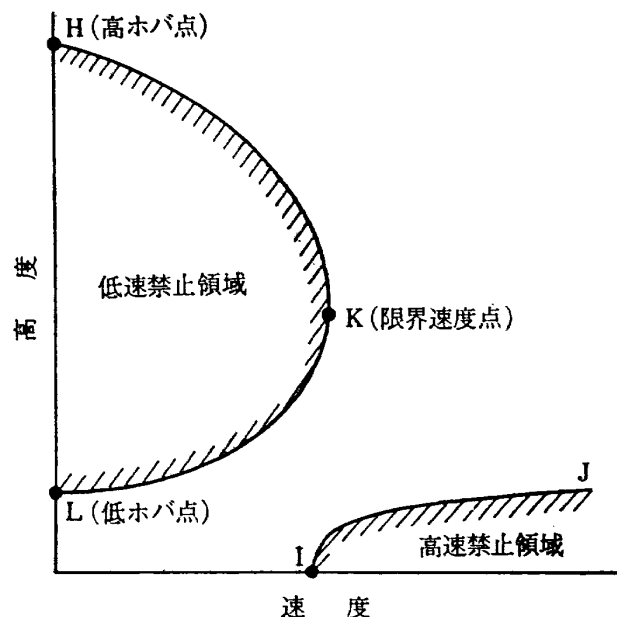


図 1 H・V 線図の例

\* 昭和46年 6 月25日 受付

\*\* 飛行実験部

\*\*\* 耐空類別の定義は後述のとおりである。

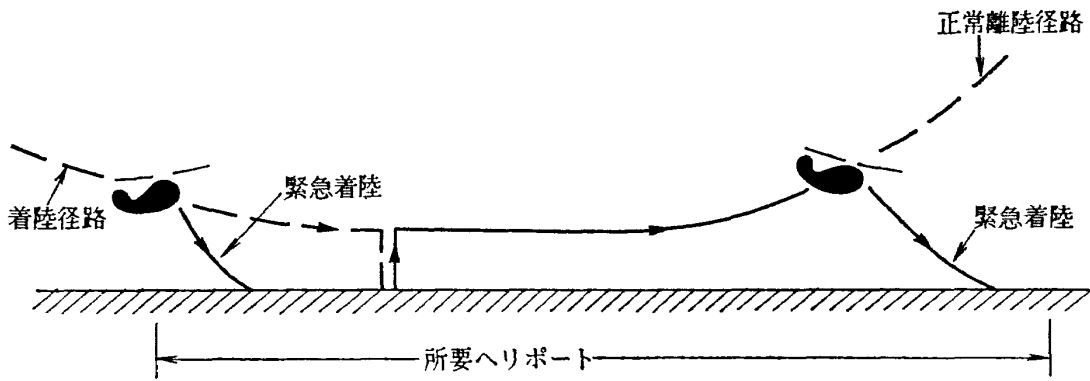
\*\*\*\* それが故障したときに飛行性に有害な影響をおよぼすような発動機を臨界発動機 (Critical Engine) という。

求される。この高度・速度線図が H・V 線図 (Height-Velocity Diagram) とよばれるものであって、通常、高速側および低速側の二つの禁止領域包囲線が存在する (図 1 参照)。

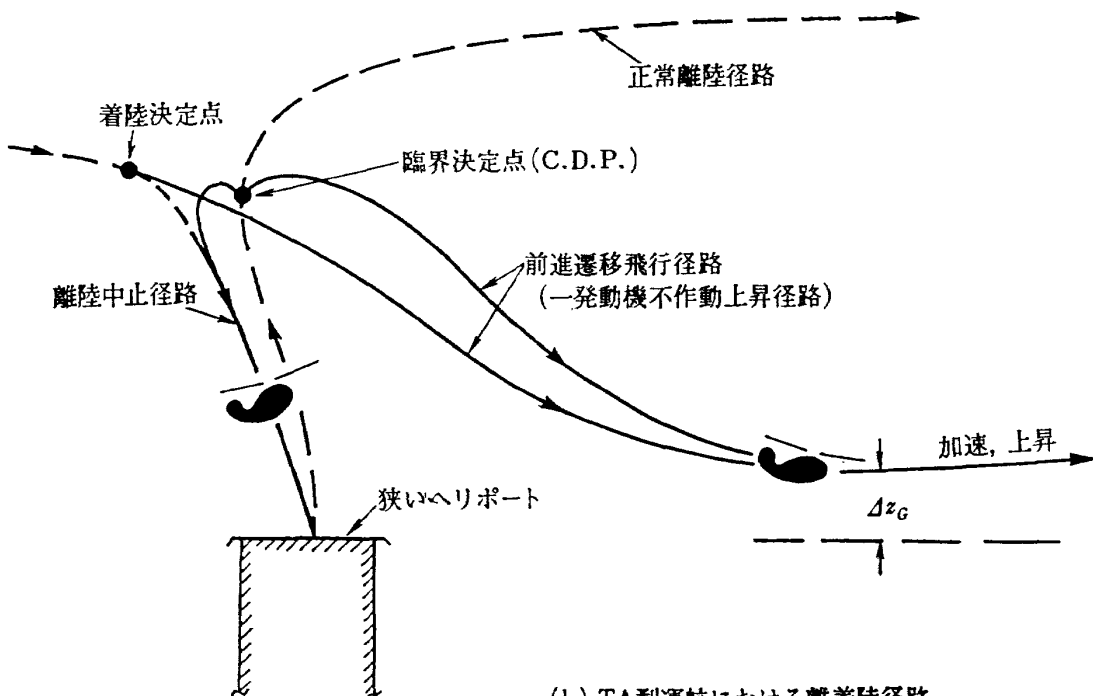
「離着陸を含むすべての飛行はこの包囲線内部の飛行禁止領域を避けて計画されなければならないから、その離着陸径路は図 2(a) に示すようなものとならざるをえない。定義上この径路に沿う任意の点で、その高度・速度の組合せは安全な緊急着陸 (Emergency Landing) を保証するものではあるが、実質的に滑走離着陸を必要とするために、一般に STOL 機同等の大きさのヘリポートを要することになる。

図 1 の低速禁止領域の限界について考えてみる。あ

る高度でホバリング中、臨界発動機が突然停止したとする。放置すればロータ回転速度、およびそれに伴う推力が低下して沈下率が一方的に増大する。初期高度が充分低ければ、パイロットはロータの回転エネルギーを徐々に放出して沈下率の増大を抑制し、安全に着陸できるが、ある程度初期地上高が高くなると沈下率の増大を抑止するために必要なコレクティブ・ピッチの量と、回転速度の低下とが釣合を保ちえなくなって制限以上の沈下率で接地し、ハード・ランディングにいたる。この初期高度の限界点が低ホバ点 (図 1 の L 点) であり、そこからの着陸径路は本質的に垂直降下である。逆に発動機停止時の地上高が十分高ければ、機体前進速の増加とともに誘導パワが減少する事実を利用



(a) TB型運航における離着陸径路



(b) TA型運航における離着陸径路

図 2 離着陸径路

してロータ回転速度の低下を防止するために前方に加速し、場合によってはロータ回転エネルギーを一度貯えた上で引起し、安全な接地を行うことができる。この間、もし釣合降下飛行が可能な状態を経過するものならば任意に高い地上高からの安全な緊急着陸が可能である。このような初期高度の下限が高ホバ点 (H点) であって、そこからの着陸経路は本質的に前進速を伴う遷移飛行によるものである。H点、L点共に、初期前進速が大きくなって行けば必要パワの減少分だけ事情が楽になってゆくから、やがて限界速度点 (K点、Knee Point) において高高度限界と低高度限界とは一致する。

高速禁止領域の高度限界 (J点) は、いわゆる応答時間 (Reaction Time)\* および機体の縦揺応答特性によって定まる。すなわち高速飛行状態では、機体のもっている運動エネルギーは、ロータ回転数を低下させずに接地速度まで減速、フレアするのに十分なものであって、発動機停止から減速姿勢に入るまでの間に失う高度が図1中のJ点の高度に対応する。また降着装置の基準強度で定まる許容最大接地速度が高速禁止領域の限界速度点 (I点) をほぼ決定する。

上述のような仕組でできあがる高度・速度限界が、密度高度、外気温度、機体重量等の運用条件によって左右されるのは当然であって、一般に密度高度が低いほど機体重量が軽いほど、禁止領域は小さく、また双発機の一発動機停止時の方が単発機の場合よりも禁止領域が小さい。このような高度・速度面上の禁止領域を残して STOL 的運用を覚悟する代償として、大きな離陸重量、高い運用密度高度を得ようとする運用形態には、回転翼航空機輸送 TB 級 (Transport Category B) と名付けられる耐空性が要求される。TB 型運航では、いやしくも臨界発動機が故障したときには直ちに緊急着陸を行わなければならないから、大きなヘリポートが要求され、航空路の選択に受ける制限が大きい。

VTOL 機として致命的なこの欠陥を除くために回

\* 臨界発動機停止に伴う警報装置からの警報、あるいは出力不足による上昇率、ロータ回転速度等の低下を認知したパイロットが必要な緊急操作をとり始めるまでの時間であって、現行のガス・タービン発動機では燃料弁の開止から出力トルクの半減までの所要時間 0.3~0.5 sec にパイロットの視覚から手動動作開始までの応答時間 0.2~0.5 sec を加え、約 1 sec の遅れ時間を考えるのが安全側の仮定のようなものである。<sup>たとえ</sup>

2)

転翼航空機輸送 TA 級 (Transport Category A) が用意されている。TA 級では臨界発動機の故障に際して必ずしも緊急着陸を行う必要はない\*\*。この状況を図2 (b) に示してある<sup>3)</sup>。まず臨界決定点 (Critical Decision Point—CDP) が定義される。臨界決定点とは、高度・速度面上に指定された一点であって、その点で臨界発動機に故障が生じたとき、パイロットは離陸中止径路 (Rejected Take-Off Path) に沿って出発点に緊急着陸を行うか、もしくは一発不作動離陸上昇径路 (Take-Off Climb-Out Path)\*\*\* に沿って残存発動機の出力のみで加速上昇を行うかの選択が可能であり、その点以下の高度では緊急着陸を、またその点以上では離陸上昇を行うことが義務づけられているような点である。定義上、臨界決定点速度は0である必要はないが、もしそれが0でなければ、離陸中止径路は必然的に前進降下飛行に対応するものとなり、ある程度の着陸滑走を免れることはできない。元来、TA 型運航は狭隘な地域での運航を目的とするものであるから、実用上の見地からは臨界決定点速度は0と考えて差支えない。換言すれば、真の VTOL 機として TA 型運航が可能な為には、前記の如くに定まる高度・速度線図の低速飛行禁止領域が実質的に消滅するような運用条件、すなわち密度高度、外気温度、機体重量の組合せが得られることが必要である。一般にこの条件は TB 級に許容される場合と比較して離陸全備重量ではともかく、有償荷重で見ればかなり苛酷な減少となって現われ、騒音、耐全天候性の問題と共に民間輸送用 VTOL 機としてのヘリコプタの価値を低下させる主要因となっている。

臨界発動機の故障に伴うこのような不具合を解消する為に、都市間あるいは都市内の旅客輸送を目的とする将来の VTOL ヘリコプタにおいては、一発動機故障時にも地面効果外ホバリング能力が残されているような (つまり、どの発動機も臨界発動機でないような) 動力装置を装備すべきであるといった考え方が生まれてきた<sup>4)</sup>。三発もしくはそれ以上の多発機がよいということである。このような機体においては、高度・速度線図上に禁止領域も存在しないし、臨界決定点といった考え方も不要になってくる筈であって、い

\*\* TB 級が多発、単発を問わないのに反し、TA 級ではもちろん多発機のみを対象とする。

\*\*\* 離陸上昇飛行といっても本論文で扱うような発動機故障直後の運動は降下飛行を含むのであるから、実質は前進遷移飛行 (Forward Transition Flight) 呼ばれるべきものである。

わば“超 TA 型”とでも呼ばれるべき運航が可能であろう。この場合巡航とホバリング(あるいは離着陸)における必要馬力が釣合のとれたものであること(パワ・マッチング)が望めないのは我慢するにしても、次の事実には注意すべきである。ちょうど TA 型の運航が有償荷重が大幅に制限を受けるという理由であまり実用化されず、むしろ TB 型での運航が主流を占めて来たのと同様に、設計的には超 TA 型運航の可能な機体をもっと大きな有償荷重、もっと高い密度高度での運航を目的として、TA 級、あるいは TB 級にふさわしい運用に供せられる可能性が強いという事である。この場合、再び前記の諸問題が残されている訳である。

上記のように、“普通 N”<sup>\*</sup> あるいは“TB 級”にあつては高度・速度線図の形状を、また TA 級にあつては臨界決定点高度を、与えられた機体諸元、運用条件について推定、ないし決定することはヘリコプタの実用価値を定める上で極めて重要である。これらの推定、決定の第 1 段階は初期設計時に必要となるものであつて、運航性能上の要求仕様を搭載発動機の個数および出力、機体重量、ロータの極慣性能率、降着装置の基準強度、操縦性、等に対する要求事項に書き直すことと等価である。第 2 段階は試作完成時、あるいは発動機の改良に伴う出力増加時における飛行試験による決定である。飛行試験に関していえば一般にかなりの費用と期間とを要するものとされているが、これは試験そのものの含む危険性、およびパラメタの数の多さ、によるものと考えられる<sup>6)</sup>。

これらの困難を打開するためには、現象を整理し、簡単に統一的な、できれば無次元化された法則を見出し、個々の機体についての飛行試験を簡略化しなければならない。米国連邦航空局 (Federal Aviation Agency) の Hanley 等はこの目的に対し、一連の飛行試験を行い<sup>7,8,9)</sup>、その結果を基にして単発、単ロータ・ヘリコプタの高度・速度線図を作るための実験的公式を作った<sup>10)</sup>。前三者はそれぞれ Bell 47, Hughes 269, Sikorsky S 58 と覚しき三機種についての各 500 ないし 1,000 点の試験結果から、限界速度点、低ホバ点、高ホバ点、の間の相互関係、および機体重量、運用密度高度による影響を整理したものである。これらの結果を用いて後者においては、類似型式の単発、単ロータ・ヘリコプタ一般について、 $h_{\max}=10-(H_D/$

$1,000)$ ,  $\Delta v_{cr}=22.6(\Delta W/A)+2.5(H_D/1,000)$ ,  $h_{cr}=100+(H_D/1,000)$ ,  $h_{\min}=200+.1386 v_{cr}^2$  の実験式を導いている<sup>\*\*</sup>。ただし  $h_{\max}$ (ft) は低ホバ点高度、 $h_{cr}$ (ft) は限界速度点高度、 $h_{\min}$ (ft) は高ホバ点高度、 $v_{cr}$ (CAS, mph) は限界速度点速度、 $\Delta v_{cr}$  はその変動、 $\Delta W/A$ (lb/ft<sup>2</sup>) は円板荷重の変動、 $H_D$ (ft) は密度高度である。この提案が正しければ、 $v_{cr}$  の基準として  $h_{cr}=100$  ft となるようなものさえ実験的に求めることができれば、所望の機体重量、密度高度での包囲線図を作ることができる訳で、画期的な改善がなされたと云うことができる。Pegg<sup>11)</sup> も同じ飛行試験データから出発し、同様の実験公式についての若干の理論づけを試みている。これら文献に注記されているように、各試験点での着陸操作が最良のものであったか否かは、パイロットが感覚的に判断しており、しかもパイロットの数もきわめて限定されているために、操作の最適性についての疑問が残る。さらに、三種のヘリコプタにはスキッド型の降着装置のものも尾輪式の三車輪降着装置のものもあつて、それらの差が表面に現れていない。したがって接地直前の許容フレア角、許容沈下率、許容接地速度等の物理量が高度・速度線図の形状におよぼす効果も不明である。

TA 型運航に関連して臨界決定点を定めることについては FAA の飛行試験<sup>7-9)</sup>に見合うような系統的な試験結果は公表されていない。

高度・速度線図の形状および臨界決定点の決定、あるいは一般に臨界発動機停止後のヘリコプタの力学、を解析的に扱った例はいくつか見られる<sup>2,6,11-18)</sup>が、入力操作の最適性を論じたものは一つもない。計算機およびその利用技術の進歩した今日、系に対する入力、すなわちパイロット操作、の標準形さえ定めておけば、これをヘリコプタの運動を表現する動的系の入力として加えることによって、各飛行状態の時間歴、あるいはその結果得られる禁止領域限界等を精度良く求めるのにさして困難はないはずである<sup>19)</sup>。問題はパイロット操作をいかに想定するか、またパイロット操作をいかに標準化するか、にあると考えられる。再び高ホバ点を例にとつて考えてみよう。発動機停止という緊急事態においては、パイロットはロータ回転速度を許容限界内に保ちながらとにかく着陸し、接地時の

<sup>\*\*</sup> 元の実験が、密度高度は海面上から 9,800~6,200 ft、機体重量はある基準状態から  $\pm 10\%$  の変動、について行われているため、これらの実験式も同程度の適用範囲でしか成立しないと思われる。

<sup>\*</sup> 耐空類別が回転翼航空機普通 N<sup>6)</sup>の意。本文中では TB と N とを区別する必要がないので、以下 TB 級に含めて考える。

衝撃（接地時の沈下率）をできるだけ小さくしようと努力するであろう。少し考えれば判るように、この努力は接地時の前進速、沈下率が一定に与えられているとき、できるだけ低い初期高度から着陸を成功させようとする努力と同じものである。このような見方をすれば、なんらかの意味での最適性（最大/最小性）というものがパイロット操作という制御入力の特長の手がかりを与えていると考えられる。

本報告では前述のような意味でヘリコプタのVTOL性を左右する臨界発動機停止後の操縦入力について、その最適性を追求することによって標準化する方法を提案する。臨界決定点からの離陸中止経路についての比較的厳密な最適化、およびそれに基づく許容最高高度の推定解析法についてはすでに報告した<sup>6)</sup>ので、前進遷移飛行中での高度損失、および一般に高度・速度線図飛行禁止領域限界の解析を主としてここに報告する。

本文中では解析の一般化、簡単化のためにいくつかの仮定を設けるが、一方ではこれら仮定の不適切さによって、他方では実機飛行試験の操作の非最適性によって、飛行試験結果と解析結果とが直ちに一致することは必ずしも期待できない。しかし、仮定の不適切さが飛行試験結果のフィード・バック等によって任意の精度まで修正されるものであるとすれば、解析結果は理論上の飛行限界を与える筈である。最適化の別の側面は、最適化の副産物として得られるインパルス応答関数、あるいは影響関数を用いて最適操作からの誤操作、あるいは問題に含まれているいろいろなパラメータ（機体の設計パラメータ、運航条件等）が最終的な性能におよぼす影響を知ることができることである。

特に出力不足状態での運動を整理する為のパラメータとして、Kファクタと呼ばれる無次元化パラメータ  $k = [C_{P_{av}} - (1/8)\sigma\delta(\Omega_T/\Omega_0)^3]/C_T^n$  が提案されている<sup>7)</sup>。ここで  $C_{P_{av}}$  は残存発動機出力係数、[ ] 内第2項は目標ロータ回転速度  $\Omega_T$  における平均プロファイル・パワー係数、 $C_T$  は推力係数であり、また指数  $n$  は1.5に近い数字をとるものである。 $C_T^{1.5}$  は地面効果外ホバリング時の理想的必要誘導パワーの  $\sqrt{2}$  倍であるから、 $k$  は残存発動機からの供給パワーのうちで推力を発生するのに必要な誘導パワーとして消費される部分が、ホバに必要な誘導パワーの何割に該当するかを表わすパラメータである。特定の機体について考えているとき、 $C_{P_A}$ 、 $C_{P_0}$ 、 $C_T$  等は機体重量、密度高度、および外気温度を与えれば定められるから、 $k$  はこれらすべての物理量を包括している簡単なパラメータである。

Kファクタで現象を無次元化して書き表わすという点で同文献は本報告の一つの出発点を与えている。

基本的な仮定は二つある。第1は準定常の仮定、すなわち空気力の表現にはすべて定常状態のそれを用い、機体の縦揺運動自由度は無視して質点運動として取扱うということ、である。この仮定によって重心点における加速度倍数を制御変数と考えることができる。第2の仮定、すなわち線型化の仮定、はパワーの表現式、あるいは所要コレクティブ・ピッチ等の表現式を制御変数について線型化した形で用いるという意味である。文献6)の経験によって、個々の細かな停留軌道を探ることよりも、制御変数、状態変数に課せられる現実的な諸拘束条件を満たすような部分軌道から全体として最適な解軌道を組立てることの方がより本質的と思われるからである。

第1章では状態方程式、各種拘束条件式等を導きながら無次元形で問題を記述し、第2章では一自由度に縮小した最適問題について解軌道の大域的な構成を考察し、第3章および第4章ではそれぞれ高度・速度線図および臨界決定点に関する解析結果を述べ、さらに第5章では制御変数の慣性を含む諸パラメータの影響を考察してある。また付録Aでは準定常の仮定に対する補足を、付録Bでは準定常の仮定によって必要となる広義トリムおよびそれに関連した線型化表式を、更に付録Cでは必要パワーの表式をしるしてある。付録Dは本文中に適用した最適化理論の関連部分をまとめたものである。

## 記号

- A: 主ロータ円板面積 (ft<sup>2</sup>)
- a: 翼素断面揚力傾斜 (1/rad)
- $\alpha_1$ : 縦のフラップ角 (deg または rad)
- B: 翼端損失係数
- $B_{1S}$ : サイクリック・ピッチ入力 (deg または rad)
- b: ブレード枚数
- $C_{1,2,\dots}$ : ラグランジュの未定常数
- $C_{H0}$ : プロファイル H 力係数
- $C_T$ : 推力係数
- $C_P$ : パワー係数
- c: 線積分分路, または軌道, またはブレード弦長 (ft)
- DL: 円板荷重 =  $W/A$  (lb/ft<sup>2</sup>)
- $D_x$ : 形状抵抗 (lb)
- $D_z$ : ダウン・ロード (lb)
- F: (2.2.3) 式

- $g$ : 重力加速度 (ft/sec<sup>2</sup>)  
 $H_0$ : ロータ・プロファイル  $H$  力 (lb)  
 $H_D$ : 密度高度 (ft)  
 $H$ : ハミルトン関数  
 $h_{\max/\min}$ : FAA による高度・速度線図の低/高高度  
 限界 (ft)  
 $i$ : ロータ軸取付角 (rad)  
 $J$ : ロータ極慣性能率 (slug·ft<sup>2</sup>), または評価関  
 数  
 $k$ :  $K$  ファクタ, (1.4.6) 式  
 $k_x$ : 安定化装置のゲイン (in./rad/sec)  
 $M, N$ : 無次元仮想制御変数  
 $m, n$ : 重心点での加速度係数 (無慣性制御変数)  
 $P_A$ : 発動機の供給パワー (HP)  
 $P_0$ : プロファイル・パワー (プロファイル  $H$  力に  
 よる成分は含まない) (HP)  
 $p_{s,4}$ : ( $m, n$ ) に対するインパルス応答関数  
 $q$ : (1.4.4) 式  
 $R$ : ロータ半径 (ft)  
 $s$ : ラプラス演算子 (1/sec)  
 $T$ : 推力 (lb)  
 $t$ : 時刻 (sec)  
 $U$ : 水平前進速度 (ft/sec)  
 $V$ : 沈下率 (ft/sec)  
 $v$ : ロータ平均吹下し速度 (ft/sec)  
 $v_h$ : ホバ時の  $v$  (ft/sec)  
 $v_{cr}$ : FAA による限界速度 (CAS, mph)  
 $W$ : 機体重量 (lb)  
 $w$ : 無次元化機体重量, (1.4.1e) 式  
 $X$ : 水平距離 (ft)  
 $x$ : 無次元化された水平距離, (1.4.1a) 式  
 $Z$ : 高度差 (ft)  
 $z$ : 無次元化された高度差, (1.4.1a) 式  
 $\alpha_0$ : ブレード断面有効迎角 (rad または deg)  
 $\alpha_p$ : (C. 2. 4) 式  
 $\beta$ : フラップ角 (rad)  
 $\delta$ : ブレード断面抵抗係数, または“変分”  
 $\delta_{cp}$ : コレクティブ・ピッチ・レバの動き (in.)  
 $\delta_x$ : 操縦桿の縦の動き (in.)  
 $\Delta$ : “増分”  
 $\epsilon$ : 一次微小量  
 $\eta_D$ : ダウン・ロード・ファクタ  
 $\eta_P$ : パワ損失係数  
 $\Theta$ : ロータ推力ベクトル後傾角 (rad または deg)  
 $\Theta_B$ : 機体縦揺姿勢角  
 $\theta_0$ : ブレード付根のピッチ角 (rad または deg)  
 $\theta$ : ブレード代表断面でのピッチ角 (rad または  
 deg)  
 $\theta_1$ : ブレード振り上げ (rad または deg)  
 $\theta_a$ : 下限ディテント位置に対応する  $\theta$  (rad また  
 は deg)  
 $\kappa$ : (5.2.8) 式  
 $A_{1,2}, \dots$ : ( $M, N$ ) の拘束に対するラングンジュ乗数  
 $\lambda_{1,2}, \dots$ : ( $m, n$ ) の拘束に対するラグランジュ乗数  
 $\mu$ : 無次元前進速, (1.4.1b) 式  
 $\nu$ : 無次元沈下率, (1.4.1b) 式  
 $\pi, \varpi$ : (3.1.14) 式, (3.1.15) 式  
 $\rho$ : 空気密度 (slug/ft<sup>3</sup>)  
 $\sigma$ : ソリディティ比  
 $\tau$ : 無次元化時刻, (1.4.1c) 式  
 $\Phi_{M,N,Q}$ : (2.1.4a) 式  
 $\Omega$ : ロータ回転角速度 (rad/sec)  
 $\omega$ : 無次元ロータ回転角速度, (1.4.1d) 式  
 添字その他  
 $( )_i$ : “発動機停止時刻”  
 $( )_0$ : “パイロット操作開始時刻” あるいは“初期”  
 $( )_f$ : “終端”  
 $( )_{CDP}$ : “臨界決定点”  
 $( )^\sigma$ : “一発動機不作動上昇”  
 $( )^R$ : “離陸中止”  
 $( )^\pm$ : ある時刻の“直後/直前”  
 $(\bar{\quad})$ : “擬約合状態”, あるいは“基準状態”  
 $(\hat{\quad})$ : “最適”  
 $(\bar{\quad})$ : 制御の“上限”に関する量  
 $(\underline{\quad})$ : 制御の“下限”に関する量  
 $\langle (\quad) \rangle$ : ある“基準状態”  
 $(\dot{\quad})$ :  $d(\quad)/d\tau$   
 $\Delta(\quad)$ : “増分”, あるいは“変動分”  
 $\delta(\quad)$ : “変分”

## 1. 問題の記述

本章では、運動方程式を含む必要な条件式を導き、  
 単純化のために用いた仮定について考察した上で線型  
 化および無次元化を行い、状態方程式ならびに拘束条  
 件、境界条件を一般的に記述する。同時に  $K$  ファク  
 タの値によって対象とする問題を分類して示す。

### 1.1 基礎方程式

臨界発動機の停止した時刻を  $t=t_t(=-\Delta t_0) < 0$  と  
 し、ある応答時間  $\Delta t_0$ (sec) (3 頁脚注参照) 後にパイ  
 ロット操作が開始されたとしてこの時刻を  $t=0$  にえ



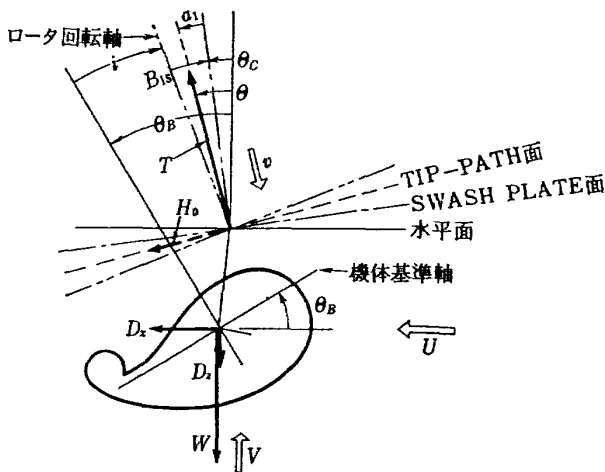


図3 座標系と記号

らんで垂直面内の運動を考える。(図3参照)。

$t=0$  において機体重心の占める位置を原点にとり、それぞれ水平前方および垂直下方に距離  $X(ft)$  および高度差  $Z(ft)$  を測る。機体重心の  $(X, Z)$  方向の速度成分をそれぞれ  $(U, V)$  (ft/sec) とすれば、

$$\frac{dX}{dt} = U, \quad \frac{dZ}{dt} = V \quad (1.1.1a, b)$$

である。また  $(X, Z)$  方向の機体重心の加速度成分を重力加速度  $g(ft/sec^2)$  を用いて  $(mg, ng)$  で表わせば

$$\frac{dU}{dt} = mg, \quad \frac{dV}{dt} = ng \quad (1.1.2a, b)$$

である。特に  $n=0$  は沈下率一定(上昇率一定)の飛行状態を表わす。

別個発動機で駆動される推進用プロペラとか、揚力を分担する固定翼とかを有する場合を除いて、主ロータによる推力ベクトルを変化させることによって操縦力を発生させている通常のヘリコプタについて考えれば、 $(m, n)$  は次のように書くことができる。

$$m = [-H_0 - D_x - T \sin \theta] / W \quad (1.1.3a)$$

$$n = 1 - [T \cos \theta - D_z] / W \quad (1.1.3b)$$

ここで  $W(lb)$  は機体重量、 $H_0(lb)$  はロータ・プロファイル  $H$  力、 $T(lb)$  は主ロータ推力、 $D_x(lb)$ 、 $D_z(lb)$  はそれぞれ胴体等主ロータ以外の機体部分に発生する空気力の  $(X, Z)$  方向成分であり、また  $\theta$  (rad) は推力ベクトルが  $(-)$   $Z$  軸となす角(推力ベクトルが後方に向くとき正)である。

ロータ回転軸まわりのトルクの平衡を考えると、

$$J \frac{d\Omega}{dt} = \frac{550(P_A - P)}{\Omega} \quad (1.1.4)$$

が得られる。ここで  $J(\text{slug} \cdot \text{ft}^2)$  は全主ロータおよびそれと共に回転する部分の全極慣性モーメント、 $\Omega$  (rad/sec) はロータ回転速度、 $P_A(\text{HP})$  は残存発動機からロータに供給される利用可能馬力、 $P(\text{HP})$  は全ロ

ータで吸収される必要馬力である。

## 1.2 準定単化の仮定

通常ヘリコプタにあつては、パイロットはコレクティブ・ピッチ・レバ入力  $\delta_{cp}(\text{in.})$ 、および操縦桿入力  $\delta_x(\text{in.})$  を操作することによって推力ベクトルを機体に対して変化させ、その結果生ずる推力ベクトル  $(T, \theta)$  の地面に対する変化を利用して操縦を行う。

ある飛行状態において、コックピット・コントロール  $(\delta_{cp}, \delta_x)$  に対する推力ベクトル  $(T, \theta)$  の応答の仕方は、ロータ型式、すなわちシングル・ロータかタンデム・ロータか、また関節型か剛節型かによって、さらに組み込まれた安定化装置の特性によって、あるいはまた重量、重心位置等の組合せによって各機体固有の特性を有するが、いずれにしても動的、過渡応答的なものである。したがって、パイロット自身の操縦速度が十分速いと仮定しても、ブレードの運動、非定常な空力特性、操縦系統の動特性、人工的安定化装置の動特性等を考慮した上で胴体の縦揺運動を(1.1.2)~(1.1.4)とあわせて解かなければ精度のよい応答特性は得られない。

一方、高次数の動的系に正直に最適化手法を適用することは、しばしば実用上の困難を伴う。解析の精度と手数とを妥協させるために、縦揺運動の自由度を無視して、実際の制御量であるコックピット・コントロール  $(\delta_{cp}, \delta_x)$  の代りに主ロータの推力ベクトル  $(T, \theta)$  を独立な二個の慣性のない制御量と考えることにする。すなわち、 $(T, \theta)$  の  $(\delta_{cp}, \delta_x)$  に対する応答が、状態変数  $(X, Z)$ 、 $(U, V)$ 、 $\Omega$  のすべての値域にわたって十分速いといふかなり粗っぽい仮定を設けることによって、最適化の手順を単純化しようといふのである。(付録 A. 参照)

上記の仮定の下では、(1.1.4)中のロータ必要馬力  $P$  は準定常状態\*で求められ、状態変数  $(Z, U, V, \Omega)$  および制御変数  $(T, \theta)$  の代数関数として記述される。さらに、(1.1.3)から判るように、制御変数  $(T, \theta)$  は、与えられた状態変数の値に対して  $(m, n)$  の関数として一義的に定まる。この意味で、機体重心点での加速度倍数  $(m, n)$  を二個の独立な制御変数とみなすこともできる。上記の仮定の下では、 $(m, n)$  もまた慣性のない制御量であつて、有限回のステップ状の不連

\* ある状態  $(Z, U, V, \Omega)$  において、必ずしもトリムされない任意の  $(T, \theta)$  について、仮想的に  $W$  や  $D_x$  が変化して  $m=n=0$  の状態が持続されると想定する。広義のトリム状態といつてもよい。

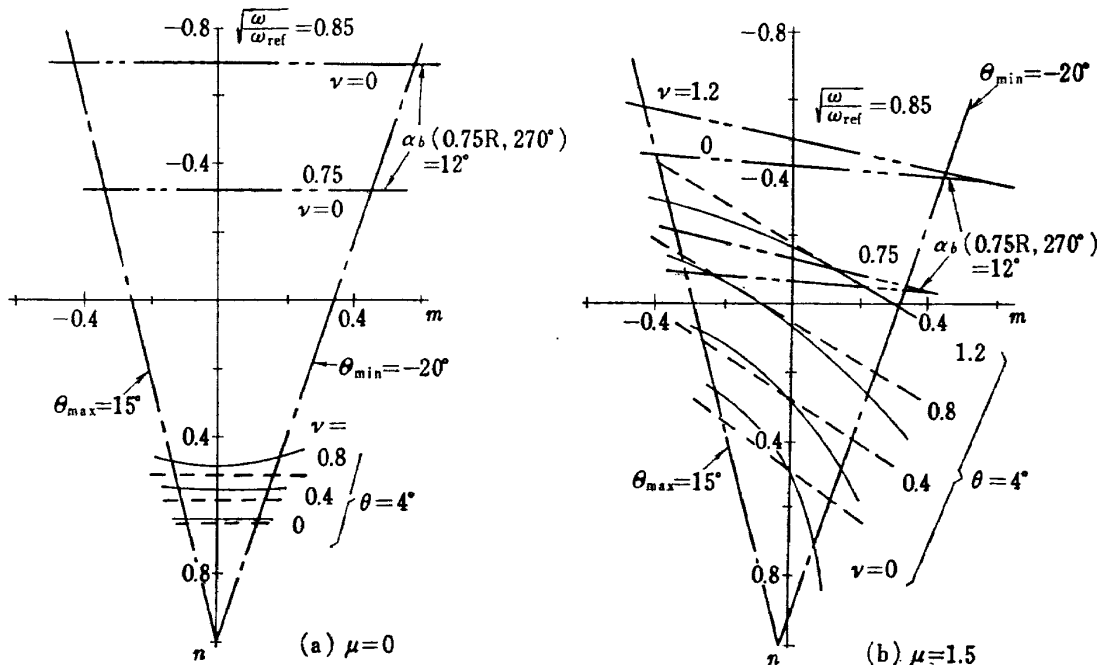
統制御を許容することになる。制御量  $(m, n)$  あるいは  $(T, \theta)$  に慣性を考慮したときの影響は 5.1 節で述べる。

慣性のない制御量  $(m, n)$  の許容値域を制限する条件として、強度上の制限、機体縦揺姿勢角の制限、操縦系統機構上のストップによる制限、ブレードの失速限界、パイロットの体感による制限、等をあげることができる。静的強度制限に関しては、 $N$  類でも TA/TB 級でも、機軸と垂直な方向の加速度倍数として正の側 3.5~2.5G、負の側 1.0~0.5G の範囲内でその機体特有の制限運動荷重倍数が設定される<sup>1), b)</sup>。これらの数字は本解析で問題としている運用状態をかなり上廻ると考えられるので除外して差支えない。また機体縦揺姿勢角  $\theta_B$  の限界が問題となるような状態では、スオッシュ・プレート入力角  $B_{is}(\text{rad})$  およびブレードのフラップ角  $a_1(\text{rad})$  の寄与はさして大きくないと考えられるので、 $\theta_B$  の代わりに推力ベクトル後傾角  $\theta$  を制限したと考えるてもほとんど等価である。各操縦系統には、舵の動く範囲を制限する各種ストップが装備されるのが普通である。 $\delta_x$  に対する前後ストップは、上記の基準強度、ブレード失速、あるいは

速度安定、等を考慮した上で許容重心位置ができるだけ広くなるように定められる。本解析では、重心位置が十分広範囲な  $\delta_x$  の動きを保証するものであることを暗黙のうちに仮定することによって、このストップ位置による制限を考慮の対象から除外することができる。機構的なストップのうちで重要なものは、 $\delta_{cp}$  に対する下限ディテント位置である。通常、所定のロータ回転速度、所定の前進速、沈下率において定常オートロティションが可能ないようにこのディテント位置が定められる訳であるが、その所定の回転速度、沈下率というのは、完全オートロティションで着陸するときにはフレア操作が可能なることを保証することを一つの条件として定められるから、このストップ位置の扱ひ方自体が本解析の目的の一部になっている。 $\delta_{cp}$  にはもちろん上限ストップがあって、許容最低ロータ回転速度、最大全備重量、最大上昇率、等と矛盾しない位置に設定されている。しかし急激なフレアを含む着陸操作にあっては、ストップの制限内でもロータ回転速度の低下に基づく有害な失速が起る場合も考えられる。

上記の事情を考慮した上で、一般に拘束条件

$$\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max} \quad (1.2.1 a, b)$$



- : (1.2.1 a, b), (1.3.8 a, b)
- : (1.2.1 c), (1.2.2): 厳密解
- : (1.2.1 c), (1.3.8 c): 線型近似
- : (1.2.1 d), (1.2.3)

$(\omega=0.004, \sigma=0.0569, \theta_1=-6.2^\circ)$

図 4 制御変数の可変許容領域の例

$$\theta_d \leq \theta \quad (1.2.1c)$$

$$\alpha_b \leq \alpha_{b\max} \quad (1.2.1d)$$

を課する。ここで  $\theta_{\min}$ ,  $\theta_{\max}$  は推力ベクトル後傾角  $\theta$  の最小/最大値であってそれぞれ一定値とみなし,  $\theta_d$  (rad あるいは deg) はブレード 75% 半径断面でのコレクティブ・ピッチ角  $\theta$  のディテント位置における値,  $\alpha_b$  は適当な代表断面 (たとえば後退側ブレード 75% 半径断面) での有効迎角,  $\alpha_{b\max}$  (deg あるいは rad) はその代表断面で代表させたときにロータ全体として有害な失速を生じないような限界迎角である。

前述した仮定によってある加速度ベクトル  $(m, n)$  を保持する為に必要な  $\theta$  およびそのときの  $\alpha_b$  は, 広義のトリム状態で評価できるから, (1.2.1c, d) 中の  $\theta, \alpha_b$  は

$$\theta = \theta(Z, U, V, \Omega; T, \Theta) \quad (1.2.2)$$

$$\alpha_b = \alpha_b(Z, U, V, \Omega; T, \Theta) \quad (1.2.3)$$

と表現できる。付録 B.1 に述べた方式によって求めた (1.2.1c, d) の限界を数値例として図 4 に示す。各図には  $(\mu, \nu)$  をパラメタとして  $(m, n)$  面上に限界線が記入してある。

一般に TA 型運航においては TB 型運航に比べて出力状態がより安全側であるから, (1.2.1) で与えられる領域は若干広すぎると考えられる場合もある。乗客に対する乗心地を考慮して<sup>2), 16)</sup>より狭い制御領域

$$h_1 \equiv m_{\min} - m \leq 0, \quad h_2 \equiv m - m_{\max} \leq 0 \quad (1.2.4a, b)$$

$$h_3 \equiv n - n_{\max} \leq 0, \quad h_4 \equiv n_{\min} - n \leq 0 \quad (1.2.4c, d)$$

を設定する方がより現実的となる\*。ここで  $m_{\min}$  ( $<0$ )  $m_{\max}$  ( $>0$ ),  $n_{\min}$  ( $<0$ ),  $n_{\max}$  ( $>0$ ) は, それぞれ適当に選んだ一定値とする。拘束条件 (1.2.1) は, 最適化の過程で可変制御領域を与えるのに対し, (1.2.4) は固定制御領域を定めるから, 後者においては最適化の取扱いが著しく簡単になる上, さらに  $\theta$  の表式 (1.2.2) 等の中に陽または陰に含まれる機体重量, ロータ・ソリディ比, ブレード幾何学形, 等のパラメータに対して独立な, 正規化された検討がなされうるという利点がある。

### 1.3 線型化の仮定

準定常状態を仮定すれば, ロータの必要馬力  $P$  は

$$P = P_0 + P_1 \quad (1.3.1)$$

$$P_1 \equiv T(\eta_P v - V \cos \theta - U \sin \theta) / 550 \quad (1.3.1a)$$

で表わされる。ここで  $P_0$  (HP) はロータのプロファイル・パワーであり,  $P_1$  (HP) は誘導パワー, 上昇/降下パワー, ロータ・プロファイル  $H$  力の寄与を含む形状パワーのすべてを含むものである。(1.3.1a) 中のロータ平均吹下し速度  $v$  (ft/sec) は, グロワートの関係式

$$T / (2\rho A) = v[(U \cos \theta - V \sin \theta)^2 + (V \cos \theta + U \sin \theta - v)^2]^{1/2} \quad (1.3.2)$$

から求めるものとする。ここで  $\rho$  (slug/ft<sup>3</sup>) は空気密度,  $A$  (ft<sup>2</sup>) は主ロータの全円板面積である。(1.3.1a) 中の  $\eta_P$  はパワー損失係数であって, 実際の吹下し分布の非一様性, 非定常性, さらにもしその影響を考慮するとすれば地面効果, を一括して補償する為に導入されている。特に断らない限り  $\eta_P$  は一定と考えるが垂直降下もしくはそれに近い飛行状態では, いわゆるボルテックス・リング状態に入らないまでも, (1.3.2) の関係は吹下し  $v$  の値を実際よりもかなり楽観的に評価することが知られているので, 必要に応じて実験結果<sup>20)</sup>を用いて補正することにする。(付録 C.2 参照)

さて, 考えている飛行状態において, 操縦が比較的穏かであって,

$$|\theta| \ll 1 \quad (1.3.3)$$

かなりたつものとする。

$$\bar{\theta} \equiv -\frac{H_0 + D_x}{W} \eta_D, \quad \eta_D \equiv 1 - \frac{D_x}{T} \quad (1.3.4a, b)$$

とかけば, (1.1.3) は

$$m = \frac{\bar{\theta}}{\eta_D} - \frac{T}{W} \theta, \quad n = 1 - \eta_D \frac{T}{W} \quad (1.3.5a, b)$$

とかける。ここで  $\eta_D$  はいわゆるダウン・ロード・ファクタであり,  $(\bar{\quad})$  は  $(\quad)$  なる量が擬約合状態,  $m = n = 0$ , で評価されたものであることを示す。すなわち擬約合状態は

$$T = \bar{T} (\equiv W / \eta_D), \quad \theta = \bar{\theta} \quad (1.3.6a, b)$$

で定義される。“擬約合”の意味は, 前進速, および沈下率は一定に保たれるが, パワーとしては釣合っておらず一般にロータ回転数が変化しつつあるという意味である。

$$|m|, |n| \ll 1 \text{ の仮定の下では**}, \quad (1.3.1) \text{ 中の } P_1$$

\* TA 型運航においても, 実際にはパイロットが乗客の乗心地を考慮する程に事態は楽観的ではないからパイロットの“体感”(あるいは“恐怖感”)によって制限されるとみるべきであろう。逆に云えば TB 型運航, あるいは N 類における緊急着陸に際してはパイロットはより極限的な操舵を余儀なくされるということにもなる。

\*\* 図 4 から判るように,  $|\mu| \ll 1$  のとき  $\theta = \theta_d$  付近では必ずしも  $|n| \ll 1$  とはみなし得ないが, そのような状態は極めて短時間のうちに経過するので結果には大きな誤差は生じないと考えられる。(3.1 節参照)

を  $(m, n)$  に関して線型化することが可能である。すなわち、

$$P_1 \doteq P_1 + P_{1m} \cdot m + P_{1n} \cdot n \quad (1.3.7)$$

$$P_{1m} \equiv (\partial P_1 / \partial T) (\partial T / \partial m) + (\partial P_1 / \partial \theta) (\partial \theta / \partial m) \quad (1.3.7a)$$

$$P_{1n} \equiv (\partial P_1 / \partial T) (\partial T / \partial n) + (\partial P_1 / \partial \theta) (\partial \theta / \partial n) \quad (1.3.7b)$$

である。 $(\bar{\quad})$  の定義によって  $P_1, P_{1m}, P_{1n}$  は状態変数のみの関数であって、制御変数を含まない。(1.1.4), (1.3.1) からみて、特に  $P_A = P_0 + P_1$  であるような擬釣合飛行状態が釣合飛行状態であることが判る。

$P$  を線型化したと同様にして制御変数に対する拘束条件 (1.2.1) を  $(m, n)$  に関して線型化する。まず (1.3.5) から  $T/W$  を消去して (1.2.1 a, b) を用いれば

$$h_1 \equiv -(\bar{\theta} - \theta_{\min}) + \eta_D m - \theta_{\min} n \leq 0 \quad (1.3.8a)$$

$$h_2 \equiv (\bar{\theta} - \theta_{\max}) - \eta_D m + \theta_{\max} n \leq 0 \quad (1.3.8b)$$

である。また (1.2.1 c) からは

$$h_3 \equiv -(\bar{\theta} - \theta_d) - \bar{\theta}_m m - \bar{\theta}_n n \leq 0 \quad (1.3.8c)$$

が得られ、(1.2.1 d) から図 4 を参照して近似的に

$$h_4 \equiv n_{\min} - n \leq 0 \quad (1.3.8d)$$

が得られる。ここに  $\bar{\theta}, \bar{\theta}_m, \bar{\theta}_n$  等は (1.3.7) 同様に、(1.2.2) を  $(m, n)$  に関して線型化した表示式

$$\theta = \bar{\theta} + \bar{\theta}_m m + \bar{\theta}_n n \quad (1.3.9)$$

の微係数であって、

$$\bar{\theta}_m \equiv (\partial \theta / \partial T) (\partial T / \partial m) + (\partial \theta / \partial \theta) (\partial \theta / \partial m) \quad (1.3.9a)$$

$$\bar{\theta}_n \equiv (\partial \theta / \partial T) (\partial T / \partial n) + (\partial \theta / \partial \theta) (\partial \theta / \partial n) \quad (1.3.9b)$$

である。図 4 には、付録 B.2 に述べたやり方によって得られる (1.3.8c) の限界を (1.2.2) から得られる厳密な限界と比較して記入してある。なお (1.2.1 d) を (1.3.8d) のように線型近似したのは、図 4 から判るように (1.2.1 d) の限界が  $m$  にほとんど依存せず、また図 4 中の  $\sqrt{\omega/\omega_{\text{ref}}}$  には  $\sqrt{\omega_{\min}/\omega_{\text{ref}}}$  を用いるのが安全側の仮定と思われるからである。(1.3.8d) 中の  $n_{\min}$  を (1.2.4d) 中の  $n_{\min}$  で置き換えたと思ってもさしつかえない。図 4 において、各限界線で囲まれた不等辺四辺形、あるいは三角形の内部が、(1.3.8) を仮定したときの、ある  $(\mu, \nu)$  における許容制御領域を示している。(1.2.4) を仮定したときの許容制御領域が図 5 に示すような一定の矩形内部で表わされることはいうまでもない。

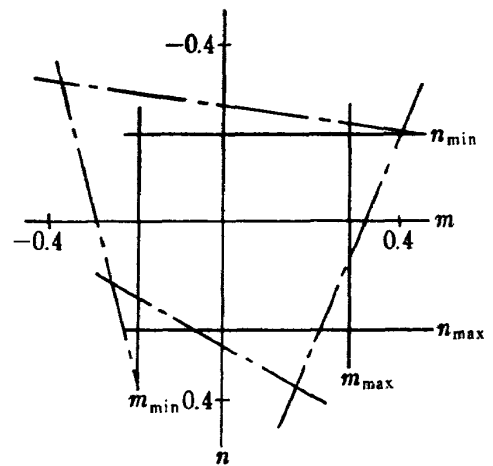


図 5 制御変数の固定許容領域

#### 1.4 無次元化

以下の取扱いに便利なように、上記の諸量を無次元化しておく。すなわち

$$(X, Z) \equiv (v_h^2/g) \cdot (x, z) \quad (1.4.1a)$$

$$(U, V, v) \equiv v_h \cdot (\mu, \nu, \lambda) \quad (1.4.1b)$$

$$t \equiv (v_h/g) \cdot \tau, \quad d(\quad)/d\tau \equiv (\quad) \quad (1.4.1c)$$

$$(1/2)J\Omega^2 \equiv (1/2)(W/g)(\sqrt{2}v_h)^2 \cdot \omega \quad (1.4.1d)$$

$$(H_0, T, W) \equiv \rho A (\Omega_{\text{ref}} R)^2 (C_{H0}, C_T, w) \quad (1.4.1e)$$

$$D_x \equiv (1/2)\rho U^2 f_x \quad (1.4.1f)$$

$$550(P, P_0, P_1, P_A) \equiv \rho A (\Omega_{\text{ref}} R)^3 (C_P, C_{P0}, C_{P1}, C_{PA}) \quad (1.4.1g)$$

