

UDC 539.384 :
692.73.023.4

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-246

梁の大変形問題の解析について

泉 日出夫

1971年11月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- T R-225 NAL-35 DT 型ロケットの構造試験
Results of Structural Experiments on NAL-35 DT Rocket Vehicle 1970年11月 ロケット構造研究グループ
- T R-226 薄い片持後退角翼の遷音速フラッタ特性におよぼす集中質量の位置の影響について
Some Effects of Systematically Varied Location of One Concentrated Mass on Transonic Flutter Characteristics of Sweptback Thin Cantilever Wings 1970年11月 中井 暎一, 森田 甫之
高木 俊朗
- T R-227 高負荷燃焼器の空気孔からの流れについて(II)
—二孔の実験および簡単な解析方法—
Investigation of Air Stream from Combustor-Liner Air-Entry Holes (II)
—Experiments with Paired Air-Entry Holes and A Numerical Analysis— 1970年12月 相波 哲朗, 井上 真幸
- T R-228 自由飛行模型 FFM-10 の運動特性と飛しょう試験におけるデータ処理法
Flight Dynamics of Free-Flight Model FFM-10 and Data Analysis Method for Free-flight Tests 1970年12月 高島 一明
- T R-229 単発 STOL 実験機 (FA-200 XS) について
Development of the FA-200 XS Experimental-Airplane 1970年12月 飛行実験部
- T R-230 アナログトルク平衡方式による浮動振り型加速度計の研究
Study on the Analog Torque Rebalance Floated Pendulum Type Accelerometers for Guidance and Control Applications 1971年 1月 大月 正男, 鈴木 孝雄
円居 繁治
- T R-231 高温タービンノズル翼二次元翼列試験
(第1報対流冷却翼の実験結果について)
Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle
(Part I On the Experimental Results of a Convection-Cooled Blade) 1971年 1月 吉田 豊明, 高原 北雄
能瀬 弘幸, 井上 重雄
三村 富嗣雄, 臼井 弘
- T R-232 高温タービンノズル翼二次元翼列試験
(第2報対流冷却翼の数値計算およびアナログ法による翼表面温度分布について)
Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle
(Part II On the Temperature Distributions of a Convection-Cooled Blade by Numerical Calculation and Analog Simulation Test) 1971年 1月 吉田 豊明, 高原 北雄
能瀬 弘幸, 井上 重雄
三村 富嗣雄, 臼井 弘
- T R-233 PSD 法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点
Studies on PSD Method to Aircraft Structural Design for Atmospheric Turbulence 1971年 1月 竹内 和之, 山根 皓三郎
- T R-234 Green 関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算
A Calculation of Temperature Distribution with Applying Green Function to Two-Dimensional Laplace's equation 1971年 1月 西村 英明
- T R-235 自動着陸予備実験
(1) 電波高度計の性能試験
Preliminary Experiments for Automatic Landing
(1) On the Performance Tests of Radio Altimeters 1971年 4月 樋口 一雄, 堀川 勇壮
森 幹彦, 小川 鑛一
真 柳光美, 渡辺 顕
名 越 孝行

梁の大変形問題の解析について*

泉 日出 夫**

On Analysis of Large Deformation Problems of Beam

By Hideo IZUMI

Generally, stiffness matrices in finite element procedure are being derived from the principle of virtual work. However, if basic differential equations are given, the stiffness matrices may be obtained from Galerkin's method. And in some cases, derivation of stiffness matrices from Galerkin's method is much more easier than that from the principle of virtual work.

In this study, finite element solution procedure was derived for large deformation problems of compressible beam by incremental theory and Galerkin's method. Numerical solutions were obtained for two cases, (1) postbuckling responses of axially loaded beam, and (2) load-deflection relationships of beam subjected to axial load and end moment. First of all, small initial deflection must be assumed for postbuckling problem. In this study, the eigen function for linear buckling theory were used as the initial deflection. Numerical solutions were compared with separate solutions by shooting method and linear elastic theory. Good results were obtained.

1. まえがき

構造解析に盛んに用いられている有限要素法においては、剛性マトリックスは、一般には、仮想仕事の原理によって求められている。しかしながら、基礎方程式(微分方程式)が与えられている場合には、ガラーキソ法によっても剛性マトリックスは求められる³⁻⁵⁾。そして場合によっては、この方法を用いると剛性マトリックスの導出がより簡便になる。

本報告では、梁の大変形問題の一つである梁の Postbuckling と、さらに梁の両端にモーメントが作用したときの問題を解いてその実用性を確かめてみた。増分法^{2),7),8)}を適用して式を線型化することは、従来と変わらないが、このようにして線型化された式にガラーキソ法を用いて剛法マトリックスを求めた。なお、Postbuckling の場合には、始めに小さな初期撓みを仮定する必要があるが、本報告では、この初期撓みとして、線型の座屈理論⁶⁾から得られる固有関数に適当な定数を乗じたものを使用した。これらの数値計算の結果は、Shooting Method によって、すでに得られている結果¹⁾および線型理論による解⁶⁾と比較して、良い

結果が得られたので報告する。

2. 記号

- A : 梁の断面積
- a_{ij} : 補間関数の係数
- c : 無次元定数 $= I/AL^3$
- E : ヤング率
- I : 梁の断面二次モーメント
- L : 変形前の梁の全長
- l_k : k 番目の要素の長さ
- M : 曲げモーメント
- \bar{M} : 無次元曲げモーメント $= Ml_k/EI$
- M_0 : 梁の両端に作用するモーメント
- N : 梁の断面に作用する軸力
- P : 梁の両端に作用する外力
- \bar{P} : 無次元力 $= Pl_k^3/EI$
- P_B : オイラーの座屈荷重
- P_i : 増分法の i 段階における外力
- R : 梁の撓みの曲率半径
- S : 梁の断面に作用する剪断力
- s : 梁の図心に沿う距離

* 昭和 46 年 8 月 6 日 受付

** 機体第一部

- \bar{x} : x の無次元表示
 ξ : x 軸方向の変位
 η : y 軸方向の変位
 δ : 梁の右端の x 軸方向の変位
 Δ : 梁の中心の y 軸方向の変位
 ϵ : 歪
 ϵ_0 : 梁の中心線の歪
 θ : 梁の撓み角
 σ : 応力
 λ_0 : 梁の微小部分の変形前の長さ
 λ : 梁の微小部分の変形後の長さ
 θ_i : i 段階での梁の撓み角
 $\Delta\theta_i$: i 段階での撓み角の増分
 ΔP_i : i 段階での外力の増分

