

UDC 531.36:
629.783.017.2

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-251

対称スピン衛星のニューテーション運動による慣性力
の場とそのニューテーションダンパへの応用

村上 力・狼 嘉彰

1971 年 11 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|---------|--|-----------|---|
| TR-230 | アナログトルク平衡方式による浮動振子型加速度計の研究
Study on the Analog Torque Rebalance Floated Pendulum Type Accelerometers for Guidance and Control Applications | 1971年1月 | 大月正男, 鈴木孝雄
円居繁治 |
| TR-231 | 高温タービンノズル翼二次元翼列試験
(第1報 対流冷却翼の実験結果について)
Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle
(Part I On the Experimental Results of a Convection-Cooled Blade) | 1971年1月 | 吉田豊明, 高原北雄
能瀬弘幸, 井上重雄
三村富嗣雄, 臼井 弘 |
| TR-232 | 高温タービンノズル翼二次元翼列試験
(第2報 対流冷却翼の数値計算およびアナログ法による翼表面温度分布について)
Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle
(Part II On the Temperature Distributions of a Convection-Cooled Blade by Numerical Calculation and Analogue Simulation Test) | 1971年1月 | 吉田豊明, 高原北雄
能瀬弘幸, 井上重雄
三村富嗣雄, 臼井 弘 |
| TR-233 | PSD 法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点
Studies on PSD Method to Aircraft Structural Design for Atmospheric Turbulence | 1971年1月 | 竹内和之, 山根皓三郎 |
| TR-234 | Green 関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算
A Calculation of Temperature Distribution with Applying Green Function to Two-Dimensional Laplace's Equation | 1971年1月 | 西村英明 |
| TR-235 | 自動着陸予備実験
(1) 電波高度計の性能試験
Preliminary Experiments for Automatic Landing
(1) On the Performance Tests of Radio Altimeters | 1971年4月 | 樋口一雄, 堀川勇壮
森 幹彦, 小川 鑑一
真柳光美, 渡辺 顕
名越孝行 |
| TR-236T | Small-Strain Deformations Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials
—Part I Constitutive Equations— | Jun. 1971 | Tastuzo KOGA |
| TR-237 | 自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しょう実験
Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristics of FFM-10 Model | 1971年4月 | 河崎俊夫, 塙 武敏
斎藤秀夫, 高島一明
河本 巖 |
| TR-238 | リフトジェットエンジン JR-100H の動特性について
Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR 100H | 1971年5月 | 西尾健二, 杉山七契
大畑敏美, 遠藤征紀
越 沼 威 |
| TR-239 | 昇華アブレーションの直接解法
A Direct Calculation of Sublimating Ablation | 1971年6月 | 久保田弘敏 |
| TR-240T | A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems
—Part I Theoretical Basis— | Jul. 1971 | Masao EBIHARA |
| TR-241 | YS-11A-500/600 型主翼疲れ試験
(I セーフライフ試験荷重と試験方式)
Full-Scale Fatigue Test of YS-11A-500/600 Turboprop Transport Wing
(I Safe-Lie Fatigue Test Loads and Test Method) | 1971年7月 | 竹内和之, 野原利雄
朝田洋雄 |

目 次

1. 緒 言	1
記 号	1
2. ダンパのおもりの運動方程式	2
2.1 換算質量について	2
2.2 衛星座標からみたダンパの運動	3
3. 衛星上の加振力の場	4
3.1 衛星の運動	4
3.2 衛星上の加振力の場	4
4. 加振力の場の応用	6
4.1 energy sink 法	6
4.1.1 最適なダンパ・パラメータ	7
4.2 具体的応用例	8
4.2.1 スピン軸上取り付けの場合	8
4.2.2 赤道上取り付けの場合	8
4.2.3 スピン軸と赤道以外の点に取り付けた場合	8
4.2.4 円環型ダンパの最適取り付け	9
5. 数値計算例	9
5.1 子午面内の最適振動方向	9
5.2 球形衛星に対する取り付け	10
5.3 円筒形衛星に対する取り付け	12
6. 結 言	12
参 考 文 献	12
附録Ⅰ．換算質量と近似的重ね合せの理論	12
附録Ⅱ．(2.6) 式と振子型および円環型ダンパとの関係	13
附録Ⅲ．ダンパの厳密な運動方程式	13