ただし

$$v_h \equiv (W/(2\rho A))^{1/2} = (\Omega_{\text{ref}} R) \sqrt{w/2} \quad (1.4.2)$$

は地面効果外ホバリング時の理想的平均吹下し速度 (ft/sec),  $f_x$  (ft<sup>2</sup>) は等価形状抵抗面積,  $R$  (ft) はロータ半径,  $\Omega_{\text{ref}}$  (rad/sec) は基準ロータ回転速度, である。無次元表示では擬釣合飛行状態は (1.3.6) から

$$C_T = \bar{C}_T = w/\eta_D \quad (1.4.3a)$$

$$\theta = \bar{\theta} = -[(C_{H0}/w) + (f_x/4A)\mu^2] \quad (1.4.3b)$$

で表わされる。ここでブレードの平均断面形状抵抗係数を  $\delta$ , ロータ・ソリディティ比を  $\sigma$  とすれば

$$C_{H0} = \frac{\sigma \delta}{4} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}} \sqrt{\frac{w}{2}} (\mu - \nu \theta) \quad (1.4.3c)$$

であり、もちろん  $\bar{\theta}(\mu=0) = 0$  である。(1.4.1) を用いれば (1.1.4) は

$$\omega = q \equiv k - C_{P1}/[w(w/2)^{1/2}] \quad (1.4.4)$$

とかける。ここに

$$\frac{C_{P1}}{w\sqrt{w/2}} = \frac{C_T}{w} [\eta_P \lambda - \nu - \mu \theta] \quad (1.4.4a)$$

であり、無次元誘導吹下し速度  $\lambda$  は (1.3.2) に対応する表式

$$C_T/w = \lambda[(\mu - \theta\nu)^2 + (\nu + \theta\mu - \lambda)^2]^{1/2} \quad (1.4.5)$$

をみたすように定まる。さらに

$$k \equiv (C_{PA} - C_{P0}) / [w(w/2)^{1/2}] \quad (1.4.6)$$

は  $K$  ファクタ<sup>17)</sup> の最も簡単な場合である。(1.4.4)

を (1.3.7) のように  $(m, n)$  について線型化すれば、

$$q = \bar{q} + \bar{q}_m \cdot m + \bar{q}_n \cdot n \quad (1.4.7)$$

$$\bar{q} \equiv k - [\eta_P \bar{\lambda} - \nu - \mu \bar{\theta}] / \eta_D \quad (1.4.7a)$$

$$\bar{q}_m \equiv \eta_P (\partial \bar{\lambda} / \partial \theta) - \mu \quad (1.4.7b)$$

$$\begin{aligned} \bar{q}_n = & \left[ \eta_P \bar{\lambda} - \nu - \mu \eta_D \bar{\theta} \right. \\ & \left. + (\eta_P / \eta_D) \left( \partial \bar{\lambda} / \partial \left( \frac{C_T}{w} \right) \right) \right] / \eta_D - \bar{q}_m \bar{\theta} \end{aligned} \quad (1.4.7c)$$

とかくことができる。(付録 C.3 参照)。もちろん  $\bar{\lambda}$ ,  $(\partial \bar{\lambda} / \partial \theta)$ ,  $(\partial \bar{\lambda} / \partial (C_T/w))$  等は (1.4.5) から定まる  $\lambda$ , およびその微係数を擬合軌飛行状態で評価したものであって、たとえば  $\bar{\lambda}$  は

$$1/\eta_D = \bar{\lambda}[(\mu - \bar{\theta}\nu)^2 + (\nu + \bar{\theta}\mu - \bar{\lambda})^2]^{1/2} \quad (1.4.8)$$

をみたす。

付録 C.1 に見る如く、 $C_{P0}$  は一般に状態変数  $(\mu, \nu; \omega)$  の関数であるが、本解析で注目する低速飛行状態では  $(\mu, \nu)$  による  $C_{P0}$  の変動は、吹下しの変化、

すなわち誘導パワの変化分、に比べて最終結果への寄与が小さいと予想される。したがって、代表的時刻での  $C_{P0}$  をとってその期間中不変であるとし、 $k$  を定数と考えることができる。特に  $\omega$  の変動に伴う  $C_{P0}$ , すなわち  $k$ , の変動を重視するときのみ  $k(\omega)$  とかく。ゆえに、一般に  $\bar{q} = \bar{q}[\mu, \nu; k(\omega)]$ ,  $\bar{q}_m = \bar{q}_m(\mu, \nu)$ ,  $\bar{q}_n = \bar{q}_n(\mu, \nu)$  である。 $(m, n)$  に関する  $q$  の線型表示の精度をみるために図 6 を示した。同図には (1.4.4) によって求めた  $q=0$  の軌跡と、(1.4.7) によって求めた  $q=0$  の軌跡とを  $(m, n)$  面上で比較してある。もちろん  $m=n=0$  付近での精度が高い。

上記の仮定の下で、基礎方程式を無次元形で書けば (1.1.1), (1.1.2), (1.1.4) の各式は

$$\dot{x} = \mu, \quad \dot{z} = \nu \quad (1.4.9a, b)$$

$$\dot{m} = m, \quad \dot{n} = n \quad (1.4.9c, d)$$

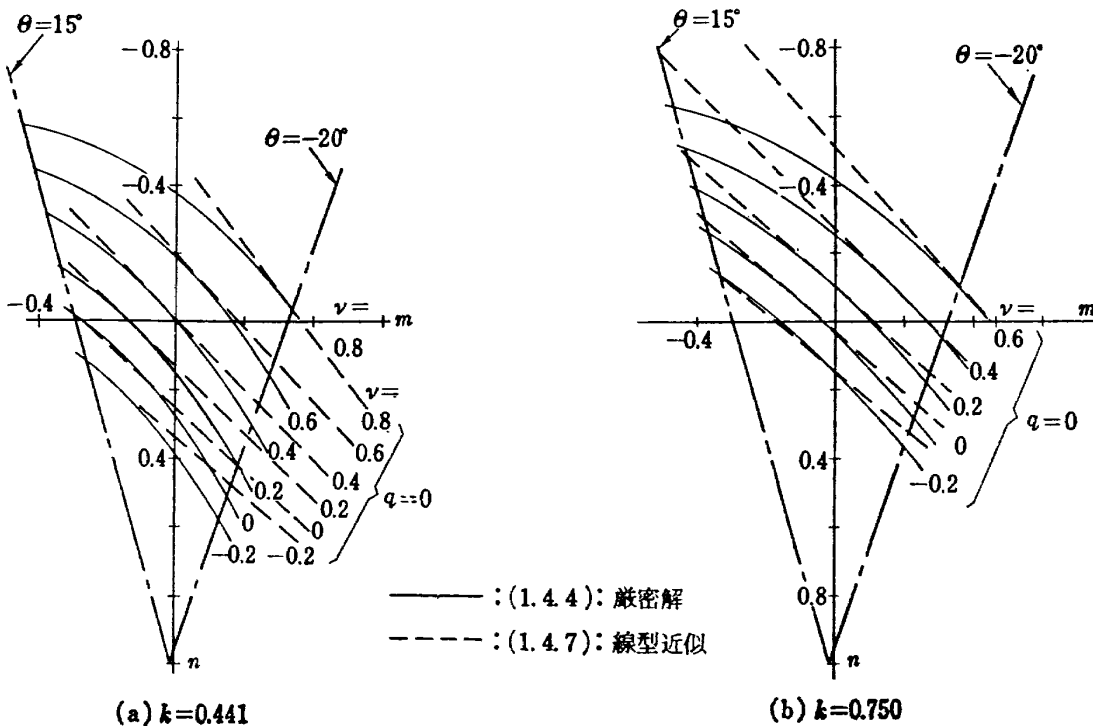
$$\dot{\omega} = \bar{q}(k(\omega); \mu, \nu) + \bar{q}_m(\mu, \nu)m + \bar{q}_n(\mu, \nu)n \quad (1.4.9e)$$

の形にまとめられる。(1.4.9) が本解析における状態方程式であり、 $(x, z)$ ,  $(\mu, \nu)$ ,  $\omega$  が 5 個の状態変数、 $(m, n)$  が独立な 2 個の制御変数であって、すべて独立変数  $\tau$  の関数である。 $\tau$  は陽に含まれない。

### 1.5 $k$ の値による問題の分類

(1.4.1) によって (1.4.6) を元の物理量に変換すれば

$$k = \frac{550(P_A - P_0)}{Wv_h} \quad (1.5.1)$$



( $\eta_D=0.96, \eta_P=1.15, \mu=1.5$ )

図 6  $q=0$  の軌跡の例

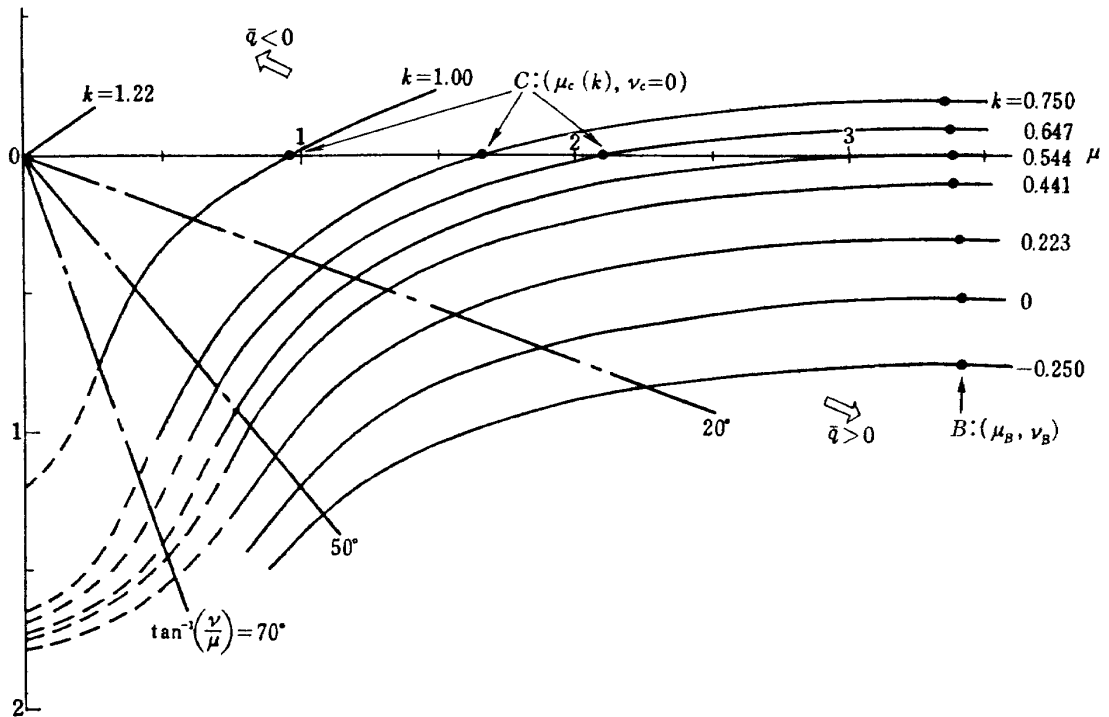


図 7  $\bar{q}=0$  の曲線群

である。ある特定の機体における一発動機不作動時の性能に影響を与える因子、すなわち機体重量、運用密度高度、および運用外気温度は (1.5.1) の  $k$  の中にまとめて組み込まれている。また上記諸因子が与えられると、(1.4.1) で無次元化に用いた理想的平均吹下し  $v_h$  も一義的に定まるから、 $k$  の値のみをパラメタとして問題の正規化された分類が可能である。

ある与えられた  $k$  の値に対して、 $\bar{q}(k; \mu, \nu) = 0$  の軌跡を追えば、 $\mu$ - $\nu$  面上に一つの曲線が得られる。この曲線上の点では、 $m=n=q=0$  で定義される釣合降下飛行が可能であって、前進速  $\mu$ 、沈下率  $\nu$  のみならず、ロータ回転速度  $\omega$  も一定に保たれうる。図 7 に  $k$  をパラメタとした  $\bar{q}=0$  の曲線群を示す。各曲線の上左方で  $\bar{q} < 0$ 、下右方で  $\bar{q} > 0$  である。図中点線部分において釣合降下飛行を行うことはボルテックス・リング状態に対応するから  $\bar{q}=0$  の曲線はあまり意味をもたない。 $\nu$  軸との交点は図 C.2 から得られる  $\eta_P \lambda$  の値を用いて求めている。

さて、おのおのの  $k$  値に対して、最小定常沈下率 (あるいは最大上昇率) を与える点、すなわち

$$\bar{q}(\mu_B, \nu_B) = 0, \quad \bar{q}_\mu(\mu_B, \nu_B) = 0 \quad (1.5.2a, b)$$

をみたす点  $B(\mu_B, \nu_B)$  が存在する。一発動機不作動離陸上昇飛行に要求される上昇率\*を  $\nu_c (\leq 0)$  とすれば、比較的大きな  $k$  のうちで

$$\nu_B(k_c) = \nu_c \quad (1.5.3)$$

\* 14 頁脚注参照

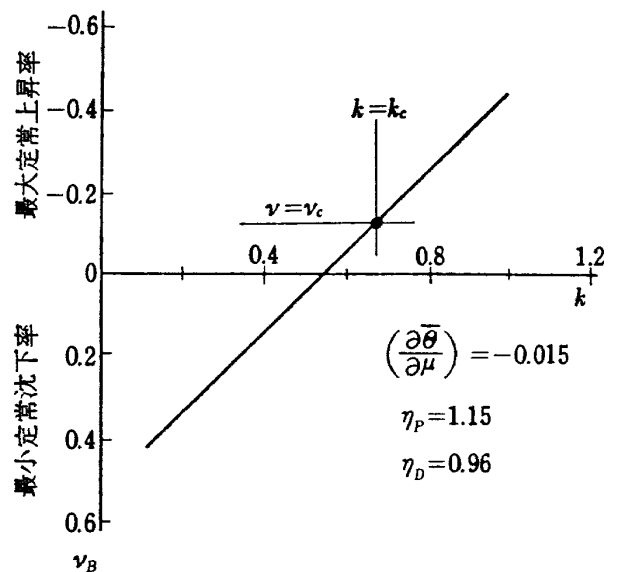


図 8  $k$  と定常最大(小)上昇(沈下)率  $\nu_B$

をみたすような  $k_c$  が一個定まる。 $k \geq k_c$  なる  $k$  について、

$$\bar{q}(k; \mu_c(k), \nu_c) = 0 \quad (1.5.4)$$

を与える点  $C(\mu_c, \nu_c)$  が確定する。 $\mu_c$  は、与えられたパワ状態  $k$  に対応する離陸安全速度 (Take-Off Safety Speed)\* の最小値である。図 8 および図 9 には図 7 から求めた  $\nu_B$ 、及び  $\mu_c$  を  $k$  に対して示してある。但し簡単のために  $\nu_c = 0$  としている。

次に垂直降下について考える。あまり大きくない垂直降下率  $\nu_H$  について、

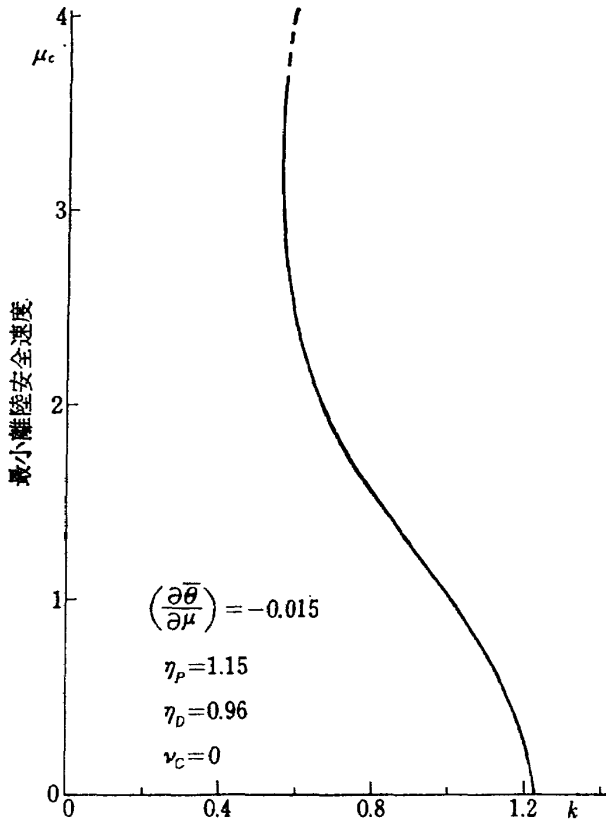


図 9  $k$  と最小離陸安全速度  $\mu_C$

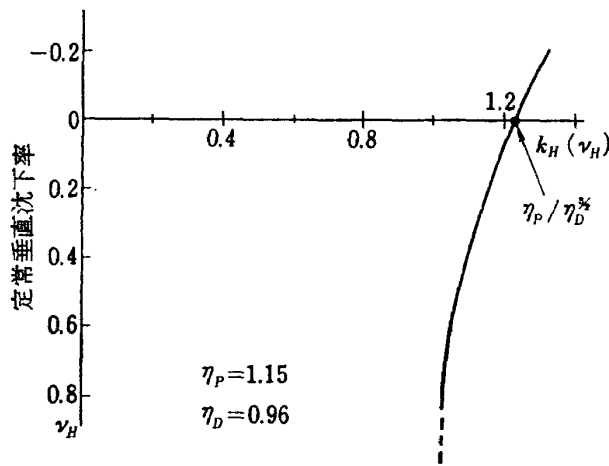


図 10  $k$  と定常垂直沈下率  $\nu_H$

$$\bar{q}(k_H; \mu=0, \nu_H)=0 \quad (1.5.5)$$

をみたとすパワー状態を  $k_H(\nu_H)$  とすれば、(1.4.7a)、(1.4.8) から  $\bar{\lambda}$  を消去して図 10 の表示が得られる。特に

$$k_H(\nu_H=0)=\eta_P/\eta_D^{3/2}(>1) \quad (1.5.6)$$

である。(1.5.6) 右辺が地面効果内、あるいは地面効果外、のいずれで評価されたかによって、 $k \geq k_H(\nu_H=0)$  なる  $k$  においては地面効果内あるいは効果外での定常ホバリングが可能である。したがって一発動機停止後のパワー状態が  $k \geq [k_H(\nu_H=0)]_{\text{OGE}}$  ならば、停

止した発動機は臨界発動機ではなかったことになる。

図 7 に戻って  $k=0$  に対応する  $\bar{q}=0$  曲線は、いわゆる理想的オートロティション可能な状態を表わす (1.4.7a) から判るように、 $\eta_P \bar{\lambda} = \nu + \mu \bar{\theta}$  が実現されており、ロータ面を通過する正味流量は 0 である。残存発動機が丁度プロファイル・パワー分だけを供給している。

$C_{PA}=0$ 、すなわち完全オートロティション状態は  $k_A = -C_{P0}/[w\sqrt{w/2}] (<0)$  (1.5.7) で表わされる。

$k < k_A$  なる  $k$  はあり得ないし、 $k \geq k_H$  になる  $k$  については興味がないから、以下  $k_H > k \geq k_A$  なる  $k$  についてのみ取扱う。TA 型運航が可能なのは  $k \geq k_C$  でなければならないのは明らかであるが、 $k > k_C$  なる  $k$  について HV 線図の低速禁止領域が必ず消滅するという保証はない。低速禁止領域が消滅する為の最小の  $k$  を  $k_E$ 、TA 型運航に必要な臨界決定点が存在しうるための最小の  $k$  を  $k_D$  とすれば、一般に  $k_D \geq k_C$ 、 $k_D \geq k_E$  であるが、 $k_C$  と  $k_E$  との大小関係は今のところ不明である。 $k_H > k \geq k_D$  において臨界決定点を、また  $k_E \geq k \geq k_A$  において HV 線図の禁止領域を、それぞれ解析する。上記の分類を搭載発動機の数と対比させて図 11 に示す。

### 1.6 遅れ時間中の運動

臨界発動機停止時刻  $\tau = \tau_i$  以後の出力状態は (1.4.6) で定義される  $k$  で指定される。停止時の状態が  $(x, z; \mu, \nu; \omega) = (x_i, z_i; \mu_i, \nu_i; \omega_i)$

$$\textcircled{\text{a}} \quad \tau = \tau_i \quad (1.6.1a)$$

$$(m, n) = (m_i, n_i) = (0, 0)$$

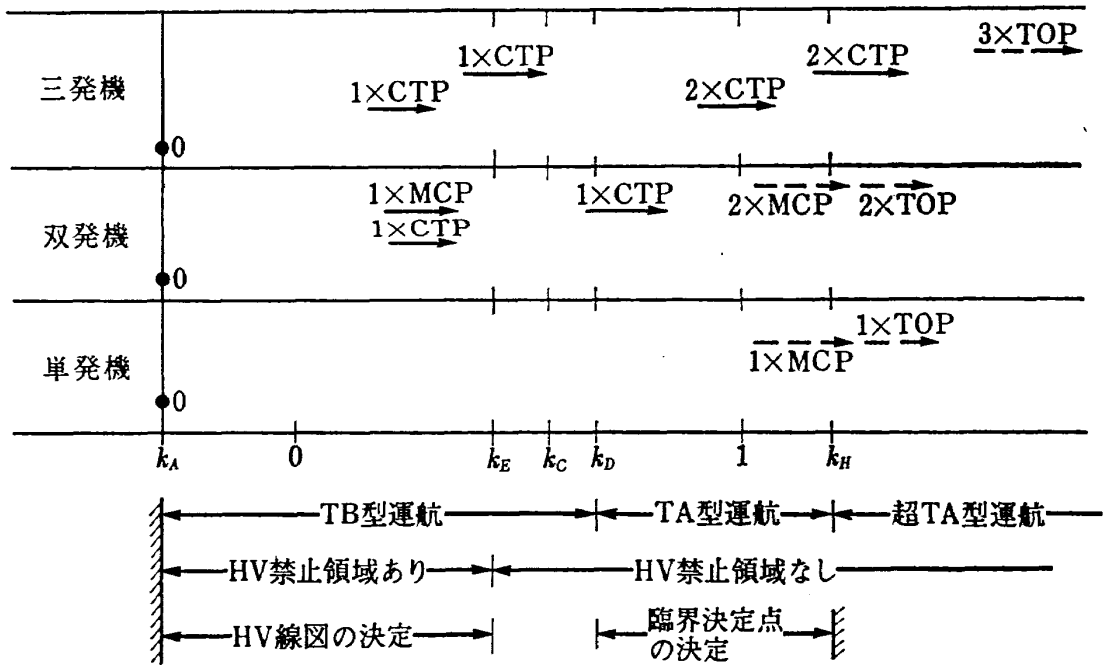
$$\textcircled{\text{b}} \quad \tau = \tau_i \quad (1.6.1b)$$

であったとする。ロータ回転速度の低下による縦のトリム変化が無視できるものとすれば、区間  $[\tau_i, 0]$  における機体の運動は一定の操舵入力

$$\theta \equiv \theta(\tau_i^-) \quad (1.6.2)$$

$$\Theta \equiv \Theta(\tau_i^-) \quad (1.6.3)$$

で定められる。ただし  $\tau_i^-$  は発動機停止の直前を表わす。(1.4.4)、(1.4.9a~d) を、付録 B.1 の広義トリムと共に (1.6.1) の初期条件下で解けばよい。図 12 に計算例を示す。HV 線図低速禁止領域に注目した例が  $\mu_i = \nu_i = 0$  あるいは  $\mu_i > 0$ 、 $\nu_i = 0$  (図 12(a)) の場合であり、臨界決定点を考慮する場合、すなわち  $\mu_i = 0$ 、 $\nu_i < 0$  の例が図 12(b) である。最適問題としての興味はないので、以下の解析ではすべて  $\tau_i = 0$  と考える。



注 CTP: 5 min., 30 min., 等の緊急定格出力  
 TOP: 離昇定格出力  
 MCP: 最大連続定格出力  
 数字は残存発動機の数

図 11 k の値による問題の分類

1.7 最適問題としての記述

最適問題を次のように記述する。時刻  $\tau$  の関数である状態変数  $x, z, \mu, \nu, \omega$  に関する状態方程式 (1.4.9) をみだし、初期値

$$(x, z; \mu, \nu; \omega) = (x_0, z_0; \mu_0, \nu_0; \omega_0) \quad @ \quad \tau=0 \quad (1.7.1)$$

から終端値

$$(x, z; \mu, \nu; \omega) = (x_f, z_f; \mu_f, \nu_f; \omega_f) \quad @ \quad \tau=\tau_f \quad (1.7.2)$$

に移すような制御変数 ( $m(\tau), n(\tau)$ ) のうち、評価関数

$$J \equiv z_f - z_0 = \int_0^{\tau_f} \nu d\tau \quad (1.7.3)$$

を最小または最大にするものを求めること。ただし所要時間  $\tau_f$  は自由であり、(1.7.1), (1.7.2) 右辺の端末値はそれぞれの問題に応じて少なくとも部分的には指定されており、また制御変数は拘束条件(1.2.4) または (1.3.8) を満足するものとする。さらに状態変数についての拘束条件

$$z \leq z_f \quad (1.7.4a)$$

$$\nu \leq \nu_{max} \quad (1.7.4b)$$

$$\omega_{min} \leq \omega \leq \omega_{max} \quad (1.7.4c)$$

等を課する。(1.7.4a) が必要なことは、 $\tau=\tau_f$  で接地する問題においては自明であるし、一発動機不動作上昇について  $\mu_f = \mu_0 (\nu_0 = 0)^*$  と考えるときにはやはり当然の要求である。(1.7.4b) はボルテックス・リング状態を避ける意味で導入されているから、厳密には  $\nu_{max} = \nu_{max}(z; \mu; m, n)$  の形をとるはずである。実用上は離陸中止径路の解析 ( $\mu = m = 0$ ) 以外にはあまり関係がなく、しかもそのときには  $n=0$  付近でのみ  $\nu_{max}$  が問題となりうるということが知られている<sup>6)</sup>から、地面効果を無視すれば  $\nu_{max} = \text{const.}$  と考えることができる。(1.7.4c) 中の  $\omega_{min/max}$  はブレードの基準強度で定まる  $\Omega_{min/max}$  に対応するから、運用条件が定まれば (1.4.1d) から一定値と考えることができる。

初期値 (1.7.1) について考える。すべての場合に

\* 離陸安全速度 ( $\mu_0$  に対応) は、残存発動機出力で上昇率 100 ft/min ( $\nu_0$  に対応) が得られる速度と定義され、この速度から最大上昇率が得られる速度 ( $\mu_B$  に対応) までは上昇せずに水平加速することが要求されている<sup>1,3)</sup>。上昇率 100 ft/min は一つの安全率として要求されているものであるから、簡単のため以後はすべて  $\nu_0 = 0$  として  $\mu_0 (\nu_0 = 0)$  を離陸安全速度とみなす。



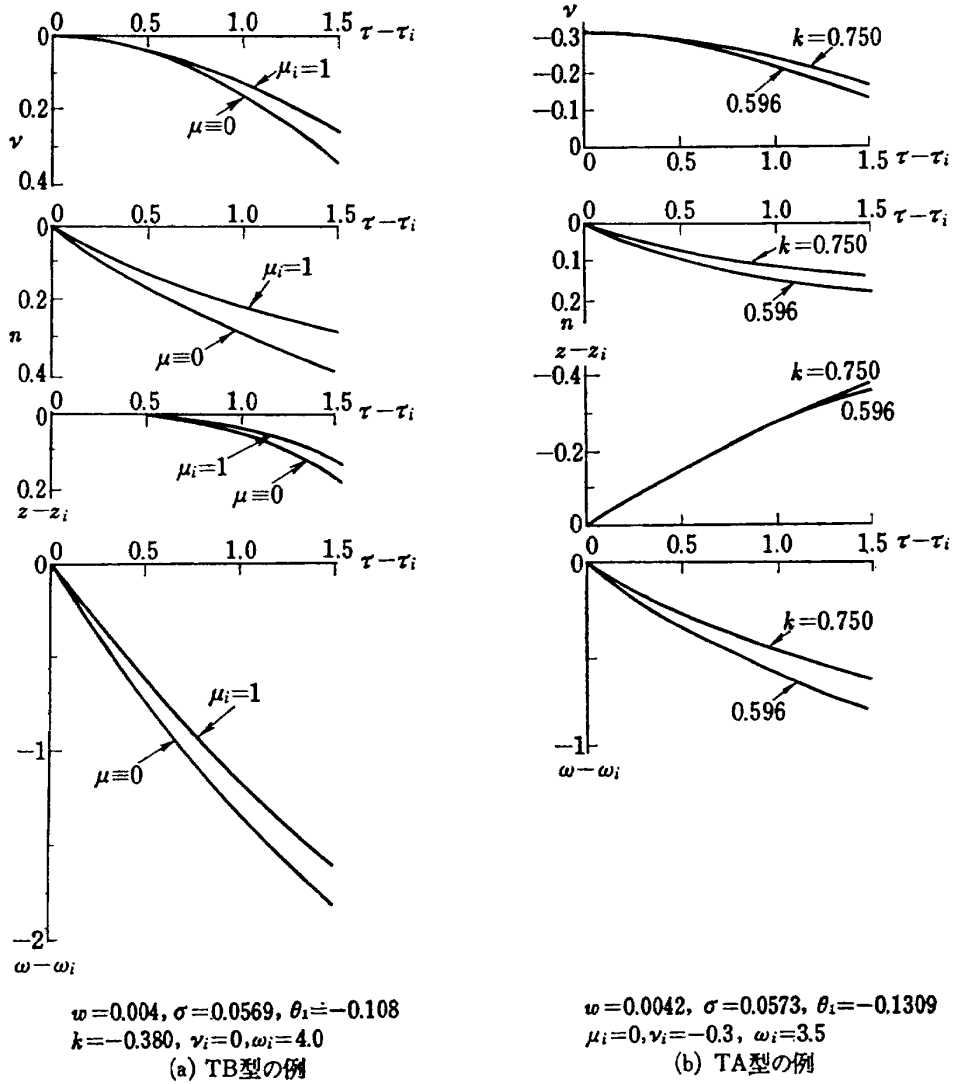


図 12 遅れ時間中の運動, 計算例

ついて定義から

$$x_0 = z_0 = 0 \quad @ \quad \tau = 0 \quad (1.7.5)$$

である。μ<sub>0</sub>, ν<sub>0</sub>, ω<sub>0</sub> は一般に 1.6 節のような解析から定まるもので、HV 線図の境界を求める問題では

$$\mu_0: \text{given}, \nu_0(\geq 0): \text{given}, \omega_0: \text{given} \quad (1.7.6a)$$

また臨界決定点を求める問題では

$$\mu_0 = 0, \nu_0(\leq 0): \text{given}, \omega_0: \text{given} \quad (1.7.6b)$$

である。

終端値 (1.7.2) については、特にヘリポートの大きさに制限があるか否かに応じて

$$x_f: \text{given/free} \quad (1.7.7a, b)$$

また τ=τ<sub>f</sub> で着陸に終る問題では

$$T(\mu_f, \nu_f) = 0, \omega_f = \omega_{\min}, z_f: \text{given} \quad (1.7.8a, b, c)$$

一発動機不作動上昇においては

$$\mu_f = \mu_G(k_G), \nu_f = \nu_G(=0), \omega_f = \omega_G: \text{given} \quad (1.7.8d, e, f)$$

である。ここで (1.7.8a) 中の  $T(\mu_f, \nu_f) = 0$  は、着陸時の基準強度<sup>21)</sup> で許容される限界包囲線であり、 $T(\mu_f, \nu_f) > 0$  はいわゆるハード・ランディング状態を表わすものとする。また (1.7.8f) 中の ω<sub>G</sub> は ω<sub>max</sub> ≥ ω<sub>G</sub> ≥ ω<sub>min</sub> をみたすものであって、τ > τ<sub>f</sub> における一発動機不作動水平加速、あるいはそれに引き続く一発動機不作動上昇に必要なロータ回転速度とする。特に一発動機不作動上昇問題では接地で終る問題と異なり、飛行が τ=τ<sub>f</sub> 以後も継続されるから、τ<sub>f</sub> においてロータ回転速度はなめらかに、しかも出来れば徐々に減速しながら ω<sub>G</sub> に接続されることが望ましい。この要求を陽に表現する為に、0 < τ<sub>1</sub> < τ<sub>f</sub> として付加的条件

$$s \equiv \omega_G - \omega \leq 0; (\tau_1, \tau_f] \quad (1.7.9)$$

を課する。もちろん (1.7.9) は状態変数拘束条件の

一つである。

HV 禁止領域の低速・高高度限界 (図 1, 弧  $\widehat{HK}$ ) および一発動機不動作上昇中の高度損失, を求める問題では, (1.7.3) の  $J$  はその最小値が, また低速・低高度限界 (図 1, 弧  $\widehat{LK}$ ) および離陸中止径路に沿う高度の推定においては  $J$  の最大値がそれぞれ求めるものである。特にロータ・プロファイル・パワを近似的に一定とみなすことによって,  $k$  が  $\omega$  に依存しないと仮定し, さらに地面効果を無視すれば, 状態方程式 (1.4.9) および拘束条件式 (1.2.4) または (1.3.8) の右辺は  $z, \omega$  のいずれをも含まない。  $\omega$  が右辺に含まれないことから, 上記問題を  $\omega_f - \omega_0$ : given という等周条件付の最適問題と考えることができる。一方, 等周問題の双対性から, もし

$$J \equiv -(\omega_f - \omega_0) = -\int_0^{\tau_f} q d\tau \quad (1.7.10)$$

とかいてこれを評価関数と考えれば, 状態方程式, 拘束条件式の右辺に  $z$  が含まれないことから,  $z_f - z_0 = \text{given}$  という等周条件付の最適問題として (1.7.10) で定義される  $J$  の最小値を求めることも全く同値であることが判る。  $(q)_z = (q)_\omega = 0$  が仮定できさえすれば, この二つの記述の間に本質的な差はないが, 特に限界速度点 (図 1,  $K$  点) は (1.7.3) の形で考えれば  $J_{\max} = J_{\min}$  の点として定義されて数値解析上の不便を伴うのに反し, (1.7.10) のように考えれば  $K$  点は  $z_f - z_0$  に関する等周条件を取り除いた極値点として明確に定義されうるという利点がある。以下直観的に理解しやすい (1.7.3) の形式と, 上記の利点をもつ (1.7.10) の形式とを適宜使い分けることにする。

## 2. 予備的な考察

前章で記述した最適問題を解く前に, 最適解の概略の性質を調べる。最適問題に固有な二点境界値問題を解くために, 解に対する予備知識が必要だからである。簡単さを目的として, 状態方程式, 拘束条件式等を制御変数について線型化したことによって, 必然的にパン・パン型の解を予想したことになっている。この予想が正しいことを示すために, 最適制御が図 4, 図 5 に示したような許容領域の内部に存在するいわゆる“全体として特異な制御”部分を含まないことを保証しておかなければならない。比較的实际に近い仮定を追加して問題を一自由度のそれに縮小し, 大域的な最適性の検討を行うことも本章の目的である。

### 2.1 状態空間での解析

(1.4.9c, d, e) から,  $\bar{q} = 0$  となるような  $(\mu, \nu, \omega)$  の点を除いて微分形式

$$d\tau = \frac{-\bar{q}_m(\mu, \nu)d\mu - \bar{q}_n(\mu, \nu)d\nu + d\omega}{\bar{q}(\mu, \nu, \omega)} \quad (2.1.1)$$

が得られる。ここで  $\bar{q}(\mu, \nu, \omega)$  は  $\bar{q}(k(\omega); \mu, \nu)$  の意味である。拘束条件 (1.3.8) または (1.2.4) をみたすような制御  $(m, n)$  によって作られ,  $\bar{q} = 0$  の曲面をよぎらないような任意の許容軌道  $c$  を  $(\mu, \nu, \omega)$  空間内に考え, その両端点をそれぞれ  $o$  点  $(\mu_0, \nu_0, \omega_0)$ ,  $f$  点  $(\mu_f, \nu_f, \omega_f)$  とする。軌道  $\vec{ocf}$  に沿う所要時間, 水平距離, および高度損失は, (1.4.9a, b), (2.1.1) から

$$\begin{bmatrix} \tau_f - \tau_0 \\ x_f - x_0 \\ z_f - z_0 \end{bmatrix} = \int_{o(c)}^f \begin{bmatrix} 1 \\ \mu \\ \nu \end{bmatrix} \frac{-\bar{q}_m(\mu, \nu)d\mu - \bar{q}_n(\mu, \nu)d\nu + d\omega}{\bar{q}(\mu, \nu, \omega)} \quad (2.1.2)$$

とかけるが, これらのうちのあるものを評価関数, 他を等周条件とみなして一般的に取り扱うために未知定数  $C_0, C_1, C_2$  を用いて広義評価関数

$$J_1 \equiv C_0(\tau_f - \tau_0) + C_1(x_f - x_0) + C_2(z_f - z_0) \quad (2.1.3)$$

を作れば (2.1.2) によって

$$J_1 = \int_{o(c)}^f [\Phi_M d\mu + \Phi_N d\nu + \Phi_Q d\omega] \quad (2.1.4)$$

ただし

$$\begin{bmatrix} \Phi_M(\mu, \nu, \omega; C_0, C_1, C_2) \\ \Phi_N(\mu, \nu, \omega; C_0, C_1, C_2) \\ \Phi_Q(\mu, \nu, \omega; C_0, C_1, C_2) \end{bmatrix} = \frac{C_0 + C_1\mu + C_2\nu}{\bar{q}(\mu, \nu, \omega)} \times \begin{bmatrix} -\bar{q}_m(\mu, \nu) \\ -\bar{q}_n(\mu, \nu) \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.1.4a)$$

である。始点  $o$ , 終点  $f$  を  $c$  と共有し,  $\bar{q} = 0$  の曲面をよぎらず, 軌道  $c$  とは完全には一致しない任意の許容軌道  $\hat{c}$  があると,  $\hat{c}$  に沿って同じ定数  $C_0, C_1, C_2$  を用いて作った (2.1.3) を  $\hat{J}_1$  とかけば,  $J_1$  と  $\hat{J}_1$  との差が次式によって評価される。すなわち,

$$\begin{aligned} \Delta J_1 &= J_1 - \hat{J}_1 \\ &= \left[ \int_{o(c)}^f - \int_{o(\hat{c})}^f \right] [\Phi_M d\mu + \Phi_N d\nu + \Phi_Q d\omega] \\ &= \iint_S [\Psi_M d\nu d\omega + \Psi_N d\omega d\mu + \Psi_Q d\mu d\nu] \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

ただし

$$\begin{aligned} \Psi_M(\mu, \nu, \omega; C_0, C_1, C_2) &\equiv \frac{\partial \Phi_Q}{\partial \nu} - \frac{\partial \Phi_N}{\partial \omega} \\ &= \frac{C_2 \bar{q} - (C_0 + C_1\mu + C_2\nu)(\bar{q}_\nu + \bar{q}_n \bar{q}_\omega)}{\bar{q}^2} \end{aligned} \quad (2.1.5a)$$

$$\Psi_N(\mu, \nu, \omega; C_0, C_1, C_2) \equiv \frac{\partial \Phi_M}{\partial \omega} - \frac{\partial \Phi_Q}{\partial \mu} = -\frac{C_1 \bar{q} - (C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu)(\bar{q}_\mu + \bar{q}_m \bar{q}_\omega)}{\bar{q}^2} \quad (2.1.5b)$$

$$\begin{aligned} \Psi_Q(\mu, \nu, \omega; C_0, C_1, C_2) &\equiv \frac{\partial \Phi_N}{\partial \mu} - \frac{\partial \Phi_M}{\partial \nu} \\ &= \frac{-\bar{q}(C_1 \bar{q}_n - C_2 \bar{q}_m) + (C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu)[- \bar{q}(\bar{q}_{n\mu} - \bar{q}_{m\nu}) + \bar{q}_n \bar{q}_\mu - \bar{q}_m \bar{q}_\nu]}{\bar{q}^2} \end{aligned} \quad (2.1.5c)$$

である。もちろん  $\bar{q}_\mu \equiv (\partial \bar{q} / \partial \mu)$ ,  $\bar{q}_{n\mu} \equiv (\partial \bar{q}_n / \partial \mu)$  等の意味であり、また (2.1.5) 右辺面積分における曲面  $S$  の正の向きは、その点で閉曲線  $\overrightarrow{ocfco}$  と同じ向きに  $S$  上に作った小さな閉曲線に対して正になるようにえらぶものとする。(図 13(a) 参照)

## 2.2 停留条件

もし基準軌道  $\hat{c}$  のまわりに、それからのずれが微小であるような比較軌道  $c$  が豊富にあり、 $\hat{J}_1$  が  $J_1$  の停留値を与えているものとすれば、 $\varepsilon$  を 1 次微小量として任意の  $\varepsilon$  に対して  $\hat{J}_1 = J_1 + 0(\varepsilon^2)$  でなければならない。そのためには、(2.1.5) から判るように、軌道  $\hat{c}$  上で定義されるベクトル

$$\Psi \equiv (\Psi_M, \Psi_N, \Psi_Q) \quad (2.2.1)$$

が、 $\hat{c}$  と  $c$  で作られる帯状曲面内に含まれていなければならない。すなわち、この曲面の法線ベクトルを  $n(\hat{c}, c)$  とすれば、 $n$  と  $\Psi$  とが直交する必要がある(図 13(b) 参照)。ベクトル  $n(\hat{c}, c)$  が、 $\hat{c}$  の接線ベクトル  $(\hat{m}, \hat{n}, \hat{q} \equiv \hat{q} + \hat{q}_m \hat{m} + \hat{q}_n \hat{n})$ 、および  $\hat{c}$  からみて  $c$  を定める変分ベクトル  $(\delta\mu, \delta\nu, \delta\omega)$  の両方に直交すること、さらに  $c$  が任意であることから、結局  $\Psi$  は  $\hat{c}$  と平行であることが判る。すなわち、 $\hat{c}$  が停留軌道である為の必要条件

$$\frac{\hat{m}}{\Psi_M} = \frac{\hat{n}}{\Psi_N} = \frac{\hat{q}}{\Psi_Q} \quad (\equiv F) \quad (2.2.2)$$

が得られる。(2.2.2), (2.1.5a, b, c) から停留軌道  $\hat{c}$  を生むための制御  $(\hat{m}, \hat{n})$  が以下のように求められる。すなわち、 $m, n$  以外には簡単のために  $\hat{\cdot}$  を省略して書けば、

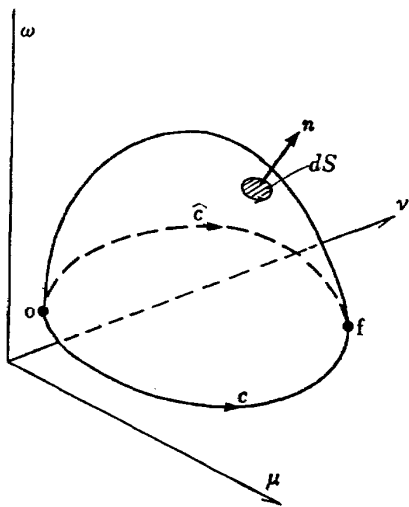
$$\begin{aligned} F &= \frac{\bar{q}}{-\Psi_M \bar{q}_m - \Psi_N \bar{q}_n + \Psi_Q} \\ &= -\frac{\bar{q}^2}{C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu} \cdot \frac{1}{\bar{q}_{n\mu} - \bar{q}_{m\nu}} \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

$$\begin{aligned} \hat{m} &= \Psi_M \cdot F \\ &= -\frac{1}{\bar{q}_{n\mu} - \bar{q}_{m\nu}} \left[ \frac{C_2 \bar{q}}{C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu} - (\bar{q}_\nu + \bar{q}_n \bar{q}_\omega) \right] \end{aligned} \quad (2.2.3a)$$

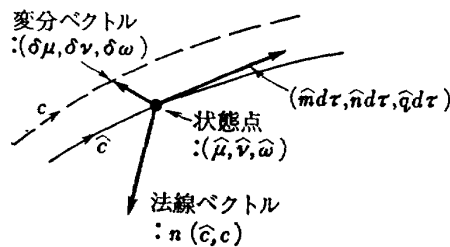
$$\begin{aligned} \hat{n} &= \Psi_N \cdot F \\ &= \frac{1}{\bar{q}_{n\mu} - \bar{q}_{m\nu}} \left[ \frac{C_1 \bar{q}}{C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu} - (\bar{q}_\mu + \bar{q}_m \bar{q}_\omega) \right] \end{aligned} \quad (2.2.3b)$$

となる。

(2.1.1) を作るときに、 $\bar{q}=0$  の点を除いたので、軌道  $c, \hat{c}$  もすべて  $\bar{q}=0$  の曲面をよぎらないものとしてきた。物理的意味を考えれば、 $\bar{q}=0$ 、すなわち釣合定常飛行可能な状態、を通過する軌道は当然存在す



(a) 大域的な比較軌道



(b) 局所的な比較軌道

図 13 基準軌道  $\hat{c}$  と比較軌道  $c$

る。このとき、軌道  $\hat{c}$  が点  $A(\hat{c})$  で  $\bar{q}=0$  曲面を通過するとすれば、点  $o, f$  のみならず、点  $A(\hat{c})$  をも  $\hat{c}$  と共有する軌道  $c$  と比較して (2.2.3) が成立する。

2.3 全体として特異な制御の検討

(2.2.3a, b) は、状態方程式 (1.4.9) に対するオイラー・ラグランジュの式から導出された解、すなわち最適理論でいう“全体として特異な制御”(Totally Singular Control)<sup>22), 23)</sup> を与える可能性のあるものである。ここでもし、[(2.2.3a)  $\times \hat{n}$  - (2.2.3b)  $\times \hat{m}$ ] を作れば

$$-\frac{C_1 \hat{m} + C_2 \hat{n}}{C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu} + \frac{\bar{q}_\mu \hat{m} + \bar{q}_\nu \hat{n} + \bar{q}_* (\bar{q}_m \hat{m} + \bar{q}_n \hat{n})}{\bar{q}} = -\left[ \frac{d}{d\tau} \left\{ \ln \left| \frac{C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu}{\bar{q}} \right| \right\} + \bar{q}_* \right] = 0 \quad (2.3.1)$$

である。 $\hat{c}$  に沿って、定数倍だけ不定な連続関数  $\phi_5$  ( $\neq 0$ ) が微分方程式

$$\dot{\phi}_5 = -\phi_5 \bar{q}_* \quad (2.3.2)$$

によって定義できるから、(2.3.1) を積分し積分定数を  $\phi_5$  に含めるとすれば、 $\bar{q} \neq 0$  のとき

$$C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu + \phi_5 \bar{q} = 0 \quad (2.3.3)$$

なる関係が得られる。(2.3.3) は  $\hat{c}$  に沿ってオイラー・ラグランジュ方程式の第1積分が存在すること、あるいはハミルトン関数が一定であること、と同値である。もし  $\bar{q}_* = 0$  が仮定できれば、(2.3.2) によって  $\phi_5 = C_5$  ( $\neq 0$ ) なる定数  $C_5$  が存在し、全体として特異な軌道  $\hat{c}$  は

$$C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu + C_5 \bar{q}(\mu, \nu) = 0 \quad (2.3.3a)$$

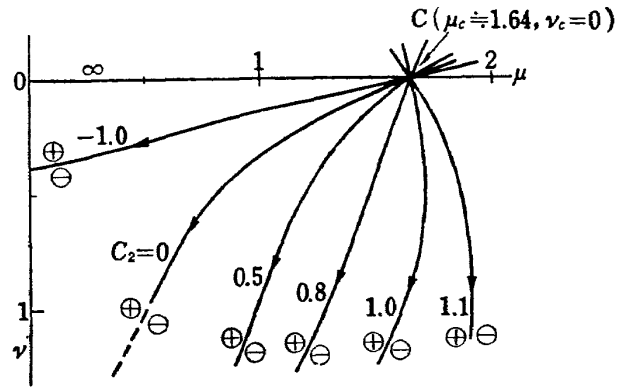
によって確定する。同時にそのときの制御は(2.2.3a, b) から、

$$\hat{m}(\bar{q}_* = 0) = \left( \frac{C_2}{C_5} + \bar{q}_\nu \right) / (\bar{q}_{n\mu} - \bar{q}_{m\nu}) \quad (2.3.4a)$$

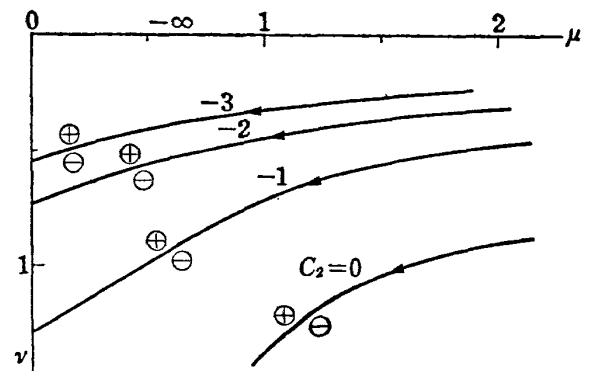
$$\hat{n}(\bar{q}_* = 0) = -\left( \frac{C_1}{C_5} + \bar{q}_\mu \right) / (\bar{q}_{n\mu} - \bar{q}_{m\nu}) \quad (2.3.4b)$$