3. 基礎方程式¹⁾

いま、軸方向に伸縮性のある梁を考える。ただし、梁の断面の形状、したがって、その断面積 A は変形後も不変とする。また、変形前に平面であった梁の断面は変形後も平面を保つものと仮定する。座標は図1に示すように、梁の断面の図心の位置 C をとおるように選ぶ。図1に示したような梁の微小部分(長さ λ_0) を考えると、図2に示すように、長さ λ_0 の微小部分は、変形後長さ λ に変わるから、この微小部分の歪 ϵ は、次のようになる。

$$\epsilon = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} \quad (3.1)$$

ここで、 λ_0 および λ は、図1および図2から、

$$\left. \begin{aligned} \lambda_0 &= dx \\ \lambda &= (R-y)d\theta \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

と表わせるから(3.1)式は、

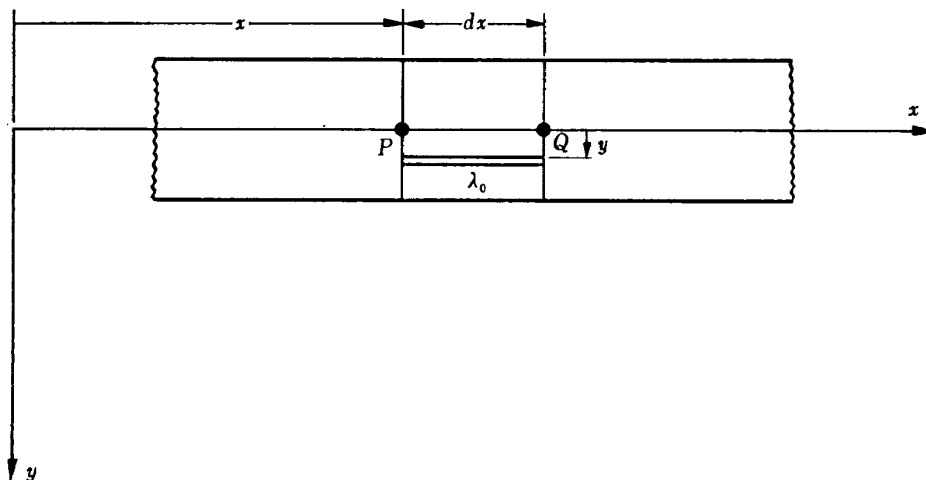


図1 変形前の梁

$$\epsilon = \frac{(R-y)d\theta - dx}{dx} \quad (3.3)$$

となる。

また、図2から

$$\begin{aligned} ds &= dx(1 + \epsilon_0) \\ ds &= R d\theta \end{aligned}$$

の関係があるから

$$d\theta = \frac{dx}{R} (1 + \epsilon_0) \quad (3.4)$$

となる。したがって、(3.3)式および(3.4)式から、次のような関係が得られる。

$$\epsilon = \epsilon_0 - y \frac{d\theta}{ds} (1 + \epsilon_0) \quad (3.5)$$

また、図2に示した微小部分 λ の断面に作用する応力 σ は

$$\sigma = E\epsilon = E\epsilon_0 - Ey \frac{d\theta}{ds} (1 + \epsilon_0) \quad (3.6)$$

となるから、梁の断面に作用する軸力 N は

$$N = \iint_A \sigma dA = \iint_A \left[E\epsilon_0 - Ey \frac{d\theta}{ds} (1 + \epsilon_0) \right] dA$$

となる。すなわち

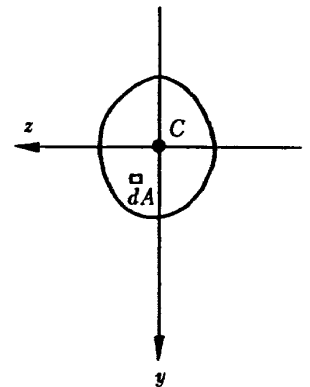
$$N = E\epsilon_0 A$$

あるいは、

$$\epsilon_0 = \frac{N}{EA} \quad (3.7)$$

一方、梁の断面に作用するモーメント M は

$$\begin{aligned} M &= - \iint_A \sigma y dA \\ &= - \iint_A \left[E\epsilon_0 y - Ey^2 \frac{d\theta}{ds} (1 + \epsilon_0) \right] dA \end{aligned}$$



すなわち

$$M = EI \frac{d\theta}{ds} (1 + \epsilon_0)$$

ここで

$$I = \iint_A y^2 dA$$

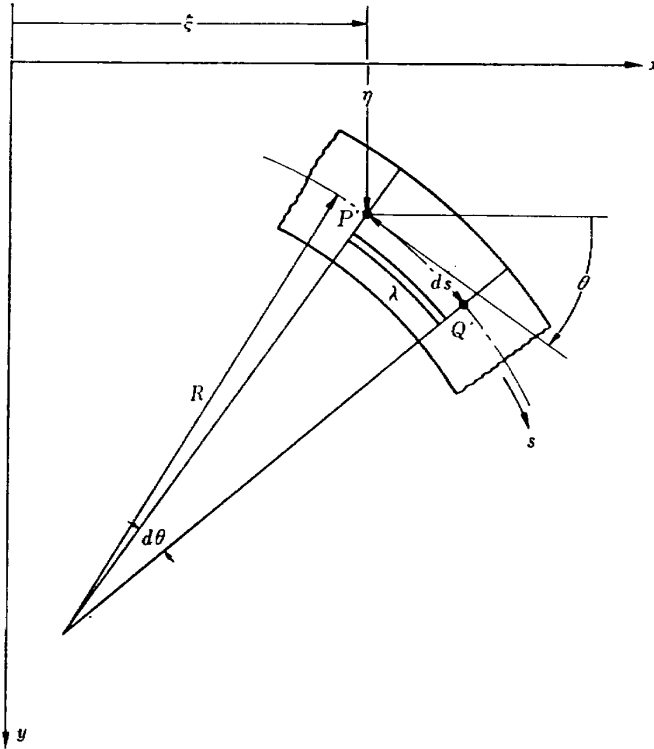


図2 変形後の梁

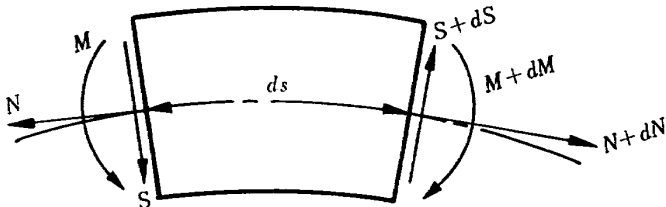


図3 梁の微小部分の平衡状態

したがって、梁の曲率 $d\theta/ds$ は

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI(1 + \epsilon_0)}$$

あるいは、

$$\frac{d\theta}{ds} = \frac{M}{EI \left(1 + \frac{N}{EA}\right)} \quad (3.8)$$

となる。

図1, 図2および(3.7)式から

$$\left. \begin{aligned} d\xi &= ds \cos \theta \\ d\eta &= ds \sin \theta \\ ds &= dx \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \end{aligned} \right\} \quad (3.9)$$