であることが知られる。もちろん軌道  $\hat{c}$  が (2.3.3a) によって確定している以上、(2.3.4a) と (2.3.4b) とは互に独立ではない。

$C_0, C_1, C_2$  は評価関数 (2.1.3) を定義するときからあらかじめ決めておいた定数であるか、もしくは  $\hat{c}$  に沿って得られる  $\tau_f - \tau_0, x_f - x_0, z_f - z_0$  が等周条件としてあらかじめ与えておいた値と矛盾しないように選ばれるべき未知定数であるか、のいずれかである。もちろん評価関数としての興味がなく、しかも等周条件としても組み入れられていないときには、それぞれ  $C_0$



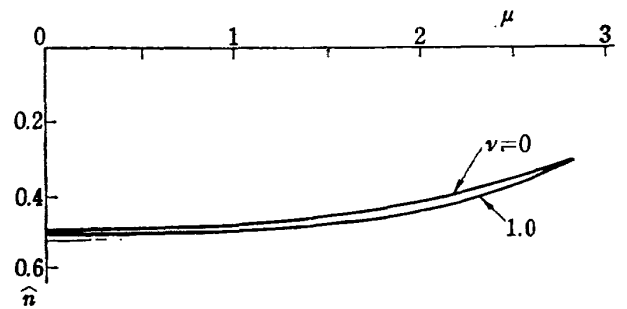
(a)  $k=0.75$



(b)  $k=-0.25$

$C_2 \nu + C_5 \bar{q} = 0 (C_5 = -1)$   
 ( $\oplus, \ominus$  は  $C_2 \nu - \bar{q}$  の符号を示す)

図 14 全体として特異な軌道



( $C_1=0$  の場合)

図 15 全体として特異な制御  $n$

$= 0, C_1 = 0, C_2 = 0$  等と考えればよい。

(2.3.3) あるいは (2.3.3a) は有限条件式であるから、それによって定まる  $\hat{c}(\mu, \nu, \omega; C_0, C_1, C_2, C_5)$  曲線があらかじめ与えられた始点  $o(\mu_0, \nu_0, \omega_0)$  および終点  $f(\mu_f, \nu_f, \omega_f)$  を通る保証はなく、それが停留解の一部をなすとしても解の全体は不連続解として与えられるはずである<sup>24)</sup>。全体として特異な解が最適解の一部をなすうるか否かを調べる為に、以下では所要時間

$\tau_f - \tau_0$ , および所要水平距離  $x_f - x_0$  に関心を払わない場合について考察する。簡単のために  $\bar{q}_0 = 0$  を仮定する。図 14 には,  $C_0 = C_1 = 0, C_2 = -1$  のとき(2.3.3a) をみたす  $\hat{c}$  曲線群を  $C_2$  をパラメタとして示してある。 $k > k_0$  に対応する例(図 14(a)) においては,  $\hat{c}$  軌道は最小離陸安全速度点  $C(\mu_0, 0)$  を通る曲線群で表わされる。それぞれの  $C_2$  値に対応した曲線の両側のかかなり広い範囲で  $(C_2 v - \bar{q})$  は正負の一定符号をとる。図中に記入してある  $\oplus, \ominus$  の符号はそれを示す為のものである。図 14(b) は  $k < k_E$  の例である。

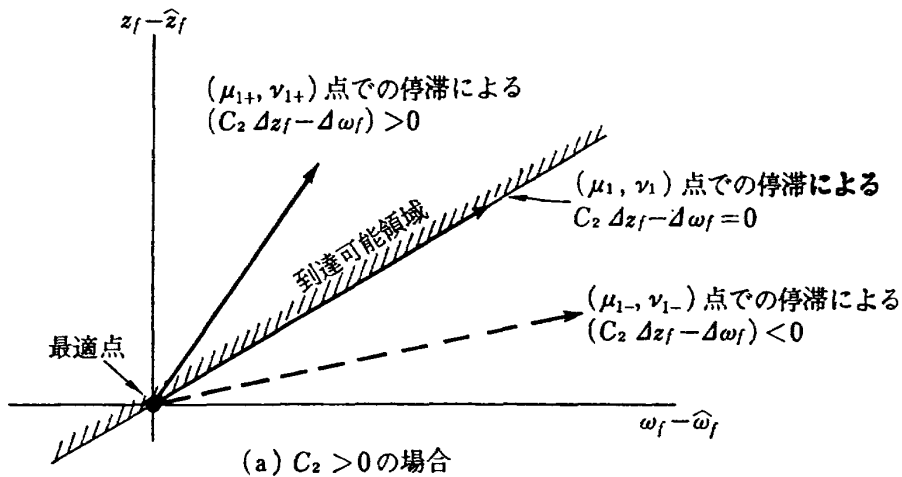
$C_1 = 0$  ならば (2.3.4b) から, 図 14 に示したような停留軌道を生むのに必要な  $\hat{n}$  が  $C_2/C_0$ , および  $k$  に無関係に定められる。図 15 にその  $\hat{n}$  を示す。 $\hat{n}$  ( $C_0 = C_1 = 0$ )  $> 0$  であり, したがって図 14 中の各軌道に沿ってその矢印の示す様に  $v$  の増加する方向に時刻が進む。図 15 による  $\hat{n}$  自身, 実用上かなり大きな値であるが, さらに図 14 中の各軌道の勾配が

$|\hat{n}/\hat{m}|$  を与えることを考慮すれば,  $\hat{m}, \hat{n}$  が共に図 4 あるいは図 5 の制御変数許容領域にとどまりうるのは,  $k > k_0$  の場合の  $C$  点付近のみであることが判る。換言すれば, 実際的でない程大きな制御領域を仮定しない限り, (2.3.3a) のような停留軌道を生み出すことができないのである。

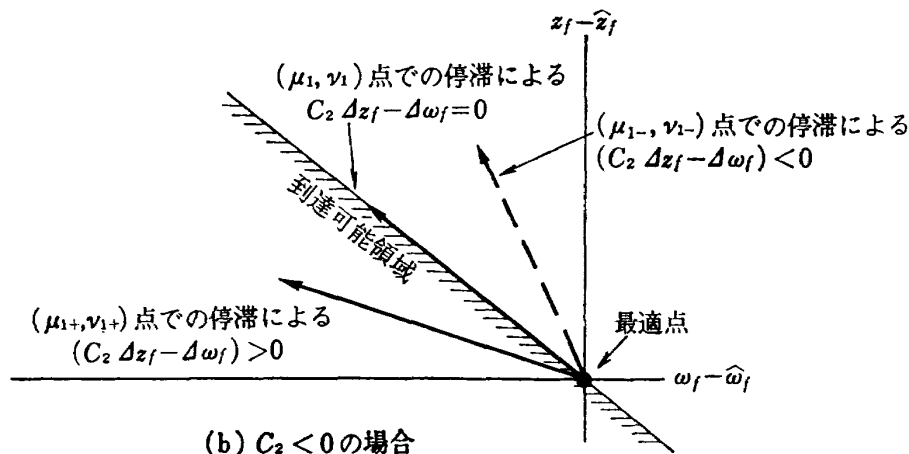
(2.3.3a) の特異曲線を考察することによって, 最適軌道の数値解を構成するためのヒントが得られる。 $(z_f - z_0)$  を等周条件として与えた上で  $-(\omega_f - \omega_0) : \min$  の問題を考えよう。この問題に最適解が存在するとすれば, それに対する任意の許容変動コントロールによって生ずる最終状態の変動は  $C_2 = -1$  として

$$C_2(z_f - \hat{z}) - (\omega_f - \hat{\omega}_f) \geq 0 \quad (2.3.5)$$

の関係をみたしているはずである。さて, この最適解に付随して定まる  $C_2$  について, 上述のように (2.3.3a) をみたす一つの特異曲線が定まるはずである。最適軌道が一点  $(\mu_1, v_1)$  でこの特異曲線と交わるとし, その状態点において擬釣合飛行  $m = n = 0$  を行って微



(a)  $C_2 > 0$  の場合



(b)  $C_2 < 0$  の場合

図 16 特異曲線の性質

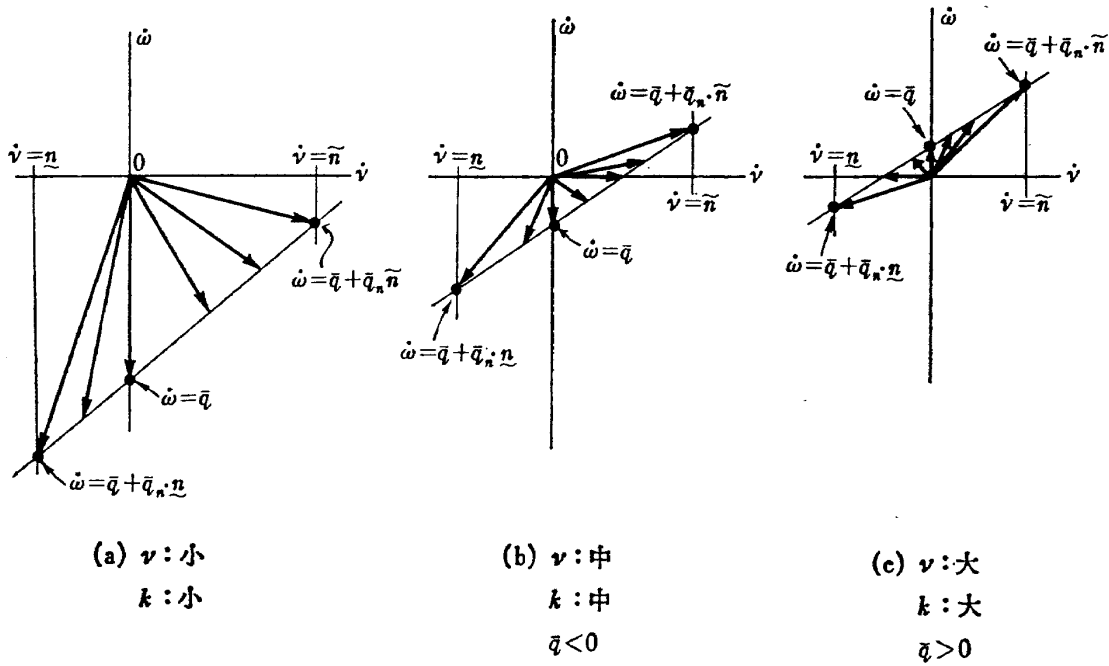


図 17 許容される状態変化の方向 ( $m=0$  の場合)

小時間  $\Delta\tau_1$  だけ停帯したとする。(2.3.3a) によって

$$C_2\nu_1 - \bar{q}(\mu_1, \nu_1) = [C_2\dot{z}_f - \dot{\omega}]_{\mu=\mu_1, \nu=\nu_1, m=n=0} = 0 \quad (2.3.6)$$

であり、一方最適解に比べて最終状態は

$$\left. \begin{aligned} \Delta z_f &\equiv z_f - \hat{z}_f = \nu_1 \Delta\tau_1 \\ \Delta\omega_f &\equiv \omega_f - \hat{\omega}_f = \bar{q}(\mu_1, \nu_1) \cdot \Delta\tau_1 \end{aligned} \right\} \quad (2.3.7)$$

だけ変化する。この変化の生ずる方向を  $\omega_f \cdot z_f$  面上で観察すれば (2.3.6), (2.3.7) によって

$$[C_2\Delta z_f - \Delta\omega_f]_1 = 0 \quad (2.3.8)$$

がみたされるようなものである。同じ  $C_2$  について、その最適軌道が

$$C_2\nu_{1\pm} - \bar{q}(\mu_{1\pm}, \nu_{1\pm}) \geq 0 \quad (2.3.9)$$

であるような状態点  $(\mu_{1+}, \nu_{1+})$  あるいは  $(\mu_{1-}, \nu_{1-})$  (それぞれ図 14 の  $\oplus$  側及び  $\ominus$  側) を経過するものとする。やはり  $\Delta\tau_1$  の停帯を想定することにより

$$[C_2\Delta z_f - \Delta\omega_f]_{1\pm} \geq 0 \quad (2.3.10)$$

をみたすような最終状態の変動が得られるはずである。(2.3.8), (2.3.10) を図示したものが図 16 である。 $\hat{z}_f, \hat{\omega}_f$  を与える軌道が最適であることは (2.3.5) の条件によって保証される訳であるから、 $C_2$  の符号によらず最適軌道は  $(\mu_{1-}, \nu_{1-})$  なる状態点を通することはない。もう少し一般的に表現すれば、ある  $C_2$  (あるいは等価的に  $C_5$ ) の値 (解全体が定まるときに同時に定められる未知定数) によって規定される等周条件付最適問題の解軌道は、その  $C_2$  (または  $C_5$ ) に対応する特異曲線の片側のみに存在し、その両側にま

たがることのない。

上記では互に近傍にある軌道  $c, \hat{c}$  について両方向き (bilateral) 局所停留条件を求めたが、特別な飛行状態を仮定して 2 次元 1 自由度の問題に単純化すれば、以下のようにして最大、最小に関する大域的な判定が可能である。

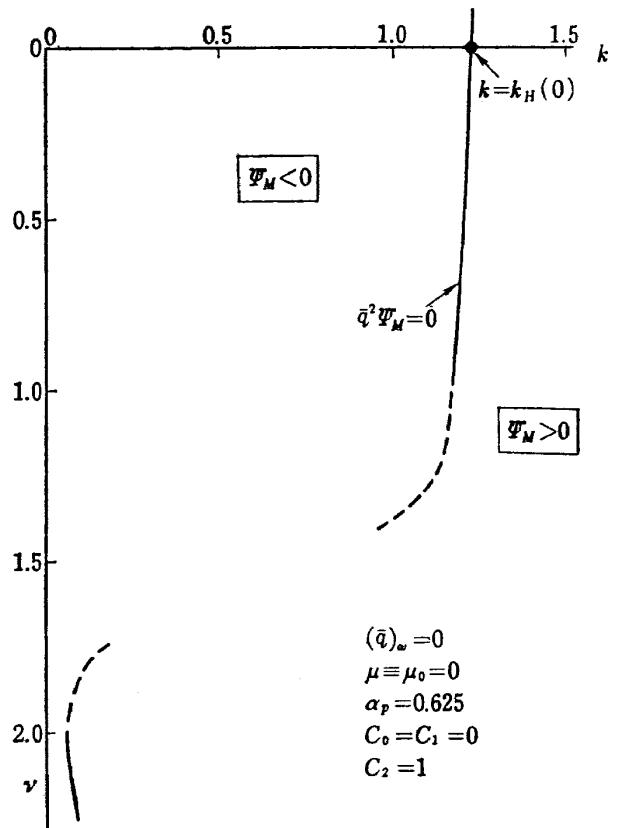


図 18  $\Psi_M$  の符号

2.4 前進速一定の場合の解析\*

考えている時間区間で、恒等的に

$$m \equiv 0, \mu = \mu_0 = \text{const}; [0, \tau_f] \quad (2.4.1)$$

である場合を考える。状態変数  $\mu$  はパラメタ  $\mu_0$  に退化し、制御変数  $m$  はその意味を失う。二変数  $(v, \omega)$ 、一自由度  $(n)$  を有する最適問題であって、近似的には低速禁止領域の低高度限界、あるいは離陸中止径路を定める飛行状態を表わす。

制御変数の許容領域は

$$\tilde{n} \geq n \geq \underline{n} \quad (2.4.2)$$

であって、(1.3.8c) をとるか (1.2.4c) をとるかによって

$$\tilde{n} = -(\bar{\theta} - \theta_d) / \bar{\theta}_n, \tilde{n} = n_{\max} \quad (2.4.3a, b)$$

であり、(1.3.8d), (1.2.4d) によって

$$\tilde{n} = n_{\min} \quad (2.4.3c)$$

である。ある時刻での状態  $v(\tau), \omega(\tau)$  が与えられたとして、その状態が変化しうる方向を  $v-\omega$  面内で考えれば

$$dv = n \cdot d\tau, d\omega = (\bar{q} + \bar{q}_n \cdot n) d\tau \quad (2.4.4)$$

で与えられる。ベクトル  $(dv, d\omega) \sim (v, \omega)$  を図示したものが図 17 である。状態の許容される変化方向は、いずれも三角形の対辺に向うベクトルで表示されるが、 $k(\omega)$ ,  $v$  の大小によってベクトルの方向が逆方向に変化する点が重要である。

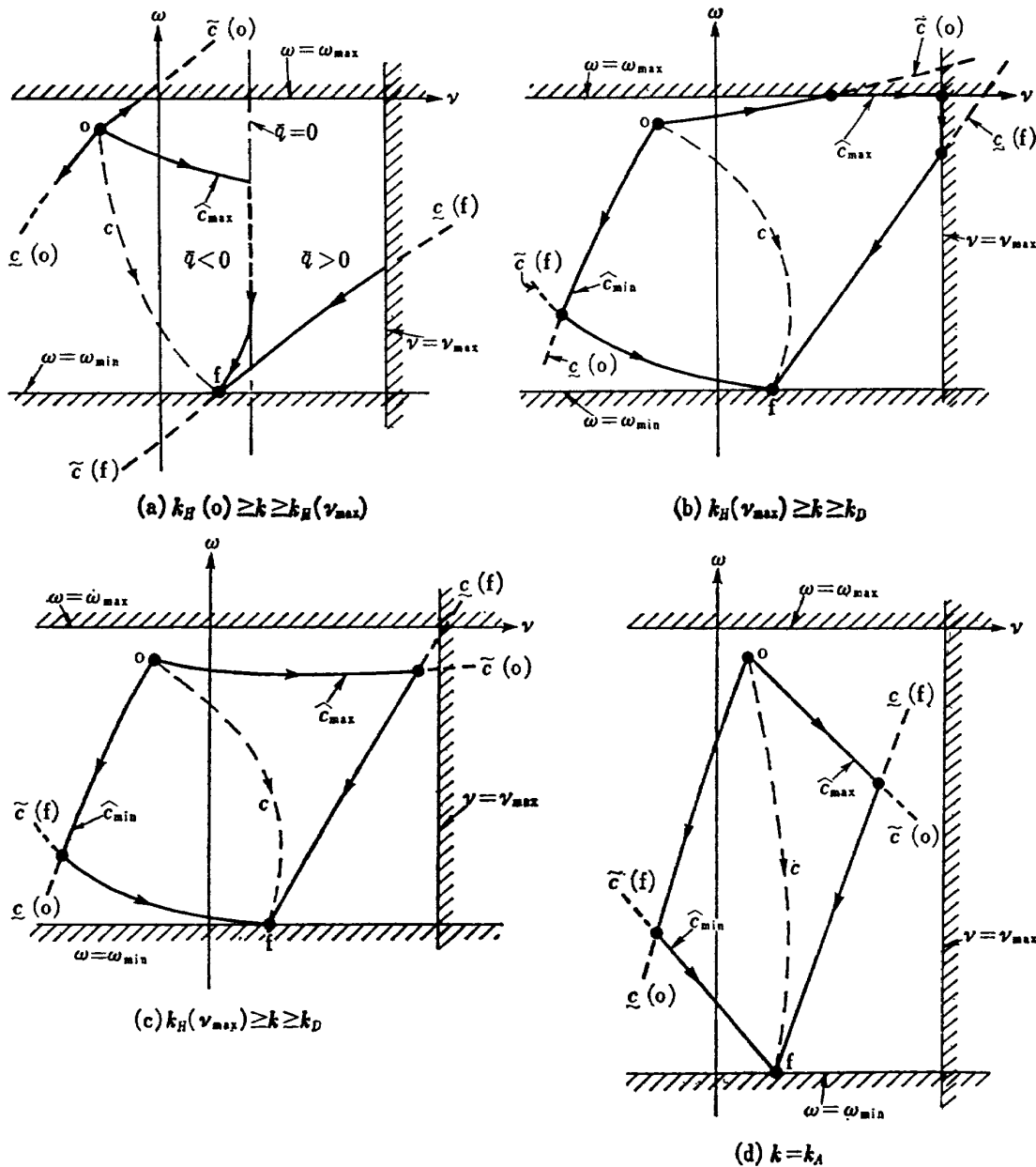


図 19 大域的最適性 ( $m \equiv 0$  の場合)

\* 本節の議論は、文献 6, 第 2 章の内容と一部重複するが、記号、仮定等の統一のためにここに含めた。

さて、(2.4.1) の条件下では任意の軌道に沿って上のどこかで  $n=q=0$  で与えられる釣合降下を持続  $d\mu=0$  であり、任意の相隣る二つの軌道間で  $\delta\mu=0$  であるから、(2.1.5) は

$$J_1 - \hat{J}_1 = \iint_{S(\nu, \omega)} \Psi_M d\nu d\omega \quad (2.4.5)$$

となる。前節同様に、互に近傍にある二つの径路  $c, \hat{c}$  を比較して停留条件を考えれば、(2.2.2) の退化した形として

$$\bar{q}^2 \Psi_M = C_2 \bar{q} - (C_0 + C_2 \nu) (\bar{q}_\nu + \bar{q}_n \bar{q}_\omega) = 0 \quad (2.4.6)$$

が得られる。ここで  $x_f - x_0$  を指定することは  $\tau_f - \tau_0$  を指定することと同値だから  $C_1 \mu_0$  を  $C_0$  に含めて考えた。(2.3.3a, b) のようには制御  $\hat{n}$  は書かれ得ないが、(2.4.6) によって  $\nu \cdot \omega$  面上に特異曲線が定められ、これをみたくように  $\hat{n}$  が求められる。ヘリポートの大きさを制限せず ( $C_1=0$ )、 $J_1 = x_f - x_0$  をとれば  $C_2=1$  である。 $\bar{q}_\omega=0$  を仮定すれば (2.4.6) は (1.4.7a) を用いて

$$\begin{aligned} \bar{q}^2 \Psi_M &= \bar{q} - \nu \bar{q}_\nu \\ &= k - \left[ \frac{\eta_P \bar{\lambda}(\mu_0, \nu) - \nu}{\eta_D} + \nu \bar{q}(\mu_0, \nu) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.4.6a)$$

と書き直される。 $\mu_0=0$  の場合について  $k \cdot \nu$  面上に (2.4.6a) の根軌跡を示したものが図 18 である。 $k < k_H$  のみに関心があり、またボルテックス・リング状態を避ける意味での  $\nu_{\max}$  ((1.7.4b) 参照) は  $\nu_{\max} < 1$  と考えてよい<sup>20)</sup>から、実用的な  $k \cdot \mu$  の範囲において

$$\Psi_M < 0 \quad (2.4.7)$$

と考えるとよい。この事実と、図 17 に示した状態変化の許容される方向とを考慮すれば、以下のようにして  $(x_f - x_0)_{\max/\min}$  をうるための最適軌道を構成することができる。

図 19 は、ある与えられた始点  $o(\nu_0, \omega_0)$ 、与えられた終点  $f(\nu_f, \omega_f)$ 、および (1.7.4b, c) で定められる状態変数の許容領域  $\mathcal{D}$  の限界を斜線で示すものである。各図には、その  $k$  に対応して点  $o$  から出発する到達可能領域  $\mathcal{D}_0$  の限界軌道  $\hat{c}(o), \underline{c}(o)$ 、および点  $f$  に到達する接近可能領域  $\mathcal{D}_f$  の限界軌道  $\hat{c}(f), \underline{c}(f)$  が記入してある。もちろん  $\hat{c}(o), \hat{c}(f)$  は  $n \equiv \bar{n}$  によって、また  $\underline{c}(o), \underline{c}(f)$  は  $n \equiv \underline{n}$  によって実現される軌道である。図 19(a) は  $k \equiv k_H(\nu=0)$  (もちろん  $k < k_H(\nu=0)$ ) の代表例であって、領域  $\mathcal{D}(\nu, \omega) = \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_0 \cap \mathcal{D}_f$  が  $\bar{q}=0$  の状態を含む場合である。このときには点  $o$  から点  $f$  に到る許容軌道の中に  $\bar{q}=0$  をよぎるものが必ずあるから、それを  $\hat{c}_{\max}$  とかけば  $\hat{c}_{\max}$

することができ、 $(x_f - x_0)_{\max} \rightarrow \infty$  が実現可能である。図 10 から判るように、 $k$  の減少と共に  $\bar{q}=0$  を与える釣合沈下率は増大する。 $\nu_H = \nu_{\max}$  となるような  $k_H(\nu = \nu_{\max})$  は実は任意の高度からの垂直降下が可能である限界、すなわち停止した発動機が臨界発動機でなくなる限界出力状態を与える。換言すれば、一発動機不作動時にもホバリング能力が保証される  $k_H(\nu = 0)$  よりもさらに少し楽な出力状態  $k_H(\nu = \nu_{\max})$  において最適問題は意味を失う。図 19(b), (c), (d) はいずれも領域  $\mathcal{D}(\nu, \omega)$  内において  $\bar{q} < 0$  の場合であって、実用上(b), (c) は離陸中止径路による臨界決定点高度を求める場合に該当し、また (d) は全発動機不作動時の低速禁止領域低ホバ点高度を求める場合を代表する。

図 19 (b), (c), (d) においては、領域  $\mathcal{D}(\nu, \omega)$  内においていずれも  $\bar{q} \neq 0$  であるから、ともに  $\mathcal{D}(\nu, \omega)$  内にあり、しかも互に必ずしも近傍にない二つの径路  $c, \hat{c}$  の間で (2.4.5) の関係が大域的に成立する。したがって  $c, \hat{c}$  間に囲まれた面積に方向を考えて (2.4.5) を適用すれば、(2.4.7) の事実によって次の結論が導かれる。すなわち、領域  $\mathcal{D}(\nu, \omega)$  にあって、始点  $o$  から終点  $f$  に至るすべての他の許容軌道をその右側に見る軌道  $\hat{c}_{\max}$  が  $(x_f - x_0)_{\max}$  を与え、またすべての他の許容軌道をその左側に見る軌道  $\hat{c}_{\min}$  が  $(x_f - x_0)_{\min}$  を与える。対応する制御について云えば、 $k$  の値; 点  $o$ , 点  $f$  の位置;  $\omega_{\max/\min}$ ,  $\nu_{\max}$  の大きさ;  $\bar{n}, \underline{n}$  の大きさ; 等に応じて、 $\hat{c}_{\max}$  は  $\hat{n} = \bar{n} : \hat{c}(o)$ ,  $\hat{n} = -\bar{q}/\bar{q}_n$ ;  $\omega \equiv \omega_{\max}$ ,  $\hat{n} = 0$ ;  $\nu \equiv \nu_{\max}$ ,  $\hat{n} = \underline{n}$ ;  $\underline{c}(f)$  のうちのいくつかを連結して得られ、また  $\hat{c}_{\min}$  は  $\hat{n} = \underline{n}$ ;  $\underline{c}(o)$ ,  $\hat{n} = -\bar{q}/\bar{q}_n$ ;  $\omega \equiv \omega_{\min}$ ,  $\hat{n} = \bar{n}$ ;  $\hat{c}(f)$  のうちのいくつかを連結して得られる。

明らかに、 $\hat{c}_{\max}$  と  $\hat{c}_{\min}$  とで得られる  $(x_f - x_0)_{\max}$  と  $(x_f - x_0)_{\min}$  との間を連続的に埋める許容軌道は無数に存在する。また始点  $o$  が (1.7.8a) で与えられる着陸可能領域  $T(\mu_f = \mu_0, \nu_f) \leq 0$  に属し、かつ  $\omega_f > \omega_{\min}$  ならば、終点  $f$  を始点  $o$  に重ねることができ、 $(x_f - x_0)_{\min} = 0$  とすることが可能だから、 $\hat{c}_{\max}$  によって得られる  $(x_f - x_0)_{\max}$  以下の任意の高度からの前進速一定の降下による着陸が安全であることが保証される。

$(\bar{q})_\omega = 0$  が仮定できないときには、(2.4.6a) は

$$\begin{aligned} \bar{q}^2 \Psi_M &= \bar{q} - \nu (\bar{q}_\nu + \bar{q}_n \bar{q}_\omega) \\ &= k(\omega) - \nu \bar{q}_n(\mu_0, \nu) k_\omega(\omega) \end{aligned}$$



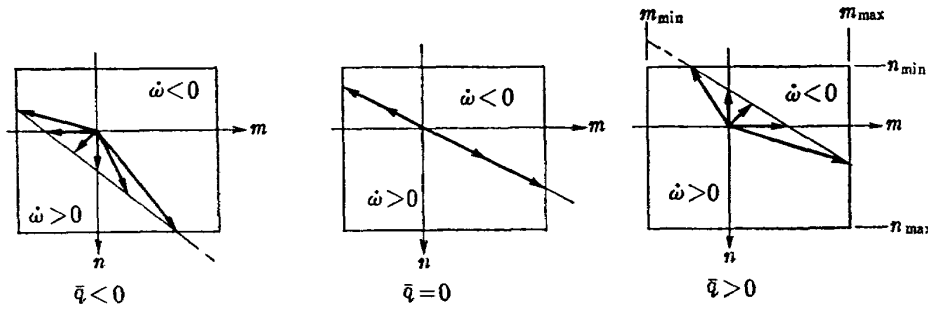


図 20 許容制御ベクトル ( $\dot{\omega} \equiv 0$  の場合)

$$-\left[ \frac{\eta_P \lambda (\mu_0, \nu) - \nu}{\eta_D} + \nu \bar{q}_\nu (\mu_0, \nu) \right] = 0 \quad (2.4.6b)$$

となる。 $k$  の値が  $k_H (\nu = \nu_{max})$  に近い場合を除いて、(2.4.6b) をみたま  $\nu \cdot \omega$  特異曲線は  $(\nu, \omega)$  の実用範囲には存在せず、やはり (2.4.7) の関係がなりたっている。以後の議論は、 $(\bar{q})_{\omega=0}$  と仮定した場合と全く同様である。

2.5 ロータ回転速度一定の場合の解析

ある飛行区間を通じてロータ回転速度が一定に保たれるように制御されたとする。実用的には  $\omega \equiv \omega_{max/min}$  に沿うことが最適である部分軌道に該当するほか、前遷移飛行での諸限界を定性的に考察するのに便利である。付加的仮定は

$$\bar{q} + \bar{q}_m \cdot m + \bar{q}_n \cdot n \equiv 0, \omega \equiv \omega_0: \text{const}; [0, \tau_f] \quad (2.5.1)$$

であって、二つの制御変数  $(m, n)$  は互に独立でなくなる。(2.5.1) によって当然  $(\bar{q})_{\omega=0}$  も仮定されているから、やはり状態変数  $(\mu, \nu)$  に対する二次元、一自由度問題である。制御変数の領域に対する拘束条件としては、簡単のために (1.2.4) を仮定する。(2.5.1) によって、ある状態  $(\mu, \nu)$  において許容される状態変化の方向は図 20 に示すようなものであることが容易にわかる。付録Cの付図に示すように、実用上の  $\mu \cdot \nu$  領域において一般に  $\bar{q}_m < 0, \bar{q}_n > 0$  であってそれぞれ一定符号を有するから、 $\bar{q} = 0$  曲線の両側で許容制御ベクトル(許容される状態変化の方向に同じ)の方向が逆転することが重要である。

さて前節におけると同様に、ある軌道に沿って  $d\omega = 0$ 、相隣る二軌道間で  $\delta\omega = 0$  であるから、(2.1.5) は大域的に成立し、

$$J_1 - \hat{J}_1 = \iint_{S(\mu, \nu)} \Psi_Q d\mu d\nu \quad (2.5.2)$$

とかくことができる。互に近傍にある二つの軌道を比

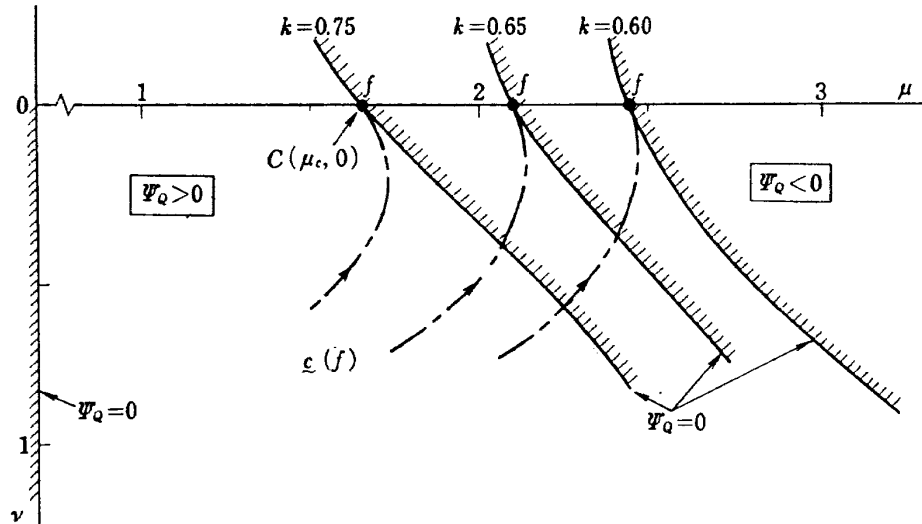
較して得られる停留条件は、やはり (2.2.2) の退化した形で得られ、

$$\begin{aligned} \bar{q}^2 \Psi_Q &= -\bar{q} \cdot (C_1 \bar{q}_n - C_2 \bar{q}_m) \\ &+ (C_0 + C_1 \mu + C_2 \nu) [-\bar{q} (\bar{q}_{n\mu} - \bar{q}_{m\nu}) + \bar{q}_n \bar{q}_\mu \\ &- \bar{q}_m \bar{q}_\nu] \\ &= 0 \end{aligned} \quad (2.5.3)$$

となる。図 21 には  $k > k_C, C_0 = C_1 = 0, C_2 = 1$  の場合について  $\Psi_Q = 0$  で定められる  $\mu \cdot \nu$  特異曲線と、その両側での  $\Psi_Q$  の符号とを  $k$  をパラメタにして示してある。一般にこの特異曲線は  $\nu$  軸以外に一本あり、それは最小離陸安全速度点  $C(\mu_C, 0)$  を通る。

最適軌道を以下のようにして組み立てる。まず始点  $o(\mu_0, \nu_0)$ 、終点  $f(\mu_f, \nu_f)$  がともに  $\bar{q} = 0$  曲線の片側、たとえば  $\bar{q} < 0$  の領域にある場合を考える。状態変数拘束条件 (1.7.4b) に対して許容される領域を  $\mathcal{D}$ 、始点  $o$  から出発し、図 20 の許容制御ベクトルによって到達しうる到達可能領域のうちの  $\bar{q} < 0$  部分を  $\mathcal{D}_o^{(-)}$ 、同様に終点  $f$  に至る接近可能領域のうちの  $\bar{q} < 0$  の部分を  $\mathcal{D}_f^{(-)}$  とし、 $\mathcal{D}_{(\mu, \nu)}^{(-)} \equiv \mathcal{D} \cap \mathcal{D}_o^{(-)} \cap \mathcal{D}_f^{(-)}$  とする。 $\mathcal{D}_{(\mu, \nu)}^{(-)}$  内にある任意の二つの許容軌道  $c, \ell$  について大域的に (2.5.2) が成立する。図 21 からわかるように、興味のある  $\mu \cdot \nu$  領域では  $\Psi_Q > 0$  であることを考慮して、軌道  $c, \ell$  に囲まれる面積について (2.5.2) 右辺の符号を判定すれば\*、以下の結論が得られる。すなわち (図 22(a) 参照)、 $\mu \cdot \nu$  面で点  $o$  から点  $f$  に至る軌道であって常に  $\bar{q} < 0$  であるもののうち、ほかのすべての許容軌道をその右側に見る軌道  $\ell_{max}$  が  $(x_f - x_0)_{max}$  を与え、またほかのすべての許容軌道をその左側に見る軌道  $\ell_{min}$  が  $(x_f - x_0)_{min}$  を与える。最適制御についていえば、 $\ell_{max/min}$  は、 $(\hat{m}, \hat{n}) = (\bar{m}, \bar{n}) : \bar{c}(o), \bar{c}(f), (\hat{m}, \hat{n}) = (m, n) : c(o), c(f)$ ,

\* 本論文では  $\mu \cdot \nu$  面は直観と一致するように  $\mu$  を横軸右方に正、 $\nu$  を縦軸下方に正にとって示してあるから、ある領域を左に見て一周する線積分に対応する正の面積の方向は紙面背後に向う。



$(C_0=C_1=0, C_2=1)$

図 21  $\dot{\omega} \equiv 0$  に対する  $\mu$ - $\nu$  特異曲線,  $k > k_C$  の例

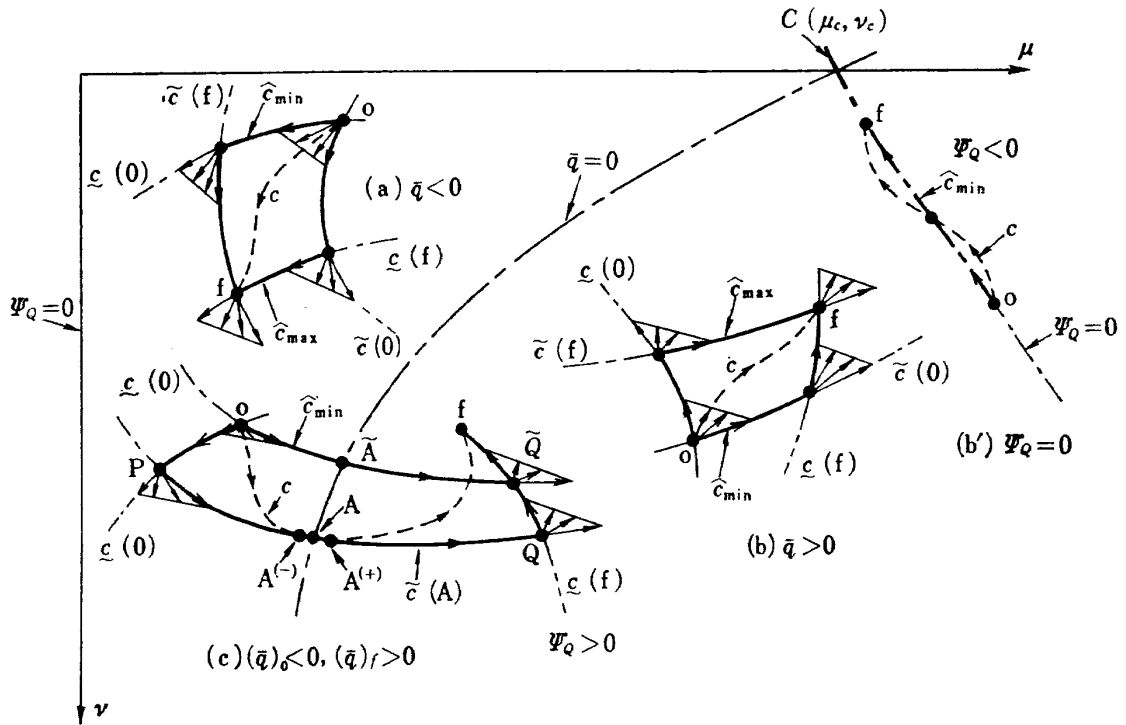


図 22 最適軌道のシンセシス ( $\dot{\omega} \equiv 0$  の場合)

—その1

および  $(\hat{m}, \hat{n}) = (-\bar{q}/\bar{q}_m, 0)$ :  $\nu = \nu_{\max}$  のうちのいくつかを組み合わせて得られる。ここに

$\bar{m} \equiv \min\{m_{\max}, -(\bar{q} + \bar{q}_n n_{\max})/\bar{q}_m\}$  (2.5.4 a)

$\bar{n} \equiv \min\{-(\bar{q} + \bar{q}_m m_{\max})/\bar{q}_n, n_{\max}\}$  (2.5.4 b)

$\underline{m} \equiv \max\{m_{\min}, -(\bar{q} + \bar{q}_n n_{\min})/\bar{q}_m\}$  (2.5.5 a)

$\underline{n} \equiv \max\{-(\bar{q} + \bar{q}_m m_{\min})/\bar{q}_n, n_{\min}\}$  (2.5.5 b)

である。興味のある  $\mu$ - $\nu$  領域では  $\bar{q}_m > 0$ ,  $\bar{q}_n > 0$  であるから,  $(\bar{m}, \bar{n})$ ,  $(\underline{m}, \underline{n})$  の性質として

$\bar{m} \geq \underline{m}, \bar{n} \geq \underline{n}$  (2.5.6 a)

$\bar{m} > 0, \underline{n} < 0; \bar{q} \geq 0$  (2.5.6 b)

$\underline{m} < 0, \bar{n} > 0; \bar{q} \leq 0$  (2.5.6 c)

がなりたつ。

図 22(b) に示すように,  $\bar{q} > 0$  なる始点 o, 終点 f, および領域  $\mathcal{D}(\mu, \nu)^{(+)}$  について最適軌道  $\ell_{\min}$ ,  $\ell_{\max}$  が上記と同様に定義される。特に  $\Psi_Q = 0$  に沿う特異軌道は(それが可能な軌道として), 図 22(b) を参照して (2.5.2) の判別積分の符号を判定することによって  $\ell_{\min}$  (もし点 o と点 f とが同図と逆ならば  $\ell_{\max}$ ) を与えるはずである。しかし実用上の  $(m_{\max}/m_{\min}, n_{\max}/n_{\min})$  の範囲では  $\Psi_Q = 0$  は許容されない軌道である。

このことは図 21 中に付記した点  $C(\mu_0, 0)$  に至る  $\omega \equiv 0$  の限界軌道  $\underline{c}(f)$  が  $\Psi_Q=0$  に最も近い勾配を有するものであることから明らかである。

次に図 22(c) に示すように、始点  $o$  と終点  $f$  とが  $\bar{q}=0$  曲線の両側に分かれて存在する場合を考える。軌道  $c, \tilde{c}$  としては点  $o$ , 点  $f$  を結ぶ許容軌道のうち、高々一回しか  $\bar{q}=0$  曲線を過らないもののみを考える。軌道  $c, \tilde{c}$  のいずれも  $\bar{q}=0$  の状態を経過するから、その状態で任意時間だけ 釣合降下飛行 を保持することができ、任意に大きな  $(z_f - z_o)$  を実現することが可能であって、 $(z_f - z_o)_{\max}$  は存在しない。したがって  $(z_f - z_o)_{\min}$  およびそのときの  $\tilde{c}_{\min}$  のみが興味の対象となる。まず  $\tilde{c}_{\min}$  は、 $(\tilde{m}, \tilde{n})$  および / あるいは  $(m, n)$  によって生み出され、 $\bar{q} > 0, \bar{q} < 0$  の領域でそれぞれ高々一回の切換点  $P, Q$  を有するものの系列中にある。このことは次のようにして明らかである。図 22(c) に示すように、一点  $A$  を  $\bar{q}=0$  曲線上に固定し、必ずしも互に近傍にない許容軌道  $c(oAf)$  および  $\tilde{c}(oPAQf)$  を考えて、それらが点  $o, A, f$  を共有するものとする。それぞれの軌道を  $\vec{oA}^-, \vec{Af}^+$  に分割して考えれば、 $A^+ \rightarrow A^-$  のとき  $(z_{A^+} - z_{A^-}) \rightarrow 0$  であるし、一方  $\vec{oA}^-, \vec{Af}^+$  の各々においては前述の結論によって  $\tilde{c}(oPA^-)$  が  $(z_{A^-} - z_o)_{\min}$  を、また

$\tilde{c}(A^+Qf)$  が  $(z_f - z_{A^+})_{\min}$  を、それぞれ与えることが判っているからである。

さて、点  $A$  を勝手に定めたとき、 $(z_f - z_o)_{\min}$  は  $\vec{oP}: \underline{c}(o), \vec{PAQ}: \tilde{c}(A), \vec{Qf}: \underline{c}(f)$  によって確定することがわかったから、それを  $A$  点の位置のみに依存するという意味で  $(z_f - z_o)_{\min}(A)$  とかけば、 $\min\{(z_f - z_o)_{\min}(A)\}$  を与える軌道が  $\tilde{c}_{\min}$  である。<sup>(A)</sup> 考えている軌道が  $\bar{q}=0$  曲線を過ぎるから、 $A$  点を動かして得られる二つの軌道と比較するときに (2.5.2) は適用できない。一般性を失うことなく  $(\bar{q})_o < 0, (\bar{q})_f > 0$  とし、(2.5.23) 左辺の微係数の符号が負であることを示そう。

部分軌道  $\vec{oP}: \underline{c}(o), \vec{Qf}: \underline{c}(f)$  に沿って

$$\frac{d\mu}{m(\mu, \nu)} = \frac{d\nu}{n(\mu, \nu)} = d\tau \quad (2.5.7)$$

をみたす解をそれぞれ

$$\nu = g_P(\mu), \nu = g_Q(\mu) \quad (2.5.8)$$

とかく。もちろん  $\nu_0 = g_P(\mu_0), \nu_f = g_Q(\mu_f)$  である。また部分軌道  $\vec{PQ}: \tilde{c}(A)$  に沿って微分方程式

$$\frac{d\mu}{\tilde{m}(\mu, \nu)} = \frac{d\nu}{\tilde{n}(\mu, \nu)} = d\tau \quad (2.5.9)$$

がなりたつ。(図 23 参照)。 $\tilde{c}(A)$  は (2.5.9) 中の  $\tilde{m}, \tilde{n}$  が定義される領域であれば ( $\tilde{m}=0$  の点でも)一

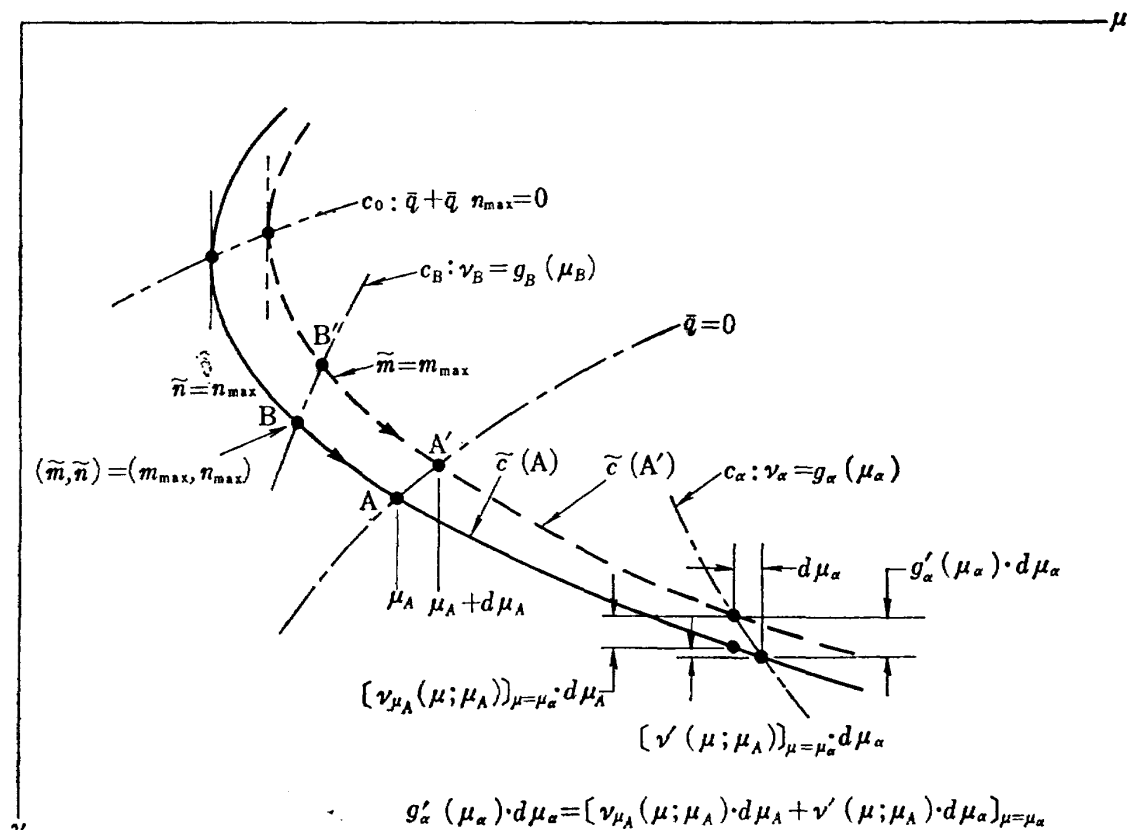


図 23 変分  $\nu_{\mu A}$  の符号

義的に定まるから、点Aの位置に付随した一個の適当なパラメタ、たとえば  $\mu_A$  を用いてその解を

$$\nu = \nu(\mu; \mu_A) \quad (2.5.10)$$

と記述することができる。 $\tilde{c}(A)$  上において、 $\tilde{m} = m_{\max}$  であるか  $\tilde{n} = n_{\max}$  であるか ((2.5.4 a, b) 参照) によって

$$d\tau = d\mu / m_{\max} \quad (2.5.11 a)$$

$$d\nu / n_{\max} \quad (2.5.11 b)$$

とかくことにし、(2.5.11 b) から (2.5.11 a) への切換が生ずる点Bは  $\mu_A$  の変化に伴って曲線  $c_B$ :

$$\nu_B = g_B(\mu_B) \quad (2.5.12)$$

上を移動するものとする\*。(図 23 参照)。このときの高度損失は

$$\begin{aligned} (z_f - z_0)_{\min(A)} &= (z_P - z_0) \varepsilon_{(0)} + (z_Q - z_P) \tilde{c}_{(A)} \\ &\quad + (z_f - z_Q) \varepsilon_{(f)} \\ &= \int_{\mu_0}^{\mu_P(\mu_A)} \frac{g_P(\mu)}{\tilde{m}(\mu, g_P(\mu))} d\mu \\ &\quad + \int_{g_P(\mu_P(\mu_A))}^{g_B(\mu_B(\mu_A))} \frac{\nu d\nu}{n_{\max}} + \int_{\mu_B(\mu_A)}^{\mu_Q(\mu_A)} \frac{\nu(\mu; \mu_A)}{m_{\max}} d\mu \\ &\quad + \int_{\mu_Q(\mu_A)}^{\mu_f} \frac{g_Q(\mu)}{\tilde{m}(\mu, g_Q(\mu))} d\mu \quad (2.5.13) \end{aligned}$$