のような関係があるから(3.8)式および(3.9)式から、次のような三つの式が得られる。

$$\frac{d\theta}{dx} = \frac{M}{EI} \quad (3.10)$$

$$\frac{d\xi}{dx} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \cos \theta \quad (3.11)$$

$$\frac{d\eta}{dx} = \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \sin \theta \quad (3.12)$$

これらの3個の式が、梁の伸縮性を考慮した場合に基礎となる式である。

ここでは、図4に示したような断面が一樣な両端単純支持の梁を考えることにする。図から明らかのように梁の任意の点のモーメントを考えると(3.10)式は次のようになる。

$$EI \frac{d\theta}{dx} = -M_0 - P\eta$$

上式の両辺を x について一回微分すると

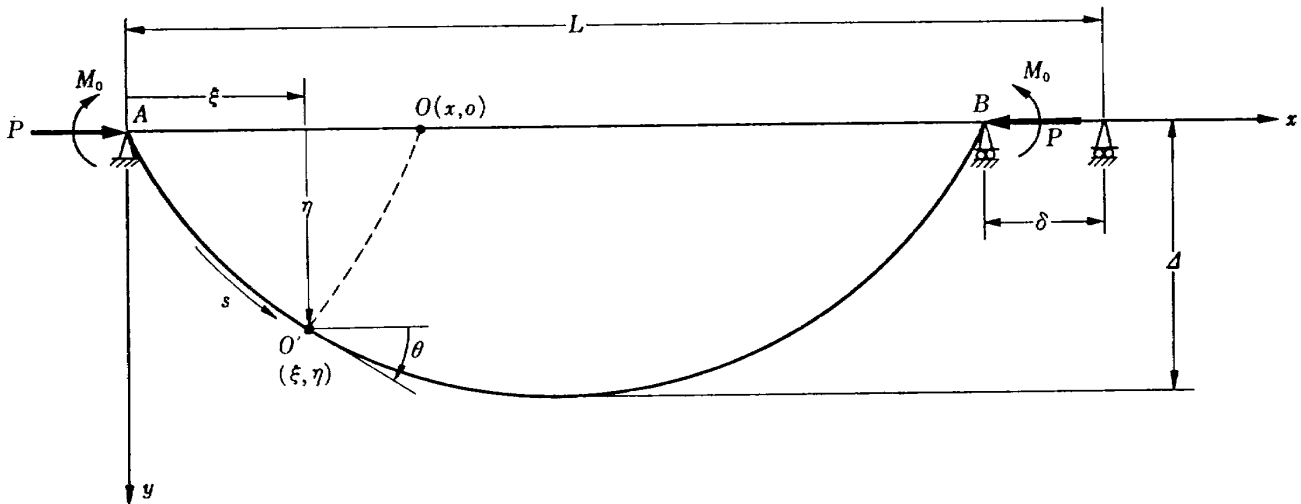


図4 両端単純支持梁の座標系

$$EI \frac{d^3\theta}{dx^3} + P \frac{d\eta}{dx} = 0 \quad (3.13)$$

となる。

上式は、さらに(3.12)式の関係を使って、

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} + \frac{P}{EI} \left(1 + \frac{N}{EA}\right) \sin\theta = 0$$

図4から梁の断面に作用する軸力 N は、 $N = -P \cos\theta$ であるから、上式は、結局次のようになる。

$$\frac{d^3\theta}{dx^3} + \frac{P}{EI} \sin\theta - \frac{1}{2} \frac{P}{(EI)(EA)} \sin 2\theta = 0 \quad (3.14)$$

上式が図4に示したような単純支持された一様な断面の梁の微分方程式となる。

この場合の境界条件は、

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\theta}{dx} &= -\frac{M_0}{EI}; & x=0, L \\ \eta &= 0; & x=0, L \end{aligned} \right\} \quad (3.15)$$

となる。

4. 剛性マトリックス

いま、図5に示すように、梁を $n-1$ 個の要素に分割する。 x_k を梁の変形前の節点 k の x 座標として、 \bar{x} を次のように定義する^{4),5)}。

$$\bar{x} = \frac{x - x_k}{l_k} \quad (4.1)$$

梁の要素に対する微分方程式は、(3.14)式と上式とを使用して、次のように表わされる。

$$\frac{d^3\theta}{d\bar{x}^3} + \bar{P} \sin\theta - \frac{1}{2} c \left(\frac{L}{l_k}\right)^2 \bar{P}^2 \sin 2\theta = 0 \quad (4.2)$$

ここで

$$\bar{P} = \frac{Pl_k^2}{EI}, \quad c = \frac{I}{AL^3}$$

上式で特に $c = I/AL^3 = 0$ の場合には、上式の第三項が無くなり、梁の圧縮性を無視した場合の式となる。

ここで(4.2)式に増分法を適用して式を線型化する。増分の i 段階での \bar{P} 、 θ をそれぞれ \bar{P}_i 、 θ_i で表わし、 $\Delta\bar{P}_i$ 、 $\Delta\theta_i$ をそれぞれ i 段階における \bar{P} 、 θ の増分とする。また、増分の i 段階では $i-1$ 段階での \bar{P}_{i-1} 、 θ_{i-1} はすでに計算された既知の定数となるから、このような定数を \bar{P}_{i-1}^* 、 θ_{i-1}^* のように*印をつけて表わすことにする。すなわち

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}_i &= \bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i \\ \theta_i &= \theta_{i-1}^* + \Delta\theta_i \end{aligned} \right\} \quad (4.3)$$

θ の増分 $\Delta\theta_i$ が充分小さくなるように、荷重の増分 $\Delta\bar{P}_i$ を選べば、 $\sin\theta_i$ は近似的に次のように表わせる。

$$\sin\theta_i \doteq \sin\theta_{i-1}^* + \cos\theta_{i-1}^* \cdot \Delta\theta_i$$