で表わされる。A点の移動に伴う  $(z_f - z_0)_{\min(A)}$  の変動を評価するために、(2.5.13) の  $\mu_A$  に関する微係数を作る。境界項を P, B, Q ごとにまとめると

$$\begin{aligned} \frac{d(z_f - z_0)_{\min(A)}}{d\mu_A} &= \frac{d\mu_P(\mu_A)}{d\mu_A} \cdot \nu_P \cdot \left[ \frac{1}{(\tilde{m})_P} - \frac{g_P'(\mu_P)}{n_{\max}} \right] + \frac{d\mu_B(\mu_A)}{d\mu_A} \cdot \nu_B \cdot \left[ \frac{g_B'(\mu_B)}{n_{\max}} - \frac{1}{m_{\max}} \right] \\ &\quad + \frac{d\mu_Q(\mu_A)}{d\mu_A} \cdot \nu_Q \cdot \left[ \frac{1}{m_{\max}} - \frac{1}{(\tilde{m})_Q} \right] \\ &\quad + \int_{\mu_B(\mu_A)}^{\mu_Q(\mu_A)} \frac{\nu_{\mu_A}(\mu; \mu_A)}{m_{\max}} d\mu \quad (2.5.14) \end{aligned}$$

となる。ただし  $g'(\mu) \equiv dg(\mu) / d\mu$ ,  $\nu_{\mu_A} \equiv \partial \nu(\mu; \mu_A) / \partial \mu_A$  のように略記してある。

一方  $\tilde{c}(A)$  に沿って  $d\nu / d\mu = \tilde{n}(\mu, \nu) / \tilde{m}(\mu, \nu)$  であるが、 $\tilde{m} = -(\bar{q} + \bar{q}_{\max}) / \bar{q}_m = 0$  となる点を除いて  $\tilde{n} / \tilde{m}$  は有界連続だから (2.5.9) に対する変分方程式として

$$\frac{d(\nu_{\mu_A})}{d\mu} = \frac{\partial}{\partial \mu_A} \left[ \frac{d\nu(\mu; \mu_A)}{d\mu} \right]$$

\*  $m_{\max}/\min$ ,  $n_{\max}/\min$  の大きさによって、 $\tilde{c}(A)$  上で (2.5.11 a) から (2.5.11 b) への切換が起こるかもしれないし、また  $\varepsilon(0)$ ,  $\varepsilon(f)$  上でも  $\tilde{m} = m_{\min}$  と  $\tilde{n} = n_{\min}$  との間の切換が生ずるかも知れないが、全く同様の取り扱いで同じ結論が得られる。

$$= \frac{\partial}{\partial \nu} \left[ \frac{\tilde{n}(\mu, \nu)}{\tilde{m}(\mu, \nu)} \right] \cdot \nu_{\mu_A} \quad (2.5.15)$$

が得られる。(2.5.15) は  $\nu_{\mu_A}$  について線型有次だから、 $\tilde{c}(A)$  が  $\tilde{m} = 0$  となる点を通る場合を除いて  $\nu_{\mu_A}$  はその符号を変じない。

図 23 に示すように、互に近傍にある二つの軌道  $\tilde{c}(A)$  と  $\tilde{c}(A')$ 、およびそれらと交わる滑らかな曲線  $c_\alpha$ :  $\nu_\alpha = g_\alpha(\mu_\alpha)$  を考えると、 $c_\alpha$  と  $\tilde{c}(A)$ ,  $\tilde{c}(A')$  との交点に関して一般的な関係

$$\frac{d\mu_\alpha(\mu_A)}{d\mu_A} = \frac{[\nu_{\mu_A}(\mu; \mu_A)]_{\mu=\mu_\alpha}}{g_\alpha'(\mu_\alpha) - [\nu'(\mu; \mu_A)]_{\mu=\mu_\alpha}} \quad (2.5.16)$$

がなりたつ。ただし  $\nu'(\mu; \mu_A) = d\nu(\mu; \mu_A) / d\mu$  の意味である。ここでまず  $c_\alpha$ :  $\bar{q}(\mu, \nu) = 0$  と考えると、 $d\mu_\alpha / d\mu_A = 1$  であるから (2.5.16) から、

$$\begin{aligned} (\nu_{\mu_A})_\alpha &\equiv [\nu_{\mu_A}(\mu; \mu_A)]_{\mu=\mu_\alpha} \\ &= (g_\alpha' - \nu') \bar{q} = 0 \\ &= [-(\bar{q}_\mu / \bar{q}_\nu) + (\bar{q}_m / \bar{q}_n)]_{\bar{q}=0} < 0 \quad (2.5.17) \end{aligned}$$

が得られる。最後の不等号は  $\bar{q}_\mu > 0$ ,  $\bar{q}_\nu > 0$ ,  $\bar{q}_n > 0$ ,  $\bar{q}_m < 0$  という一般的性質の結果である。(付録 C 参照)。したがって  $\tilde{c}(A)$  に沿う変分  $\nu_\mu$  の符号について次の性質が明らかになった。すなわち

$$\nu_{\mu_A}(\mu; \mu_A) < 0; \tilde{m}(\mu, \nu) > 0 \text{ のとき} \quad (2.5.18 a)$$

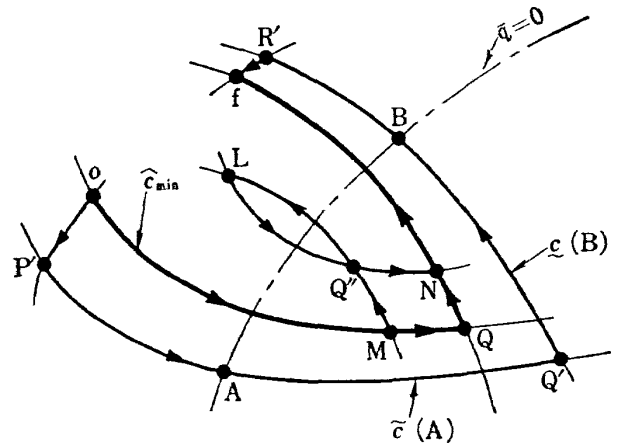
$$> 0; \quad < 0 \text{ のとき} \quad (2.5.18 b)$$

である。

次に (2.5.14) の各境界項を評価するために、P, B, Q の各点で順次 (2.5.16) を適用すれば

$$\frac{d\mu_P(\mu_A)}{d\mu_A} = \frac{(\nu_{\mu_A})_P}{g_P'(\mu_P) - (\nu')_P} \quad (2.5.19 a)$$

$$\frac{d\mu_B(\mu_A)}{d\mu_A} = \frac{(\nu_{\mu_A})_B}{g_B'(\mu_B) - (\nu')_B} \quad (2.5.19 b)$$



$$(\bar{q})_0 < 0, (\bar{q})_f < 0$$

図 24 最適経路のシンセシス ( $\dot{\omega} \equiv 0$  の場合) — その 2

$$\frac{d\mu_Q(\mu_A)}{d\mu_A} = \frac{(\nu_{\mu_A})_Q}{g_{Q'}(\mu_Q) - (\nu')_Q} \quad (2.5.19c)$$

が得られる。ここで (2.5.7), (2.5.8) から

$$g_{P'}(\mu_P) = (\bar{n}/\bar{m})_P, \quad g_{Q'}(\mu_Q) = (\bar{n}/\bar{m})_Q \quad (2.5.20a, b)$$

であり, また (2.5.9)~(2.5.11) から

$$\begin{aligned} (\nu')_P &= n_{\max}/(\bar{m})_P, \quad (\nu')_Q = (\bar{n})_Q/m_{\max} \\ (\nu')_B &= n_{\max}/m_{\max} \end{aligned} \quad (2.5.21)$$

である。さらに (2.5.4a, b) から

$$(\bar{m})_P = -[(\bar{q} + \bar{q}_n \cdot n_{\max})/\bar{q}_m]_P \quad (2.5.22a)$$

$$(\bar{n})_Q = -[(\bar{q} + \bar{q}_m \cdot m_{\max})/\bar{q}_n]_Q \quad (2.5.22b)$$

であるから, 結局 (2.5.14) を整理して

$$\begin{aligned} \frac{d(z_f - z_0)_{\min(A)}}{d\mu_A} &= \nu_P \cdot \left(\frac{\bar{q}_m}{\bar{q}}\right)_P \cdot \frac{(\bar{m})_P}{n_{\max}} \cdot (\nu_{\mu_A})_P \\ &\quad + \nu_Q \cdot \left(\frac{\bar{q}_n}{\bar{q}}\right)_Q \cdot (\nu_{\mu_A})_Q \\ &\quad + \nu_B \cdot \frac{1}{n_{\max}} (\nu_{\mu_A})_B \\ &\quad + \int_{\mu_B}^{\mu_Q} \frac{\nu_{\mu_A}(\mu; \mu_A)}{m_{\max}} d\mu \end{aligned} \quad (2.5.23)$$

が得られる。 $(\bar{q}_m/\bar{q})_P > 0$ ,  $(\bar{q}_n/\bar{q})_Q > 0$  であり (付録 C), また (2.5.18a, b) によって  $(\bar{m} \cdot \nu_{\mu_A})_P < 0$ ,  $(\nu_{\mu_A})_B < 0$ ,  $(\nu_{\mu_A})_Q < 0$  であり, さらに区間  $[\mu_B, \mu_Q]$  において  $\nu_{\mu_A}(\mu; \mu_A) < 0$  である。 $\nu_P, \nu_B, \nu_Q > 0$  に興味があるから, 結局 (2.5.23) 右辺は項別に負または非正である。

(2.5.23) は点 P, Q の大域的な動きについても成立するから次の結論が得られた。すなわち,  $(\bar{q})_0 < 0$ ,  $(\bar{q})_f > 0$  なる始点 o, 終点 f を結び,  $\bar{q} = 0$  曲線を一回だけ過る許容軌道のうら,  $(z_f - z_0)_{\min} = \min[(z_f - z_0)_{\min(A)}]$  を与える  $\ell_{\min}$  は, 点 o (あるいは点 f) を過る  $\tilde{\ell}(A)$  と,  $\bar{q} > 0$  (あるいは  $\bar{q} < 0$ ) の領域で高々一回の切換点 Q (あるいは P) で  $\tilde{\ell}(A)$  と連結される  $\underline{\ell}(f)$  (あるいは  $\underline{\ell}(o)$ ) とからなりたつ。換言すれば軌道  $\ell_{\min}$  は点 o, 点 f を結ぶ許容軌道のうち,  $\max\{\mu_A\}$  を実現する  $\tilde{\ell}(A)$  を部分軌道として有する  $(A)$  のである。

始点 o が  $\bar{q} > 0$  の領域にあり, 終点 f が  $\bar{q} < 0$  の領域にある場合についても同様のことが結論される。すなわち,  $(z_f - z_0)_{\min}$  を与える最適軌道  $\ell_{\min}$  は,  $\min\{\mu_A\}$  を実現するような部分軌道  $\underline{\ell}(A)$  と,  $\underline{\ell}(A)$  が点 o を通らなければ  $\bar{q} > 0$  の領域で  $\tilde{\ell}(o)$  と, また  $\underline{\ell}(A)$  が点 f を通らなければ  $\bar{q} > 0$  の領域で  $\tilde{\ell}(f)$  と, からそれぞれ構成される。

ここで再び始点 o, 終点 f が  $\bar{q} = 0$  曲線の片側に共存する場合を考える。図 24 を参照しながら上述の判定基準を適用すれば, 以下のようにして軌道  $\overrightarrow{oQf}$  が  $(z_f - z_0)_{\min}$  を与えることが判る。Q' 点を任意に設定して軌道がこの点を通ることを要求したとすれば, そのときの最適軌道は  $\overrightarrow{oP'AQ'R'f}$  であるから, Q' 点到部分軌道  $\tilde{\ell}(A)$  および  $\underline{\ell}(B)$  に沿う仮想の変位を与えてやれば Q' 点が Q 点に近いほど  $(z_f - z_0)$  が小さくなることが明らかだからである。ついでに同図から,  $\bar{q} = 0$  曲線を三回またはそれ以上過る軌道が, 一回または二回しか過らないものに比べてより小さな  $(z_f - z_0)$  を与えることがないことも導かれる。このことは, 部分軌道  $\overrightarrow{MQN}$  と部分軌道  $\overrightarrow{MQ'LN}$  とを, 軌道  $\overrightarrow{MQ''N}$  を仲介として比較して見れば明らかである。

## 2.6 高度・速度線図の考察

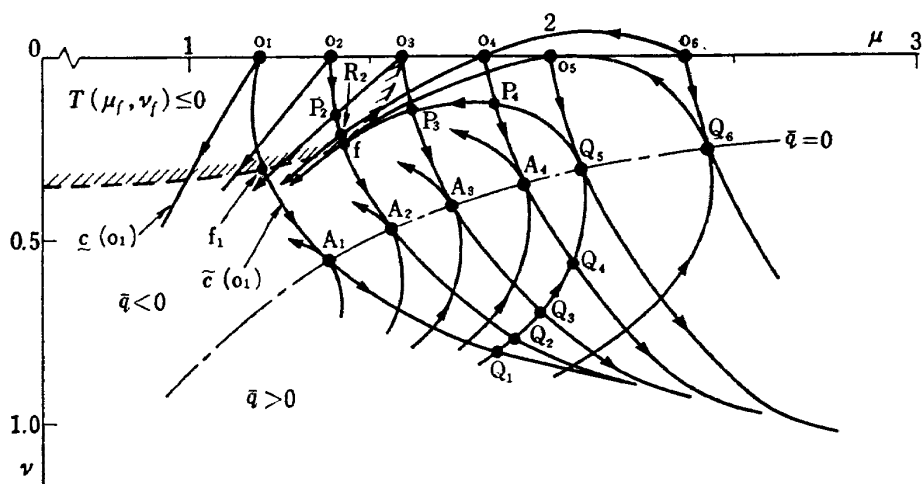
2.5 節の結果を用いて, 高度・速度禁止領域の諸境界点を最小最大問題の解から求めた場合の軌道および制御の態様をまとめる。図 25(a) は,  $k = .337$  における  $\omega = 0$  の最適軌道の系列を示すものである。始点が  $o_1, o_2, \dots, o_6$  の各点で表わされ, 終点 f は安全着陸限界  $T(\mu_f, \nu_f) \leq 0$  の境界上にあるとする。

$o_1$  から出発する軌道は  $\tilde{\ell}(o_1)$ ,  $\underline{\ell}(o_1)$  の間に制限される。図 24 の型の  $(z_f - z_0)_{\min}$  を与える軌道は  $\overrightarrow{o_1A_1Q_1Q_5f}$  で示される。このときの  $\mu_{o_1}$  と, 得られた  $(z_f - z_0)$  とを  $z_f - \mu_0$  面上 (高度・速度面上) に示せば図 25(b) の  $(o_1A_1Q_1Q_5f)$  点である。

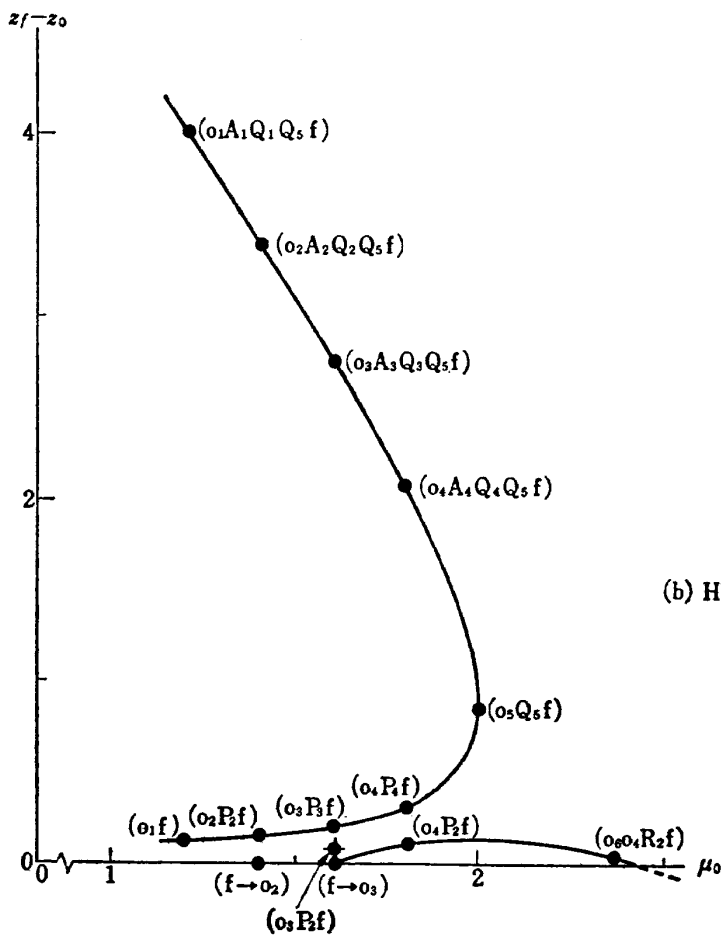
$\overrightarrow{o_2f}, \dots, \overrightarrow{o_6f}$  の最適軌道は二つのグループに分れる。第 1 のグループは  $\bar{q} = 0$  曲線を過らないもの (図 22 (a) 型) であって, 軌道  $\overrightarrow{o_3P_3f}$  等はこのグループの中での  $(z_f - z_{os})_{\min}$  等を与え,  $\overrightarrow{o_3P_3f}$  等は  $(z_f - z_{os})_{\max}$  等を与える。対応する点  $(o_3P_3f)$ ,  $(o_3P_3f)$  等をやはり図 25(b) 中に示してある。 $T(\mu_f, \nu_f) = 0$  の形が仮に図 25(a) のようであれば, f 点を  $o_3$  に近づけることは可能だから図 25(b) 中の点  $(o_3P_3f)$  の高度を 0 に近づけることができ, 結局  $(o_3P_3f)$  点の高度以下の任意の高度からの安全な緊急着陸が可能である。

$o_4, \dots, o_6$  についてもほぼ同様であるが,  $o_6$  の場合と異なり f 点を  $T(\mu_f, \nu_f) \leq 0$  内で  $o_4, \dots, o_6$  に一致させることはできない。したがって  $(o_4P_4f)$  点のような, 高速禁止領域の高度限界が生ずる。この意味で,  $\mu_{o_3}$  は高速禁止領域の低速度限界 (図 1, I 点) を与える。

$o_2, \dots, o_6$  等に対する最適軌道の第 2 のグループは,



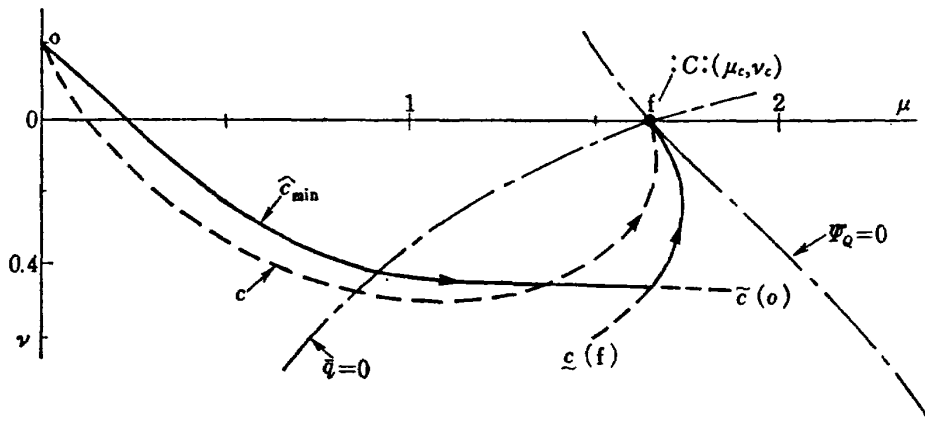
(a)  $\dot{\omega} \equiv 0$  とした最適軌道



(b) HV線図の例

$(k=0.337, |m| \leq 0.3, |n| \leq 0.2)$

図 25  $\dot{\omega} \equiv 0$  の仮定に基づく禁止領域の考察



$$(k=0.750, |m|\leq 0.3, |n|\leq 0.2)$$

図 26  $\omega \equiv 0$  の仮定に基づく一発動機不作動上昇軌道の考察

$\dot{q}=0$  曲線を二回過ぎるもの (図 24 型) であって、図 25(a) 中での軌道  $\overrightarrow{o_3A_3Q_3Q_3f}$  等、および同図 (b) 中の点  $(o_3A_3Q_3Q_3f)$  等で表わされている。始点  $o_3$  については、これら二つのグループは互に一致して軌道  $\overrightarrow{o_3Q_3f}$  となる。この軌道は実は  $(z_f - z_0)_{\max} = (z_f - z_0)_{\min}$  となるものであって、これに対応する図 25(b) 中の点  $(o_3Q_3f)$  は低速禁止領域の限界速度点 (図 1, K 点) を定める。

$o_3$  点から出発すれば、まず  $\overrightarrow{o_3Q_3f}$  が許容されるから十分高い高度からの着陸が安全であり、一方  $\overrightarrow{o_3O_4R_4f}$  が許容されるから結局  $(o_3O_4R_4f)$  点以上の高度からの安全な着陸が保証される。高速禁止領域の高度限界がパイロットの応答時間の大小でほとんど支配されてしまうとするゆえんである。

図 25(b) は特定の  $f$  点に対応した禁止領域の境界を示している。 $f \in \{T(\{\mu_f, \nu_f\}) \leq 0\}$  なるすべての  $f$  点についての禁止領域の共通部分が、与えられた  $k$  の値に対する理論上の禁止領域となる。

最適軌道を生む制御について見れば、一般に低速禁止領域のすべての限界点について、操舵の前半では  $(\bar{m}, \bar{n})$  をまた後半では  $(\underline{m}, \underline{n})$  をとるものが最適であり、逆に高速禁止領域境界については前半で  $(\underline{m}, \underline{n})$  を後半で  $(\bar{m}, \bar{n})$  をとるものが最適であることが推論される。

本節の考察は、 $\omega = \text{const.}$  という実際とは若干異なる仮定に基づいているため、図 25(b) の絶対値は信頼できない。さらに低ホバ点付近からの着陸は全所要時間が短く、制御のパン・パン的切換を前提とした本節の考察は妥当性を失う。この領域においては前節に述べた  $m \equiv 0$  による考察を適用すべきである。

### 2.7 一発動機不作動上昇の考察

$k > k_c$  の場合、図 25(a) において始点  $o$  を正常垂直上昇状態に見合うような点  $o(\mu_0=0, \nu_0 \geq 0)$  に、また終点  $f$  を点  $C(\mu_c, 0)$  に置いて考える。図 26 を参照して前節同様の考察を行なえば、 $(z_f - z_0)_{\min}$  を与える軌道  $\hat{c}_{\min}$  が  $\hat{c}(o)$  と  $\hat{c}(f)$  とから構成されることがわかる。参考のために最適でない比較軌道の例  $c$  を記入してある。

操舵の前半では前方への最大加速が、また後半においては沈下率を最大限に抑制することが最適であることがわかる。

## 3. 高度・速度線図

前章までで最適制御の構成についての概要がつかめたので、1 章に仮定したような無慣性制御量  $(m, n)$  について、高度・速度線図上の飛行禁止領域境界に対する最適化を行なう。問題の形式をまとめれば次のとおりである。

- 状態方程式 : (1.4.9 a) ~ (1.4.9 e)
- 端末条件 : (1.7.5), (1.7.6 a), (1.7.7 a または b), (1.7.8 a, c)
- 評価関数 : (1.7.10)
- 状態変数拘束条件: (1.7.4 a, b, c)
- 制御変数拘束条件: (1.3.8 a) ~ (1.3.8 d)

### 3.1 低速高高度限界、特に高ホバ点

まず  $k = k_A$  (図 11 参照) として、完全オートローション着陸を念頭におき、最適軌道が状態変数の拘束に抵触しないものと仮定する。

前章の検討によって、全体として特異な制御は最適制御の一部をなし得ず、また次章 (4.1 節) に述べる

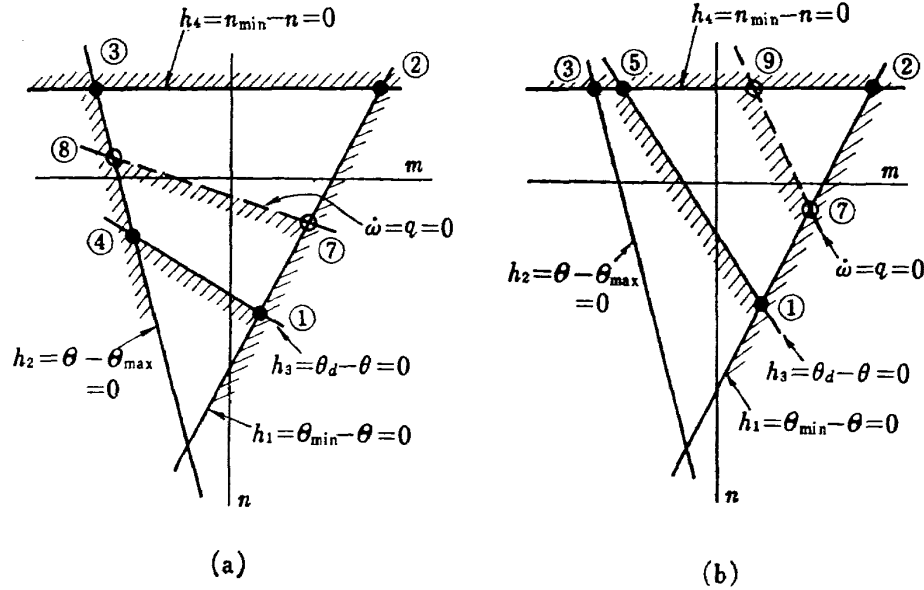


図 27 許容制御領域と制御ベクトルの番号づけ

理由との類推によって一部特異な軌道もまた最適軌道の一部をなし得ないから、最適制御は図 4 で与えられるような制御変数許容領域のいずれかの頂点に向かう制御ベクトルを組合わせたバン・バン型のものであることが予想される。便宜上拘束条件 (1.3.8) で与えられる許容制御領域の各頂点に対し、図 27 のように番号をつける。各頂点に向かう制御ベクトルは、(1.3.8) 中の 4 個の  $h_i$ ;  $i=1, \dots, 4$ , のうちから適当な 2 個,  $h_\alpha, h_\beta$  をえらんで  $h_\alpha = h_\beta = 0$  とおくことにより定められる。(D.3.4) にならって実用上意味のある組み合わせを作れば、

頂点①:

$$h_1 = h_3 = 0 \quad (3.1.1)$$

$$m = \frac{(\bar{\theta} - \theta_{\min})\bar{\theta}_n - (\bar{\theta} - \theta_d)\theta_{\min}}{\theta_{\min}\bar{\theta}_m + \eta_D\bar{\theta}_n} \quad (3.1.1 a)$$

$$n = \frac{-\eta_D(\bar{\theta} - \theta_d) - (\bar{\theta} - \theta_{\min})\bar{\theta}_m}{\theta_{\min}\bar{\theta}_m + \eta_D\bar{\theta}_n} \quad (3.1.1 b)$$

頂点②:

$$h_1 = h_4 = 0 \quad (3.1.2)$$

$$m = (\bar{\theta} - \theta_{\min} + \theta_{\min}n_{\min})/\eta_D \quad (3.1.2 a)$$

$$n = n_{\min} \quad (3.1.2 b)$$

頂点③:

$$h_2 = h_4 = 0 \quad (3.1.3)$$

$$m = (\bar{\theta} - \theta_{\max} + \theta_{\max}n_{\min})/\eta_D \quad (3.1.3 a)$$

$$n = n_{\min} \quad (3.1.3 b)$$

頂点④:

$$h_2 = h_3 = 0 \quad (3.1.4)$$

$$m = \frac{(\bar{\theta} - \theta_{\max})\bar{\theta}_n - (\bar{\theta} - \theta_d)\theta_{\max}}{\theta_{\max}\bar{\theta}_m + \eta_D\bar{\theta}_n} \quad (3.1.4 a)$$

$$n = \frac{-\eta_D(\bar{\theta} - \theta_d) - (\bar{\theta} - \theta_{\max})\bar{\theta}_n}{\theta_{\max}\bar{\theta}_m + \eta_D\bar{\theta}_n} \quad (3.1.4 b)$$

頂点⑤:

$$h_3 = h_4 = 0 \quad (3.1.5)$$

$$m = -[(\bar{\theta} - \theta_d) + \bar{\theta}_n n_{\min}]/\bar{\theta}_m \quad (3.1.5 a)$$

$$n = n_{\min} \quad (3.1.5 b)$$

である。以下、図 27 に示した頂点の番号をもって、その制御が持続される部分軌道、あるいは部分区間、を表わすことにする。

上記のような各制御が組み合わさって、実際に一つの最適制御を構成するための必要条件は、付録 D. にまとめられている一般的な形式を適用すればよい。

まずハミルトン関数 (D.2.4) は

$$\begin{aligned} H(x, z, \mu, \nu, \omega; m, n; \phi_i, \lambda_j) \\ = q + \phi_1\mu + \phi_2\nu + \phi_3m + \phi_4n + \phi_5q \\ - \lambda_\alpha h_\alpha - \lambda_\beta h_\beta \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

である、ここで  $q$  は (1.4.9 e) 右辺、すなわち  $(\bar{q} + \bar{q}_m m + \bar{q}_n n)$  を表わす。 $\phi_i, i=1, \dots, 5$ , は随伴微分方程式 (D.2.7) をみたす。すなわち、基準軌道上で

$$\dot{\phi}_1 = -H_x, \quad \dot{\phi}_2 = -H_z \quad (3.1.7 a, b)$$

$$\dot{\phi}_3 = -H_\mu, \quad \dot{\phi}_4 = -H_\nu \quad (3.1.7 c, d)$$

$$\dot{\phi}_5 = -H_q \quad (3.1.7 e)$$

である。終端条件 (1.7.7 a/b), (1.7.8 a, c) を考慮して横断条件 (D.2.9) を適用すれば

$$\phi_1^f = -C_1/0, \quad \phi_2^f = -C_2 \quad (3.1.8 a, b)$$



$$\phi_3^f = -c(\partial T / \partial \mu_f), \quad \phi_4^f = -c(\partial T / \partial \nu_f) \quad (3.1.8 c, d)$$

$$\phi_3^f = 0 \quad (3.1.8 e)$$

であるが、 $(q)_x=0$  は常になりたち、また  $(q)_x=(q)_o=0$  も仮定しうるから  $H_x=H_x=H_o=0$ 、したがって

$$\begin{aligned} \phi_1(\tau) &= -C_1/0 \\ \phi_2(\tau) &= -C_2; \quad [0, \tau_f] \\ \phi_3(\tau) &= 0 \end{aligned} \quad (3.1.9)$$

である。停留条件 (D.2.15) から

$$\begin{cases} H_m = \bar{q}_m + \phi_3 - \lambda_\alpha (h_\alpha)_m - \lambda_\beta (h_\beta)_m = 0 \\ H_n = \bar{q}_n + \phi_4 - \lambda_\alpha (h_\alpha)_n - \lambda_\beta (h_\beta)_n = 0 \end{cases} \quad (3.1.10)$$

であり、また局所最適条件

$$\lambda_\alpha \geq 0, \quad \lambda_\beta \geq 0 \quad (3.1.11)$$

が必要である。所要時間を指定しないから (D.2.13) によって

$$H=0; \quad [0, \tau_f] \quad (3.1.12)$$

である。

これらの諸条件が成立するように最適制御①, ..., ⑤を組み合わせてよい。実際には (3.1.7 c, d) を直接解く代りに (3.1.10) を用いてそれらから  $\phi_3, \phi_4$  を消去した関係式から  $\lambda_j$  を解く。例えば軌道①については

$$\textcircled{1}: \begin{cases} \eta_D \lambda_1 - \bar{\theta}_m \lambda_3 + \bar{\theta}_\mu \lambda_1 + \pi_m \lambda_3 = C_1 - \omega_m \\ -\theta_{\min} \lambda_1 - \bar{\theta}_n \lambda_3 + \pi_n \lambda_3 = C_2 - \omega_n \end{cases} \quad (3.1.13)$$

を解くのである。ただし

$$\pi_m(\mu, \nu; n) \equiv \bar{\theta}_\mu + [(\bar{\theta}_n)_\mu - (\bar{\theta}_m)_\nu] n \quad (3.1.14 a)$$

$$\pi_n(\mu, \nu; m) \equiv \bar{\theta}_\nu - [(\bar{\theta}_n)_\mu - (\bar{\theta}_m)_\nu] m \quad (3.1.14 b)$$

$$\omega_m(\mu, \nu; n) \equiv \bar{q}_\mu + [(\bar{q}_n)_\mu - (\bar{q}_m)_\nu] n \quad (3.1.15 a)$$

$$\omega_n(\mu, \nu; m) \equiv \bar{q}_\nu - [(\bar{q}_n)_\mu - (\bar{q}_m)_\nu] m \quad (3.1.15 b)$$

である。(3.1.13)のいずれか一方の代りに、(D.2.16)の関係、すなわち例えば軌道①については

$$\textcircled{1}: \lambda_1(\bar{\theta} - \theta_{\min}) + \lambda_3(\bar{\theta} - \theta_d) = C_1 \mu + C_2 \nu - \bar{q} \quad (3.1.16)$$

を代用することも許される。

以下、ヘリポートの大きさに関心を払わず ( $x^f$ : free)  $C_1=0$  の場合を考える。前章での検討結果から推測して、最適軌道①②⑤③を想定しよう。ただしこの軌道構成は場合によって①②③あるいは①⑤③のように変形することを覚悟しておく。これら軌道上で生ずる制御の切換点を、その前後の部分軌道番号を用いて⑫, ⑮, ⑯, ⑰等で表わすことにすれば、(D.4.9)によって切換前後の制御が相違している限り

$$\textcircled{12}: \lambda_3^- = \lambda_4^+ = 0; \quad \tau = \tau_{\textcircled{12}} \quad (3.1.17 a)$$

$$\textcircled{15}: \lambda_1^- = \lambda_3^+ = 0; \quad \tau = \tau_{\textcircled{15}} \quad (3.1.17 b)$$

$$\textcircled{23}: \lambda_1^- = \lambda_2^+ = 0; \quad \tau = \tau_{\textcircled{23}} \quad (3.1.17 c)$$

$$\textcircled{15}: \lambda_4^- = \lambda_1^+ = 0; \quad \tau = \tau_{\textcircled{15}} \quad (3.1.17 d)$$

である。特に切換点⑮は  $(m, n)^- = (m, n)^+$  でありうるから、(D.4.7) に対応する条件

$$\textcircled{15}: \begin{cases} -\bar{\theta}_m \lambda_3^- = -\eta_D \lambda_2^+ \\ -\bar{\theta}_n \lambda_3^- - \lambda_4^- = \theta_{\max} \lambda_2^+ - \lambda_4^+ \end{cases} \quad (3.1.18 a)$$

$$\textcircled{15}: \begin{cases} -\bar{\theta}_m \lambda_3^- = -\eta_D \lambda_2^+ \\ -\bar{\theta}_n \lambda_3^- - \lambda_4^- = \theta_{\max} \lambda_2^+ - \lambda_4^+ \end{cases} \quad (3.1.18 b)$$

をみたすように接続される。

計算手順は以下の通りである。

- (i) 点  $o(\mu_o, \nu_o)$  から出発し、制御①を維持することによって軌道①を定め、その上で切換点  $(\mu_{\textcircled{12}}, \nu_{\textcircled{12}})$  を適当にえらぶ。ただし  $\bar{q}(\mu_{\textcircled{12}}, \nu_{\textcircled{12}}) > 0$  とする。
- (ii) 未知定数  $C_2$  を適当に定め、軌道②⑤③ (あるいは②③等) を定め  $\nu_f$  で終わる。
- (iii) このときの  $\mu$  があらかじめ定めた  $\mu_f$  に一致していなければ  $C_2$  を調節して (ii) の手順を繰り返す。
- (iv) 切換点⑫を軌道①上で動かすことにより、特定

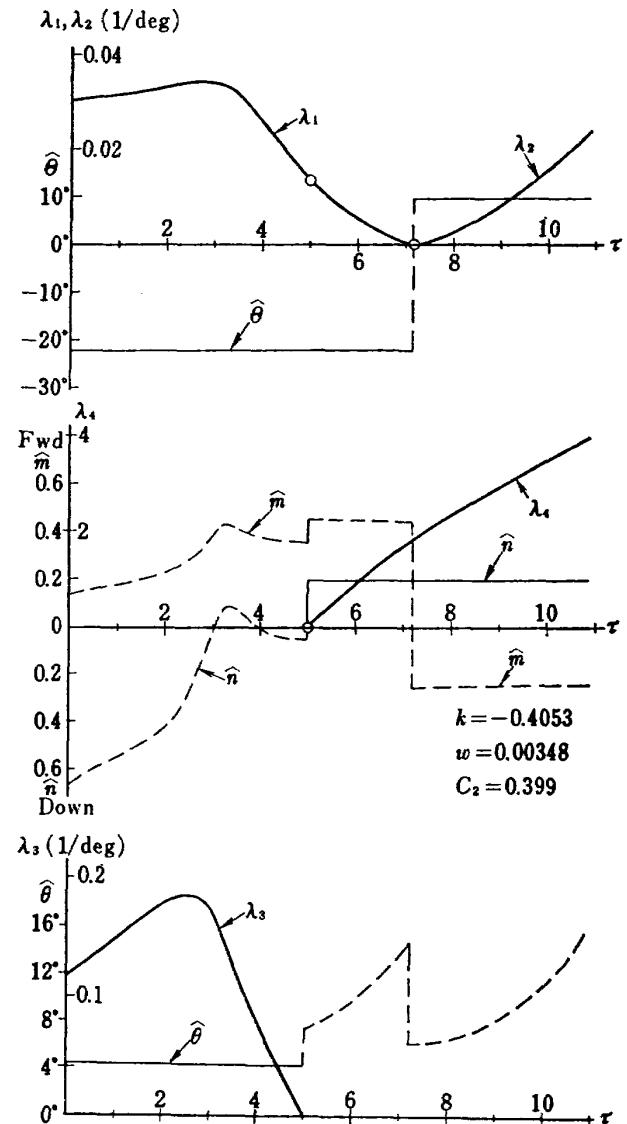


図 28 最適制御とインパルス応答関数 (高ホバ点の例)

の  $(\mu_f, \nu_f)$  に至る最適軌道の系列が  $C_2$  をパラメタとして定まる。

(v) もちろんすべての時刻において最適条件 (3.1.11) が満足されていることを確認する。

このようにして、一つのパラメタ  $C_2$  を媒介として一つの最適軌道が定まるが、それに応じてあらかじめ  $(z_f - z_0)$  の値を一つ指定したこと (等周条件) になっている。手順 (ii) において、意味のある  $C_2$  の値をえらぶについては以下の注意が必要である。特定の  $(\mu_f, \nu_f)$  について、一つの最適軌道のまわりに、必ずしも最適でない制御を用いた結果、(1.3.8) の  $h_j$  が負となるものが生じたとする。このような軌道に沿って得られる性能の低下は (D.2.19) を適用して

$$\begin{aligned} C_2 \Delta z_f - \Delta \omega_f = & - \int_0^{r_{\text{㉑}}} (\lambda_1 h_1 + \lambda_3 h_3) dt \\ & - \int_{r_{\text{㉒}}}^{r_{\text{㉑}}} (\lambda_1 h_1 + \lambda_4 h_4) dt \\ & - \int_{r_{\text{㉓}}}^{r_{\text{㉑}}} (\lambda_3 h_3 + \lambda_4 h_4) dt \\ & - \int_{r_{\text{㉔}}}^{r_f} (\lambda_2 h_2 + \lambda_4 h_4) dt \geq 0 \quad (3.1.19) \end{aligned}$$

で表わされる。禁止領域の高高度限界について考えている訳であるから、最適でない制御によって  $\Delta \omega_f = \omega_f - \hat{\omega}_f = 0$ ,  $\Delta z_f = z_f - \hat{z}_f \geq 0$  とすることは可能なはずであり、 $C_2 \geq 0$  は当然である。さらに、図16に関連する2.3節の考察によって、最適軌道上のすべての点において  $C_2 \nu - \bar{q} \geq 0$  でなければならないから

$$C_2 \geq (\bar{q}/\nu)_{\text{㉑}} (\geq 0) \quad (3.1.20)$$

となるように  $C_2$  をえらぶ。

図28は、上記のようにして定めた最適制御  $(\hat{u}, \hat{v})$ , あるいは等価的に  $(\hat{\theta}, \hat{\theta})$ , および対応するインパルス応答関数  $\lambda_j$  (D.2節, 脚注参照) の計算例を示す。この計算例は FAA による飛行試験結果 (文献9, FLT. No. 46) における機体諸元をできるだけ模擬したものである。図29は、上記 FLT. No. 46 におけるロータ回転速度  $\Omega$ , 機体縦揺姿勢角  $\theta_B$ , スウォッシュ・プレート入力  $B_{1S}$ , コレクティブ入力  $\theta$ , の時間歴を図28の解析例と比較したものである。もちろん飛行試験結果は、本論文の記号に合わせて無次元化して示してある\*。解析に含まれている各種の仮定、飛行試験に含まれている制御の非最適性、の双方の理由によって、解析による  $\theta$  と飛行試験による  $(\theta_B - B_{1S})$  との時間歴が一致しているとは言い難いが、操作の前半では推力ベクトルを最大限に前傾させ、後半では逆に最大限に後傾させることが本質的であることが納得

されうる。コレクティブ・ピッチ  $\theta$  の時間歴についても解析と飛行試験結果との間に食違がある。解析上で二段階に分れて現れているコレクティブ・フレア ( $\theta$  の増加) は、第1段階が  $\theta = \theta_{\min}$ , 第2段階が  $\theta = \theta_{\max}$ , においてそれぞれ  $n = n_{\min}$  の条件 (すなわちブレード失速限界) を越えないように行なわれることが最適であることを主張している。実際の飛行試験においても (FLT. No. 46 のみでなく) この傾向は定性的に現われていて、図29について見れば  $\tau = 10$  頃から始まる最終的なフレアの他に、サイクリック・フレア ( $\tau \approx 6 \sim 8$  における  $\theta_B$  の引き起し) 中に始まり  $\tau \approx 9$  まで続く第1段階目のコレクティブ・フレアが存在する。おそらくパイロットは、サイクリック・フレアが完了する前に第1段階目のコレクティブ・フレアをかけるという二自由度の操作を負担に感じてその時機を無意識的に遅らせているものと推察される。事実、この時機の遅れによって、同時刻頃にロータ回転速度には無用の増加、減少が生じていることが見られる ( $\omega$  の時間歴参照)。

図30は、図29の解析例を  $\mu-\nu$  面内の軌道として示したものである。この最適軌道は (たまたま) ①②③の形態をとっているが、①②⑤③の形態が最適である場合には、第1段階および第2段階の各コレクティブ・フレアの間で、 $\theta = \theta_a$  とする区間が存在することすらありうる。

切換点②を変動させて得られる図28~図30のような一連の解析結果を  $\hat{\omega}_f - \hat{z}_f$  面上で表示したものが図31である。同じ図に図29の飛行試験結果を比較して示してあるが、解析が実験値よりもかなり楽観的に性能を見積っていることがわかる。この誤差は、前述したとおり、一方では飛行試験操作が厳密に最適でなかったこと、他方、無慣性制御 ( $(m, n)$  に不連続的变化を許容している) の仮定、あるいは線型化の仮定、が粗すぎたこと、の双方に起因する。制御の慣性による効果は5.1節で検討するが、ここでは (3.1.19) および図28中に示したインパルス応答関数  $\lambda_j$  について考える。(3.1.19) を考慮してわかるように、 $\theta = \theta_{\min}$  を保持

\* 図3を参照してわかるように、準定常の仮定の下では、機体基準線に対するロータ回転軸の取付角をとすれば

$$\theta = \theta_B - B_{1S} + a_1 - i$$

であるから、図29中で  $\theta$  の変化分は  $(\theta_B - B_{1S} + a_1)$  の変化分に等しい。 $a_1$  の値は、最終引き起し付近で  $6 \sim 7 \text{ deg}$ , それ以外で  $1 \sim 2 \text{ deg}$  (頭上げ) 程度と推定される。

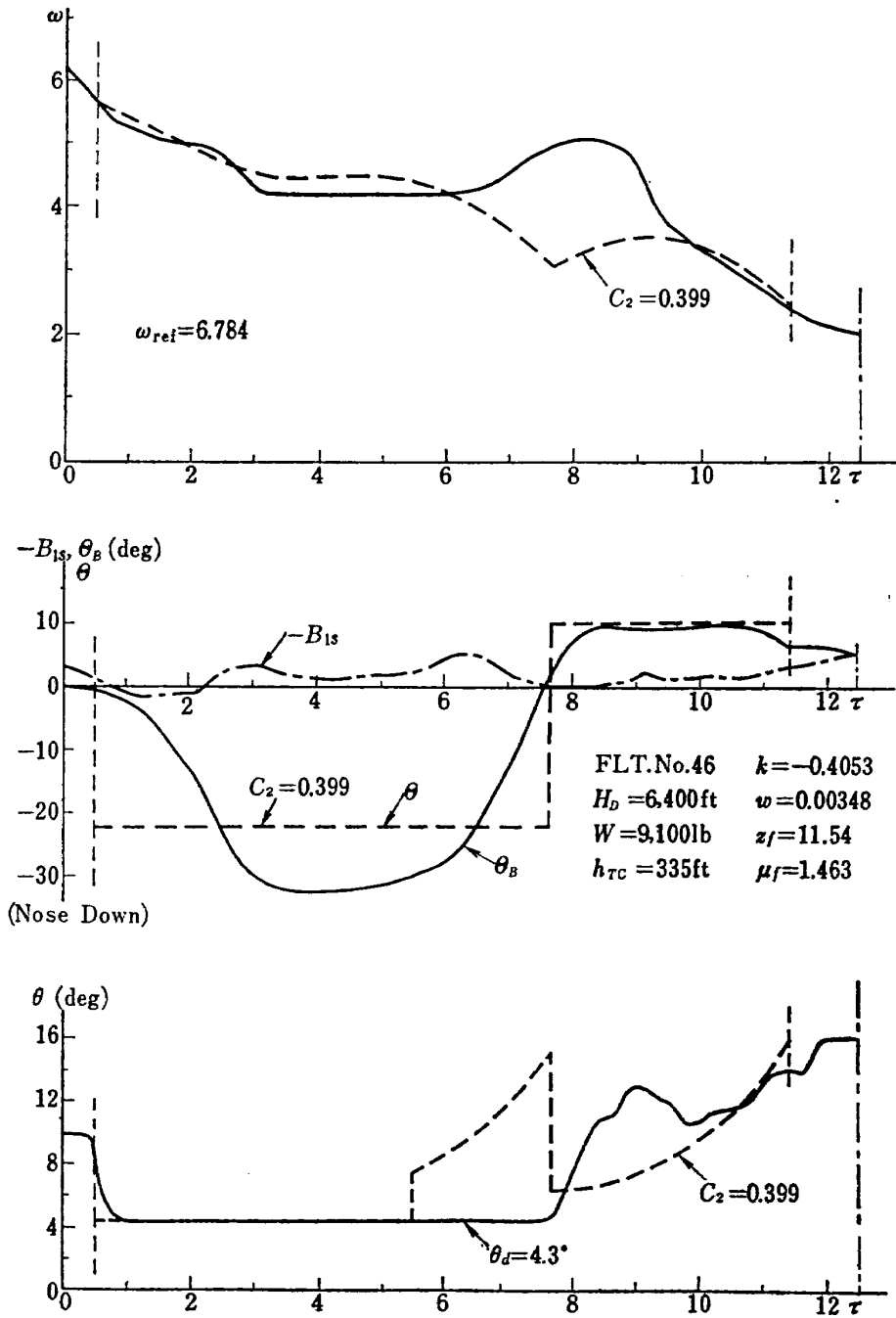


図 29 図 28 の例 (点線) と飛行試験結果 (実線, FAA-ADS-84, FLT. NO. 46) との比較

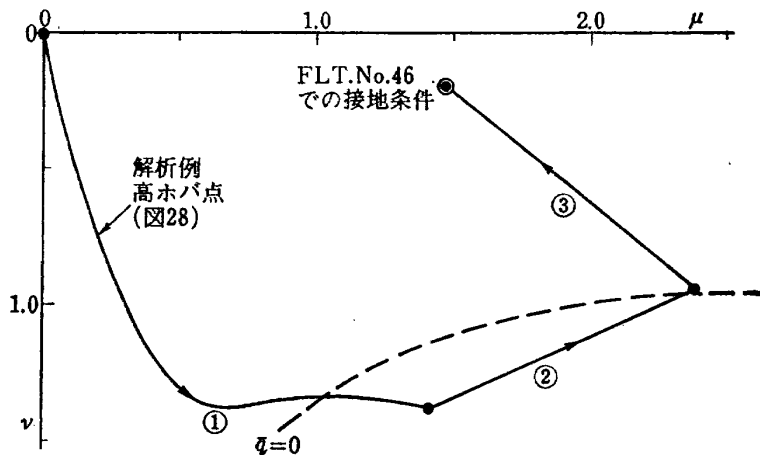


図 30 図 28 の解析解の  $\mu$ - $\nu$  面表示

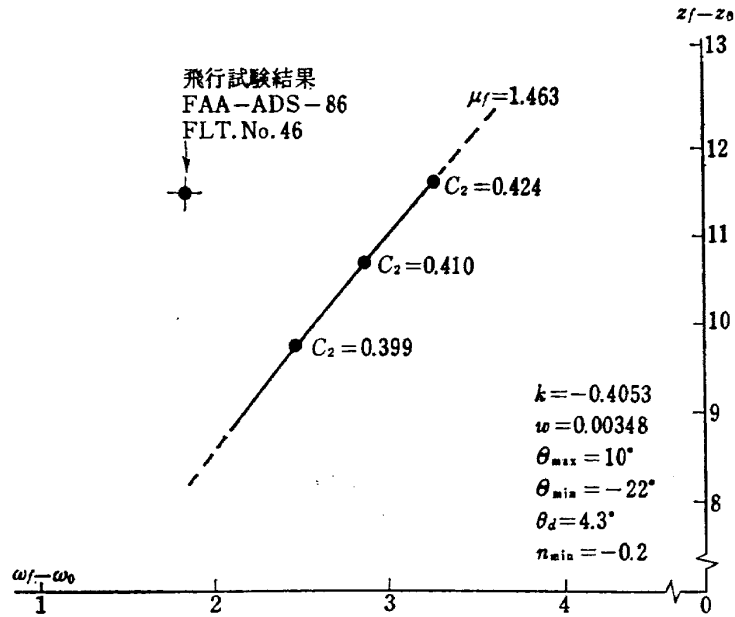


図 31 高ホバ点に対する解析値と飛行試験結果の比較

することに失敗し、 $h_1 = -\delta\theta = \theta_{\min} - \theta < 0$  を生じたことによる性能の低下は操作開始直後において効果が著しく ( $\lambda_1$ : 大), また  $\theta = \theta_{\max}$  に保ち得なかったことによる効果は  $\tau_f$  付近で著しい ( $\lambda_2$ : 大)。同様に  $\theta = \theta_d$  とすることを怠って  $h_3 = -\delta\theta = \theta_d - \theta < 0$  を生じたとき, 区間  $(0, \tau_{\text{Ⓢ}})$  の中期においてその影響が大きく ( $\lambda_3$ : 大), また失速限界までフレアしないことによる影響は  $\tau_f$  付近で顕著である ( $\lambda_4$ : 大)。