上式を利用して(4.2)式を表わすと、

$$\begin{aligned} & \frac{d^3(\theta_{i-1}^* + \Delta\theta_i)}{d\bar{x}^3} + (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)(\sin\theta_{i-1}^* + \cos\theta_{i-1}^* \cdot \Delta\theta_i) \\ & - \frac{1}{2} c \left(\frac{L}{l_k}\right)^2 (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \\ & \times (\sin 2\theta_{i-1}^* + 2 \cos 2\theta_{i-1}^* \cdot \Delta\theta_i) = 0 \end{aligned}$$

すなわち、

$$\begin{aligned} & \frac{d^3\Delta\theta_i}{d\bar{x}^3} + \left[(\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i) \cos\theta_{i-1}^* \right. \\ & \left. - c \left(\frac{L}{l_k}\right)^2 (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \cos 2\theta_{i-1}^* \right] \Delta\theta_i \\ & + \left[(\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i) \sin\theta_{i-1}^* - \frac{1}{2} c \left(\frac{L}{l_k}\right)^2 \right. \\ & \left. \times (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \sin 2\theta_{i-1}^* \right] = 0 \quad (4.4) \end{aligned}$$

となる。

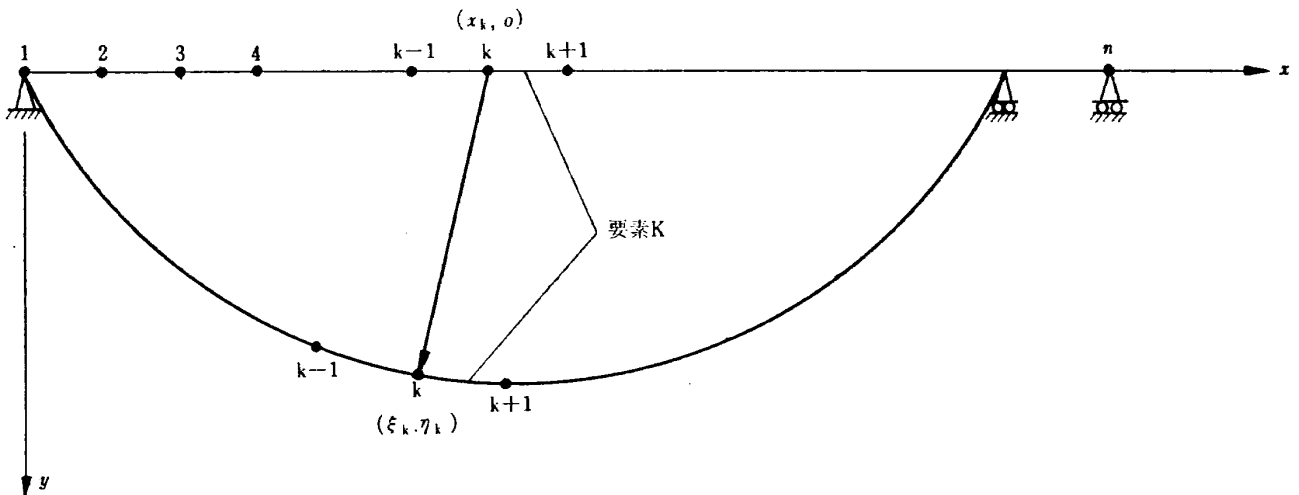


図5 梁の節点 k の変形前および変形後の座標

いま、隣接する要素に共通な節点において、梁の撓み角と、その微係数が一致するように、 $\Delta\theta_i(\bar{x})$ の近似関数 $\Delta\theta_{ei}(\bar{x})$ を次のように表わす⁴⁾。

$$\begin{aligned} \Delta\theta_{ei}(\bar{x}) = & \phi_1^k(\bar{x})\Delta\delta_{i_1}^k + \phi_2^k(\bar{x})\Delta\delta_{i_2}^k \\ & + \phi_3^k(\bar{x})\Delta\delta_{i_3}^k + \phi_4^k(\bar{x})\Delta\delta_{i_4}^k \end{aligned} \quad (4.5)$$

ただし、 $\Delta\delta_{i_1}^k$ 、 $\Delta\delta_{i_2}^k$ 、 $\Delta\delta_{i_3}^k$ および $\Delta\delta_{i_4}^k$ は、それぞれ節点 \bar{x}_k および \bar{x}_{k+1} における梁の撓み角の増分およびその微係数を表わすものとする。すなわち、

$$\begin{aligned} \Delta\delta_{i_1}^k & \equiv \Delta\theta_i(\bar{x}_k), & \Delta\delta_{i_2}^k & \equiv \frac{d\Delta\theta_i(\bar{x}_k)}{d\bar{x}} \\ \Delta\delta_{i_3}^k & \equiv \Delta\theta_i(\bar{x}_{k+1}), & \Delta\delta_{i_4}^k & \equiv \frac{d\Delta\theta_i(\bar{x}_{k+1})}{d\bar{x}} \end{aligned}$$

上述のような節点での連続性から、補間関数 $\phi_n^k(\bar{x})$ ($n=1, 2, 3, 4$) は、表1のような条件を満足するように選ばなければならない。

ここで、 $\Delta\theta_i(\bar{x})$ を近似関数 $\Delta\theta_{ei}(\bar{x})$ で置き換えると、(4.4)式は、次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d^2\Delta\theta_{ei}}{d\bar{x}^2} + & \left[(\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i) \cos \theta_{ei-1}^* \right. \\ & - c \left(\frac{L}{l_k} \right)^2 (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \cos 2\theta_{ei-1}^* \left. \right] \Delta\theta_{ei} \\ & + \left[(\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i) \sin \theta_{ei-1}^* \right. \\ & \left. - \frac{1}{2} c \left(\frac{L}{l_k} \right)^2 (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \sin 2\theta_{ei-1}^* \right] = f \end{aligned} \quad (4.6)$$

ここで f は近似によって生じた誤差である。

いま、上式にガラーキン法を適用すると、

$$\int_0^1 \phi_n^k(\bar{x}) f d\bar{x} = 0 \quad (4.7)$$

すなわち、

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_n^k(\bar{x}) \left[\frac{d^2\Delta\theta_{ei}}{d\bar{x}^2} + \left\{ (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i) \cos \theta_{ei-1}^* \right. \right. \\ \left. \left. - c \left(\frac{L}{l_k} \right)^2 (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \cos 2\theta_{ei-1}^* \right\} \Delta\theta_{ei} \right. \\ \left. + \left\{ (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i) \sin \theta_{ei-1}^* \right. \right. \\ \left. \left. - \frac{1}{2} c \left(\frac{L}{l_k} \right)^2 (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \sin 2\theta_{ei-1}^* \right\} \right] d\bar{x} = 0 \end{aligned} \quad (4.8)$$