ある  $k$  の値を固定し, 高ホバ限界点に対する接地時前進速度  $\mu_f$  の効果を示したものが図32である。実用上問題となる  $(\omega_f - \omega_0)$  の範囲では,  $\mu_f = 1.25 \sim 1.75$  付近に  $[C_2(\hat{z}_f - z_0)_{\text{given}} - (\hat{\omega}_f - \omega_0)_{\text{max}}]$  が存在することがわかる。 $\mu_f$  に関する  $(\hat{\omega}_f - \omega_0)$  の極値はその頭が丸く, 実際問題として最適値付近での  $|\Delta\mu_f| \leq 0.25$  (±約 5kt) 程度のバラッキの影響は無視できる。FAA の飛行試験計画において, 接地時の前進速度をあらかじめ指定しなかった<sup>7)~9)</sup> ことの妥当性を裏付けるものである。

単発機および多発機の発動機停止時出力状態を模擬するため, 図33には  $k$  の値の変化による最適軌道の変化を示した。「高ホバ点,  $C_2 > 0$ 」の部分のみ参照。 $k$  の値が  $k_A$  から  $k_E$  (図11) に増大するに伴って, ロータ回転速度の時間歴のうちの初期降下前進中に,  $\omega > \omega_{\max}$  となる部分が生じてくる。このとき, 状態変数拘束条件 (1.7.4 c) が課せられなければならない。図33 (b), (c) 中の破線部分はこのような場合である。この部分軌道の最適制御則は以下のようにして導かれる。 $0 \leq \tau_{\text{Ⓢ}} < \tau_{\text{Ⓢ}}$  として状態拘束条件

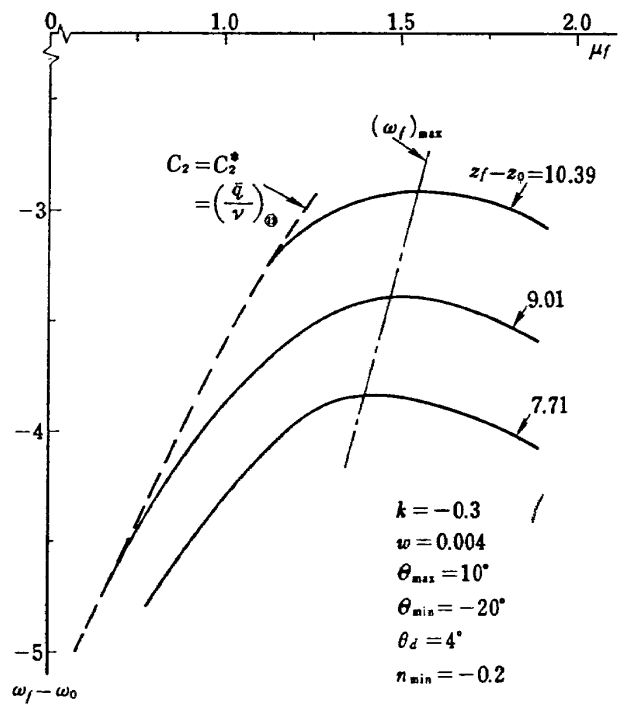


図 32 接地時前進速度の効果 (高ホバ点)

$$s \equiv \omega - \omega_{\max} \leq 0; \quad [\tau_{\text{Ⓢ}}, \tau_{\text{Ⓢ}}] \quad (3.1.21)$$

を課すると,  $\omega = \omega_{\max}$  の境界上で

$$\dot{s} = q = \bar{q} + \bar{q}_m m + \bar{q}_n n = 0; \quad [\tau_{\text{Ⓢ}}, \tau_{\text{Ⓢ}}] \quad (3.1.22)$$

である。図27に示されているように, 制御領域の頂点⑦, ⑧, ⑨等が①, ④, ⑤等にとって代わる。最適軌道①⑦②⑤③, あるいはその変形⑦②⑤③等が実用上問題となる。最適制御ベクトルは

頂点⑦:

$$h_1 = \dot{s} = 0 \quad (3.1.23)$$

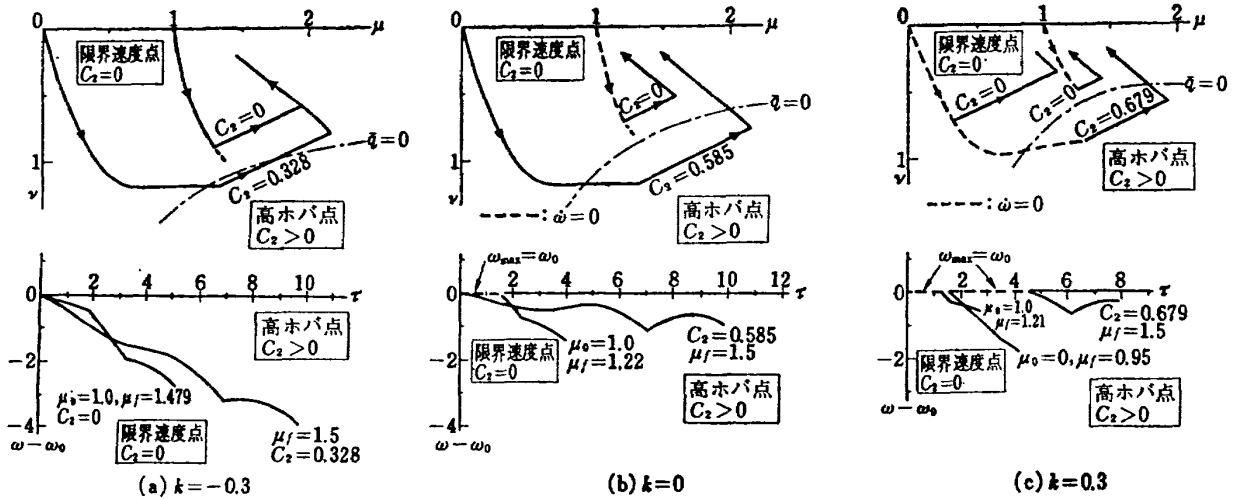


図 33 高ホバ点および限界速度点の解析例

$$m = \frac{(\bar{\theta} - \theta_{\min})\bar{q}_n - \theta_{\min}\bar{q}}{\eta_D\bar{q}_n + \theta_{\min}\bar{q}_m} \quad (3.1.23 a)$$

$$n = \frac{-\eta_D\bar{q} - \bar{q}_m(\bar{\theta} - \theta_{\min})}{\eta_D\bar{q}_n + \theta_{\min}\bar{q}_m} \quad (3.1.23 b)$$

で与えられる。拘束 (3.1.22) に対応する乗数を  $\lambda_5$  とすれば、停留条件

$$\textcircled{7}: \begin{cases} \eta_D\lambda_1 + \bar{q}_m\lambda_5 + \bar{\theta}_p\lambda_1 - \omega_m\lambda_5 = C_1 - \omega_m \\ -\theta_{\min}\lambda_1 + \bar{q}_n\lambda_5 - \omega_n\lambda_5 = C_2 - \omega_n \end{cases} \quad (3.1.24)$$

および局所最適条件 (D.5.18)

$$\lambda_5 \leq 0; \quad [\tau_{\textcircled{7}}, \tau_{\textcircled{8}}] \quad (3.1.25)$$

がみたされなければならない。 $\tau = \tau_{\textcircled{8}}$  における随伴系  $\psi_i$  の跳躍量を 0 とおき不連続を  $\tau = \tau_{\textcircled{7}}$  で処理することにすれば、跳躍条件 (D.5.12) は接続条件 (D.4.9) とともに

$$\textcircled{7}: \lambda_5^- = \lambda_5^+ - c^* = 0; \quad \tau = \tau_{\textcircled{7}} \quad (3.1.26 a)$$

$$\textcircled{8}: \lambda_5^- = \lambda_4^+ = 0; \quad \tau = \tau_{\textcircled{8}} \quad (3.1.26 b)$$

を要求する。図33 (b), (c) の例では常に  $\tau_{\textcircled{7}} = 0$  である。 $\omega \leq \omega_{\max}$  の拘束を考慮しないときに切換点①および未知定数  $C_2$  を調節したように、今度は切換点②および  $C_2$  を調節して終端条件  $(\mu_f, \nu_f)$  および等周条件  $(z_f - z_0)$  が満足されるように軌道を定める。

図33の結果を  $(z_f - z_0)_{\text{given}} \cdot (\omega_f - \omega_0)_{\max}$  面に表示したのが図34である。「高ホバ点,  $C_2 > 0$ 」の部分のみ参照)。各図中の破線は、ある  $\mu_f$  に到達する最適軌道が  $C_2^* = [\bar{q}(\mu, \nu)/\nu]_{\textcircled{7}, \textcircled{8}}$  によって生み出されたものであることを示すものである。図16に関連した 2.3 節の考察によれば、点  $(\mu_{\textcircled{7}}, \nu_{\textcircled{7}})$  での擬約合飛行によって、 $d(z_f - z_0)/d(\omega_f - \omega_0) = 1/C_2^*$  の勾配を

以てこの破線上から右上方に延びる直線上の点で表わされる最終状態に到達することができる。図34のそれぞれにおいて、ある一つの  $(\omega_f - \omega_0)$  に対して  $\min\{z_f(\mu_f) - z_0\}$  を与える一つの包絡線が形成されている。この包絡線によって、あらかじめ与えられた機体、出力状態、に対する高ホバ限界点の理論上の最低値が与えられる。

この包絡線に沿って

$$\frac{d(z_f - z_0)}{d(\omega_f - \omega_0)} = \frac{1}{C_2} \quad (3.1.27)$$

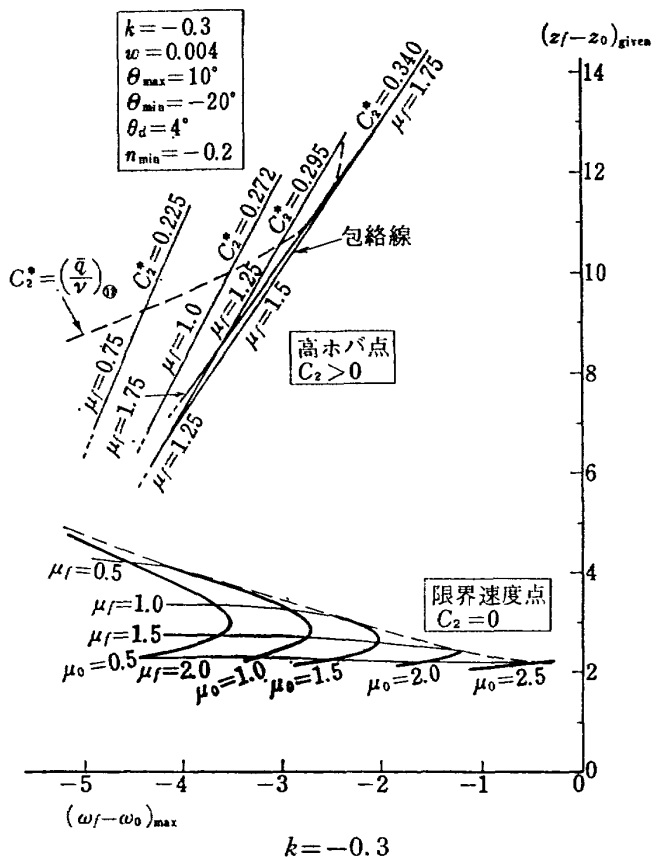


図 34(a) 高ホバ点と限界速度点

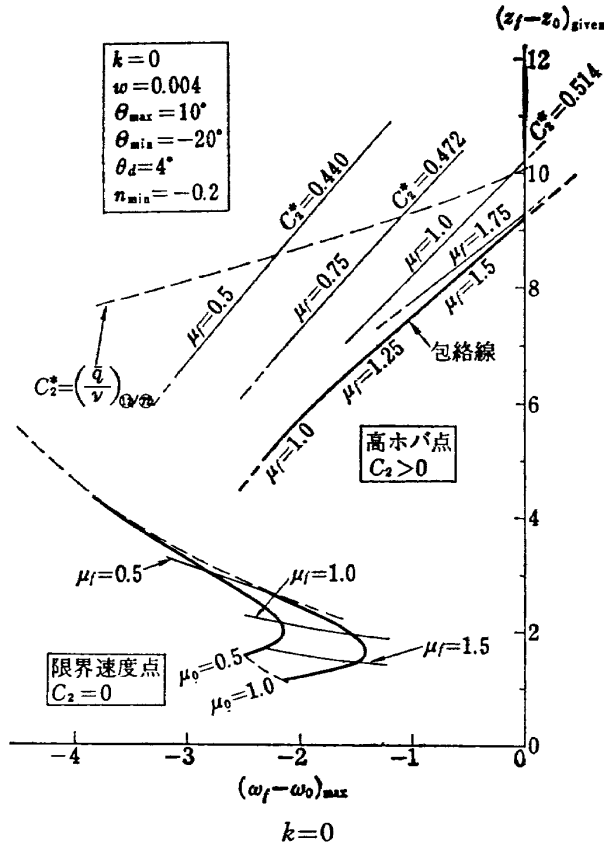


図 34(b) 高ホバ点と限界速度点

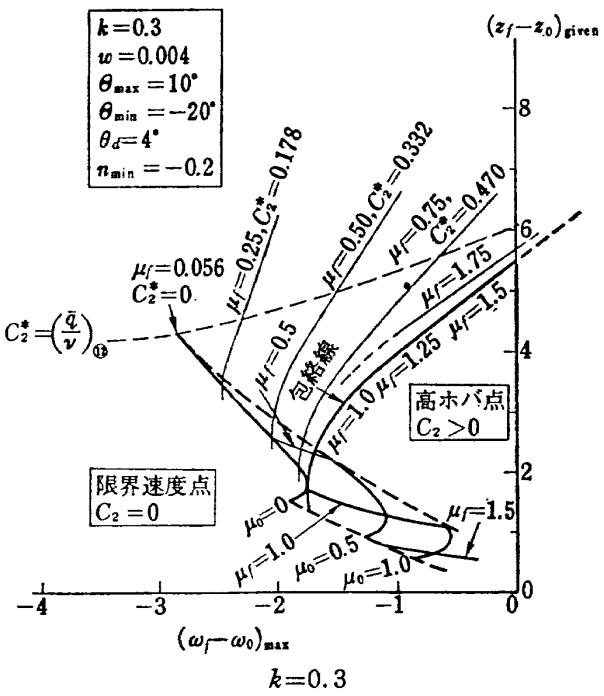


図 34(c) 高ホバ点と限界速度点

がなりたっている。(1.4.1 a, d) を用いて元の物理量に書き直せば

$$\frac{1}{C_2} = \frac{d[WZ_f - WZ_0]}{d[1/2 J(\Omega_f^2 - \Omega_0^2)]} \quad (3.1.28)$$

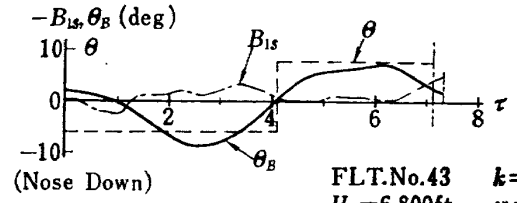
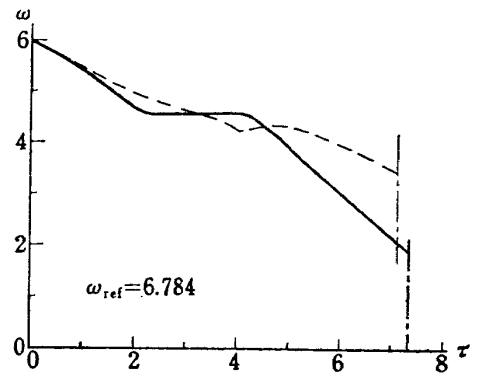
となり、初期高度での位置エネルギーとあらかじめロー

タ中に蓄えられていて着陸操作中に放出しうるロータ回転運動エネルギーとの比になっている。

### 3.2 限界速度点

高高度限界 (図 1.  $\widehat{HK}$ ) に対する 3.1 節の定式化は、低高度限界 (図 1.  $\widehat{LK}$ ) についても同様に成立する。ただし、最適な低高度限界については、(3.1.19) において  $\Delta\omega_f = \omega_f - \hat{\omega}_f = 0$ ,  $\Delta z_f = z_f - \hat{z}_f < 0$  とすることが可能であり、したがって  $C_2 < 0$  でなければならない。低高度限界と高高度限界とが一致する点として定義される限界速度点は、 $C_2 = 0$  をみたすような極値点である。換言すれば、 $z_f - z_0 : \text{given}$  という等周条件なしで  $\omega_f - \omega_0 : \text{max}$  を求めることになる。図 16 に関連する 2.3 節の考察から、最適軌道は  $C_2 = 0$  に対応する特異曲線  $\bar{q} = 0$  を過ぎることにはない。このことは、 $\dot{\omega} \equiv 0$  を仮定した 2.6 節の考察において、限界速度点を与える軌道が  $\bar{q} = 0$  曲線上で切替点をもつものとして定義されたことと比較して興味ある事実である。

前節の計算手順と相異なることは、切替点②または



FLT.No.43  $k = -0.4053$   
 $H_D = 6,800\text{ft}$   $w = 0.00348$   
 $W = 9,100\text{lb}$   $\tau_f = 3.82$   
 $h_{rc} = 111\text{ft}$   $\mu_f = 1.54$   
 $\mu_0 = 2.12$

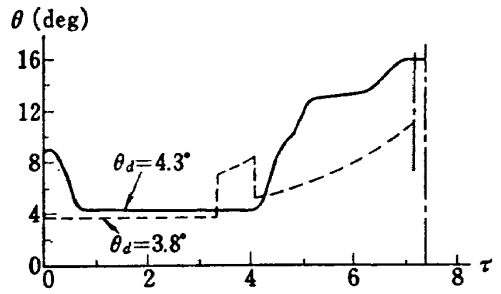


図 35 限界速度点の例、飛行試験結果 (実線) との比較 (FAA-ADS-84, FLT. No. 45)

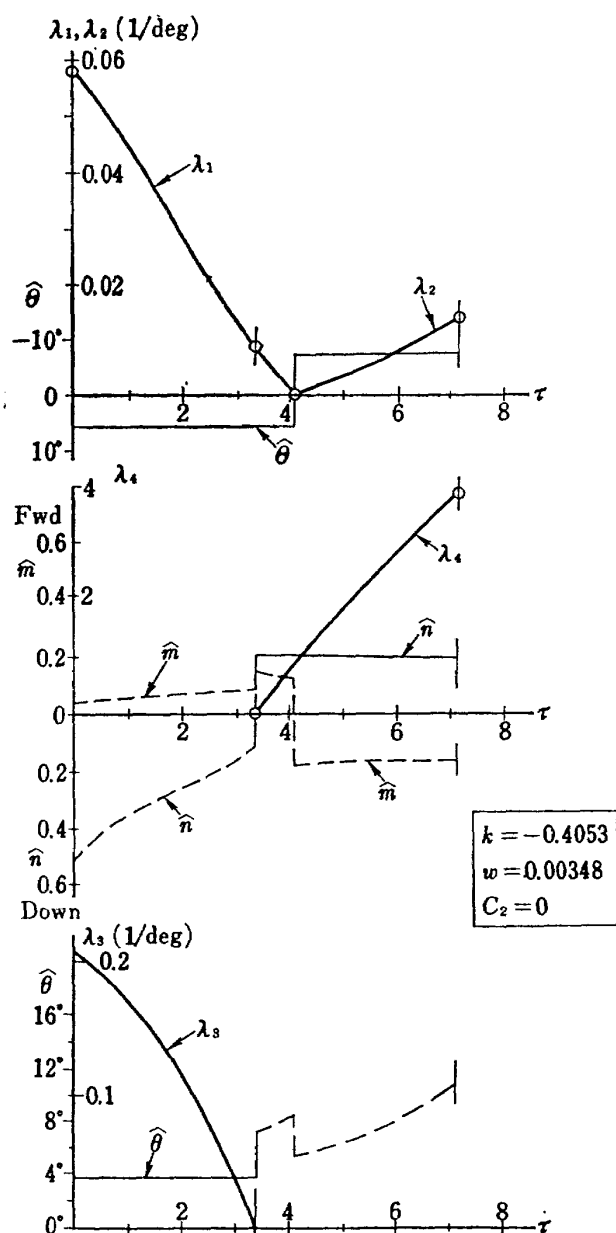


図 36 最適制御とインパルス応答関数 (限界速度点)

②は、 $(\hat{q})_{\text{opt}} < 0$  となるように選び、さらに  $C_2=0$  と置いて固定する代わりに初期値  $\mu_0$  をパラメタとして  $\mu_f$  をあらかじめ指定した値に一致させるように最適軌道を決することだけである。

図35は図29と対応するものであって、限界速度点についての FAA の飛行試験結果 (文献 9. FLT. No. 43) の無次元表示と、それを模擬した解析例との比較を示すものである。この場合にも実際の操作に含まれているであろう非最適性と、解析に含まれている誤差とから両者の時間歴の一致はあまり良いとは云えない。しかし理論上、コレクティブ・フレアの時機がサイクリック・フレアに先行することを含め

て、最適操作の構成が理解される。図36は図35の解析例におけるインパルス応答関数の時間歴を示すものである。高ホバ点の場合 (図28) と比較して、推力角  $\theta$ 、コレクティブ・ピッチ  $\theta$ 、の誤動作  $h_1, h_3 (< 0)$  の影響が操作開始直後で顕著である ( $\lambda_1(\tau=0), \lambda_3(\tau=0)$  が大) ことが見られる。

特定の  $k$  の値における解析例の  $\mu-\nu$  面表示とロータ回転速度の時間歴とを図33に、またこれら一連の計算点で得られた  $(\omega_f - \omega_0)_{\text{max}}$  を図34に、それぞれ示してある。(いずれも「限界速度点,  $C_2=0$ 」の部分のみ参照)。図34においては  $(\omega_f - \omega_0)_{\text{max}}$  および  $(z_f - z_0)_{\text{given}}$  が  $(\mu_0, \mu_f)$  をパラメタとして表示されてい

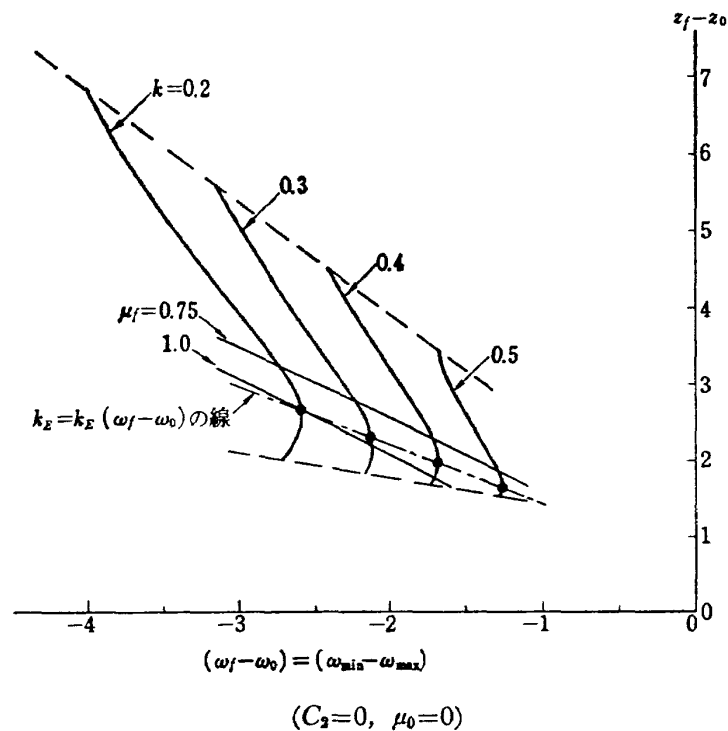


図 37 低速禁止領域の消滅限界

るが、ある  $\mu_0$  を固定して考えてみると、 $\hat{\omega}_f(\mu_0) \equiv \max\{\omega_f(\mu_0, \mu_f)\}$  は、図32の場合と同様に  $\mu_f = 1.0 \sim 1.5$  付近に現われている。ある機体について  $\omega_{\min}$  はあらかじめ与えられているから、 $\hat{\omega}_f(\mu_0) = \omega_{\min}$  となる  $\mu_0$  が理論上の限界速度点速度を与える。

$k$  が  $k_A$  に近い場合の例(図34(a))では、 $\hat{\omega}_f(\mu_0 = 0)$  は存在しないか、あるいは非現実的に小さな値となる。 $k$  の増加とともにこの値は大きくなり、やがて  $\hat{\omega}_f(\mu_0 = 0) = \omega_{\min}$  となるような  $k$  は図11の  $k_E$  である。実際  $k$  が  $k_E$  に近い場合を模擬した例(図34(c))では高ホバ点高度限界を与える包絡線が  $C_2 = 0$  の条件下で  $\hat{\omega}_f(\mu_0 = 0)$  を与えていることが見られる。 $\hat{\omega}_f(\mu_0 = 0) \geq \omega_{\min}$  ならそのときの出力状態  $k$  では低速禁止領域は理論上消滅している訳である。

低速禁止領域の消滅するための最小の  $k$ 、すなわち  $k_E$  と  $(\omega_f - \omega_0) = (\omega_{\min} - \omega_{\max})$  との関係を示す一例が図37である。一般に高ホバ点からの降下に比較し、限界速度点からの着陸操作はその全所要時間が短く、縦揺の剛体自由度を考えると  $|\theta_{\max}/\min|$  の有効値が小さくなる傾向があるが、この減少が  $k_E$  におよぼす影響は  $(\omega_{\min} - \omega_{\max})$  による影響にくらべて小さいと考えられる。

### 3.3 低速低高度限界、特に低ホバ点

3.1 節と同じ手順によって、しかし  $(\bar{q})_{\text{min}} < 0$ ,

$C_2 < 0$  となるように選ぶことによって、低高度限界が求められる。しかし、このようにして得られる最適軌道は本質的に前進遷移飛行を主体としたものであって、特に低ホバ点付近 ( $\mu_0 \neq 0$  付近) では全所要時間が短く、縦揺姿勢角の変化を許すような仮定は正しくない。無慣性制御の仮定の下では、

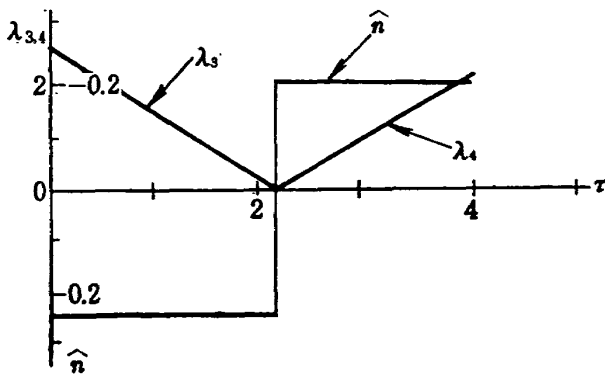
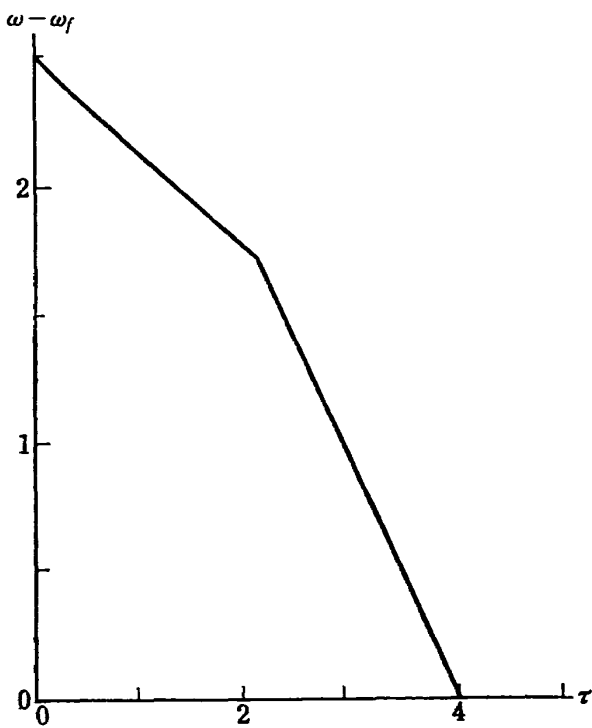
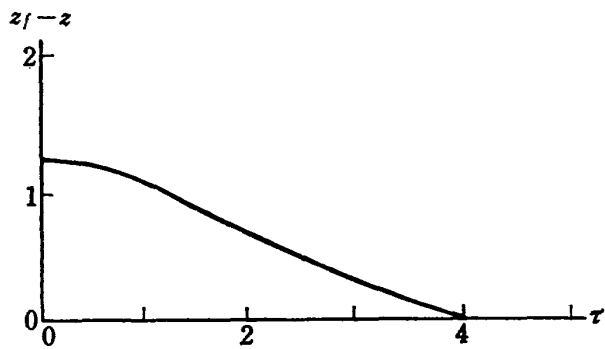
$$m = 0, \quad \mu = \mu_0 = \text{const.}; \quad [0, \tau_f] \quad (3.3.1)$$

の仮定を設けるのが合理的である。以後の解析は 2.4 節、および 4.2 節 (より詳しくは文献6) と同様である。最適軌道の一例を図38に示す。これらの例から得られる結果を  $(\omega_f - \omega_0) \cdot (z_f - z_0)$  面で表示したものが図39である。一般に  $|C_2|$  は大きく、したがって  $|\omega_f - \omega_0|$ 、すなわちロータ回転エネルギーの蓄積量を多少増してやっても低ホバ点高度はほとんど高められないことがわかる。(3.1.28) 参照)。

### 3.4 低速禁止領域形状の推定

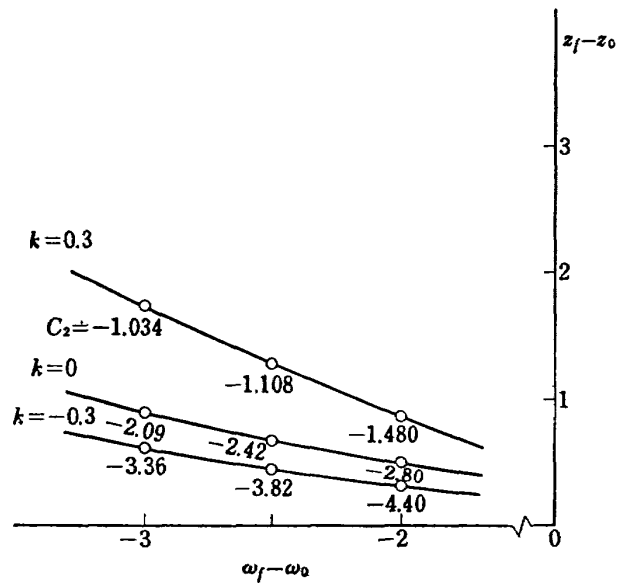
前記各節の結果から、高度・速度線図低速禁止領域の形状を推定することができる。図34から高ホバ点高度および限界速度点高度ならびに限界速度点速度を、また図39から低ホバ点高度を求めて作った禁止領域の例を図40(実線部分)に示す。禁止領域形状が、出力状態、および放出可能なロータ回転エネルギー  $(\omega_f - \omega_0)$  によって大幅に影響されることが見られる。





$k=0.3, \omega=0.004, n_{\max}=0.25$   
 $n_{\min}=-0.20, C_2=-1.108$

図 38 最適制御の時間歴 (低ホバ点)



$(\omega=0.004, 0.25 \geq n \geq -0.20)$

図 39 低ホバ点高度

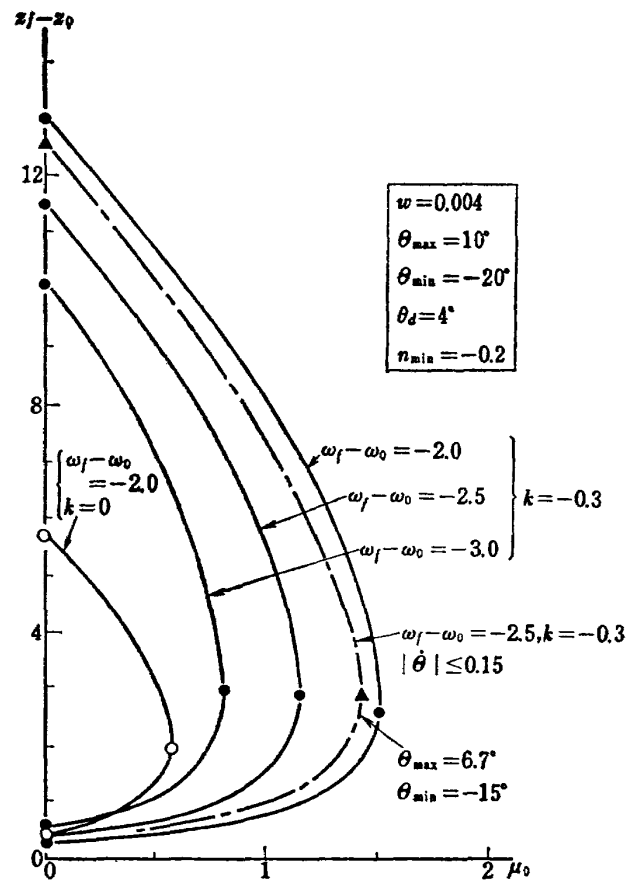


図 40 無慣性最制御による HV 禁止領域 (実線) および慣性の影響 (一点鎖線)

#### 4. 臨界決定点

2章で行なった考察に基づき、臨界決定点を求めるための離陸中止径路および一発動機停止時上昇径路の最適化を行なう。前章と同様に、無慣性制御を仮定する。

状態方程式 : (1.4.9 a)~(1.4.9 b)

端末条件式 : (1.7.5), (1.7.6 b), (1.7.7 b),  
(1.7.8 d)~(1.7.8 f)

評価関数 : (1.7.3)

状態変数拘束条件: (1.7.4 a)~(1.7.4 c), (1.7.9)

制御変数拘束条件: (1.2.4 a~d)

を考えるのである。

##### 4.1 一発動機不動作上昇径路

ロータ回転速度が  $\tau > \tau_f$  における上昇あるいは加速飛行に滑らかに移行することを要求する条件 (1.7.9) を考慮するために、区間  $[0, \tau_f]$  を  $0 < \tau_1 < \tau_f$  なる時刻  $\tau_1$  で分割する。区間  $[0, \tau_1]$  では D.4 節までの、また区間  $[\tau_1, \tau_f]$  では D.5 節の必要条件を適用して最適化を行なう。

区間  $[0, \tau_1]$  では  $h_\alpha, h_\beta$  はそれぞれ (1.2.4 a, b) および (1.2.4 c, d) のいずれかを表わし、また区間  $[\tau_1, \tau_f]$  では  $h_\alpha$  は (1.2.4 a~d) のいずれかを、さらに  $h_\beta$  は (D.5.2) に対応して  $h_\beta = s$  から ((1.7.9) に適用)

$$h_\beta = h_s = -\dot{\omega} = -(\bar{q} + \bar{q}_m m + \bar{q}_n n) \quad (4.1.1)$$

を表わすものとして、ハミルトン関数 (D.2.4) を

$$H = -\nu + \phi_1 \mu + \phi_2 \nu + \phi_3 m + \phi_4 n + \phi_5 (\bar{q} + \bar{q}_m m + \bar{q}_n n) - \lambda_\alpha h_\alpha - \lambda_\beta h_\beta \quad (4.1.2)$$

とかく。ここで形式的には (3.1.7) と同じく

$$\dot{\phi}_1 = -H_x, \quad \dot{\phi}_2 = -H_\nu \quad (4.1.3 a, b)$$

$$\dot{\phi}_3 = -H_m, \quad \dot{\phi}_4 = -H_n \quad (4.1.3 c, d)$$

$$\dot{\phi}_5 = -H_\omega \quad (4.1.3 e)$$

であって、横断条件

$$\phi_1^f = -C_1/0, \quad \phi_2^f = 0 \quad (4.1.4 a, b)$$

$$\phi_3^f = -C_3, \quad \phi_4^f = -C_4 \quad (4.1.4 c, d)$$

$$\phi_5^f = -C_5 \quad (4.1.4 e)$$

である。前章同様に  $(q)_x = (q)_s = (q)_\omega = 0$  とすれば

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(\tau) &= -C_1/0 \\ \phi_2(\tau) &= 0 \\ \phi_5(\tau) &= -C_5 \end{aligned} \right\}; \quad [0, \tau_f] \quad (4.1.5)$$

である\*。停留条件 (D.2.15) は

$$\left. \begin{aligned} H_m = p_3 - (\lambda_\alpha h_\alpha + \lambda_\beta h_\beta)_m &= 0 \\ H_n = p_4 - (\lambda_\alpha h_\alpha + \lambda_\beta h_\beta)_n &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1.6)$$

ただし

$$p_3 \equiv \phi_3 - C_5 \bar{q}_m, \quad p_4 \equiv \phi_4 - C_5 \bar{q}_n \quad (4.1.7)$$

である。

$[0, \tau_1]$  における局所最適条件 (D.2.18)

$$\lambda_\alpha, \lambda_\beta \geq 0 \quad (4.1.8)$$

と (4.1.6) とから  $[0, \tau_1]$  における最適制御則

$$\lambda_1 = \mp p_3 \geq 0; \quad m = \begin{matrix} m_{\min} \\ m_{\max} \end{matrix} \quad (4.1.9 a)$$

$$\lambda_3 = \pm p_4 \geq 0; \quad n = \begin{matrix} n_{\max} \\ n_{\min} \end{matrix} \quad (4.1.9 b)$$

が得られる。もちろん切換点においては  $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$  等である。

$[\tau_1, \tau_f]$  における局所最適条件 (D.2.18), (D.5.18)

$$\lambda_\alpha \geq 0, \quad \lambda_\beta \leq 0 \quad (\lambda_\beta = \lambda_6) \quad (4.1.10)$$

と (4.1.6) とから、 $[\tau_1, \tau_f]$  での最適制御則

$$\lambda_1 = -p_3 - \lambda_6 \bar{q}_m \geq 0; \quad m = m_{\min}$$

$$\lambda_6 \leq 0; \quad n = -(\bar{q} + \bar{q}_m m_{\min}) / \bar{q}_n$$

$$\text{ただし } p_4 + \lambda_6 \bar{q}_n = 0 \quad (4.1.11 a)$$

あるいは

$$\lambda_6 \leq 0; \quad m = -(\bar{q} + \bar{q}_n n_{\min}) / \bar{q}_m$$

$$\lambda_4 = -p_4 - \lambda_6 \bar{q}_n \geq 0; \quad n = n_{\min}$$

$$\text{ただし } p_3 + \lambda_6 \bar{q}_m = 0 \quad (4.1.11 b)$$

が得られる。(D.5.12 a) を適用すれば、 $\tau = \tau_1$  における  $\phi_5$  の跳躍量を 0 と考えたことに対応して

$$\lambda_5(\tau_1^+) = 0 \quad (4.1.12)$$

である。

実際の計算では (4.1.3 c, d) から  $\phi_3, \phi_4$  を積分せずに、(4.1.7) を微分して (4.1.3 c, d) から  $\phi_3, \phi_4$  を

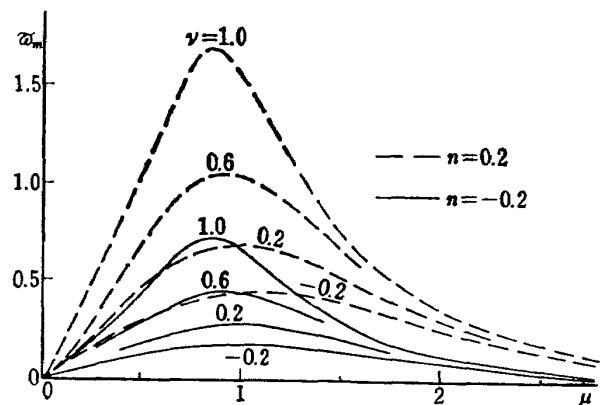


図 41  $\omega_m(\mu, \nu, n) = \bar{q}_\mu + (\bar{q}_n \mu - \bar{q}_m \nu) n$  の値

\* 状態変数の拘束 (1.7.9) への入口、 $\tau = \tau_1$  において (D.5.8 a) 右辺第 2 項に対応する跳躍が  $\phi_5$  に許される。しかし、その任意性と、さらに拘束の出口が終端時刻  $\tau = \tau_f$  であることから、 $\phi_5$  は  $\tau_1$  の前後で連続であり、区間  $[0, \tau_f]$  で一定値  $(-C_5)$  をとるとしてよい。

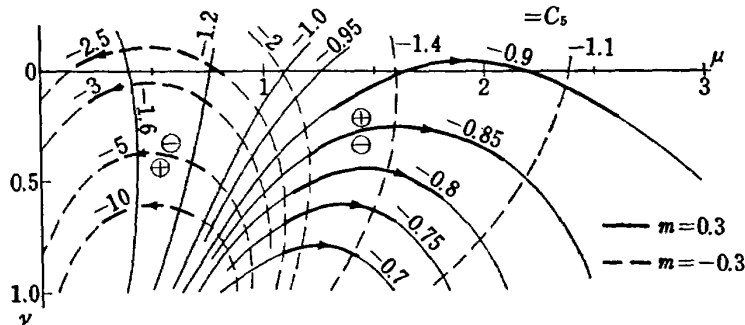


図 42  $1+C_6\omega_n=1+C_6[\bar{q}_\nu-(\bar{q}_{n\mu}-\bar{q}_{m\nu})m]=0$  の特異曲線

消去して得られる微分方程式

$$\dot{p}_3 = C_1 + C_6[\bar{q}_\mu + (\bar{q}_{n\mu} - \bar{q}_{m\nu})n] = C_1 + C_6\omega_m \quad (4.1.13 a)$$

$$\dot{p}_4 = 1 + C_6[\bar{q}_\nu - (\bar{q}_{n\mu})m] = 1 + C_6\omega_n \quad (4.1.13 b)$$

から  $p_3, p_4$  を積分して制御則を適用するのがよい。

さて、最適軌道が存在するとして、そのまわりで作った比較軌道による性能低下は (D.5.16) から

$$\begin{aligned} \Delta z_f + C_6 \Delta \omega_f &= - \int_0^{r_1} (\lambda_\alpha h_\alpha + \lambda_\beta h_\beta) d\tau \\ &\quad - \int_{r_1}^f \{ \lambda_\alpha h_\alpha - \lambda_\beta (\omega_C - \omega) \} d\tau \geq 0 \end{aligned} \quad (4.1.14)$$

とかくことができる。一発動機不作動上昇径路に沿う高度損失をロータ回転速度の低下を等周条件として論じている訳であるから、最適でない操作によって、 $\Delta z_f \equiv z_f - \hat{z}_f = 0$ ,  $\Delta \omega_f = \omega_f - \hat{\omega}_f < 0$  となるような比較軌道を作ることができるはずである。したがって

$$C_6 \leq 0 \quad (4.1.15)$$

であることがわかる。

図41は、(4.1.13) 中は現われた  $\omega_m(\mu, \nu; n)$  を実用的な  $n$  の値をパラメタにして示したものである。事実上  $\omega_m > 0$  と考えてよいことがわかる。図2(b)の最低高度 ( $\Delta z_0$ ) 到達点までの水平距離に関心を払わなければ (4.1.4 a) によって  $C_1 = 0$  である。(4.1.15) を考慮すれば (4.1.13 a) から、 $p_3$  が単調減少であること、したがって (4.1.9 a) から  $m$  の切換は高高一回であって、それは  $m_{max}$  から  $m_{min}$  への切換であることがわかる。さらに、 $m$  に関する特異制御、すなわち  $m_{max} > \hat{m} > m_{min}$  であるようなもの、が存在しないことも直ちにわかる。もし存在するとすれば (D.6.3) によって、ある有限時間区間にわたって

$$p_3 = 0, \quad \dot{p}_3 = 0 \quad (4.1.16)$$

が成立しなければならないからである。2.5 節の考察から得られたのと同様に、操作の前半では最大限に前進加速することが目的にかなうものであることがわか

る。

次に、 $n$  に関する特異制御が存在するとすれば、 $[0, \tau_1)$  内のある有限時間区間にわたって、(D.6.3), (D.6.4) から

$$\dot{p}_4 = 1 + C_6\omega_n(\mu, \nu; m) = 0 \quad (4.1.17)$$

であり、かつ (D.6.5) によって

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{d^2}{d\tau^2} \left( \frac{\partial H}{\partial n} \right) \right] &= \frac{\partial}{\partial n} \left[ \frac{d}{d\tau} (\dot{p}_4) \right] \\ &= \frac{\partial}{\partial \nu} (\dot{p}_4) > 0 \end{aligned} \quad (4.1.18)$$

でなければならない。図42には実用的な  $m$  の値をパラメタとして (4.1.17) の根軌跡を  $\mu-\nu$  面上に示してある。同図中の太線部分は、 $m=m_{max}$  (実線) あるいは  $m=m_{min}$  (破線)、かつ  $n_{max} > n > n_{min}$  に該当する部分、すなわち (4.1.17) が実用的な  $(m, n)$  の値について成立しうる範囲、を表わす。さらに同図中の  $\oplus, \ominus$  の符号は、ある  $C_6$  の値に関する (4.1.17) の根軌跡のそれぞれの側で  $\dot{p}_4$  のとる符号を表わしている。したがって (4.1.18) の条件がみたされるのは  $m=m_{min}$  のときのみであり、 $\hat{m}=m_{max}$  に関連して  $n$  の特異制御が最適である可能性がないことが判明する。

以上の考察によって、 $[0, \tau_1)$  においてはパン・パン型制御が最適軌道を生むことが結論されたが、(4.1.13) 中の  $\omega_m, \omega_n$  には  $\bar{q}$  が含まれないから、出力状態を表わす  $k$  の値によらずにこの結論がなりたつ。

計算手順は以下のとおりである。

- (i) 制御則 (4.1.11) によって点  $f(\mu_C, 0)$  を通る部分軌道  $\vec{1f}$  を逆時間で求める。
- (ii)  $\vec{1f}$  上に適当な点  $(\mu_1, \nu_1)$  をえらび、適当な  $C_6$  の値を定めて制御則 (4.1.9) により軌道  $\vec{o1}$  を求める。
- (iii) あらかじめ定めた初期点  $(\mu_0, \nu_0)$  を通過するように  $C_6$  の値を調節する。
- (iv)  $(\mu_1, \nu_1)$  を  $\vec{1f}$  上で適当に動かすことにより、 $C_6$  をパラメタとして  $(\omega_f - \omega_0)_{given}$  に対する  $(z_f - z_0)_{min}$

を与える最適軌道の組が得られる。

解の一例を時間歴の形で図43に示す。同図(c), (d)には $\hat{m}$ ,  $\hat{n}$ のほかに、それらに対応するインパルス応答関数 $\lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ が記入してある。一般に一発動機不作動上昇径路の前半 $[0, \tau_1]$ においては最大限の前方加速と一回ないし二回の上下加速度の切替とが本質的であり、その後半 $[\tau_1, \tau_f]$ においては最大限の上方加速を伴う回転速度の一定保持が本質的な特徴となっている。誤操作 $(\delta m, \delta n)$ による性能の低下は、 $m$ については操作の初期 $(\tau=0$ 付近)において、また $n$ については区間 $[0, \tau_1]$ の中頃において、それぞれ敏感に影響を受ける。高ホバ点からの着陸操作(3.1節)においては操作開始直後にコレクティブ・ピッチを最

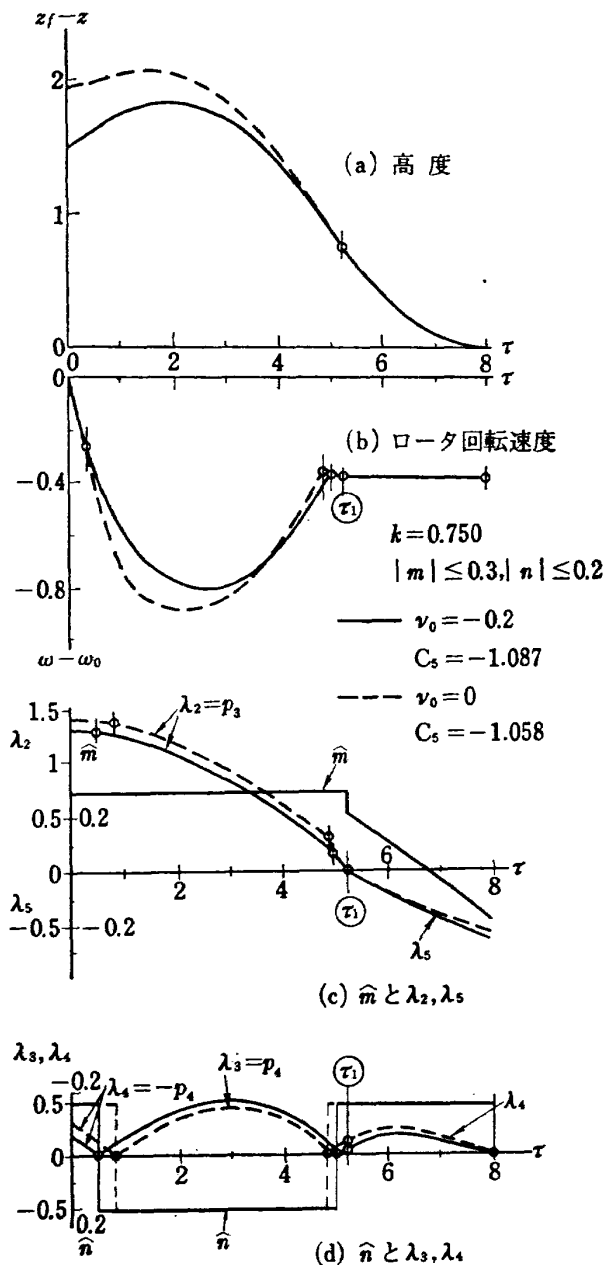


図 43 一発動機不作動上昇最適軌道の時間歴

小にして沈下率を増大させることが最適であったが、今度は $\tau=0$ 付近で $n=n_{max}$ をとることは必ずしも最適でなく、むしろロータ回転速度低下の犠牲において高度低下を抑制する方が得策なのである。操作の後半においては $n=n_{min}$ ,  $\dot{\omega}=0$ を保つように縦の姿勢変化( $m$ あるいは $\delta_x$ )についての探り舵が必要である。

図44には、図43と同じ結果を位相面で示してある。特に同図(a)には(最適でない)比較軌道の例を若干誇張して記入してある。

上記のような計算をいくつかの $k$ と $C_s$ とについて繰り返し、得られた結果を $(\hat{\omega}_f - \omega_0) \cdot (\hat{z}_f - z_0)$ 面で示したものが図45である。同図には $[0, \tau_1]$ 中に経験される $(\omega - \omega_0)_{lowest}$ を注記してあるが、これは拘束条件(1.7.4c)に抵触するか否かをチェックするためのものである。各計算点について図44に注記してあるような $C_s$ の値は、図45の $(\hat{\omega}_f - \omega_0) \cdot (\hat{z}_f - z_0)$ 限界線に沿う勾配

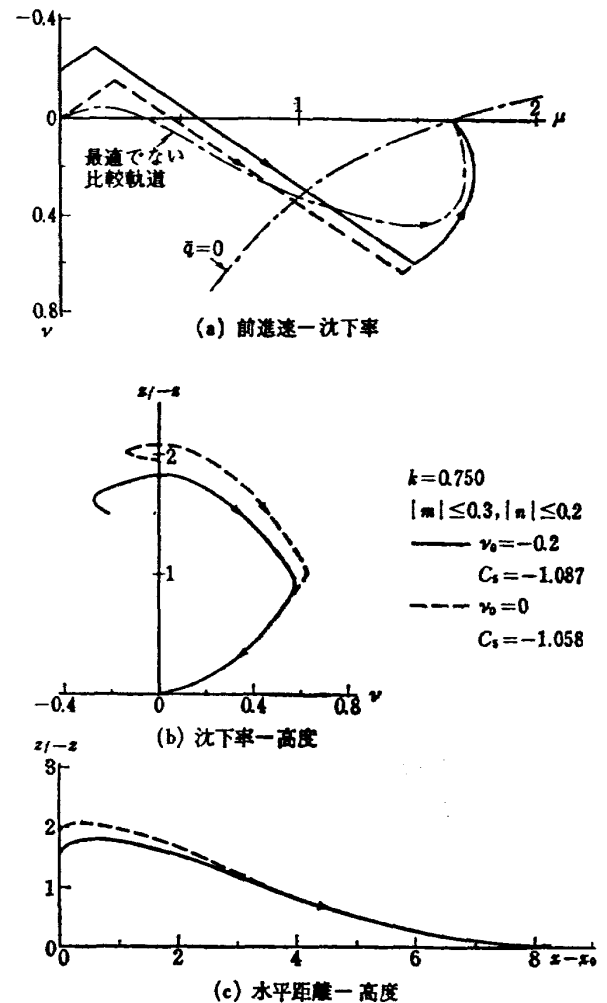


図 44 一発動機不作動上昇最適軌道の例

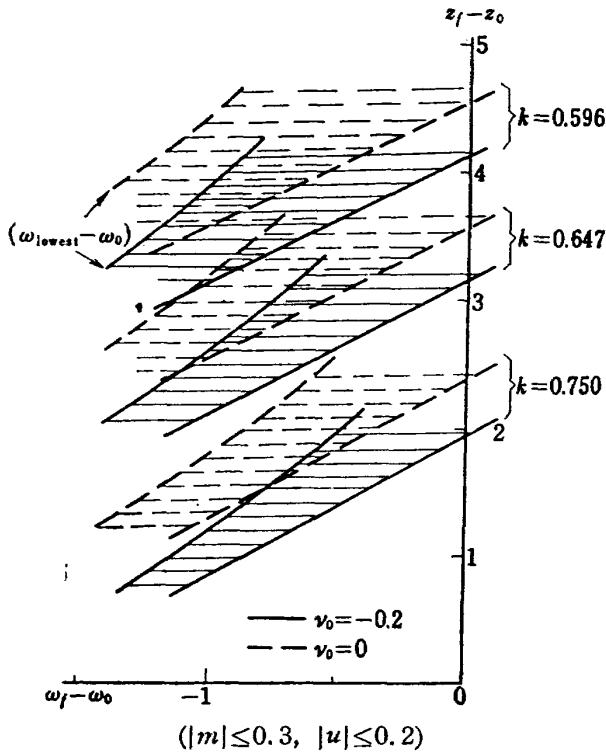


図 45 一発動機不作用上昇の最小高度損失

$$\frac{d(z_f - z_0)}{d(\omega_f - \omega_0)} = -C_6 \quad (4.1.19)$$

を表している。図45からわかるように、実用的な  $k$ , および  $(\omega_f - \omega_0)$  の範囲では  $-C_6 \cong 1$  とみなせるが、これは一発動機不作用上昇径路に沿って、位置エネルギーとロータ回転エネルギーとがほぼ等価であることを示すものである。(3.1.28) 参照)。

4.2 離陸中止径路

垂直な正常離陸と無滑走緊着陸とを念頭におき、ほぼ鉛直線内の運動を仮定する。まず

$$m=0; \quad [0, \tau_f] \quad (4.2.1)$$

である。向風、追風の影響を考慮しうるように、必ずしも0でない  $\mu_0$  をとって

$$\mu = \mu_0: \text{const.}; \quad [0, \tau_f] \quad (4.2.2)$$

とする。2.4 節の結果を参考にして、次のように(1.7.4 b, c) の拘束を課する。

$$s_{(v)} = v - v_{\max} \leq 0; \quad [\tau_3, \tau_4] \quad (4.2.3)$$

$$s_{(\omega)} \equiv \omega - \omega_{\max} \leq 0; \quad [\tau_1, \tau_2] \quad (4.2.4)$$

ただし  $0 \leq \tau_1 < \tau_2 = \tau_3 < \tau_4 < \tau_f$  とする。

$$h_5 = s_{(\omega)} = \bar{q} + \bar{q}_n n \quad (4.2.5)$$

$$h_6 = s_{(v)} = n \quad (4.2.6)$$

として、区間  $[\tau_1, \tau_2]$ ,  $[\tau_3, \tau_4]$  では  $h_\alpha$  はそれぞれ  $h_5, h_6$  を、またそれ以外では(1.2.4 c, d) の  $h_3$  もしくは  $h_4$  を表わすものとすれば、ハミルトン関数は

$$H = v + \phi_2 v + \phi_4 n + \phi_6 (\bar{q} + \bar{q}_n n) - \lambda_\alpha h_\alpha \quad (4.2.7)$$

であり、随伴微分方程式は

$$\dot{\phi}_2 = -H_v, \quad \dot{\phi}_4 = -H_n, \quad \dot{\phi}_6 = -H_{\omega} \quad (4.2.8 a, b, c)$$

横断条件は

$$\phi_2^f = 0, \quad \phi_4^f = -C_4, \quad \phi_6^f = -C_6 \quad (4.2.9 a, b, c)$$

である。 $(q)_s = 0$  を仮定するとまず

$$\phi_2(\tau) = 0; \quad [0, \tau_f] \quad (4.2.10 a)$$

である。次に  $(q)_\omega = 0$  を仮定し、 $\phi_6$  の跳躍を(D.5.8 b)に対応して区間出口、 $\tau = \tau_3$ , で考えれば

$$\left. \begin{aligned} \phi_6(\tau) &= -C_6; & [\tau_3, \tau_f] \\ &= -C_6 - \Delta\phi_6; & [0, \tau_3] \end{aligned} \right\} \quad (4.2.10 b)$$

である。同様に  $\phi_4$  の跳躍量  $\Delta\phi_4$  を考え、区間出口、 $\tau = \tau_4$ , で

$$\phi_4(\tau_4^+) - \phi_4(\tau_4^-) = \Delta\phi_4 \quad (4.2.10 c)$$

とする。

$$p_4 = \phi_4 + \phi_6 \bar{q}_n \quad (4.2.11)$$

とすると、停留条件(D.2.15)は

$$H_n = p_4 - \lambda_\alpha (h_\alpha)_n = 0 \quad (4.2.12)$$

である。もちろん  $p_4$  には(4.2.10 b, c)によって

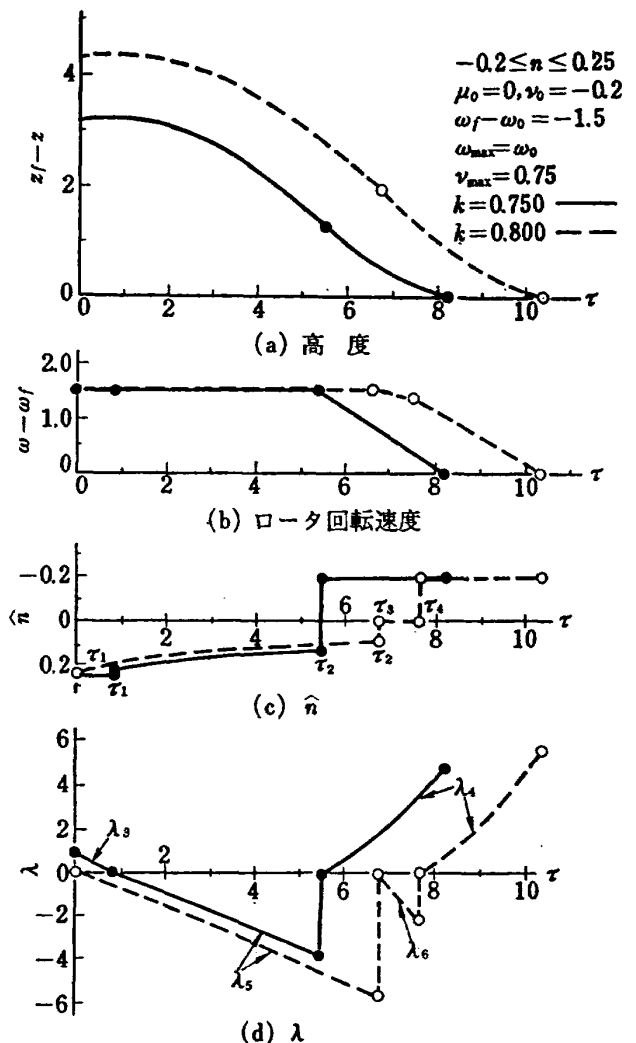


図 46 最適制御の時間歴 (離陸中止径路)

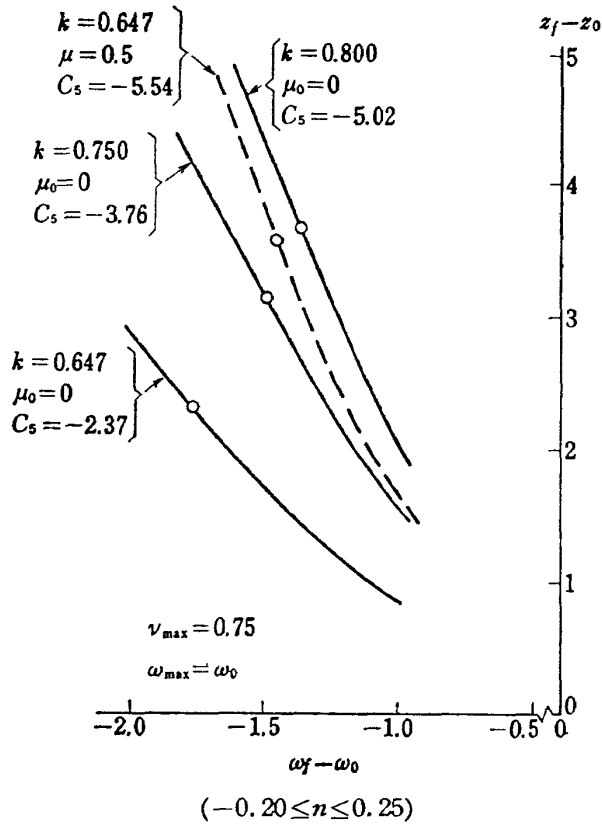


図 47 離陸中止径路に沿う許容最高高度の例

$\tau = \tau_3, \tau_4$  で不連続がある。

最適制御則は  $[0, \tau_1]$  および  $[\tau_4, \tau_f]$  において

$$\lambda_3 = \pm p_4 \geq 0; \quad n = \frac{n_{\max}}{n_{\min}} \quad (4.2.13)$$

$[\tau_1, \tau_3]$  において

$$\lambda_5 \leq 0; \quad n = -\bar{q}/\bar{q}_n$$

$$\text{ただし } p_4 - \lambda_5 \bar{q}_n = 0 \quad (4.2.14)$$

$[\tau_3, \tau_4]$  において

$$\lambda_6 \leq 0; \quad n = 0$$

$$\text{ただし } p_4 - \lambda_6 = 0 \quad (4.2.15)$$

である。

$\tau = \tau_1$  においては  $\phi_4$  を連続としたから

$$\lambda_5(\tau_1^+) = p_4(\tau_1^-) = 0 \quad (4.2.16 a)$$

また  $\tau = \tau_4$  では (D.4.9) によって

$$p_4(\tau_4^+) = 0 \quad (4.2.16 b)$$

である。(4.2.10 b, c) 中の跳躍量は, (D.5.8), (D.5.12 b) から

$$\Delta\phi_5 = -\lambda_5(\tau_3^-), \quad \Delta\phi_4 = -\lambda_6(\tau_4^-) \quad (4.2.17)$$

のように定まる。

(4.1.14) と同様に, 誤操作による性能低下は

$$\begin{aligned} -\Delta z_f + C_5 \Delta \omega_f = & -\int_0^{\tau_1} \lambda_a h_a d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_3} \lambda_5 (\omega - \omega_{\max}) d\tau \\ & + \int_{\tau_3}^{\tau_4} \lambda_6 (\nu - \nu_{\max}) d\tau \end{aligned}$$

$$-\int_{\tau_4}^{\tau_f} \lambda_a h_a d\tau \geq 0 \quad (4.2.18)$$

で表わされ, 前と同じように  $C_5 \leq 0$  が推論される。

解析例の時間歴を図46に示す。状態方程式を制御変数について線型化せずに比較的厳密に扱った場合<sup>6)</sup>と同様に, 出力状態が苛酷になるにつれて  $\nu = \nu_{\max}$  に沿う部分軌道が消滅するのが見られる。同様の計算点について得られた  $(\omega_f - \omega_0)$  と  $(z_f - z_0)$  とを,  $k$  をパラメタとして示したのが図47である。図45の場合に(4.1.19)がなりたつと同様に, 図47の限界曲線に沿って

$$\frac{d(z_f - z_0)}{d(\omega_f - \omega_0)} = C_5 \quad (4.2.19)$$

である。所要時間を指定しない最適問題では, 最適軌道に沿ってハミルトン関数は一定値0をとる ((D.2.13) 参照) から,  $\tau = \tau_4^+$  で考えれば (4.2.7), (4.2.16 b) 等によって条件

$$(\nu - C_5 \bar{q})_{\tau = \tau_4^+} = 0 \quad (4.2.20)$$

がなりたつ。 $\nu(\tau_4)$  はフレア直前の沈下率, すなわち  $[0, \tau_f]$  における最大沈下率, であって, (4.2.19) 右辺の値は実は

$$C_5 = \nu(\tau_4) / \bar{q}(\mu_0, \nu(\tau_4)) \quad (4.2.21)$$

で与えられることがわかる。部分区間  $[\tau_3, \tau_4]$ , すなわち  $\nu = \nu_{\max}$  を保持する区間, が存在する限り  $\nu(\tau_4) = \nu_{\max}$  であって, (4.2.21) の値は  $(\omega_f - \omega_0)_{\text{given}}$  によらず一定である。図47の直線部分がこれに対応する。

### 4.3 臨界決定点

図45および図47から臨界決定点高度を推定することは簡単である。飛行がそこで終了してしまう離陸中止径路についてはロータ回転速度の許容範囲が  $\Omega_f / \Omega_0 \geq 0.8 \sim 0.7$  程度に与えられるのに反し, 一発動機不作動上昇径路においては上昇/加速飛行に継続されなければならないから,  $\Omega_f / \Omega_0 = 1.0 \sim 0.9$  程度が常織的な値と考えられる。これらの事情を考慮してそれぞれの場合に適当にえらんだ  $(\omega_f - \omega_0)_{\text{given}}$  の値について, 図48には  $k$  を横軸にとって一発不作動上昇における  $(z_f - z_0)_{\min}$  と離陸中止における  $(z_f - z_0)_{\max}$  とを重ねて例示してある。図中, 右上りの曲線群は離陸中止径路に沿って得られる許容初期高度の最高限界を示しており, 右下りの曲線群は一発不作動上昇径路において水平飛行に回復するまでに失う高度の許容最低限度を示している。

これら二群の限界線で区分される4つの領域は, 図中に注記してあるような許容/禁止領域を与える。特に地上ヘリポートを想定して離陸安全速度に達したと

きの地上高  $\Delta z_G$  (図 2 (b) 参照) を保証するために、 $\Delta z_G=1$  を加算した場合をも含めてある。 $\Delta z_G=0$  は屋上ヘリポートを想定したと思えばよい。離陸中止径路および一発不作動上昇に対する  $\omega_f$  の値が指定されれば、二つの限界線の交点として最適臨界決定点が定められる。 $(\omega_f - \omega_0)_{given}$  等のパラメタ値にかなり影響されながらも、臨界決定点が定義される最小の  $k$  の値、すなわち  $k_D$  (図11参照)、が 0.65~0.75 程度であり、それ対応した臨界決定点高度  $(z_f - z_0)_{CDP}$  は 2.5~3.5 程度であることが推察される。

### 5. 各パラメタの影響

前記の解析中に含まれているパラメタのうちのあるものは、その値が機体の諸元、形状によって定まり、また他のものは運航条件によって左右される。さらに不連続的な変化を許容した“無慣性制御”の仮定は、加速度倍数  $(m, n)$  の有限な変化に要する時間(あるいは等価的に応答速度)をパラメタと考えた上で、その値を 0 (あるいは無限大)とした場合に該当している。(付録 A. 参照)。本章では機体縦揺運動自由度

およびコレクティブ・ピッチ入力に実際的な応答速度を与えた場合の影響を考察する。さらに無慣性制御の仮定に基づく最適化の結果から、各パラメタ変動の影響を推定する例として、機体重量および運用密度高度、外気温度が臨界決定点におよぼす影響をしらべる。

#### 5.1 制御変数の慣性の影響

固定制御領域の仮定 (1.2.4) が比較的实际に近いと考えられる臨界決定点高度の推定について考える。無慣性制御変数と考えてきた  $(m, n)$  が動的関係

$$\dot{m} = M, \quad \dot{n} = N \quad (5.1.1 a, b)$$

をみだす連続量であると考えることによって、縦揺運動自由度およびコレクティブ・レート・リミッタの効果近似する。ここで入力  $(M, N)$  は仮定の制御変数であって、(B.1.1 a, b) を考えて

$$M \sim -\dot{\theta} \quad N \sim -\dot{T}/W \quad (5.1.2 a, b)$$

とみなしている。最適化の立場からみれば、独立な制御変数と考えてきた  $(m, n)$  が一組の新しい状態量となり、新しい状態方程式 (5.1.1 a, b) が (1.4.9 a~e) に付け加えられたと考える。ここで新しい制御変数

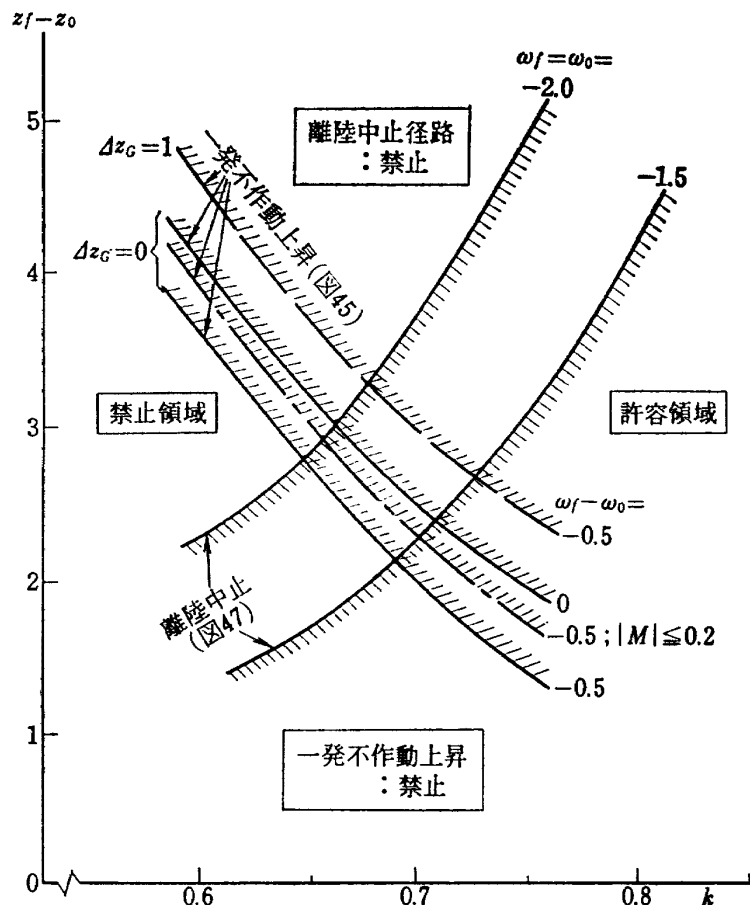


図 48 無慣性最適制御 (実線, 破線) による臨界決定点高度  $(z_f - z_0)_{CDP}$  と  $k_D$  および慣性の影響 (一点鎖線)

(M, N) は固定領域 (付録 A. 参照)

$$h_7 = M_{\min} - M \leq 0, \quad h_8 = M - M_{\max} \leq 0 \quad (5.1.3 a, b)$$

$$h_9 = N - N_{\max} \leq 0, \quad h_{10} = N_{\min} - N \leq 0 \quad (5.1.3 c, d)$$

内に制限され、同時に (m, n) に対する制限 (1.2.4) は新たに状態変数拘束条件になったとみなす。状態量 (m, n) に対する端末条件

$$m_0 = m(0) = 0, \quad n_0 = n(0) = 0 \quad (5.1.4 a, b)$$

$$m_f = m(\tau_f) = 0, \quad n_f = n(\tau_f) = 0 \quad (5.1.4 c, d)$$

を追加する。

一発動機停止上昇径路について考える。区間  $[\tau_1, \tau_f]$  においては、従来から考えていた状態変数拘束条件 (1.7.9 (がいわゆる 2 次の状態拘束条件<sup>25)</sup>) となるために、最適化の取り扱いが複雑となる。そこで厳密な最適化の手続きを省略し、 $\tau = \tau_f$  付近 (つまり (m, n) がその境界値 (1.2.4) に達していないとき) でも 2.5 節の考察が“準静的”に成り立つものとする。つまり (5.1.4) から出発し、

$$\dot{m} = M_{\max/\min}, \quad \dot{n} = N_{\max/\min} \quad (5.1.5 a, b)$$

のいずれか一方と

$$\dot{\omega} = \bar{q} + \bar{q}_m m + \bar{q}_n n = 0 \quad (5.1.6)$$

とから (m, n) を逆時間で定め、それが (1.2.4) のいずれかの境界に達したら 4.1 節で述べた制御則で軌道  $\bar{I}\bar{f}$  を定める。もちろん、 $[\tau_1, \tau_f]$  の至るところで条件 (5.1.3) が満たされていることは確かめておく。このような軌道が局所最適条件をみたしているという保証はないが、最終結果に大きな誤差を生じないであろうことは図 43 (d) 中のインパルス応答関数  $\lambda_4$  が  $\tau = \tau_f$  付近で 0 に近い値をとることによって予測されるところである。このようにして構成された解軌道が図 49 の各図に示す時間歴の後半部  $[\tau_1, \tau_f]$  である。

最適軌道の前半部  $[0, \tau_1]$  について考える。付録 D の定式にしたがって必要条件が記述される。まず  $H_\alpha$  を、 $m_{\min} < m < m_{\max}$  ならば (5.1.3 a, b) のいずれかを、また  $m = m_{\min}$  あるいは  $m = m_{\max}$  ならば (1.2.4 a, b) を (D.5.2) に適用して得られる関係

$$H_\alpha = \dot{h}_1 = -M \quad \text{あるいは} \quad \left. \begin{array}{l} h_2 = M \end{array} \right\} \quad (5.1.7 a, b)$$

を、それぞれ代表するものとし、同様に  $H_\beta$  を  $n_{\min} < n < n_{\max}$  ならば (5.1.3 c, d) のいずれかを、また  $n = n_{\max}$  あるいは  $n = n_{\min}$  なら (1.2.4 c, d) から出る関係

$$H_\beta = \dot{h}_3 = N \quad \text{あるいは} \quad \left. \begin{array}{l} h_4 = -N \end{array} \right\} \quad (5.1.7 c, d)$$

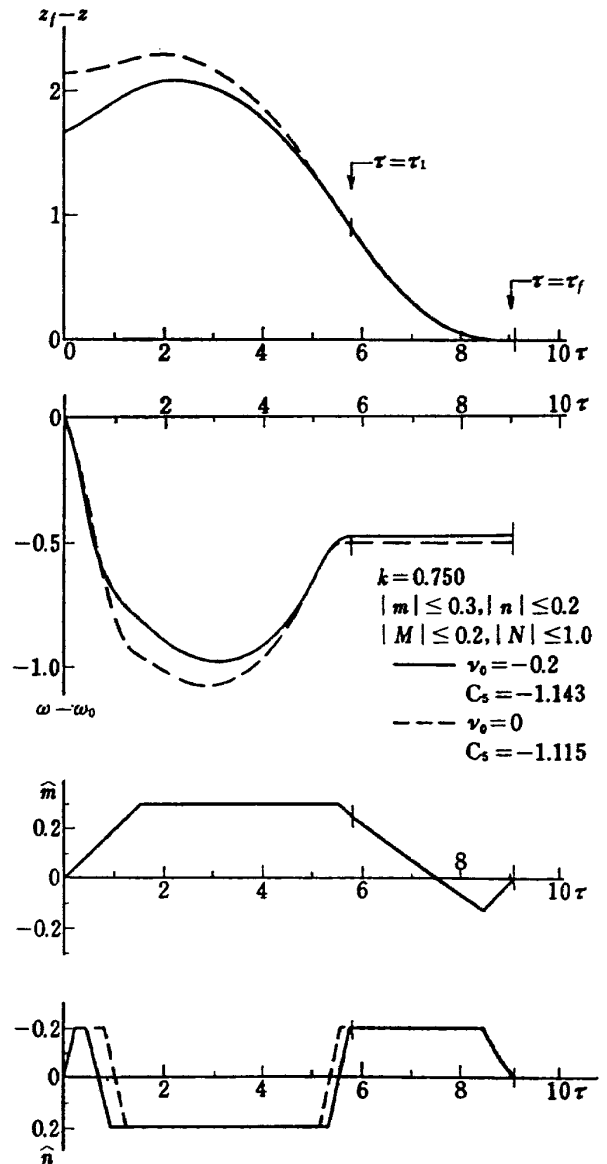


図 49 一発不作動上昇径路の時間歴 (慣性のある制御)

を代表するものとする。ハミルトン関数を

$$H = -\nu + \psi_3 m + \psi_4 n - C_5 (\bar{q} + \bar{q}_m m + \bar{q}_n n) + \Psi_3 M + \Psi_4 N - \Lambda_\alpha H_\alpha - \Lambda_\beta H_\beta \quad (5.1.8)$$

とかく。ただし

$$\dot{\psi}_3 = -H_p, \quad \dot{\psi}_4 = -H_v \quad (5.1.9 a, b)$$

$$\dot{\Psi}_3 = -H_m, \quad \dot{\Psi}_4 = -H_n \quad (5.1.9 c, d)$$

および  $H_{\alpha, \beta}$  に対応する乗数  $\Lambda_{\alpha, \beta}$  を用いて

$$H_M = \Psi_3 - \Lambda_\alpha (H_\alpha)_M = 0 \quad (5.1.10 a)$$

$$H_N = \Psi_4 - \Lambda_\beta (H_\beta)_N = 0 \quad (5.1.10 b)$$

が必要である。最適軌道が (1.2.4) の境界に沿うとき、たとえば  $m = m_{\max}$  のとき、には (5.1.10 a), (5.1.7 b) から

$$\Psi_3 = \Lambda_\alpha \quad (\alpha=2) \quad (5.1.11)$$

であって、局所最適条件 (D.5.18)

$$\dot{\Lambda}_2 \leq 0 \quad (5.1.12)$$



は (5.1.9 c), (4.1.7) を用いれば

$$p_3 \geq 0 \quad (5.1.13)$$

と書き直される。これは実は  $m$  が制御変数として扱われたときの最適制御則 (4.1.9 a) にほかならない。 $n$  についても同様で、結局最適軌道が (1.2.4) の境界に沿うときには (4.1.9) がそのまま有効であることが結論される。(1.2.4) の内部領域に最適軌道が含まれるときには、局所最適条件(D.2.18) は (5.1.3), (5.1.10) によって、

$$\begin{matrix} A_7 = \mp \psi_3 \geq 0; \\ A_8 \end{matrix} \quad M = \begin{matrix} M_{\min} \\ M_{\max} \end{matrix} \quad (5.1.14 a)$$

$$\begin{matrix} A_9 = \pm \psi_4 \geq 0; \\ A_{10} \end{matrix} \quad N = \begin{matrix} N_{\max} \\ N_{\min} \end{matrix} \quad (5.1.14 b)$$

と書かれる。無慣性制御の仮定の下では瞬間的に切換えられた  $(m, n)$  が、今度は (5.1.14) の制御則にしたがって駆動されて有限な傾斜をもって切換えられるのである。 $(m, n)$  の角点においては  $(M, N)$  が切換えられるから、切換点の条件 (D.4.9)

$$\psi_3 = 0, \quad \psi_4 = 0 \quad (5.1.15)$$

が満足されるように  $\psi_3, \psi_4$  に跳躍が許される。(D.5.8) 参照)。

4.1 節の解析結果の類推から、 $\tau = \tau_1$  において

$$m(\tau_1) = -(\bar{q} + \bar{q}_n n_{\min}) / \bar{q}_m \quad (5.1.16 a)$$

$$n(\tau_1) = n_{\min} \quad (5.1.16 b)$$

$$M(\tau_1^-) = M_{\min} \quad (5.1.17 a)$$

$$N(\tau_1^-) = 0 \quad (5.1.17 b)$$

を想定する。 $\tau_1$  における条件をみたすような最適解を逆時間で定め、やはり  $C_0$  をパラメタとして一群の解を求めることができる。図49に示した時間歴の前半  $[0, \tau_1)$  はこのようにして求めたものである。図49の計算例について、 $(M, N)$  に対するインパルス応答関数  $(A_{7,8}, A_{9,10})$ , および  $(m, n)$  に対するインパルス応答関数  $(\lambda_{1,2}, \lambda_{3,4})$ , を示すと図50のようである。図49および図50を図43と比較すれば、舵の慣性の影響を知ることができる。もちろん軌道全体が角のとれた形になっている。慣性  $(M, N)$  を導入しても図50中

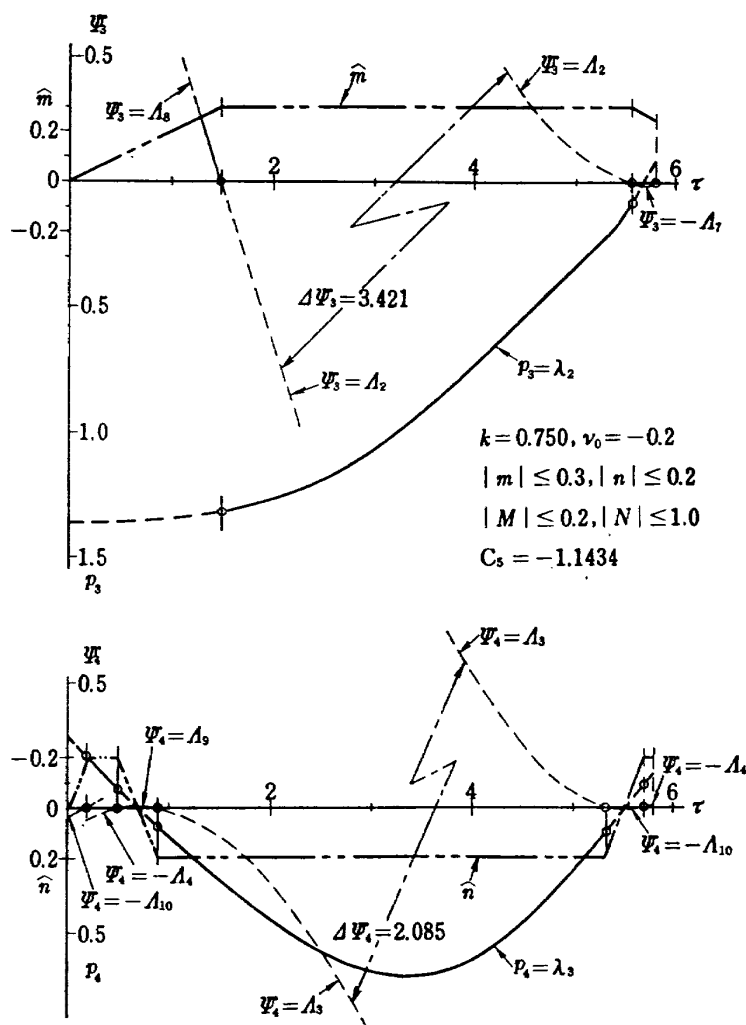


図 50 慣性のある最適制御とインパルス応答関数 (一発動機不作動上昇経路)

の  $(p_3, p_4)$  が図 43 中のそれらからほとんど変化していないことが注目に値する。

このようにして得られた一連の計算結果を  $(\omega_f - \omega_0) \cdot (z_f - z_0)$  面で示したものが図 51 であるが、◆印は本節の方法で求めた結果であり、図 45 に示した無慣性制御の結果の一部を比較の為に複製して示してある。“慣性を考慮した最適制御”は無慣性制御の世界から見れば最適でないから制御に慣性をもたせたことによる性能の低下が見られるのは当然である。この性能低下を定量的に予測するために (4.1.14) の表式を用いることを考えよう。前述のとおり、慣性の導入によって区間  $[\tau_1, \tau_f]$  で生ずる性能低下は無視できるから、(4.1.14) 右辺第 1 項のみに注目する。同項のうち  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$  ( $\alpha=2, \beta=3, 4$ ) には図 43 の値を用い、また例えば  $h_2 = m = m_{\max}$  の  $m$  には図 49 の  $m$  を代入 ( $h_3, h_4$  についても同様) して評価するのである。まず  $h_3, h_4$  が 0 でない部分、すなわち  $\tau=0$  付近および二箇所  $n$  の切換点付近、ではそれぞれ  $\lambda_3, \lambda_4$  の値が小さいこと、また  $h_2$  が 0 でない部分のうち  $\tau=\tau_1$  付近ではやはり  $\lambda_2$  の値が小さいこと、から (4.1.14) 右辺第 1 項の主要部は、 $\tau=0$  付近での  $m$  の立ち上り部分で占められていることが判る。すなわち

$$h_2 = M_{\max}\tau - m_{\max}; [0, m_{\max}/M_{\max}] \quad (5.1.18)$$

のみが重要であって、(4.1.14) は

$$\Delta z_f + C_5 \Delta \omega_f \doteq - \int_0^{(m_{\max}/M_{\max})} \lambda_2 h_2 d\tau \quad (5.1.19)$$

と近似される。さらにこの区間で  $\lambda_2 (= p_3)$  の変化率  $\dot{p}_3$  が 0 に近いことは (4.1.13 a) および図 41 から推察されるとおりである。したがって  $\lambda_2(\tau) \doteq \lambda_2(0)$  とみなすことにすれば、(5.1.19) は

$$\begin{aligned} \Delta z_f + C_5 \Delta \omega_f &\doteq \lambda_2(0) \cdot \int_0^{(m_{\max}/M_{\max})} (-h_2) d\tau \\ &= p_3(0) \cdot \frac{(m_{\max})^2}{2M_{\max}} \end{aligned} \quad (5.1.20)$$

とかける。一方ハミルトン関数は最適軌道に沿って 0 であるから、(4.1.2) は

$$-(\nu + C_5 \bar{q}) + p_3 m + p_4 n = 0 \quad (5.1.21)$$

ともかかれる。図 43 を参照し、 $\tau=0$  では (5.1.21) 第 3 項が第 2 項にくらべて無視できるとすれば

$$p_3(0) \doteq (\nu + C_5 \bar{q})_0 / m_{\max} \quad (5.1.22)$$

で近似される。これを用いて最終的な補正式

$$\Delta z_f + C_5 \Delta \omega_f \doteq (\nu + C_5 \bar{q})_0 \cdot \frac{m_{\max}}{2M_{\max}} \quad (5.1.23)$$

が得られる。図 51 中には、(5.1.23) によって近似的な補正を加えた無慣性最適制御の結果を記入してある。

$(m, n)$  の角点ごとに小さな二点境界値問題を解きながら、全体としての二点境界値問題を解かなければ得られない厳密な解◆に対してかなり良い近似を示して

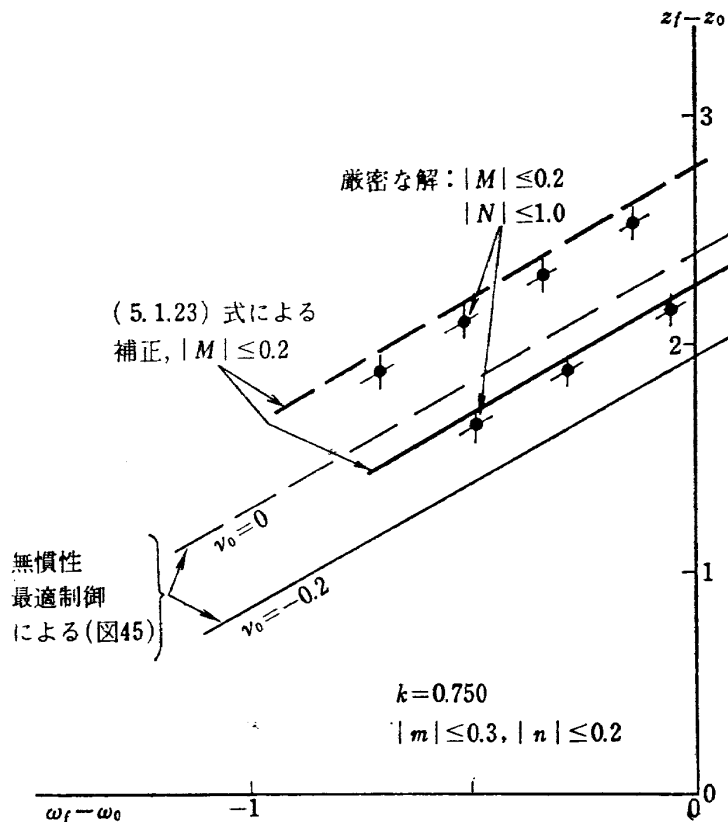


図 51 慣性による性能低下

いることが見られる。(4.1.14)は、軌道  $(x, z, \mu, \nu, \omega)$  のずれがその第2変分が無視できる程度に小さいときにのみ成立する関係であって、図49の軌道と図43の軌道とを比較するような有限のずれに対しては一般に適用できないはずである。図50のインパルス応答関数  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$  が、図43中のそれらとほぼ同じ大きさである ( $M_{\max}, N_{\max}$  等の変動に対して  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$  が鈍感である) 事実によって上記の近似が成功したものと考えられる。

(5.1.23) は、縦揺運動自由度およびコレクティブ・ピッチ操作のおくれによる効果が、擬釣合飛行  $m=n=0$  によって初期状態  $(\mu_0, \nu_0)$  を  $(1/2)(m_{\max}/M_{\max})$  時間だけ保持したことと等価であることを示している。換言すれば、臨界発動機故障直後に機体姿勢を前

傾させるに要する時間だけパイロット応答時間を水増ししてやることにすれば、無慣性制御の仮定による最適化は良好な推定を与えることがわかる。図52には図45を (5.1.23) によって補正したものを示してある。またこの図を用いて求めた一発動機不作用上昇中の許容高度損失を図48中に一点鎖線で書き加えてある。慣性による  $(z_f - z_0)_{CDP}$  および  $k_D$  の増加は図に見るとおりである。

離陸中止径路についても同様の補正が可能である。ただし、前述のとおり、この径路に沿って縦揺姿勢角は実質的に一定に保たれるから、操舵の遅れはコレクティブ・ピッチについてのみ考えればよい。(5.1.4 b, d) の代わりに

$$n_0 = n(0) = 0, \quad n_f = n(\tau_f) : \text{free} \quad (5.1.24 \text{ a, b})$$

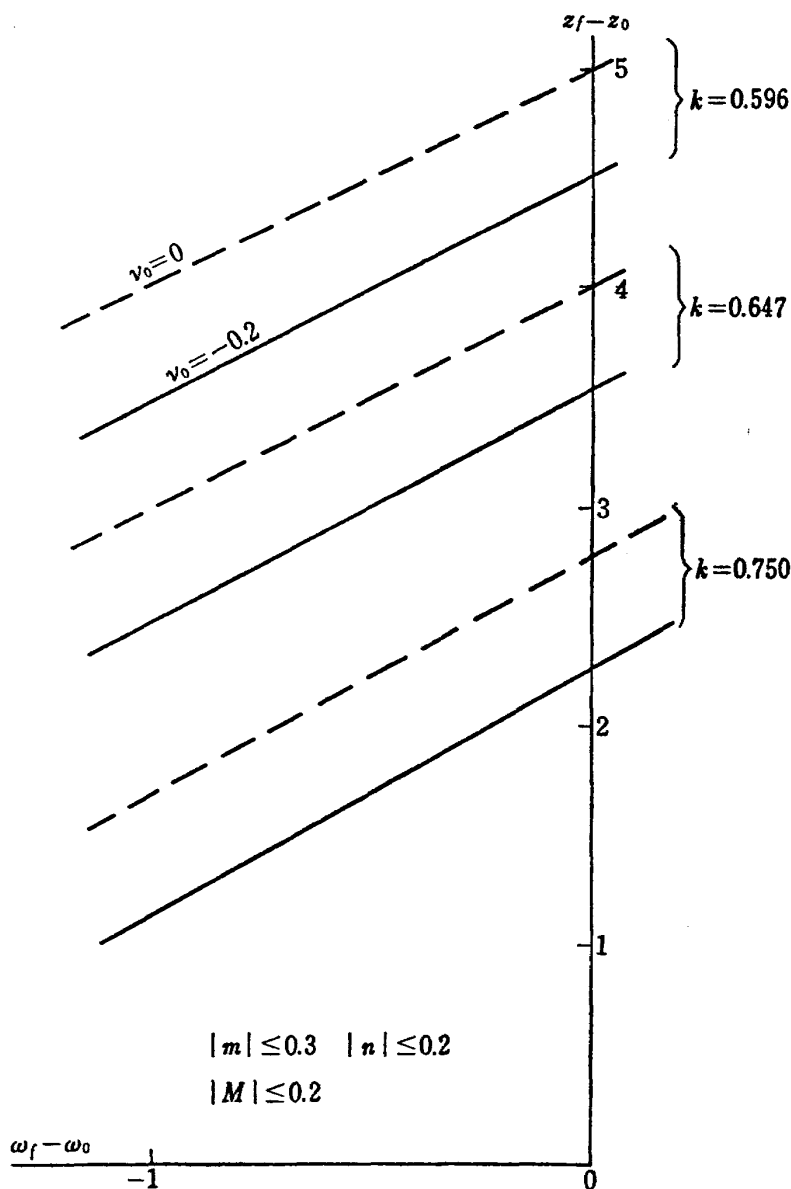


図 52 一発不作用上昇中の高度損失 (図 45 の補正)

と考えれば、図46の  $n$  の時間歴において、 $\tau=0, \tau_1, \tau_2, \tau_4$  付近の不連続的切換が  $N_{max}, N_{min}$  の傾斜を有する連続的な切換に置換される事を除いて全く同様の最適軌道が得られる。各切換点付近でインパルス応答関数が0に近いこ、および  $|N|$  が実用上はかなり大きいこと（付録 A. 参照）から、離陸中止径路については無慣性制御の仮定に基づいた最適化が良好な推定を与えることが推論される。高度・速度線図の低ホバ点についても同様である。

低速禁止領域の高ホバ点および限界速度点については一発動機不動作上昇径路と同様に補正が可能である。図28のインパルス応答関数  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$  を参照しながら、(3.1.19) によって性能低下を推定することを考えるとその主要な寄与が  $\tau=0$  付近のみで生ずることが推論される。(3.1.19) 右辺中、 $h_\alpha, h_\beta$  が慣性の導入によって負となる部分、すなわち切換点付近、では  $\lambda_\alpha, \lambda_\beta$  が0に近いからである。 $(\dot{\theta})_{min}, (\theta)_{min}$  等て前出  $M_{min}, N_{min}$  等と同様な仮定の慣性値を表わせば、(3.1.19) は

$$C_2 \Delta z_f - \Delta \omega_f \doteq - \int_0^{\theta_{min}/(\dot{\theta})_{min}} \lambda_1 h_1 d\tau - \int_0^{[\theta_d - \theta(0^-)]/(\dot{\theta})_{min}} \lambda_3 h_3 d\tau \quad (5.1.25)$$

とかける。ここで

$$h_1 = \theta_{min} - (\dot{\theta})_{min} \tau \quad (5.1.26 a)$$

$$h_3 = \theta_d - [\theta(0^-) + (\dot{\theta})_{min} \tau] \quad (5.1.26 b)$$

である一発不動上昇径路の場合と異なり、今度は必ずしも  $\lambda_1 \gg \lambda_3$  ではないが、しかしやはり以下の理由によって(5.1.25) 右辺第1項が主要部分を占める。無慣性最適制御の構成が図27の記号による①あるいは⑦で出発していることからわかるように、 $\tau=0$  付近では推力が小さい。(図28中の  $n$  の時間歴を参照)。したがって機体姿勢を前傾させるための制御モーメントも  $\tau=0$  付近で小さく、付録 A. に述べたホバ状態 ( $T \doteq W$  を仮定している) におけるよりもかなり悪い応答性しか期待できない。それゆえ、縦揺姿勢角の立上り時間がコレクティブ・ピッチの立ち上り時間よりも大きく、

$$\frac{\theta_{min}}{(\dot{\theta})_{min}} \gg \frac{\theta_d - \theta(0^-)}{(\dot{\theta})_{min}} \quad (5.1.27)$$