表1 $\phi_n^k(\bar{x})$ の満足すべき条件

| \bar{x} | ϕ_1^k | ϕ_2^k | ϕ_3^k | ϕ_4^k | $d\phi_1^k/d\bar{x}$ | $d\phi_2^k/d\bar{x}$ | $d\phi_3^k/d\bar{x}$ | $d\phi_4^k/d\bar{x}$ |
|-----------|------------|------------|------------|------------|----------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |

上式の第一項は、部分積分により

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{d^2\Delta\theta_{ei}}{d\bar{x}^2} \phi_n^k(\bar{x}) d\bar{x} &= \left. \frac{d\Delta\theta_{ei}}{d\bar{x}} \phi_n^k(\bar{x}) \right]_0^1 \\ & - \int_0^1 \frac{d\Delta\theta_{ei}}{d\bar{x}} \frac{d\phi_n^k}{d\bar{x}} d\bar{x} \\ &= \left. \frac{d\Delta\theta_{ei}}{d\bar{x}} \phi_n^k(\bar{x}) \right]_0^1 - \sum_{m=1}^4 \Lambda_{mn}^k \Delta\delta_{im}^k \end{aligned}$$

ここで

$$\Lambda_{mn}^k = \int_0^1 \frac{d\phi_m^k}{d\bar{x}} \frac{d\phi_n^k}{d\bar{x}} d\bar{x}$$

また、第二項および第三項は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[(\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i) \cos \theta_{ei-1}^* - c \left(\frac{L}{l_k} \right)^2 \right. \\ \left. \times (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \cos 2\theta_{ei-1}^* \right] \Delta\theta_{ei} \cdot \phi_n^k(\bar{x}) d\bar{x} \\ = \sum_{m=1}^4 \bar{\Lambda}_{imn}^k \Delta\delta_{im}^k \end{aligned}$$

ここで、

$$\begin{aligned} \bar{\Lambda}_{imn}^k = \int_0^1 \left[(\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i) \cos \theta_{ei-1}^* \right. \\ \left. - c \left(\frac{L}{l_k} \right)^2 (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \cos 2\theta_{ei-1}^* \right] \phi_m^k \phi_n^k d\bar{x} \end{aligned}$$

第三項は

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left[(\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i) \sin \theta_{ei-1}^* - \frac{1}{2} c \left(\frac{L}{l_k} \right)^2 \right. \\ \left. \times (\bar{P}_{i-1}^* + \Delta\bar{P}_i)^2 \sin 2\theta_{ei-1}^* \right] \phi_n^k d\bar{x} = \Gamma_{in}^k \end{aligned}$$

したがって、(4.8)式は、次のように表わせる。

$$\left. \frac{d\Delta\theta_{ei}}{d\bar{x}} \phi_n^k(\bar{x}) \right]_0^1 - \sum_{m=1}^4 (\Lambda_{mn}^k - \bar{\Lambda}_{imn}^k) \Delta\delta_{im}^k + \Gamma_{in}^k = 0 \quad (4.9)$$

また、(3.10)式から、次のような関係があるから

$$\frac{d\theta_i}{d\bar{x}} = \frac{d(\theta_{i-1}^* + \Delta\theta_i)}{d\bar{x}} = \frac{d\Delta\theta_i}{d\bar{x}} = \frac{M_i l_k}{EI}$$

すなわち、

$$\frac{d\Delta\theta_{ei}}{d\bar{x}} = \frac{M_i l_k}{EI}$$

となる。ゆえに(4.9)式は、近似的に次のようになる。

$$\sum_{m=1}^4 (A_{mn}^k - \bar{A}_{imn}^k) \Delta \delta_{im}^k = \bar{M}_i \phi_n^k(\bar{x}) \Big|_0^1 + \Gamma_{in}^k \quad (4.10)$$

ここで、

$$\bar{M}_i = \frac{M_{il}^k}{EI}$$

したがって、増分の i 段階における梁の要素 k の剛性方程式は、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} A_{11}^k - \bar{A}_{i11}^k & A_{12}^k - \bar{A}_{i12}^k & A_{13}^k - \bar{A}_{i13}^k & A_{14}^k - \bar{A}_{i14}^k \\ A_{21}^k - \bar{A}_{i21}^k & A_{22}^k - \bar{A}_{i22}^k & A_{23}^k - \bar{A}_{i23}^k & A_{24}^k - \bar{A}_{i24}^k \\ A_{31}^k - \bar{A}_{i31}^k & A_{32}^k - \bar{A}_{i32}^k & A_{33}^k - \bar{A}_{i33}^k & A_{34}^k - \bar{A}_{i34}^k \\ A_{41}^k - \bar{A}_{i41}^k & A_{42}^k - \bar{A}_{i42}^k & A_{43}^k - \bar{A}_{i43}^k & A_{44}^k - \bar{A}_{i44}^k \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} \Delta \delta_{i1}^k \\ \Delta \delta_{i2}^k \\ \Delta \delta_{i3}^k \\ \Delta \delta_{i4}^k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\bar{M}_i + \Gamma_{i1}^k \\ \Gamma_{i2}^k \\ \Gamma_{i3}^k \\ \bar{M}_i + \Gamma_{i4}^k \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

5. 数値計算

先に示した(4.5)式の補間関数 $\phi_n^k(\bar{x})$ ($n=1, 2, 3, 4$) としては、次のような3次の多項式を用いた^{3), 4)}。

$$\phi_n^k(\bar{x}) = a_{n1} + a_{n2}\bar{x} + a_{n3}\bar{x}^2 + a_{n4}\bar{x}^3 \quad (5.1) \\ (n=1, 2, 3, 4)$$

上式の a_{n1} , a_{n2} , a_{n3} および a_{n4} は、表1の条件を用いて、表2に示すような値に計算される。

また、梁の各要素の長さは、梁の全長の $1/20$ として荷重の増分 $\Delta P/P_B$ は 0.04 とした。ここで P_B はオイラーの座屈荷重で $P_B = \pi^2 EI/L^2$ (両端単純支持の場合) である。

ここでは、数値計算例として 1. Postbuckling, 2. 梁の両端に x 軸方向の圧縮力 P と、モーメント M_0 が作用したときの荷重と撓みとの関係について取り扱った。Postbuckling については、まず最初に初期撓みを

表2 a_{mn} の値

| $m \backslash n$ | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------|---|---|----|----|
| 1 | 1 | 0 | -3 | 2 |
| 2 | 0 | 1 | -2 | 1 |
| 3 | 0 | 0 | 3 | -2 |
| 4 | 0 | 0 | -1 | 1 |