の関係がある。これによって(5.1.25) 右辺第2項を省略すれば

$$C_2 \Delta z_f - \Delta \omega_f \doteq \int_0^{\theta_{min}/(\dot{\theta})_{min}} \lambda_1 [(\dot{\theta})_{min} \tau - \theta_{min}] d\tau \quad (5.1.28)$$

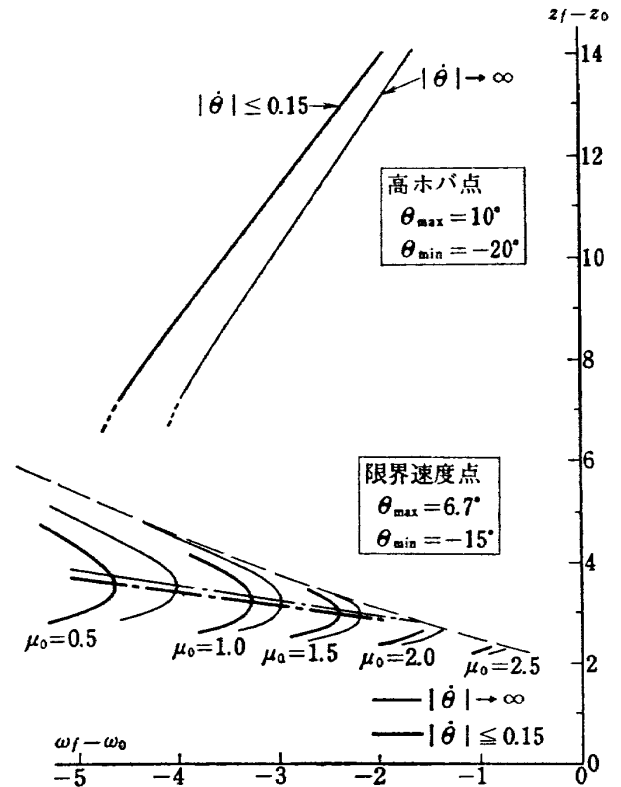


図 53 高ホバ点と限界速度点に対する慣性の影響,  $k = -0.3, w = 0.004$  の例

とかける。

無慣性最適制御の副産物として得られている  $\lambda_1$  を用いて補正した例を図53に示す。図40中の一点鎖線て示した低速禁止領域限界は、図53の結果を用いたものである。慣性を考慮したことによる禁止領域の拡大が見られる。

### 5.2 臨界決定点に及ぼす運用条件の影響

解析に含まれるパラメタの変動の影響を考察する例として、実用上しばしば問題となる気圧高度および外気温度による臨界決定点高度および許容機体重量の変化をしらべる。本報告の記号によれば、変動  $\Delta \rho$  および  $\Delta P_A$  による変動  $\Delta Z_{CDP}$  および  $\Delta W$  を求めることになる\*。この考察を通じて  $m_{max/min}, n_{max/min}$  の値は一定に保たれると考えるが、これはパイロットの体感によってそれらの値が定まると仮定したからである。

図48において無次元臨界決定点高度  $(z_f - z_0)_{CDP}$  および最低出力状態  $k_D$  を推定したが、その基となった

\* 本節の方法は、 $\Delta \rho$  及び  $\Delta P_A$  で代表される運用条件の変動のみならず、ロータ慣性率  $J$ , ロータ回転速度許容限界  $\Omega_{min}$ , 接地時沈下率  $V_f$  等、設計パラメタの変動の影響を考察するときにも全く同様に適用できる。

図45の定まり方を考えればわかるように、一発動機不作動上昇径路に沿う最小高度損失  $(z_f - z_0)_{\min} \equiv (z_f - z_0)^C$  は

$$(z_f - z_0)^C = z^C(\nu_0, \omega_f^C - \omega_0; k) \quad (5.2.1)$$

なる関数形で書かれる。ここで  $z^C(\cdot)$  はその関数形を表わし、 $(\cdot)^C$  は一発不作動上昇 (Partial Power Climb) を意味するものとする。同様に図47の離陸中止径路に沿う最大初期高度  $(z_f - z_0)_{\max} = (z_f - z_0)^R$  は

$$(z_f - z_0)^R = z^R(\nu_0, \nu_f^R, \omega_f^R - \omega_0; k) \quad (5.2.2)$$

と書かれるはずである。ここで  $z^R(\cdot)$  はその関数形を表わし、 $(\cdot)^R$  は離陸中止 (Rejected Take-Off) の意味である。上添字のない量は  $(\cdot)^C$ ,  $(\cdot)^R$  の双方に共通な値をとるものとするれば、4.3節に述べたように、一般に  $\omega_f^C - \omega_0 \gg \omega_f^R - \omega_0$  である。

さて、臨界決定点は次の条件によって定められる。

$$\begin{aligned} (z_f - z_0)_{\text{ODP}} &= z^C(\nu_0, \omega_f^C - \omega_0; k_D) \\ &= z^R(\nu_0, \nu_f^R, \omega_f^R - \omega_0; k_D) \end{aligned} \quad (5.2.3)$$

ある機体諸元、ある運用条件下で (5.2.3) によって定められた最適状態を  $\langle (\cdot) \rangle$  で表わし、それからの微小変動を  $\Delta(\cdot)$  で表わす。  $\partial z^C / \partial \nu_0 \equiv \langle z_{\nu_0} \rangle^C$ ,  $\partial z^C / \partial k \equiv \langle z_k \rangle^C$ ,  $\partial z^R / \partial (\omega_f^R - \omega_0) \equiv \langle z_{\omega} \rangle^R$  等と略記することにすれば、(5.2.3) からの微小変動について

$$\begin{aligned} \Delta(z_f - z_0)_{\text{ODP}} &= \langle z_{\nu_0} \rangle^C \cdot \Delta \nu_0 + \langle z_k \rangle^C \cdot \Delta k \\ &\quad + \langle z_{\nu} \rangle^C \cdot \Delta \nu \\ &= \langle z_{\nu_0} \rangle^R \cdot \Delta \nu_0 + \langle z_{\nu_f} \rangle^R \cdot \Delta \nu_f^R \\ &\quad + \langle z_{\omega} \rangle^R \cdot \Delta (\omega_f^R - \omega_0) + \langle z_R \rangle^R \cdot \Delta k_D \end{aligned} \quad (5.2.4)$$

である。まず (D.2.21) を参照すれば、4.1節、4.2節で得た影響関数を用いて

$$\langle z_{\nu_0} \rangle^C = -\phi_4^C(0) = -[p_4 + C_5 \bar{q}_n]_{\tau=0}^C \quad (5.2.5 a)$$

$$\langle z_{\nu_0} \rangle^R = \phi_4^R(0) = [p_4 - \phi_5 \bar{q}_n]_{\tau=0}^R \quad (5.2.5 b)$$

$$\langle z_{\nu_f} \rangle^R = -\phi_4^R(\tau_f) = -[p_4 + C_5 \bar{q}_n]_{\tau=\tau_f}^R \quad (5.2.5 c)$$

のように評価しうることがわかる。次に (4.1.19), (4.2.19) ですでに知っているように

$$\langle z_{\omega} \rangle^C = -C_5^C \quad (5.2.6 a)$$

$$\langle z_{\omega} \rangle^R = C_5^R \quad (5.2.6 b)$$

である。いずれも〈基準〉状態の最適化の過程で既知の量である。  $\langle z_k \rangle^C$ ,  $\langle z_k \rangle^R$  は影響関数からは評価できないから、例えば図48から求める。

一方、(1.4.1), (1.4.2), (1.4.6) から  $w, v_h, c_{PA}$  を追い出しておいて作った  $k, \omega, \nu, z$  の表式から対数微分によって\*

表 1 臨界決定点に関するパラメタの影響 (計算例)\*

| (a)  |   |
|--|---|
| 一発不作動上昇中の高度損失の変動   | 離陸中止径路初期高度の変動   |
| $\langle Z_W \rangle^C = 5.68$   | $\langle Z_W \rangle^R = -9.99$   |
| $\langle Z_{\rho} \rangle^C = -1.585$  | $\langle Z_{\rho} \rangle^R = 1.556$  |
| $\langle Z_{P_A} \rangle^C = -3.91$  | $\langle Z_{P_A} \rangle^R = 6.63$  |
| (b)  |   |
| TA 級運航可能な最大機体重量の変動   | 臨界決定点高度の変動  |
| $\partial \left( \frac{\Delta W}{\langle W \rangle} \right) / \partial \left( \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} \right) = .200$ | $\partial \left( \frac{\Delta Z}{\langle Z \rangle} \right) / \partial \left( \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} \right) = -.449$ |
| $\partial \left( \frac{\Delta W}{\langle W \rangle} \right) / \partial \left( \frac{\Delta P_A}{\langle P_A \rangle} \right) = .673$   | $\partial \left( \frac{\Delta Z}{\langle Z \rangle} \right) / \partial \left( \frac{\Delta P_A}{\langle P_A \rangle} \right) = -.087$   |

\*  $\langle k_D \rangle = .647$ ,  $\langle z \rangle_{\text{ODP}} = 2.8$ ,  $\langle \nu_0 \rangle = -.2$ ,  $\langle \nu_f \rangle^R = .2$ ,  $\langle \omega_f - \omega_0 \rangle^C = -.5$ ,  $\langle \omega_f - \omega_0 \rangle^R = -2.0$ ,  $\langle 550 P_0 / (W v_h) \rangle = 1/4$  (図 48 参照)

$$\frac{\Delta k}{\langle k \rangle} = -\frac{3}{2} \frac{\Delta W}{\langle W \rangle} + \left( \frac{3}{2} - \kappa \right) \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} + \kappa \frac{\Delta P_A}{\langle P_A \rangle} \quad (5.2.7 a)$$

$$\frac{\Delta \omega}{\langle \omega \rangle} = -2 \frac{\Delta W}{\langle W \rangle} + \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} \quad (5.2.7 b)$$

$$\frac{\Delta \nu}{\langle \nu \rangle} = -\frac{1}{2} \frac{\Delta W}{\langle W \rangle} + \frac{1}{2} \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} \quad (5.2.7 c)$$

$$\frac{\Delta z}{\langle z \rangle} = -\frac{\Delta W}{\langle W \rangle} + \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} + \frac{\Delta Z}{\langle Z \rangle} \quad (5.2.7 d)$$

ただし

$$\kappa = \left\langle \frac{c_{PA}}{c_{PA} - c_{P_0}} \right\rangle = \left\langle \frac{550 P_A}{k W v_h} \right\rangle \quad (5.2.8)$$

が得られるから、これ等を (5.2.4) に代入して

$$\frac{\Delta Z^{\alpha}}{\langle Z \rangle^{\alpha}} = \langle Z_W \rangle^{\alpha} \frac{\Delta W}{\langle W \rangle} + \langle Z_{\rho} \rangle^{\alpha} \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} + \langle Z_{P_A} \rangle^{\alpha} \frac{\Delta P_A}{\langle P_A \rangle} \quad (5.2.9)$$

の形に整理できる。ここで  $\alpha = R, C$  である。  $\langle Z_W \rangle$  等の意味は自明であろう。図48中の一点についての計算例を表 1 (a) に示す。この結果を用い、条件  $\Delta Z^C = \Delta Z^R$  をみたすことを条件として定まる TA 型運航可能な許容機体重量の相対変動  $\Delta W / \langle W \rangle$  および臨界決定点高度の相対変動  $\Delta Z / \langle Z \rangle$  を表 1 (b) に示す。

\* もしロータ慣性能率  $J$  あるいはロータ回転速度限界  $\Omega_{\min}$  の影響が知りたければ (5.2.7 b) 右辺に  $\Delta J / \langle J \rangle + 2 \Delta \Omega / \langle \Omega \rangle$  をつけ加えればよい。

これによれば

$$\frac{\Delta W}{\langle W \rangle} = 0.200 \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} + 0.673 \frac{\Delta P_A}{\langle P_A \rangle} \quad (5.2.10 a)$$

である。密度  $\rho$ 、出力  $P_A$  の変化に対して  $k_D$  が一定に保たれるように許容重量が変動するという、一見魅力的な考え方が正しいとすれば、(5.2.7 a) において  $\Delta k=0$  とおき、同じ計算例について

$$\begin{aligned} \frac{\Delta W}{\langle W \rangle} &= \left(1 - \frac{2}{3} \kappa\right) \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} + \frac{2}{3} \kappa \frac{\Delta P_A}{\langle P_A \rangle} \\ &= 0.76 \frac{\Delta \rho}{\langle \rho \rangle} + 0.924 \frac{\Delta P_A}{\langle P_A \rangle} \quad (5.2.10 b) \end{aligned}$$

が得られる。もとより (5.2.10 b) の考え方には論理的な根拠はなく、飛行試験点の外挿に用いるには危険であることを示している。

## ま と め

ヘリコプタの VTOL 性を左右する臨界発動機停止後の緊急着陸/離陸操作を取り扱った本解析において、得られた結果をまとめれば以下のとおりである。

(1) ある飛行径路に沿う高度損失、あるいはロータ回転速度損失、の最大/最小性を追求することによってパイロット操作を標準化し、理論上の高度・速度線図飛行禁止領域限界、および臨界決定点を推定する方法が提案された。便宜上、状態方程式等には準定常の仮定、および線型化の仮定が導入されている。

(2) 特に前進速度一定の条件、あるいはロータ回転速度一定の条件を課することによって一自由度問題で近似したときには、緊急離着陸操作が大域的に考察され、最適な制御の構成が明らかにされることがわかった。

(3) 多発機、単発機を問わず、機体諸元および運用条件が与えられれば、制御変数の実際的な値域を仮定することによって飛行禁止領域限界あるいは臨界決定点が二自由度最適問題の解として推定されうること、特に飛行試験では限界の確定がされ難い限界速度点の一つの(未知定数)=0の条件によって確定すること、さらに一発動機停止時上昇と離陸中止との妥協点として臨界決定点が推定されること、が示された。

(4) 縦揺運動自由度で代表される制御変数の入力速度の影響が考察され、それが無慣性最適制御を定めるのに必要なインパルス応答関数によって近似的に評価されること、特に一発動機不動作上昇においては機体縦揺姿勢角の応答速度の大小は、パイロット応答時間の減増とほとんど等価とみなしうることを、が導かれた。

(5) 高度・速度線図低速禁止領域について米国連邦航空局の実機飛行試験結果と比較された結果、主要な相異点はコレクティブ・フレアの時機のみならず、おおよびこのずれはパイロットが同時かつ独立には二つの自由度を操作し得ず、一つの舵(サイクリック)に入力を加え、それによって生ずる運動の範囲内で他の舵(コレクティブ)をブレードの失速限界ぎりぎりの探り舵として用いていること、が推論された。

本報告をまとめるに当たり、東京大学、鷲津教授ならびに東助教授には貴重な助言をいただき、また数値計算には飛行実験部、森事務官を煩わせたことを付記し、厚く感謝致します。

## 文 献

- 1) “耐空性審査要領 第V部”, 運輸省航空局, 昭 36, あるいは “FAR Pt. 29,” Federal Aviation Administration, 1968 (旧 CAM Pt. 7)
- 2) Jepson, W.D., “Some Considerations of the Landing and Take-Off Characteristics of Twin Engine Helicopters, Part I …… Height-Velocity and Partial Power Descents”, J. of Amer. Heli. Soc., Vol. 7, No. 4, Oct. 1962, pp. 33-40
- 3) Sabo, J.A. & Dumont, T.E., “FAA Certification of Turbine Transport Helicopters”, J. of Amer. Heli. Soc., Vol. 7, No. 1, Jan. 1962, pp. 40-51
- 4) Diamond, J., “Potential for the Pure Helicopter in the Short Haul Market”, AIAA Paper 67-772, 1967
- 5) “耐空性審査要領 第IV部”, 運輸省航空局, 昭 36, あるいは “FAR Pt. 27”, Federal Aviation Administration, 1968 (旧 CAM Pt. 6)
- 6) 古茂田真幸, “多発動機付ヘリコプタの片発停止時における最適着陸操作——前進速 0 の場合——” 航技研報告 TR-139, 1967.8 または Komoda, M., “Optimal Partial Power Vertical Descent Procedure of Multi-Engined Helicopter”, Trans. of the Japan Soc. for Aero. & Space Sci., Vol. 10, No. 16, 1967, pp. 23-36
- 7) Hanley, W.J. & DeVore, G., “An Evaluation of the Effects of Altitude on the Height Velocity Diagram of a Single Engine Helicopter”, FAA-ADS-1, Feb. 1964
- 8) Hanley, W.J. & DeVore, G., “An Evaluation of the Height Velocity Diagram of a Light Weight, Low Rotor Inertia, Single Engine Helicopter”, FAA-ADS-46, July 1965
- 9) Hanley, W.J., DeVore, G. & Martin, S., “An Evaluation of the Height Velocity Diagram of a Heavy Weight, High Rotor Inertia,

- Single Engine Helicopter”, FAA-ADS-84, Nov. 1966
- 10) Hanley, W.J. & DeVore, G., “An Analysis of the Helicopter Height Velocity Diagram Including a Practical Method for its Determination”, NA-67-1, Feb. 1968
  - 11) Pegg, R.J., “An Investigation of the Helicopter Height-Velocity Diagram Showing Effects of Density Altitude and Gross Weight”, NASA TN D-4538, May 1968
  - 12) Katzenberger, E.E. & Rich, M.J., “An Investigation of Helicopter Descent and Landing Characteristics Following Power Failure”, JAS Vol.23, No.4, April 1956, pp.345-356
  - 13) McCormick, B.W., “On the Initial Descent of a Helicopter Following a Power Failure”, JAS Vol. 23, No. 12, Dec. 1956, pp. 1125-1126
  - 14) Hafner, R., “The Domain of the Helicopter, The 7th Louis Bleriot Lecture”, J. of the Royal Aero. Soc., Vol. 58, No. 526, Oct. 1954
  - 15) Payne, P.R., “Helicopter Dynamics and Aerodynamics”, Sir Issac Pitman & Sons, 1959, Chapter 6
  - 16) Jepson, W.D., “Some Considerations of the Landing and Take-Off Characteristics of Twin Engine Helicopters, Part II — Heliport Size Requirements, J. of Amer. Heli. Soc., Vol. 8, No. 2, April 1963, pp. 35-40
  - 17) 加藤寛一郎, ヘリコプタの Vertical Landing を整理するパラメタについて, 昭和39年11月, 日本航空学会飛行機シンポジウムにて講演
  - 18) Shapley, Jr., J.J., Kyker, R.A. & Ferrell, K.R., “The Development of an Improved Method of Conducting Height-Velocity Testing on Rotary Wing Aircraft”, J. of Amer. Heli. Soc., Vol. 15, No. 2, April 1970, pp. 30-38
  - 19) Lewis, II, R.B., “Using the Remote Terminal Computer to Enhance Design Capability for Rotary Wing Aircraft”, J. of the Amer. Heli. Soc., Vol. 14, No. 1, Jan. 1969, pp. 12-21
  - 20) Washizu, K., Azuma, A., Koo, J. & Oka, T., “Experiments on a Model Helicopter Rotor Operating in the Vortex Ring State”, J. of Aircraft, Vol. 3, No. 3, May-June 1966 pp. 225-230
  - 21) Anon., “ANC-2, Ground Loads”, Bulletin, Munitions Board, Aircraft Committee, Oct. 1950
  - 22) Kelley, H.J., Kopp, R.E. & Moyer, H.G., “Singular Extremals”, Topics in Optimization, edited by G. Leitman, Chap. 3, Academic Press, 1967
  - 23) Johnson, C.D., “Singular Solutions in Problems of Optimal Control”, Advances in Control Systems, Vol. 2, edited by C.T. Leondes, Academic Press, 1965
  - 24) Meile, A., “Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems, Chap. 3, Extremization of Linear Integrals by Green’s Theorem”, edited by G. Leitman, Academic Press, 1962
  - 25) Bryson, Jr., A.E. & Ho, Y.C., “Applied Optimal Control”, Ginn and Company, 1969
  - 26) 加藤寛一郎, “一次おくれを有するヘリコプタ・ダンパの設計点について”, 日本航空学会誌, 第12巻, 125号, 昭和39.6
  - 27) Seckel, E., Traybar, J.J. & Miller, G.E., “Longitudinal Handling Qualities for Hovering”, Proc. of the 18th Annual National Forum, Amer. Heli. Soc., May 1962
  - 28) Salmirs, S. & Tapscott, R.J., “The Effects of Various Combinations of Damping and Control Power on Helicopter Handling Qualities during Both Instrument and Visual Flight”, NASA TN-D58, 1959
  - 29) Carpenter, P.J. & Fridovich, B., “Effect of a Rapid Blade-Pitch Increase on the Thrust and Induced-Velocity Response of a Full-Scale Helicopter Rotor”, NACA TN 3044, 1953
  - 30) Bailey, Jr., F.J., “A Simplified Theoretical Method of Determining the Characteristics of a Lifting Rotor in Forward Flight”, NACA TR 716, 1941
  - 31) Gessow, A. & Myers, Jr., G.C., “Aerodynamics of the Helicopter”, Macmillan Co., 1952
  - 32) 文献 15. と同じ, ただし Fig. 22
  - 33) Pontryagin, et al., “The Mathematical Theory of Optimal Process”, translated by Brown, D.E., Pergamon Press, 1964
  - 34) Berkovitz, L.D., “Variational Methods in Problems of Control and Programming”, J. of Math. Anal. and Appl., Vol. 3, pp. 145-169, 1961
  - 35) Berkovitz, L.D., “On Control Problems with Bounded State Variables”, J. of Math. Anal. and Appl., Vol. 5, 1962, pp. 488-498
  - 36) Hestenes, M.R., “Calculus of Variations and Optimal Control Theory”, John Wiley & Sons, 1966, Chap. 7, 8
  - 37) Kokotovic, P.V. & Sannuti, P., “Singular Perturbation Method for Reducing the Model Order in Optimal Control Design”, IEEE Trans., AC-13, No. 4, Aug. 1968

付録 A. 準定常化の仮定について

本文 1.2 節に述べた準定常化の仮定、すなわち推力ベクトル  $(T, \theta)$  あるいは重心点での加速度倍数  $(m, n)$  の慣性を 0 と考えた仮定、換言すれば  $(T, \theta)$ ,  $(m, n)$  が不連続的に変化しようとした仮定、について考察する。コックピット・コントロール  $(\delta_x, \delta_{cp})$  の不連続の入力に対して  $(T, \theta)$  がステップ状に定常しようとする仮定したと等価であるから、その仮定の正しさを検討するためには機体縦揺運動および推力のステップ応答特性を考察すればよい。低速領域におけるヘリコプタの操縦性、安定性はホバリング状態で代表されるし、人工的な安定化装置もホバリング状態での判定条件に合致するように設計されることが多い<sup>26)</sup> から、以下の議論もホバリング状態に限定する。

A. 1. 縦揺運動

微小じょう乱の仮定の下で、ホバリング状態のまわりのヘリコプタの運動は次式で記述される<sup>26), 27)</sup>。すなわち  $s \equiv d(\ )/dt$ ,  $u, \theta_B$  はそれぞれ前進速および縦揺角のじょう乱分とすれば

$$(s + X_u)u + g\theta_B = 0 \quad (A.1.1)$$

$$-M_u u + (s + M_\theta)s\theta_B = M_\delta \delta_x \quad (A.1.2)$$

である。ここで  $X_u(1/sec)$ ,  $M_u(1/ft/sec)$ ,  $M_\theta(1/sec)$ ,  $M_\delta(1/sec^2/in)$  はすべて普通の意味の微係数である。ごく粗い近似として、 $\delta_x$  のステップ入力に加えられた直後の数秒間に速度変化が生じないと仮定すれば、(A.1.1) と (A.1.2) との連成は消失し、姿勢角速度の応答

$$s\theta_B \doteq \frac{M_\delta}{s + M_\theta} \delta_x \quad (A.1.3)$$

が得られる。もし安定性と操縦性とを改善するために 1 次遅れを有する安定化装置が組み込まれていると

$$\Delta\delta_x = \frac{k_x}{1 + \tau_x s} s\theta_B \quad (A.1.4)$$

なるフィード・バック操舵が考えられる。ただし  $k_x$ : ゲイン,  $\tau_x$ : 遅れ時定数である。このとき (A.1.3) は、 $\tau_x > 0$  のとき

$$s\theta_B = \frac{M_\delta \left( s + \frac{1}{\tau_x} \right)}{s^2 + \left( \frac{1}{\tau_x} + M_\theta \right) s + \frac{M_\theta + M_\delta k_x}{\tau_x}} \delta_x \quad (A.1.5a)$$

また  $\tau_x = 0$  のとき

$$s\theta_B = \frac{M_\delta}{s + (M_\theta + M_\delta k_x)} \delta_x \quad (A.1.5b)$$

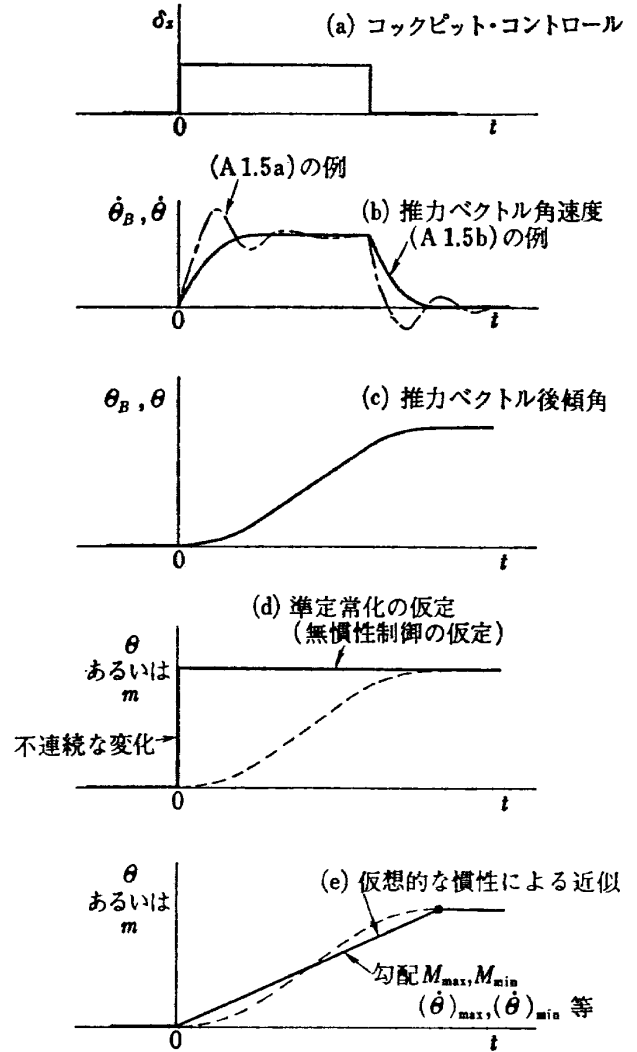


図 A.1 縦揺応答と準定常化の仮定および慣性の導入による近似

と書かれる。実際には操縦システムの重量や、油圧機器等の遅れによって  $\delta_x$  自身ステップ入力として入り得ないが、かりに  $\delta_x$  にステップ入力を仮定したとしても  $\dot{\theta}_B$  は (A.1.5 a, b) のように 2 次もしくは 1 次の遅れを有する。(図 A.1 (a), (b) 参照)。

推力ベクトル後傾角  $\theta$  の応答は、ロータ回転軸からみた縦のフラップ角  $a_{1S}$  の動的応答分だけ  $\theta_B$  のそれと相異なるが、応答速度についてはその差は無視できる。したがって、 $\delta_x$  に対する  $\theta$  の応答は少なくとも 2 次あるいは 3 次の動的系として表わされる。(図 A.1(c))。このような系について、準定常の仮定は  $\theta$  が (あるいは  $m$  が) ステップ状に変化しようすることを許容したのである。(図 A.1 (d))。

さて、安定化装置の定数  $\tau_x, k_x$  等、あるいは機体特性によって定まる  $M_\theta, M_\delta$  等に対する操縦性の側からの要求が、 $\delta_x = 1 in.$  のステップ操舵 1sec 後に得られる姿勢角変位  $\partial(\Delta\theta_B)/\partial\delta_x$  (rad/in.) の大きさで



与えられており、しかもその意味で満足な操縦性を備えたヘリコプタについて考えているものとするれば、推力ベクトル後傾角  $\theta$  の応答速度は

$$|\dot{\theta}| \leq |\partial(\Delta\theta_B)/\partial\delta_x| \cdot (\delta_x)_{\max}/1 \text{ (rad/sec)} \quad (\text{A.1.6})$$

によって制限されると考えてよい。 $|\dot{\theta}|$  の代わりに  $|m|$  を考えるとすれば、 $|\dot{\theta}|$  の代わりに 5.1 節で導入したような  $|M|$  を考えればよい。(図 A.1(e) 参照)。一般に  $\partial(\Delta\theta_B)/\partial\delta_x$  の値として 0.04~0.12 (rad/in.) 程度が推奨されている<sup>28)</sup>。

**A.2 推力の応答**

垂直飛行中のロータに急激なコレクティブ・ピッチ入力  $\delta_{cp}$  を加えた場合の推力の応答性について、解析と実験結果が比較されている<sup>29)</sup>。以下に要約する。

ロータ円板上では一様な、しかし時間的には非定常な平均吹下し  $v$  と、見掛けの質量  $m$  (円板を大円断面とする空気球質量の 63.7% とみなす) とを用い、ブレードのフラッピング運動による有効上昇率を考慮した上で、運動量理論によって推力を表わす。この表式と翼素理論による表式とを等置して推力方程式

$$\begin{aligned} m\dot{v} + \rho\pi R^2 \cdot 2v(v + \frac{2}{3}\dot{\beta}R) \\ = \frac{1}{6}\rho b\Omega^2 ac_2 R^3 \left( \theta_0 - \frac{3}{2}\eta \frac{c_1}{c_2} \frac{v}{R\Omega} - \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2.1})$$

を作る。 $b$  はブレード枚数、 $a$  は断面揚力傾斜、 $c_i = \int_0^R cr^i dr / \int_0^R r^i dr$ ;  $i=1, 2, 3$ ,  $c$  は翼弦、 $\beta$  はフラップ角、 $\eta$  は修正係数である。

同様にフラッピング運動は

$$\begin{aligned} I_1\ddot{\beta} + I_1\Omega^2\beta = \frac{1}{8}\rho\Omega^2 ac_2 R^4 \left( \frac{c_3}{c_2}\theta_0 - \frac{4}{3}\zeta \frac{v}{QR} - \frac{c_3}{c_2} \frac{\dot{\beta}}{\Omega} \right) \\ - M_w \end{aligned} \quad (\text{A.2.2})$$

で記述される。 $I_1$  はフラッピング運動の慣性能率、 $\zeta$  は修正係数、 $M_w$  は自重によるモーメントである。

次に、ロータ・ハブに生ずる推力  $T_H$  は

$$T_H = m\dot{v} + \rho\pi R^2 2v \left( v + \frac{2}{3}\dot{\beta}R \right) - m_b l \ddot{\beta} \quad (\text{A.2.3})$$

ただし  $m_b$  は全ブレード質量、 $l$  はブレード重心までのフラップ軸からの距離である。

コレクティブ入力  $\theta_0(t)$  の一つのプログラムに対して (A.2.1), (A.2.2) から  $v(t)$ ,  $\beta(t)$  を求め、これらを (A.2.3) に代入して  $T_H(t)$  が得られる。 $\theta_0(t)$  の梯形状入力に対する計算結果の一例を図 A.2 (a) に文献 29 から複製してある。ロータ・タワ上での実験結果と比較して、かなり良く一致していることが報告されている。一般に  $T_H$  には定常値の 2 倍以

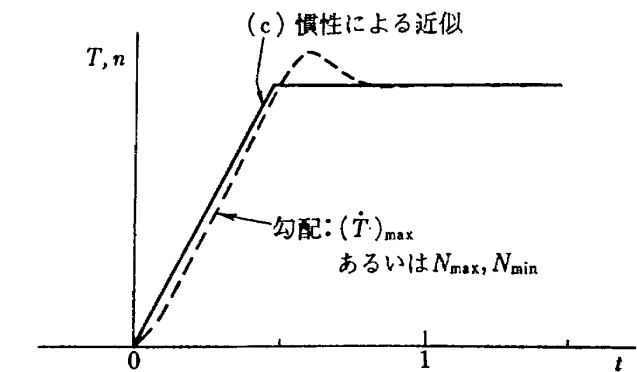
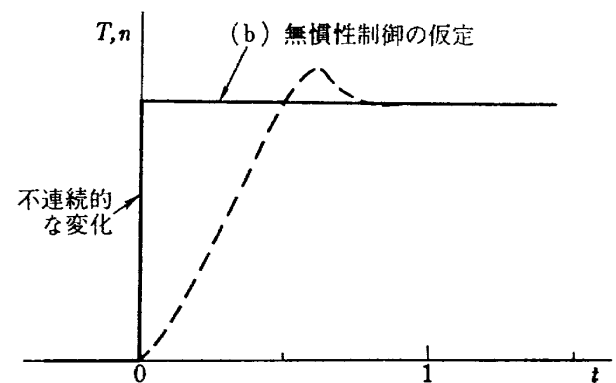
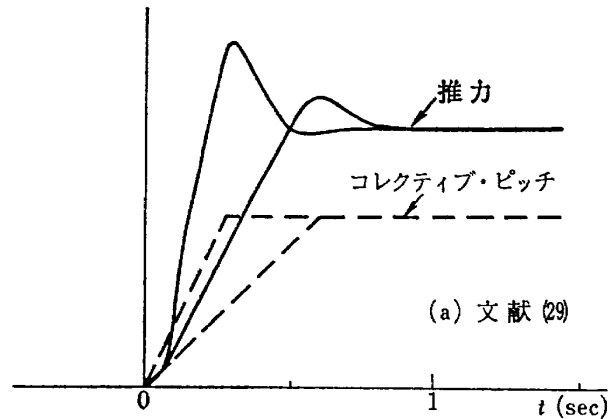


図 A.2 コレクティブ入力に対する推力の応答

下のオーバ・シュートがみられるが、その期間は極めて短かく、また誘導場は  $\theta_0(t)$  が定常値に達してから 1 sec 以内に定常状態に達することも報告されている。

上記の結果から、少なくともホバリングに近い状態では推力はコレクティブ・ピッチ入力に対してほとんど遅れなく追従し、その意味では慣性 0 の仮定が正しいことがわかる。

実機では、操縦システムの有する質量、摩擦、あるいは積極的に組み込まれたレート・リミッタ等によって  $\delta_{cp}$  の変化率は有限に抑えられると思われるので、それらすべての効果を含めて

$$|\dot{\theta}| \leq (\dot{\theta})_{\max} \quad (\text{A. 2.4})$$

のような範囲を設定する。これは  $|\dot{T}| \leq (\dot{T})_{\max}$  を考えたことと等価であり、 $|T|$  の代わりに  $|n|$  を考えるときには  $|\dot{T}|$  の代わりに 5.1 節で導入したような  $|N|$  を考えればよい。このとき  $|N| \leq |\dot{T}/W|_{\max}$  である。(図 A.2(b), (c))。

## 付録 B. 広義のトリムと制御力の限界

本文中に述べた準定常の仮定によって、ある状態  $(Z, U, V, \Omega)$  においてある推力ベクトル  $(T, \theta)$  を準定常的に保持するために必要なコレクティブ・ピッチ  $\theta$ 、およびそのときの代表的ブレード断面における有効迎角  $\alpha_b(\phi, r/R)$  が、広義トリムを解くことによって状態量と制御量との代数関数で与えられることを示す。

簡単のため、ごく普通のシングル・ロータを念頭におく。すなわち主ロータ以外の揚力面や、推進用プロペラは無いものとし、関節型ロータを考える。地面効果は無視する。特に数値例を必要とするときには、文献 9. に記述されている諸元を用いる。(表 B.1 参照)。

### B.1 広義トリム

任意の状態  $(\mu, \nu, \omega)$  において、ある加速度倍数  $(m, n)$  を与えたときに必要な 75% 翼幅点でのコレクティブ・ピッチ角  $\theta$  (rad) を求める。まず (1.3.5) によって

$$m = \frac{\bar{\theta}(\mu, \nu)}{\eta_D} - \frac{C_T}{w} \theta, \quad n = 1 - \eta_D \frac{C_T}{w} \quad (\text{B. 1.1 a, b})$$

である。ロータ面で一様な吹下し分布を仮定すれば、推力係数  $C_T$ 、縦のフラップ角  $a_1$  (rad) は

$$C_T = \frac{\sigma a}{2} \cdot \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}} \cdot [t_{31}\lambda^* + t_{32}\theta_0 + t_{33}\theta_1] \quad (\text{B. 1.2})$$

$$a_1 = t_{14}\lambda^* + t_{15}\theta_0 + t_{16}\theta_1 \quad (\text{B. 1.3})$$

で与えられる<sup>30), 31)</sup>。ただし  $\omega_{\text{ref}}$  は (1.4.1 e) で  $C_T$  を定義するのに用いた  $\Omega_{\text{ref}}$  に対応する無次元量である。また  $t_{ij}$  は、 $\mu^{*3}$  以上を省略して

$$\left. \begin{aligned} t_{31} &= \frac{1}{2} B^2 + \frac{1}{4} \mu^{*3} \\ t_{32} &= \frac{1}{3} B^3 + \frac{1}{2} B \mu^{*2} \\ t_{33} &= \frac{1}{4} B^4 + \frac{1}{4} B^2 \mu^{*2} \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 1.4})$$

$$\left. \begin{aligned} t_{14} &= \frac{2}{B^2} \mu^* \\ t_{15} &= \frac{8}{3B} \mu^* \\ t_{16} &= 2\mu^* \end{aligned} \right\} \quad (\text{B. 1.5})$$

ただし  $\mu^*$ ,  $\lambda^*$  はコントロール軸にとった翼端速度比成分

$$\mu^* = \left[ \sqrt{\frac{w}{2}} / \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}} \right] \cdot (\mu - \theta_C \nu) \quad (\text{B. 1.6 a})$$

$$\lambda^* = \left[ \sqrt{\frac{w}{2}} / \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}} \right] \cdot (\theta_C \mu + \nu - \lambda) \quad (\text{B. 1.6 b})$$

である。さらに  $\theta_C$  はコントロール軸後傾角で、

$$\theta_C = \theta - a_1 \quad (\text{B. 1.7})$$

で与えられる。(図 3 参照)。 $\lambda$  は Glauert の関係

$$C_T/w = \lambda [(\mu - \theta_C \nu)^2 + (\nu + \theta_C \mu - \lambda)^2]^{1/2} \quad (\text{B. 1.8})$$

をみたすように定まる。

特定の機体について、振り下げ  $\theta_1$  は定められているから、 $(\mu, \nu, \omega)$ ,  $(m, n)$  の組み合わせに対して、(B. 1.1) から  $C_T, \theta$  を、(B. 1.6 a), (B. 1.4), (B. 1.5) から  $t_{ij}, \mu^*$  を、(B. 1.6 b) から  $\lambda^*$  を、それぞれ消去すれば、(B. 1.2), (B. 1.3), (B. 1.7), (B. 1.8) は 4 個の変数  $\lambda, \theta_0, \theta_C, a_1$  に対する 4 個の独立な関係を与える。これを解いて広義のトリムが得られる。さらに方位角  $270^\circ$  での断面  $r/R$  での有効迎角  $\alpha_b$  (rad) は

$$\alpha_b = \theta + [\lambda^* + a_1 \cdot (r/R)] / [(r/R) - \mu^*] \quad (\text{B. 1.9})$$

で与えられる。もちろん

$$\theta = \theta_0 + (r/R) \cdot \theta_1 \quad (\text{B. 1.10})$$

である。

### B.2 ピッチ角の線型表示

本文 (1.3.9) の  $\theta$  の線型表示を求める。線型化の原点はもちろん擬釣合飛行状態、 $m=n=0$ 、である。擬釣合状態での量を  $(\bar{\quad})$  で表わし、それからの変動を  $\Delta(\quad)$  で表わす。前節の結果から  $\Delta\lambda, \Delta\theta_C, \Delta a_1, \Delta\theta_0$  に関する 4 個の線型独立な関係

$$\begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ r_{11} & r_{32} & r_{33} & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta\lambda \\ \Delta\theta_0 \\ \Delta\theta_C \\ \Delta a_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\eta_D & \bar{\theta} \\ 0 & r_{36} \\ r_{45} & r_{46} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} m \\ n \end{bmatrix} \quad (\text{B. 2.1})$$

が得られる。ただし

$$r_{11} = \left[ \sqrt{\frac{w}{2}} / \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}} \right] \bar{t}_{14}$$

$$r_{12} = -\bar{t}_{15}$$

$$r_{13} = - \left[ \sqrt{\frac{w}{2}} / \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}} \right]$$

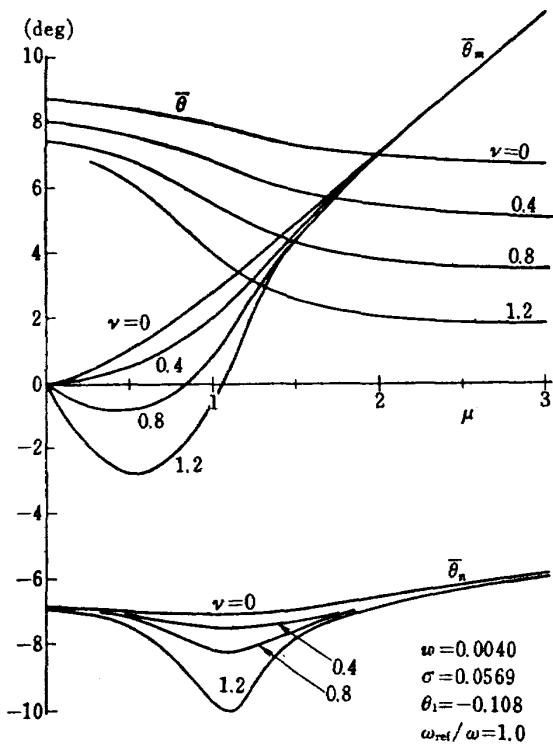


図 B.1  $\theta$  の微係数の例

表 B.1 計算例諸元\*

|          |  |
|----------|--|
| 離陸重量     | $W=11,000 \text{ lb}$                        |
| ロータ径     | $2R=56 \text{ ft}$                           |
| 円板面積     | $A=2,460 \text{ ft}^2$                       |
| プレート翼弦   | $c=16.4 \text{ in}$                          |
| 振上げ      | $\theta_1 = -6.2^\circ = -0.108 \text{ rad}$ |
| プレート断面   | NACA 0012                                    |
| プレート枚数   | $b=4$  |
| ソリディティ比  | $\sigma=0.0569$                              |
| ロータ慣性性能率 | $J=5,239 \text{ slng-ft}^3$                  |
| ロータ回転速度  | $258 \text{ rpm} \sim 170 \text{ rpm}$       |

$$\begin{aligned} & \times \left[ \bar{I}_{14}\mu - \left( \frac{2}{B^2} \bar{\lambda}^* + \frac{8}{3B} \bar{\theta}_0 + 2\theta_1 \right) \nu \right] \\ r_{31} &= \left[ \sqrt{\frac{w}{2}} / \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}} \right] \bar{I}_{31} \\ r_{32} &= -\bar{I}_{32} \\ r_{33} &= - \left[ \sqrt{\frac{w}{2}} / \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}} \right] \\ & \times \left[ \bar{I}_{31}\mu - \bar{\mu}^* \nu \left( \frac{\bar{\lambda}^*}{2} + B\bar{\theta}_0 + \frac{B^2}{2} \theta_1 \right) \right] \\ r_{36} &= \left[ \frac{2w}{\sigma a} / \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}} \right] / \eta_D \\ r_{45} &= \frac{\eta_D^3 \bar{\lambda}^3 [-\bar{\lambda}\mu + \bar{\Theta}(\mu^2 + \nu^2)]}{1 + \eta_D^3 \bar{\lambda}^3 (\bar{\lambda} - \nu - \bar{\Theta}\mu)} \end{aligned}$$

\* FAA 飛行試験 (文献 9) より引用

$$r_{46} = \frac{-[\bar{\lambda} + \eta_D^3 \bar{\lambda}^3 \{-\bar{\lambda}\mu + \bar{\Theta}(\mu^2 + \nu^2)\bar{\Theta}\}]}{1 + \eta_D^3 \bar{\lambda}^3 (\bar{\lambda} - \nu - \bar{\Theta}\mu)} \quad (\text{B.2.2})$$

である。与えられた状態  $(\mu, \nu, \omega)$  で加速度  $(m, n)$  を準定常的に保持するために必要なコレクティブ・ピッチ  $\theta$  を

$$\begin{aligned} \theta &= \bar{\theta} + \Delta\theta_0 \\ &= \bar{\theta} + \bar{\theta}_m m + \bar{\theta}_n n \end{aligned} \quad (\text{B.2.3})$$

と書くとき、

$$\bar{\theta} = \bar{\theta}_0 + 0.75 \theta_1 \quad (\text{B.2.4 a})$$

$$\bar{\theta}_m = \frac{(\eta_D - r_{11}r_{46})r_{33} - r_{31}r_{46}(1 - r_{13})}{r_{12}r_{33} + r_{32}(1 - r_{13})} \quad (\text{B.2.4 b})$$

$$\bar{\theta}_n = \frac{-\{\bar{\Theta} + r_{11}r_{46}\}r_{33} + (r_{36} - r_{31}r_{46})(1 - r_{13})}{r_{12}r_{33} + r_{32}(1 - r_{13})} \quad (\text{B.2.4 c})$$

である。もちろん  $\bar{\theta}_0$  は前節の手順で解かれた  $\theta_0$  である。

表 B.1 に記載した数値を用いた計算例を図 B.1 に示す。

### 付録 C. 必要パワの表式

本文中、(1.3.1) の形に書いたときの必要パワの表式、および最適化の過程に必要なそれらの微係数を求める。

#### C.1 プロファイル・パワ

$$P_0 = \rho A (\Omega_{\text{ref}} R)^3 C_{P_0} / 550 \quad (\text{C.1.1})$$

とかくとき、ある状態  $(\mu, \nu, \omega)$  において

$$C_{P_0} = \frac{\sigma \delta}{8} \sqrt{\frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}}} \left[ \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}} + \frac{w}{2} (\mu - \nu \bar{\theta})^2 \right] \quad (\text{C.1.2})$$

である<sup>31)</sup>。翼素断面平均形状抵抗係数  $\delta$  は、適当に安全側の値をとることによって推力係数  $C_T$  と無関係なものとみなす。本解析で問題にするような低速領域では (C.1.2) 右辺 [ ] 内第 2 項は無視できて、

$$C_{P_0} = \frac{\sigma \delta}{8} \left( \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}} \right)^{3/2} \quad (\text{C.1.3})$$

が適切な表現である。

#### C.2 パワ損失係数

プロファイル・パワ  $P_0$  以外の必要パワ  $P_1$  を (1.3.1 a) のように書き、

$$P_1 = \rho A (\Omega_{\text{ref}} R)^3 C_{P_1} / 550 \quad (\text{C.2.1})$$

で  $C_{P_1}$  を定義する。(1.3.1 a) 中の  $\eta_P$  を

$$\eta_P = \eta_{P_1} \cdot \eta_{P_2} \quad (\text{C.2.2})$$

と分解し、 $\eta_{P_1}$  は吹下しの非一様性を補償するため

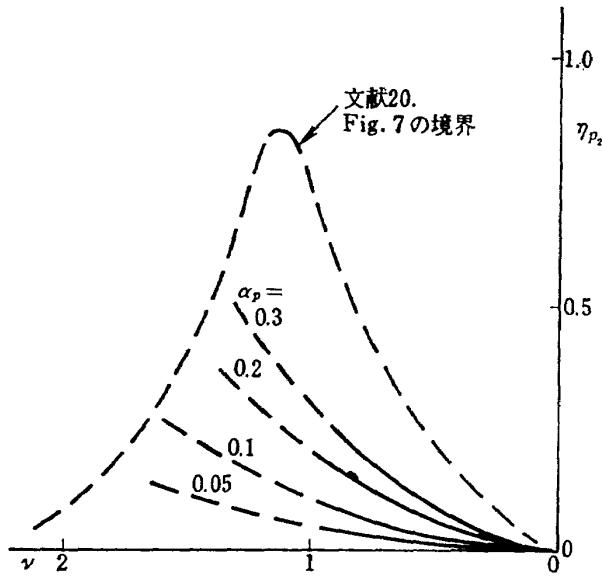


図 C.1 パワ損失係数  $\eta_{P2}$

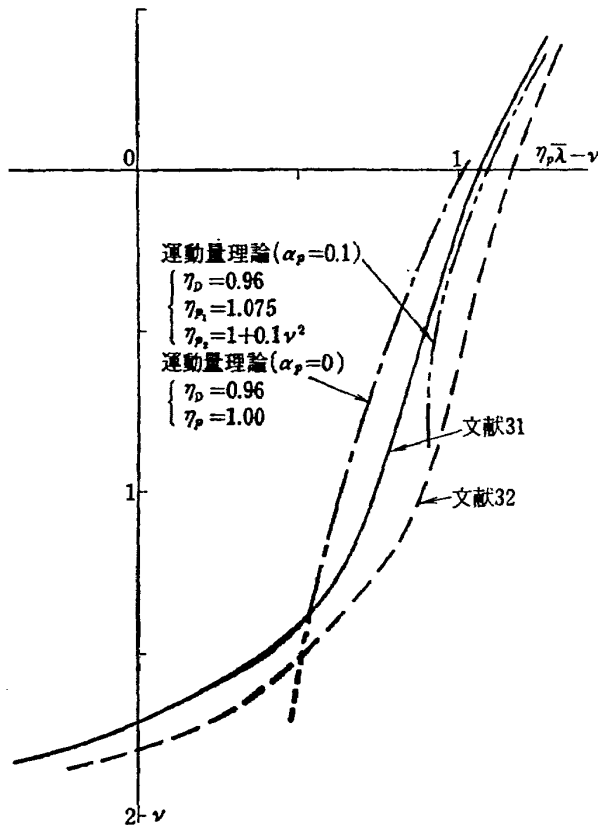


図 C.2 垂直降下時の平均吹下し

の損失係数とする。誘導場が定常ならば  $\eta_{P1}$  を定数とみなし、必要があれば地面効果もこれに含める。(1.3.1 a), (C.2.1) から

$$C_{P1} = C_T (\eta_P \lambda - \nu - \mu \theta) \sqrt{w/2} \quad (C.2.3)$$

とかける。 $|\mu|$  が小さく、 $\nu$  が 1 近辺では、吹下しの局所還流によってパワ損失がさらに増大する。本解析では文献 20. を参照し、以下の形の  $\eta_{P2}$  を考えてパワ損失をモデル化する。

$$\eta_{P2} = 1 + \alpha_P (1 - \mu^2) \nu^2; \quad 1 > |\mu|, \quad 1 > \nu > 0$$