仮定する必要がある。撓みが小さいときには、線型理論で近似できるはずであるから、ここでは、初期撓みとして、線型の座屈理論から得られる固有関数 $\theta(x) = A \cos \pi x/L$ を用いた。この式で A は任意の値をとることができるが、 A の値としては、できるだけ小さい方がよい。しかしあまり小さすぎると、剛性マトリックスの要素の値が小さくなりすぎて、数値計算上困難を生ずる場合があるので、 $C=0.0$ (すなわち梁の圧縮性の影響を無視した場合) および $C=0.01$ の場合には $A=0.5$ すなわち $\theta(x)=0.5 \cos \pi x/L$, $C=0.02$ の場合には、 $A=1.25$ すなわち $\theta(x)=1.25 \pi x/L$ とした。梁の右端 B の x 軸方向の変位 δ および梁の midpoint の y 軸方向の撓み Δ は、それぞれ先に示した(3.11)式および(3.12)式の関係を用いて計算したものである。

軸力 N は $N = -P \cos \theta$ であるから、これらの式は、次のようになる。

$$\frac{d\xi}{dx} = \left(1 - \frac{P}{EA} \cos \theta\right) \cos \theta \\ \frac{d\eta}{dx} = \left(1 - \frac{P}{EA} \cos \theta\right) \sin \theta$$

したがって、梁の右端 B における x 軸方向の変位 δ は

$$\delta = \int_{x=0}^{x=L} \left(\frac{d\xi}{dx}\right) dx = \int_{x=0}^{x=L} \left(1 - \frac{P}{EA} \cos \theta\right) \cos \theta dx$$

すなわち

$$\delta/L = \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1} \left[1 - c \left(\frac{L}{l_k}\right)^2 \bar{P} \cos \theta\right] \cos \theta d\bar{x} \quad (5.1)$$

また、梁の midpoint の y 軸方向の撓み Δ は

$$\Delta = \int_{x=0}^{x=L/2} \left(\frac{d\eta}{dx}\right) dx = \int_{x=0}^{x=L/2} \left[1 - \frac{P}{EA} \cos \theta\right] \sin \theta dx$$

すなわち

$$\Delta/L = \int_{\bar{x}=0}^{\bar{x}=1/2} \left[1 - c \left(\frac{L}{l_k}\right)^2 \bar{P} \cos \theta\right] \sin \theta d\bar{x} \quad (5.2)$$

となる。

上に示した(5.1)式および(5.2)式の δ/L および Δ/L はシンプソンの公式により数値積分を行なって求めた。

δ/L については、積分領域を20等分割で、 Δ/L は、積分領域を10等分割で計算した。図6, 7および8に示した計算値は、計算に使用した x 軸方向の圧縮力 P の増分 $\Delta P/P_B = 0.04$ を、そのままの間隔でプロットしたものである。図6に示した Postbuckling の問題では、 $C=0.0, 0.01, 0.02$ の各場合について、すでに Huddleston によって得られている Shooting Method による結果¹⁾と比較して図に示した。図7は、さらに

梁の両端にモーメント $M_0/P_E L=0.1$ が作用した場合について $C=0.0, 0.01, 0.02$ の各場合の結果を線型理論による値と比較して図示したものである。また、図8は、 $C=0.0$ のとき、梁の両端に作用するモーメント $M_0/P_E L=0.05, 0.10, 0.15$ の各場合についての結果で、それぞれ線型理論による結果と比較してある。

6. あとがき

図6から明らかなように Shooting Method による結果と、ここで行なった有限要素法による結果とは、きわめて、良く一致している。図7および図8には、線型理論によるものと比較して示したが、図6の結果から推測して良い値が出ているものと思われる。

図6において、荷重 P の増分の第2段階での計算

値だけが、他の段階のそれに比べて、かけ離れている。ここで行なった増分法では、撓みの値は、各段階での撓みの増分を加算したものであるから、いずれかの段階で悪い値が出れば、それ以後の段階では、この値に影響されるものと考えられる。しかしながら、図6の Postbuckling では、増分の第2段階の値を除いては良い値が出ているのに、この第2段階の値だけが、他の値から、かけ離れているのは解せなかった。

本報告では、梁の非線型問題を取り扱って良い結果を得たが、さらに複雑な問題にも拡張できるものと思う。

本研究は、筆者が Buffalo 滞在中に行なったもので、Dr. G. C. Lee および Dr. B. A. Szabo の両教官には、有意義な助言をいただいた事を附記する。

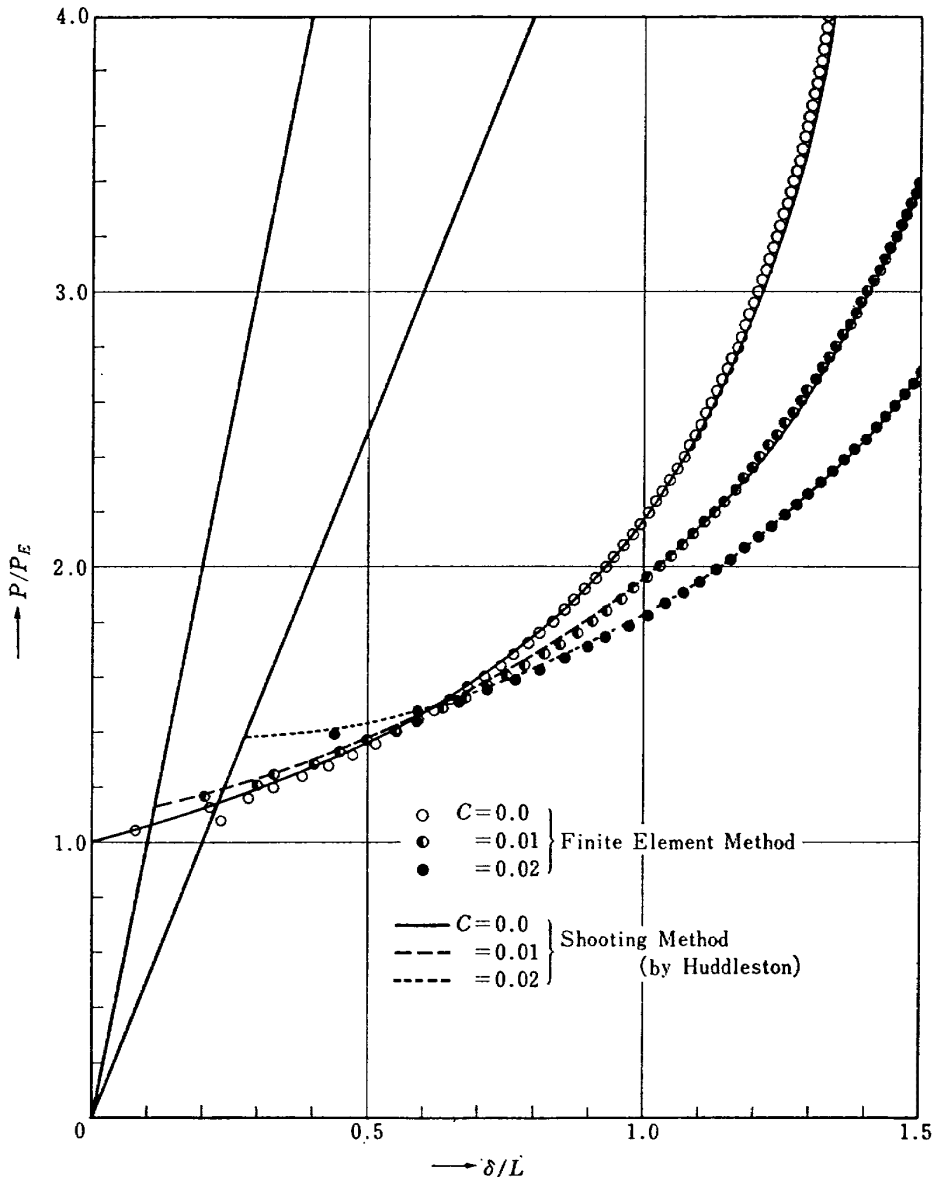


図6 種々の C に対する $P-\delta$ 曲線 (Postbuckling)

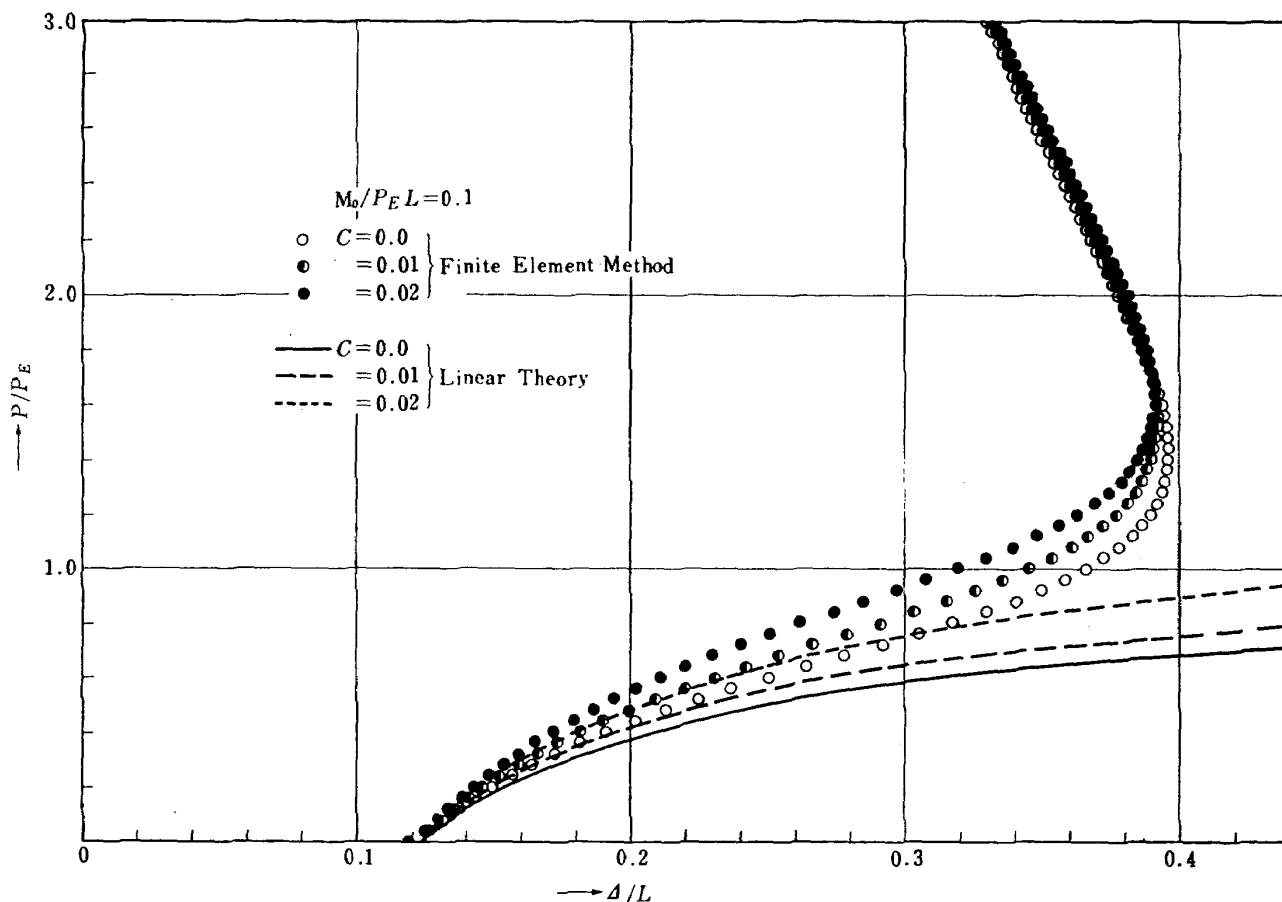


図7 種々の C に対する $P-\Delta$ 曲線 (両端にモーメントが作用した場合)