; 上記以外 (C.2.4)

図 C.1 には文献 20, Fig 7 に示された  $\eta_{P2}$  の境界と、 $\alpha_P$  をパラメタにした (C.2.4) とを示してある。

よく知られているように、 $\mu=0$ ,  $2 > \nu > 1$  付近の領域では (1.3.2) あるいは (1.4.5) の関係は正当性を失う。これらの領域で擬釣合飛行をすることは、ポルテックス・リング状態に入ることを意味するから、あらかじめ危険領域として除外する。したがってあまり重要でないが、 $\mu=0$ ,  $\bar{q}=0$  の点の目安をつけるために、図 C.2 を示した。

### C.3 パワの微係数

(1.4.4), (C.2.3) から

$$q = k - \frac{C_{P1}}{w \sqrt{w/2}} = k - \frac{C_T}{w} (\eta_P \lambda - \nu - \mu \theta) \quad (C.3.1)$$

である。(1.4.5) から  $\lambda$  を  $\mu, \nu, \theta, C_T$  の陰関数とみなせば

$$q = q(k; \mu, \nu; \theta, C_T; \lambda(\mu, \nu; \theta, C_T)) \quad (C.3.2)$$

である。一方 (1.3.5) によって

$$\theta = \frac{(\bar{\theta}/\eta_D) - m}{C_T/w} = \frac{\bar{\theta} - \eta_D m}{1-n}, \quad \frac{C_T}{w} = \frac{1-n}{\eta_D} \quad (C.3.3 a, b)$$

であるから

$$\frac{\partial \theta}{\partial m} = -\frac{\eta_D}{1-n}, \quad \frac{\partial C_T}{\partial m} = 0 \quad (C.3.4 a, b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial n} = \frac{\bar{\theta} - \eta_D m}{(1-n)^2}, \quad \frac{\partial C_T}{\partial n} = -\frac{w}{\eta_D} \quad (C.3.4 c, d)$$

であり、(C.3.2) から

$$\frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{C_T}{w} \mu - \frac{C_T}{w} \eta_P \frac{\partial \lambda}{\partial \theta} \quad (C.3.5 a)$$

$$\frac{\partial q}{\partial C_T} = -\frac{1}{w} [\eta_P \lambda - \nu - \mu \theta] - \frac{C_T}{w} \eta_P \frac{\partial \lambda}{\partial C_T} \quad (C.3.5 b)$$

である。

さらに (1.4.3 a, b) から

$$\bar{q} = (\quad)_{m=n=0} = (\quad)_{\theta=\bar{\theta}, C_T/w=1/\eta_D} \quad (C.3.6)$$

であるから、まず (C.3.1) から

$$\bar{q} = k - (\eta_P \bar{\lambda} - \nu - \mu \bar{\theta}) / \eta_D \quad (C.3.7 a)$$

次に (C.3.5), (C.3.4) から

$$\begin{aligned} \bar{q}_m &= \left[ \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial m} + \frac{\partial q}{\partial C_T} \frac{\partial C_T}{\partial m} \right]_{m=n=0} \\ &= \eta_P \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \theta} - \mu \end{aligned} \quad (C.3.7 b)$$

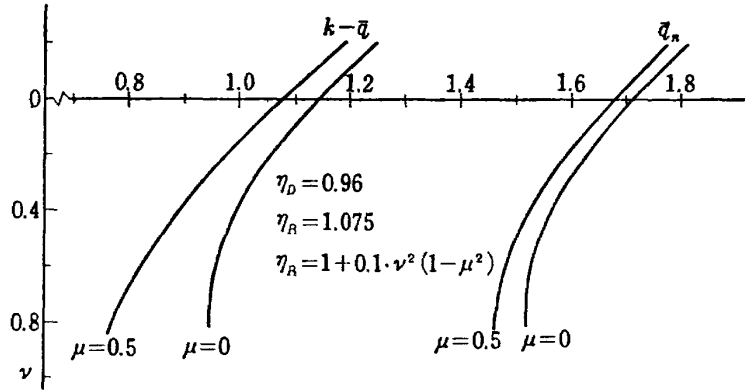


図 C.3 垂直降下時のパワ係数

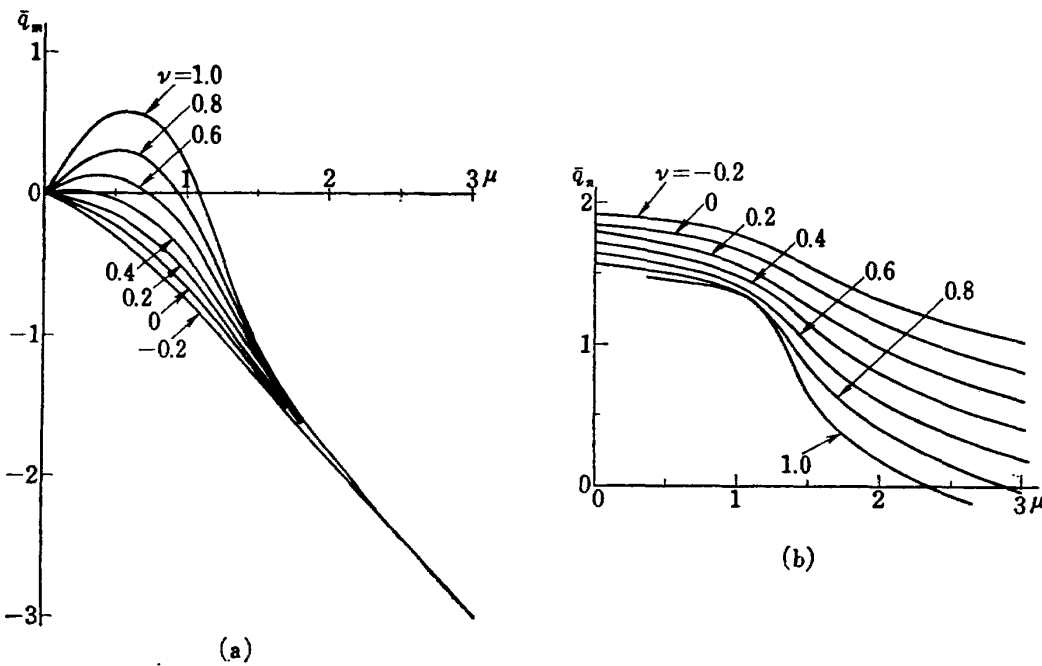


図 C.4 パワ係数

$$\bar{q}_n = \left[ \frac{\partial q}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial n} + \frac{\partial q}{\partial C_T} \frac{\partial C_T}{\partial n} \right]_{n=n=0}$$

$$= \left[ \eta_P \bar{\lambda} - \nu - \mu \eta_D \bar{\theta} + \frac{\eta_P}{\eta_D} \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial (C_T/w)} \right] / \eta_D - \bar{q}_m \bar{\theta}$$

(C.3.7c)

である。ここで (1.4.5) から

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial (C_T/w)} = \frac{\eta_D \bar{\lambda}}{1 + \eta_D^2 \bar{\lambda}^2 (\bar{\lambda} - \nu - \bar{\theta} \mu)} \quad (C.3.8a)$$

$$\frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \theta} = \frac{\eta_D^2 \bar{\lambda}^3 [\mu \bar{\lambda} - \bar{\theta} (\mu^2 + \nu^2)]}{1 + \eta_D^2 \bar{\lambda}^2 (\bar{\lambda} - \nu - \bar{\theta} \mu)} \quad (C.3.8b)$$

また  $\bar{\lambda}$  は

$$1/\eta_D = \bar{\lambda} [(\mu - \bar{\theta} \nu)^2 + (\nu + \bar{\theta} \mu - \bar{\lambda})^2]^{1/2} \quad (C.3.8c)$$

から定められる。図 C.3 には  $\mu=0, 0.5$  のときの  $k-\bar{q}$ , および  $\bar{q}_n$  を, また図 C.4 には  $\bar{q}_m, \bar{q}_n$  を示す。

次に (C.3.7a) から

$$(\bar{q})_\mu = - \left[ \eta_P \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu} - \bar{\theta} - \mu \bar{\theta}_\mu \right] / \eta_D \quad (C.3.9a)$$

$$(\bar{q})_\nu = - \left[ \eta_P \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \nu} - 1 - \mu \bar{\theta}_\nu \right] / \eta_D \quad (C.3.9b)$$

同様に (C.3.7b,c) から

$$(\bar{q}_m)_\nu = \eta_P \frac{\partial}{\partial \nu} \left( \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \theta} \right), \quad (\bar{q}_m)_\mu = \eta_P \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \theta} \right) - 1$$

(C.3.10a, b)

$$(\bar{q}_n)_\mu = \left[ \eta_P \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial \mu} - \eta_D (\bar{\theta} + \mu \bar{\theta}_\mu) + \frac{\eta_P}{\eta_D} \times \frac{\partial}{\partial \mu} \left( \frac{\partial \bar{\lambda}}{\partial (C_T/w)} \right) \right] / \eta_D - (\bar{q}_m)_\mu \bar{\theta} - (\bar{q}_m)_\theta \bar{\theta}_\mu$$

(C.3.10c)

である。(C.3.9), (C.3.10) 中に現われる  $\bar{\lambda}, \partial \bar{\lambda} / \partial \theta, \partial \bar{\lambda} / \partial (C_T/w)$  等の  $(\mu, \nu)$  による微係数は, (C.3.8)

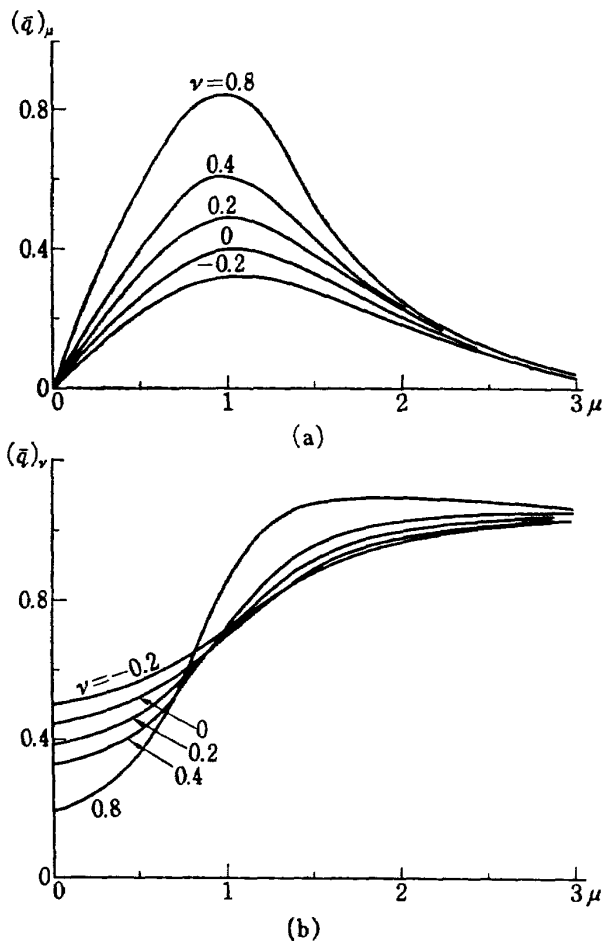


図 C.5 パワ微係数

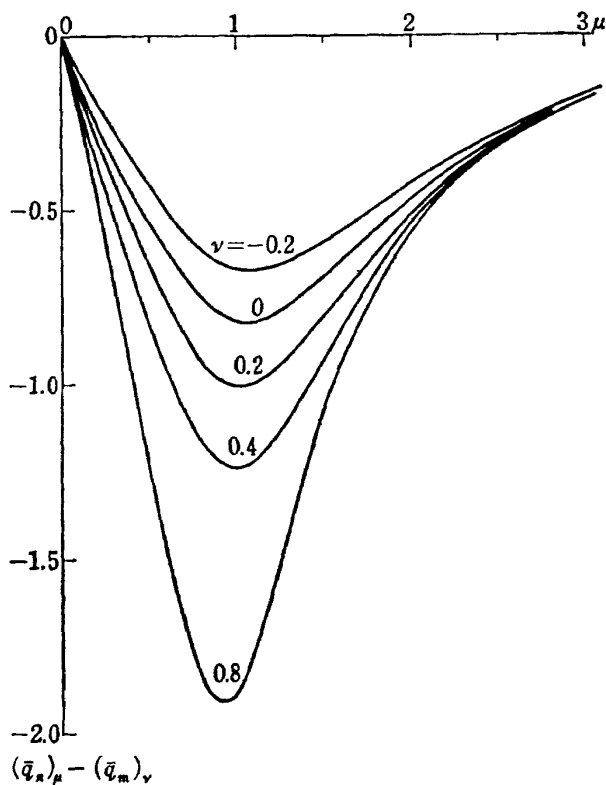


図 C.6 パワ微係数

から求められるが、実際には数値微分法を用いるのが便利である。図 C.5 には  $(\bar{q})_\mu$ ,  $(\bar{q})_\nu$  を、また図 C.6 には最適化の扱い中にしばしば必要となる微係数,  $(\bar{q}_n)_\mu - (\bar{q}_m)_\nu$  を示した。

付録 D. 最適化理論のまとめ

最適化理論のうち、本文中で適用する関連部分をまとめて示す。本文中での複雑な文献引用を避けること、および一般的な条件式をオートノマスでありかつ制御変数に関して線型な系に直ちに適用できる形に書き直しておくこと、が目的である。

D.1 基本問題

状態方程式

$$\dot{x} = f(x, u) \equiv \bar{f}(x) + \bar{f}_u(x)u; [0, t_f] \quad (D.1.1)$$

端末条件

$$x^0 \equiv x(0): \text{ given} \quad (D.1.2)$$

$$T(x^f) = 0, \quad x^f \equiv x(t_f) \quad (D.1.3)$$

および一方向きの拘束条件

$$h(x, u) \equiv \bar{h}(x) + \bar{h}_u(x)u \leq 0; [0, t_f] \quad (D.1.4)$$

を満足するという条件下で、評価関数

$$J \equiv \int_0^{t_f} f_0(x, u) dt \equiv \int_0^{t_f} [\bar{f}_0(x) + \bar{f}_{0u}(x)u] dt \quad (D.1.5)$$

を最小ならしめる最適制御  $u = \hat{u}(t)$  の満たすべき条件を求める。ただし、 $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ ,  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_m(t))^T$ ,  $f = (f_1, \dots, f_n)^T$ ,  $T = (T_1, \dots, T_q)^T$ ,  $h = (h_1, \dots, h_s)^T$ ,  $f_u = [\partial f / \partial u^T]$ ,  $h_u = [\partial h / \partial u^T]$ ,  $q \leq n$ , である。(D.1.4) の代わりに  $e = (e_1, \dots, e_s)^T \geq 0$  を用いて

$$h(x, u) + e(t) = 0; [0, t_f] \quad (D.1.6)$$

を要求してもよい。

$0 \leq t_{\alpha-1} < t_\alpha \leq t_f$ ;  $\alpha = 1, \dots, f$  として、最適軌道  $(\hat{x}, \hat{u}; t_f)$  が存在する区間  $[0, t_f]$  を部分区間  $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$  に分割したとき、 $(\hat{x}, \hat{u})$  は等式条件

$$h_{(\alpha)}(\hat{x}, \hat{u}) = -e_{(\alpha)}(t) = 0; [t_{\alpha-1}, t_\alpha] \quad (D.1.7)$$

を満たすものとする。ただし、 $h_{(\alpha)} = (h_{1(\alpha)}, h_{2(\alpha)}, \dots, h_{m'(\alpha)})^T$  は、(D.1.4) 中の  $h$  のうちから、その部分区間特有の仕方によって選び出された  $m'(\alpha)$  個の成分を表わすものであって、常に

$$\text{rank}[h_{(\alpha)u}] = m'(\alpha) \leq m \quad (D.1.8)$$

\* 特記したもの以外の参考文献は 33~37

であるとする。

最適軌道  $\hat{x}$  との変動が1次微小量であるような比較軌道  $x$  を生む任意の比較制御  $u$  のうちに、(D.1.3), (D.1.4) を満たすような許容比較制御が存在することはあらかじめ仮定されている。

## D.2 評価関数の増分と必要条件

各切換点  $t=i_\alpha$  の変動,  $\delta t_\alpha = t_\alpha - i_\alpha$ , を考慮し, その直前, 直後を  $t_\alpha^-, t_\alpha^+$  とかく。(D.1.7) 中の  $h_{(\alpha)}$  に対応し, 区間  $[t_{\alpha-1}, t_\alpha]$  で連続なベクトル乗数  $\lambda_{(\alpha)}(t) = (\lambda_{1(\alpha)}, \dots, \lambda_{m'(\alpha)})^T$  を用いて積分

$$I \equiv \sum_{\alpha=1}^f \int_{t_{\alpha-1}^+}^{t_\alpha^-} \lambda_{(\alpha)}^T(t) h_{(\alpha)}(x, u) dt \quad (D.2.1)$$

を作る。未知定数  $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_q)^T$  を用いて広義評価関数  $\mathcal{G} = J + \nu^T T + I$  を定義し, その増分  $\Delta \mathcal{G}$  を考える。

変分  $\delta x(t_\alpha^\pm) \equiv x(t_\alpha^\pm) - \hat{x}(t_\alpha^\pm)$  と, 増分  $\Delta x^\alpha \equiv x(t_\alpha) - \hat{x}(i_\alpha)$  との間の一般的な関係

$$\begin{aligned} \Delta x^\alpha &= \delta x(t_\alpha^+) + f(\hat{x}(i_\alpha), \hat{u}(i_\alpha^+)) \delta t_\alpha \\ &= \delta x(t_\alpha^-) + f(\hat{x}(i_\alpha), \hat{u}(i_\alpha^-)) \delta t_\alpha \end{aligned} \quad (D.2.2)$$

を用い, 区間  $(t_{\alpha-1}^+, t_\alpha^-)$  ごとに  $\mathcal{G}$  の変動を評価してそれらを加えることによって, 以下の表式が得られる。

すなわち

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G} &= \sum_{\alpha=1}^f \int_{t_{\alpha-1}^+}^{t_\alpha^-} [H(\hat{x}, \hat{u}, \phi, \lambda_{(\alpha)}) - H(\hat{x}, u, \phi, \lambda_{(\alpha)})] dt \\ &+ \sum_{\alpha=1}^{f-1} \Delta H^\alpha \delta t_\alpha - \sum_{\alpha=1}^{f-1} (\psi(t_\alpha^+) - \phi(\alpha^-)) \Delta x^\alpha \\ &- H^f \cdot \delta t_f + (\nu^T T_{x^f} + \phi^f)^T \Delta x^f \end{aligned} \quad (D.2.3)$$

ただし

$$H(x, u, \phi, \lambda) = -f_0 + \phi^T f - \lambda_{(\alpha)}^T h_{(\alpha)} \quad (D.2.4)$$

$$\begin{aligned} \Delta H^\alpha &\equiv H(\hat{x}(i_\alpha), \hat{u}(t_\alpha^+), \phi(t_\alpha^+), \lambda_{(\alpha+1)}(t_\alpha^+)) \\ &- H(\hat{x}(i_\alpha), \hat{u}(t_\alpha^-), \phi(t_\alpha^-), \lambda_{(\alpha)}(t_\alpha^-)) \end{aligned} \quad (D.2.5)$$

$$H^f \equiv H(\hat{x}(i_f), \hat{u}(i_f), \phi^f, \lambda_{(f)}(i_f)) \quad (D.2.6)$$

であり, 随伴系  $\phi(t) = (\phi_1(t), \dots, \phi_n(t))^T$  は, 随伴微分方程式

$$\dot{\phi}^T = -H_x(\hat{x}, \hat{u}, \phi, \lambda_{(\alpha)}); [i_{\alpha-1}, i_\alpha] \quad (D.2.7)$$

をみたす。

$[0, i_f]$  で  $\phi(t)$  が連続

$$\phi(t_\alpha^+) = \phi(t_\alpha^-); \alpha = 1, \dots, f-1 \quad (D.2.8)$$

とし, 横断条件

$$\phi^f = -\nu^T(\hat{x}_f) \quad (D.2.9)$$

$$H^f = 0 \quad (D.2.10)$$

が満足され, かつ  $H$  が連続

$$\Delta H^\alpha = 0 \quad (D.2.11)$$

であるように  $\phi(t)$  および  $i_\alpha, \alpha = 1, \dots, f$  が定められ

ているとすれば,  $\mathcal{G}$  が停留するためには

$$H_u(\hat{x}, \hat{u}, \phi, \lambda_{(\alpha)}) = 0; [i_{\alpha-1}, i_\alpha] \quad (D.2.12)$$

が必要である。このとき, (D.2.7)~(D.2.12) と独立でない関係

$$H(\hat{x}, \hat{u}, \phi, \lambda_{(\alpha)}) = 0; [i_{\alpha-1}, i_\alpha] \quad (D.2.13)$$

もなりたつ。(D.2.4) を

$$H(x, u, \phi, \lambda_{(\alpha)}) = \bar{H}(x, \phi, \lambda_{(\alpha)}) + \bar{H}_u(x, \phi, \lambda_{(\alpha)}) u \quad (D.2.14)$$

$$H(x, \phi, \lambda_{(\alpha)}) \equiv -\bar{f}_0 + \phi^T \bar{f} - \lambda_{(\alpha)}^T \bar{h}_{(\alpha)} \quad (D.2.14a)$$

$$\bar{H}_u(x, \phi, \lambda_{(\alpha)}) \equiv -\bar{f}_{0u} + \phi^T \bar{f}_u - \lambda_{(\alpha)}^T \bar{h}_{(\alpha)u} \quad (D.2.14b)$$

とかき直せば, (D.2.12), (D.2.13) は

$$\bar{H}_u(\hat{x}, \phi, \lambda_{(\alpha)}) = 0^T; [i_{\alpha-1}, i_\alpha] \quad (D.2.15)$$

$$\bar{H}(\hat{x}, \phi, \lambda_{(\alpha)}) = 0; [i_{\alpha-1}, i_\alpha] \quad (D.2.16)$$

と同値である。

軌道  $(\hat{x}, \hat{u}; i_f)$  が (D.2.7)~(D.2.12) をみたしているとき, そのまわりの任意の比較制御について  $\Delta \mathcal{G} = 0$ , すなわち  $\Delta J + \nu^T \Delta T = -\Delta I$  である。

$$\begin{aligned} \Delta I &= \sum_{\alpha=1}^f \int_{t_{\alpha-1}^+}^{t_\alpha^-} \lambda_{(\alpha)}^T(t) h_{(\alpha)}(x, u) dt \\ &= - \sum_{\alpha=1}^f \int_{t_{\alpha-1}^+}^{t_\alpha^-} \lambda_{(\alpha)}^T(t) e_{(\alpha)}(t) dt \end{aligned} \quad (D.2.17)$$

であって, もし  $(\hat{x}, \hat{u}; i_f)$  が最適軌道ならば,  $e_{(\alpha)}(t) \geq 0$ ,  $\Delta T = 0$ ,  $\Delta J < 0$  とする制御は存在しないはずであり, 局所最適条件

$$\lambda_{(\alpha)}(t) \geq 0; [i_{\alpha-1}, i_\alpha] \quad (D.2.18)$$

が得られる。したがって

$$\begin{aligned} \Delta J + \nu^T \Delta T &= \sum_{\alpha=1}^f \int_{t_{\alpha-1}^+}^{t_\alpha^-} \lambda_{(\alpha)}^T(t) e_{(\alpha)}(t) dt \\ &\geq 0 \end{aligned} \quad (D.2.19)$$

となる。

(D.2.19) において, 左辺は“拡張された”評価関数  $(J + \nu^T T)$  の増分, すなわち拡張された性能の低下であり, 右辺中の  $e_{(\alpha)}$  は一方向き拘束を限度ぎりぎりまで保持しなかった非最適さの程度を表わし, さらに  $\lambda_{(\alpha)}(t)$  はこの誤制御  $e_{(\alpha)}$  が性能を低下させる効果の重みを表わす一種のインパルス応答関数<sup>25)</sup>である\*。

以上では便宜上 (D.1.2) の  $x^0$  は固定して考えて

\* 一般に  $(\partial H / \partial u)$  をインパルス応答関数と呼んでいるが, (D.1.6) 中の  $e(t)$  は  $u(t)$  に代わる新しい制御変数ともみなせるから, 上記のように  $\lambda_{(\alpha)}(t)$  をインパルス応答関数と呼ぶことにする。

きたが、一般性をうるためにその変動をも含めて考えれば、 $\phi(0) \equiv \phi^0$  とかくとき (D.2.3) 右辺に  $-\phi^{0T} \Delta x^0$  が加わる。前記各停留条件の下では (D.2.19) の代わりに

$$\Delta J + \nu^T \Delta T + \phi^{0T} \Delta x^0 = \sum_{\alpha=1}^f \int_{t_{\alpha-1}^+}^{t_{\alpha}^-} \lambda_{(\alpha)}(t) e_{(\alpha)}(t) dt \geq 0 \quad (\text{D.2.20})$$

が成立する。最適軌道のまわりに、 $e_{(\alpha)}(t) \geq 0$ ,  $\Delta T = 0$ ,  $\Delta x^0 = 0$  とするような比較軌道があればもちろん  $\Delta J \geq 0$  である。もし  $e_{(\alpha)} = 0$  が恒等的にはなり立っていないような比較軌道のうちで (D.2.20) 第2辺が1次の微小量の精度で0となるものがあれば\*

$$\Delta J = -\nu^T \Delta T - \phi^{0T} \Delta x^0 = [\phi^T \Delta x] \Big|_{t=0}^{t=t_f} \quad (\text{D.2.21})$$

となる。この意味で  $\nu, \phi^0$  は (等価的には  $\phi^f$  も), それぞれ端未条件 (D.1.3) および (D.1.2) の変動による性能低下の程度を表わす影響関数<sup>26)</sup>である。

### D.3 $m'(\alpha) = m$ ; $\alpha = 1, \dots, f$ の場合

一部、もしくは全体として特異な制御<sup>22), 23)</sup> が最適軌道の一部を構成していなければ、

$$m'(\alpha) = m; \quad \alpha = 1, \dots, f \quad (\text{D.3.1})$$

と考えることができる。(D.1.8) によって

$$\text{rank}[h_{(\alpha)u}] = m; \quad [t_{\alpha-1}, t_{\alpha}], \quad \alpha = 1, \dots, f \quad (\text{D.3.2})$$

である。(D.1.7) に対応する表式

$$\bar{h}_{(\alpha)}(x) + \bar{h}_{(\alpha)u}(x) \hat{u} = 0; \quad [t_{\alpha-1}, t_{\alpha}] \quad (\text{D.3.3})$$

から最適制御が

$$\hat{u} = -(\bar{h}_{(\alpha)u})^{-1}(\bar{h}_{(\alpha)}); \quad [t_{\alpha-1}, t_{\alpha}] \quad (\text{D.3.4})$$

と解かれ、(D.1.1) が (D.1.2) の下で積分される。

一方 (D.2.15) を丁寧に書いた表式

$$\lambda_{(\alpha)}^T \bar{h}_{(\alpha)u} = -\bar{f}_{0u} + \phi^T \bar{f}_u \quad (\text{D.3.5})$$

から

$$\lambda_{(\alpha)}^T = [-\bar{f}_{0u} + \phi^T \bar{f}_u] (\bar{h}_{(\alpha)u})^{-1} \quad (\text{D.3.6})$$

のように解かれる。(D.3.4), (D.3.6) を (D.2.7) に代入し、(D.2.9), (D.1.3) が満足されるように  $\phi(t), \nu$  が解かれ、再び (D.3.6) を用いて  $\lambda_{(\alpha)}$  が確定する。この  $\lambda_{(\alpha)}$  が条件 (D.2.18) を満足するように切換点  $t_{\alpha}$ , および各区間での  $h_{(\alpha)}$  の組み合わせを定めることが最適化問題を解くことの内容である。

\* 実際、切換時刻  $t_{\alpha}$  の1次微小量の変動によって (D.2.20) 第2辺に生ずる変動は2次以上の微小量でありうる。(D.4.9)参照。このとき  $\Delta J, \Delta T, \Delta x^0$  等は必ずしも2次以上の微小量ではない。

### D.4 切換点での条件

切換点  $t = t_{\alpha-1}$  の前後で

$$\begin{aligned} h_{(\alpha-1)} &= (h_{(\alpha-1)}^*, h_{(\cdot)}^T)^T \\ &= (h_{1(\alpha-1)}^*, h_{2(\alpha-1)}^*, \dots, h_{r(\alpha-1)}^*, h_{r+1(\cdot)}^*, \dots, \\ &\quad h_{m(\cdot)}^T)^T \\ &= 0; \quad t \leq t_{\alpha-1} \end{aligned} \quad (\text{D.4.1 a})$$

$$\begin{aligned} h_{(\alpha)} &= (h_{(\alpha)}^*, h_{(\cdot)}^T)^T \\ &= (h_{1(\alpha)}^*, h_{2(\alpha)}^*, \dots, h_{r(\alpha)}^*, h_{r+1(\cdot)}^*, \dots, h_{m(\cdot)}^T)^T \\ &= 0; \quad t > t_{\alpha-1} \end{aligned} \quad (\text{D.4.1 b})$$

であるとする。ただし  $h_{(\cdot)}$  は切換点前後で共通な  $(m-r)$  個の成分を表わし、また

$$h_{(\alpha-1)}^* \neq h_{(\alpha)}^* \quad (\text{D.4.2})$$

とする。定義によって、 $t = t_{\alpha-1}$  において

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_{(\alpha-1)}^* \\ \bar{h}_{(\cdot)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{h}_{(\alpha-1)u}^* \\ \bar{h}_{(\cdot)u} \end{bmatrix} \hat{u}(t_{\alpha-1}^-) = 0 \quad (\text{D.4.3 a})$$

$$\begin{bmatrix} \bar{h}_{(\alpha)}^* \\ \bar{h}_{(\cdot)} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \bar{h}_{(\alpha)u}^* \\ \bar{h}_{(\cdot)u} \end{bmatrix} \hat{u}(t_{\alpha-1}^+) = 0 \quad (\text{D.4.3 b})$$

であり、一般に

$$\hat{u}(t_{\alpha-1}^-) \neq \hat{u}(t_{\alpha-1}^+); \quad \alpha = 1, \dots, f \quad (\text{D.4.4})$$

である。 $\hat{u}(t_{\alpha-1}^{\pm})$  はともに (D.1.4) をみたすものであるから、 $t = t_{\alpha-1}$  において

$$\bar{h}_{(\alpha-1)}^* + \bar{h}_{(\alpha-1)u}^* \hat{u}(t_{\alpha-1}^+) < 0 \quad (\text{D.4.5 a})$$

$$\bar{h}_{(\alpha)}^* + \bar{h}_{(\alpha)u}^* \hat{u}(t_{\alpha-1}^-) < 0 \quad (\text{D.4.5 b})$$

である。

(D.2.15), (D.2.16) から  $t = t_{\alpha-1}$  において

$$\lambda_{(\alpha-1)}^T \bar{h}_{(\alpha-1)} = \lambda_{(\alpha)}^T \bar{h}_{(\alpha)} \quad (\text{D.4.6})$$

$$\lambda_{(\alpha-1)}^T \bar{h}_{(\alpha-1)u} = \lambda_{(\alpha)}^T \bar{h}_{(\alpha)u} \quad (\text{D.4.7})$$

である。(D.4.7) に  $\hat{u}(t_{\alpha-1}^{\pm})$  をかけて (D.4.6) と加えることにより、(D.4.3) を考慮して  $t = t_{\alpha-1}$  において

$$\begin{aligned} \lambda_{(\alpha-1)}^{*T} [\bar{h}_{(\alpha-1)}^* + \bar{h}_{(\alpha-1)u}^* \hat{u}(t_{\alpha-1}^+)] \\ = \lambda_{(\alpha)}^{*T} [\bar{h}_{(\alpha)}^* + \bar{h}_{(\alpha)u}^* \hat{u}(t_{\alpha-1}^-)] = 0 \end{aligned} \quad (\text{D.4.8})$$

が得られる。結局 (D.4.5), (D.2.18) を用いて

$$\lambda_{(\alpha-1)}^*(t_{\alpha-1}^-) = \lambda_{(\alpha)}^*(t_{\alpha-1}^+) = 0 \quad (\text{D.4.9})$$

であることが導かれる。もちろん  $\lambda_{(\alpha-1)}^*$ ,  $\lambda_{(\alpha)}^*$  はそれぞれ  $h_{(\alpha-1)}^*$ ,  $h_{(\alpha)}^*$  に対応する  $\lambda_{(\alpha-1)}$ ,  $\lambda_{(\alpha)}$  の  $r$  個の成分である。

特別な場合として、 $u$  の許容領域の二つの頂点が一点に退化するような点で切換が行なわれるとすると、(D.4.2) であるにもかかわらず (D.4.4) がなりたたず、

$$\hat{u}(t_{\alpha-1}^+) = \hat{u}(t_{\alpha-1}^-) \quad (\text{D.4.11})$$

であり、(D.4.5) の不等号は等号に変わる。したがって (D.4.9) の条件は必ずしも課せられない。この



ような事柄は,

$$(\bar{h}_{(\alpha-1)\mathbf{u}})^{-1}(\bar{h}_{(\alpha-1)*}) = (\bar{h}_{(\alpha)\mathbf{u}*})^{-1}(\bar{h}_{(\alpha)*}); \quad t = t_{\alpha-1} \quad (\text{D. 4. 11})$$

という  $r$  個の拘束を受けた  $x$  空間内の点に限って生ずる。

### D. 5 1 次の状態変数拘束問題

D. 1 節の基本問題に対し, さらに軌道が状態変数  $x$  のみに関する一方向きの拘束条件

$$s(x) \leq 0; \quad [0, t_f] \quad (\text{D. 5. 1})$$

をみたすことを要求する。ただしスカラ関数  $s$  は

$$\begin{aligned} h_{1(*)}(x, u) &= s(x) \\ &= s_x(x)f(x, u) \\ &= s_x(x)(\bar{f}(x) + \bar{f}_u(x)u) \\ &\equiv \bar{h}_{1(*)}(x) + \bar{h}_{1(*)\mathbf{u}}(x)u \end{aligned} \quad (\text{D. 5. 2})$$

とかくとき

$$\bar{h}_{1(*)\mathbf{u}}(x) \neq 0 \quad (\text{D. 5. 3})$$

であるようなものとする。

最適軌道は, 区間  $[t_{*-1}, t_*]$  のみにおいて

$$s(\hat{x}) = 0; \quad [t_{*-1}, t_*] \quad (\text{D. 5. 4})$$

を満たし, それ以外では  $s(\hat{x}) < 0$  とする。(D. 5. 4)

は,

$$s(\hat{x}(t_{*-1})) = 0 \quad \text{または} \quad s(\hat{x}(t_*)) = 0 \quad (\text{D. 5. 5 a})$$

$$\bar{h}_{1(*)}(\hat{x}) + \bar{h}_{1(*)\mathbf{u}}(\hat{x})\hat{u} = 0; \quad [t_{*-1}, t_*] \quad (\text{D. 5. 5 b})$$

と同値である。

(D. 5. 5 a) を積極的に指定するために, 未知定数  $(\mu_{*-1}, \mu_*)$  を用いて広義評価関数  $\mathcal{G}^* = \mathcal{G} + \mu_{*-1} \times s(x(t_{*-1})) + \mu_* s(x(t_*))$  を考える。

$$\begin{aligned} \Delta s^\alpha &\equiv s(x(t_\alpha)) - s(\hat{x}(t_\alpha)) \\ &= s_x(\hat{x}(t_\alpha))\Delta x^\alpha; \quad \alpha = * - 1, * \end{aligned} \quad (\text{D. 5. 6})$$

であることを考慮し, 随伴系  $\phi$  には  $t_{*-1}, t_*$  においてのみ不連続を許容するとして (D. 2. 3) を用いると,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{G}^* &= \sum_{\alpha=1}^f \int_{t_{\alpha-1}^+}^{t_\alpha^-} [H(\hat{x}, \hat{u}, \phi, \lambda_{(\alpha)}) - H(\hat{x}, u, \phi, \lambda_{(\alpha)})] dt \\ &\quad - [\phi(t_{*-1}^+) - \phi(t_{*-1}^-) - \mu_{*-1} s_x(\hat{x}(t_{*-1}))] \Delta x^{*-1} \\ &\quad - [\phi(t_*^+) - \phi(t_*^-) - \mu_* s_x(\hat{x}(t_*))] \Delta x^* \end{aligned} \quad (\text{D. 5. 7})$$

が得られる。もちろん, 条件 (D. 2. 7), (D. 2. 9) ~ (D. 2. 11) をみたすものとしている。ここで (D. 2. 8) の代わりに,

$$\phi(t_{*-1}^+) = \phi(t_{*-1}^-) + \mu_{*-1} s_x(\hat{x}(t_{*-1})) \quad (\text{D. 5. 8 a})$$

$$\phi(t_*^+) = \phi(t_*^-) + \mu_* s_x(\hat{x}(t_*)) \quad (\text{D. 5. 8 b})$$

を満たすように  $\phi$  が定められたとすると, やはり停留条件 (D. 2. 12) が必要である。

特に  $t = t_{*-1}$  の前後で (D. 2. 15) を適用し, (D. 5. 8 a) を用いて  $[\phi(t_{*-1}^+) - \phi(t_{*-1}^-)]$  を消去すれば, (D. 4. 7) の代わりに

$$\begin{aligned} \lambda_{(*-1)}^T \bar{h}_{(*-1)\mathbf{u}} &= \lambda_{(*)}^T \bar{h}_{(*)\mathbf{u}} - \mu_{*-1} (s_x \bar{f}_u)_{t=\hat{t}_{*-1}} \\ &= (\lambda_{1(*)} - \mu_{*-1}) \bar{h}_{1(*)\mathbf{u}} \\ &\quad + \sum_{\sigma=2}^m \lambda_{\sigma(*)} \bar{h}_{\sigma(*)\mathbf{u}} \end{aligned} \quad (\text{D. 5. 9})$$

が得られる。第3辺は (D. 5. 2) を用いた。同様に (D. 2. 16) からは (D. 4. 6) に対応して

$$\begin{aligned} \lambda_{(*-1)}^T \bar{h}_{(*-1)} &= \lambda_{(*)}^T \bar{h}_{(*)} - \mu_{*-1} (s_x \bar{f}_u)_{t=\hat{t}_{*-1}} \\ &= (\lambda_{1(*)} - \mu_{*-1}) \bar{h}_{1(*)} + \sum_{\sigma=2}^m \lambda_{\sigma(*)} \bar{h}_{\sigma(*)} \end{aligned} \quad (\text{D. 5. 10})$$

が得られる。(D. 5. 9), (D. 5. 10) を用いて (D. 4. 8) と同様の考察から,  $\lambda_{1(*)}(t_{*-1})$  以外については (D. 4. 9) が成り立つ。 $h_{1(*)}$  に対応する成分は,

$$[\lambda_{1(*)}(t_{*-1}) - \mu_{*-1}] [\bar{h}_{1(*)} + \bar{h}_{1(*)\mathbf{u}} \hat{u}(t_{*-1}^-)] = 0 \quad (\text{D. 5. 11})$$

をみたすことが要求される。軌道  $(\hat{x}, \hat{u})$  が  $t_{*-1}^-$  で滑らかに  $s(\hat{x}) = 0$  に入るときには (D. 5. 11) [ ] 内は 0 であるが, それ以外のときには条件

$$\lambda_{1(*)}(t_{*-1}) = \mu_{*-1} \quad (\text{D. 5. 12 a})$$

が要求される。同様にして,

$$\lambda_{1(*)}(t_*) = -\mu_* \quad (\text{D. 5. 12 b})$$

が必要である。 $\lambda_{1(*)}(t)$ ;  $[t_{*-1}, t_*]$  は停留条件 (D. 2. 15) から一義的に定まるから,

$$\lambda_{1(*)}(t_*) - \lambda_{1(*)}(t_{*-1}) = -(\mu_* + \mu_{*-1}) \quad (\text{D. 5. 13})$$

はある定まった値をとるが,  $\mu_{*-1}$  (もしくは  $\mu_*$ ) は任意であり, したがって  $[t_{*-1}, t_*]$  において  $\lambda_{1(*)}(t)$  は定数分だけ, また  $\phi(t)$  には  $s_x(\hat{x})$  に比例した量だけ, 不定性がある。

軌道  $(\hat{x}, \hat{u}; t_f)$  が上記の停留条件をみたすとき, そのまわりに作った任意の比較軌道について  $\Delta \mathcal{G}^* = 0$  なるゆえ, (D. 2. 19) 同様に

$$\begin{aligned} \Delta J + \nu^T \Delta T + \mu_{*-1} \Delta s^{*-1} + \mu_* \Delta s^* &= -\Delta I \\ &= -\sum_{\alpha=1}^f \int_{t_{\alpha-1}^+}^{t_\alpha^-} \lambda_{(\alpha)}^T h_{(\alpha)}(x, u) dt \end{aligned} \quad (\text{D. 5. 14})$$

である。特に右辺の区間  $\alpha = *$ , 第1要素については

$$\begin{aligned} \int_{t_{*-1}^+}^{t_*^-} \lambda_{1(*)}(t) h_{1(*)}(x, u) dt &= \int_{t_{*-1}^+}^{t_*^-} \lambda_{1(*)}(t) s(x) dt \\ &= \left[ \lambda_{1(*)}(t) s(x(t)) \right]_{t_{*-1}^+}^{t_*^-} - \int_{t_{*-1}^+}^{t_*^-} \dot{\lambda}_{1(*)}(t) s(x) dt \end{aligned} \quad (\text{D. 5. 15})$$

と書き直されるが, この第3辺, 境界項は, (D. 5. 12), (D. 5. 5 a) を考慮すれば  $[-\mu_* \Delta s^* - \mu_{*-1} \Delta s^{*-1}]$  とな

る。したがって (D.5.14) は

$$\Delta J + \nu^T \Delta T = \sum_{\alpha=1}^f (\alpha=*, \sigma=1) \int_{t_{\alpha-1}^+}^{t_{\alpha}^-} \lambda_{(\alpha)}^T(t) e_{(\alpha)}(t) dt - \int_{t_{*}^+}^{t_{*}^-} \lambda_{1(*)}(t) e^*(t) dt \quad (D.5.16)$$

とかかれる。ただし右辺  $\sum$  記号は  $\alpha=*, \sigma=1$  の場合のみを除外することを意味し、また  $e^*(t)$  は (D.5.1) の拘束条件を

$$s(x) + e^*(t) = 0; \quad [t_{*-1}, t_*] \quad (D.5.17)$$

と表現したときのスラック変数であって、 $e^*(t) \geq 0$  である。

(D.5.16) から、 $\alpha=*, \sigma=1$  を除いて局所最適条件 (D.2.18) が要求されること、および

$$\lambda_{1(*)}(t) \leq 0; \quad [t_{*-1}, t_*] \quad (D.1.18)$$

が必要なこと、が導かれる。

### D.6 $m'(\alpha) < m$ の場合

制御変数がすべて線型に含まれているために、 $m'(\alpha) < m$  のときにはいわゆる特異制御<sup>22), 23)</sup> が最適軌道の一部を形成しうる。 $m'(\alpha) = 0$  ならば“全体として特異な制御”であり、そうでなければ“一部特異な制御”である。以下では簡単のため

$$m'(\alpha) = m - 1 \quad (D.6.1)$$

の場合のみ考える。

$$\text{rank}[h_{(\alpha), u}] = m'(\alpha) < m \quad (D.6.2)$$

なるゆえ、 $m$  次元の最適制御  $\hat{u}$  は (D.3.4) のようには解かれない。その代わり、 $m'(\alpha)$  個の乗数  $\lambda_{(\alpha)}$  に

対する  $m$  個の停留条件 (D.3.5) から  $u, \lambda_{(\alpha)}$  を含まない一つの関係

$$r(x, \phi) \equiv \begin{vmatrix} \bar{h}_{(\alpha), u}(x) \\ -\bar{f}_{0u}(x) + \phi^T \bar{f}_u(x) \end{vmatrix} = 0 \quad (D.6.3)$$

が得られる。最適軌道が存在するとすれば、それは (D.6.3) の定める曲面内にあるから、それを微分して得られる関係

$$\begin{aligned} \dot{r}(x, \phi) &= r_x f(x, u) - r_\phi H_\phi^T(x, u, \phi, \lambda_{(\alpha)}) \\ &= 0; \quad [t_{\alpha-1}, t_\alpha] \end{aligned} \quad (D.6.4)$$

が必要である。(D.6.4) は (D.3.3) の不足分を補充する関係であるから、それらから解かれた  $u$  は停留条件はみたしている。

$m'(\alpha)$  個の局所最適条件 (D.2.18) が満たされていたとしても、残りの 1 自由度についての最適性は一般に不明である。特別な場合として、(D.3.3) から  $m'(\alpha) = m - 1$  個の  $u$  の成分が解かれ、一つ残った  $u_m$  が (D.6.4) から単独に解かれうる場合を考えれば、制御変数の次元が 1 の場合の判定条件<sup>23)</sup>が適用できる。すなわち

$$\frac{\partial}{\partial u_m} \left[ \frac{d^2}{dt^2} \left( \frac{\partial H}{\partial u_m} \right) \right] \geq 0^* \quad (D.6.5)$$

ならばその軌道は  $J_{\min}$  を与える。

\* 文献 22 では、いわゆる“最小原理”的な符号を用いている。したがって、“最大原理”的な符号を用いている本付録では不等号が逆向きとなる。

- TR-234 Green 関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算  
A Calculation of Temperature Distribution with applying Green Function to Two-Dimensional Laplace's equation 1971年1月 西村 英明
- TR-235 自動着陸予備実験  
(1) 電波高度計の性能試験  
Preliminary Experiments for Automatic Landing  
(1) On the Performance Tests of Radio Altimeters 1971年4月 樋口一雄, 堀川勇壮  
森幹彦, 小川敏一  
真柳光美, 渡辺頭  
名越孝行
- TR-236T Small-Strain Deformations Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials, Part I—Constitutive Equation— 1971年6月 Tastuzo KOGA
- TR-237 自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しよう実験  
Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristics of FFM-10 Model 1971年4月 河崎俊夫, 塙武敏  
斎藤秀夫, 高島一明  
河本巖
- TR-238 リフトジェットエンジン JR 100H の動特性について  
Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR 100H 1971年5月 西尾健二, 遠藤征紀  
杉山七契, 越沼威  
大畑敏美
- TR-239 昇華アブレーションの直接解法  
A Direct Calculation of Sublimating Ablation 1971年6月 久保田弘敏
- TR-240T A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems —Part (I) —Theoretical Basis 1971年7月 Masao EBIHARA
- TR-241 YS-11 A-500/600 型主翼疲れ試験  
(1 セーフライフ試験荷重と試験方式)  
Full-Scale Fatigue Test of YS-11 A-500/600 Turboprop Transport Wing (1 Safe-Life Fatigue Test Loads and Test Method) 1971年7月 竹内和之, 野原利雄  
朝田洋雄
- TR-242 熱線による3次元平均速度ベクトルとレイノルズ応力の測定  
Measurement of Three-Dimensional mean Velocity Vector and Reynolds stress by Single Rotatable Hot-wire 1971年7月 林良生, 中谷輝臣
- TR-243 揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法 I. その理論的基礎  
A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems—Part 1—Theoretical Basis 1971年7月 海老原正夫
- TR-244 超音速風洞における動安定微係数の測定  
Measurements of Dynamic Stability Derivatives in Supersonic Blowdown Wind Tunnel 1971年7月 高島一明, 榊原盛三  
関根英夫

## 航空宇宙技術研究所報告 245号

昭和46年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)☎182

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川 2~27~12