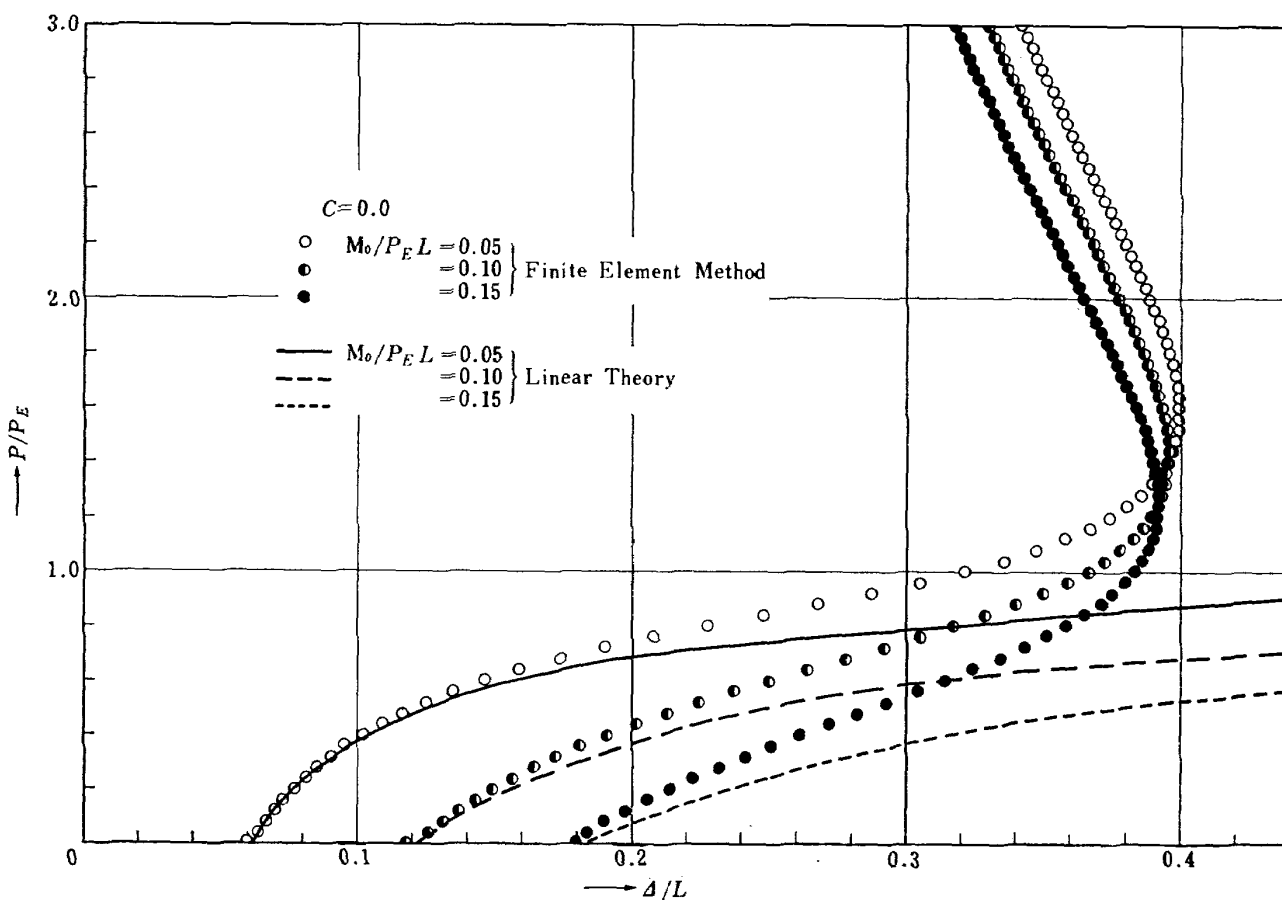


図8 種々の M_0 に対する $P-\Delta$ 曲線 (両端にモーメントが作用した場合)

参 考 文 献

- 1) J. V. Huddleston: Effect of Axial Strain on Buckling and Post-buckling Behavior of Elastic Columns, Developments in Theoretical and Applied Mechanics Vol. 8, Edited by Daniel Frederick, Pergamon Press, Oxford and New York 1970
- 2) J. H. Argyris: Continua and Discontinua, Proc. Conf. Matrix Methods Struct. Mech., Wright-Patterson Air Force Base, Ohio, Oct., 26~28, 1965, AFFDL TR 66-80, 1966
- 3) B. A. Szabo: Principles of Discretization of Continuous Structures, Dissertation, State University of New York at Buffalo, Feb., 1969
- 4) B. A. Szabo: Stability Methods Based on Piecewise Approximation of the Displacement Field, Washington University, St. Louis, Missouri, Research Report No. 9, Jan., 1969
- 5) Y. Tada and G. C. Lee: Finite Element Solutions to an Elastica Problem of Beams, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 2, 229~241, 1970
- 6) S. P. Timoshenko and J. M. Gere: Theory of Elastic Stability, 2nd Edition, McGraw-Hill Co., N.Y. 1961
- 7) O. C. Zienkiewicz and Y. K. Chung: The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill Co., 1967
- 8) J. S. Prezemieniecki: Theory of Matrix Structural Analysis, McGraw-Hill Co., N.Y. 1968

- | | | | |
|---------|--|----------|----------------------------------|
| TR-236T | Small-Strain Deformation Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials, Part 1—Constitutive Equations | 1971年 6月 | Tatsuzo KOGA |
| TR-237 | 自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しょう実験 Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristics of FFM-10 Model | 1971年 4月 | 河崎俊夫, 埴武敏 斎藤秀夫, 高島一明 河本 巖 |
| TR-238 | リフトジェットエンジン JR 100H の動特性について Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR 100H | 1971年 5月 | 西尾健二, 遠藤征紀 杉山七契, 越沼 威 大畑敏美 |
| TR-239 | 昇華アブレーションの直接解法 A Direct Calculation of Sublimating Ablation | 1971年 6月 | 久保田弘敏 |
| TR-240T | A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems—Part 1 Theoretical Basis— | 1971年 7月 | Masao EBIHARA |
| TR-241 | YS-11A-500/600 型主翼疲れ試験 (I. セーフライフ試験荷重と試験方式) Full-Scale Fatigue Test of YS-11A-500/600 Turboprop Transport Wing (I. Safe-life Fatigue Test Loads and Test Method) | 1971年 7月 | 竹内和之, 野原利雄 朝田洋雄 |
| TR-242 | 熱線による 3次元平均速度ベクトルとレイノルズ応力の測定 Measurement of three-dimensional mean Velocity Vector and Reynolds Stress by Single Rotatable Hot-wire | 1971年 7月 | 林 良生, 中谷輝臣 |
| TR-243 | 揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法 I その理論的基礎 A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems—Part 1—Theoretical Basis | 1971年 7月 | 海老原正夫 |
| TR-244 | 超音速風洞における動安定微係数の測定 Measurements of Dynamic Stability Derivatives in Supersonic Blowdown Wind Tunnel | 1971年 7月 | 高島一明, 榊原盛三 関根英夫 |
| TR-245 | ヘリコプタ高度・速度線図および臨界決定点の解析的推定法 An Analytical Method to Predict Height-Velocity Diagram Critical Decision Point of Rotorcraft | 1971年 8月 | 古茂田真幸 |

航空宇宙技術研究所報告 246号

昭和 46 年 11 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)☎182

印刷所 有限会社啓文堂 松本印刷
東京都文京区水道 2-7-5