対称スピン衛星のニューテーション運動による慣性力 の場とそのニューテーションダンパへの応用*

村 上 力**・狼 嘉 彰**

Inertial Force Field Due to Nutational Motion of a Spinning Axi-symmetric Satellite and Its Application to Nutation Dampers

by Chikara MURAKAMI and Yoshiaki OHKAMI

The motion of a nutation damper on spin-stabilized axi-symmetric spacecraft is analysed in general form. Up-to-now, many papers on this problem have been presented, but to the best knowledge of the authors, they have been restricted by predetermining the mounting position and the direction of motion of the damper.

In this paper, the inertial force field generated by the nutational motion of a satellite is investigated, and thereby the force with nutation frequency is evaluated along an arbitrary direction of motion at an arbitrary position of the satellite. The pattern of the inertial force field is given. This pattern is very useful not only for determining damper mounting but also for nutation sensor mounting. Of course, this pattern also indicates the oscillating stress field of a nutating body.

Furthermore, combining the above results and the energy sink approximation method, nutation damping rate is easily evaluated in terms of moments of inertia, spinning rate and initial nutation angle for arbitrary mounting of the damper. Several examples are illustrated, and compare favorably with numerical simulation results on a digital computer.

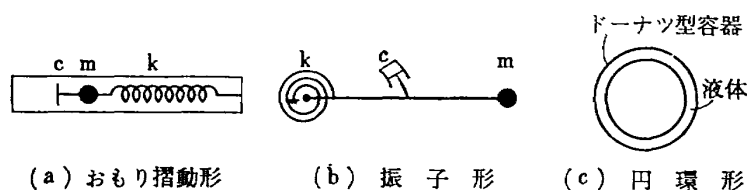
1. 結 言

スピン安定化衛星のニューテーションすなわちスピン軸の円錐運動を減衰させるために、円環型、振子型、おもり摺動型 (sliding mass) などの受動ダンパ (図1) が用いられている。後二者はともにおもりを有する不平衡型でしかも復元バネを有するなどの点から、振子型の場合でもおもりの運動が近似的に直線運動とみなせる程度の小さな振動の場合には全く同様に取り扱いえる。これまでの論文ではダンパの取付位置や

振動方向に対する最適化の考慮は全く払われていないので、本論文では主としておもり摺動型ダンパを衛星本体の任意の位置に任意の振動方向に取り付けた場合について、ダンパに作用する衛星本体からの加振力、円錐運動の減衰率、ダンパの最適パラメータなどを論じ、具体的な二、三の取り付けについて減衰率の理論値と計算機シミュレーション結果との比較例を示す。

記 号

A : オイラー力と見掛けの遠心力との合力



(c は抵抗体, k はばね, m はおもり)

図1 3種類のニューテーションダンパ

* 昭和46年4月10日受付

** 宇宙研究グループ

$\equiv \dot{\omega} \times \beta + \omega \times (\omega \times \beta)$
 A_E, A_C, A_2 : A のそれぞれオイラー力分, 遠心力分,
 2 次高調波分
 a : ω 軸から作用点までの距離
 c : ダンパの粘性抵抗係数
 F : ダンパのおもりの衛星本体に作用する力
 f : ダンパ単体の運動方程式の強制項の振幅
 g : ダンパ取り付け位置の振動増幅係数
 H : 衛星-ダンパ系全体の角運動量
 I : 衛星の慣性ダイアディック
 $\equiv I_x ii + I_y jj + I_z kk$
 i, j, k : 衛星に固定した座標系のそれぞれ X 方向,
 Y 方向および Z 方向の単位ベクトル
 k : ダンパのバネ定数
 k' : 遠心力の影響を含むダンパの見掛けのバネ定
 数
 m_i : i 番目のダンパのおもりの質量
 m : ダンパのおもりの換算質量
 $\equiv Mm_i/M_t$
 M : 衛星本体の質量
 M_t : 衛星-ダンパ系全体の質量
 $\equiv M + \sum m_i$
 o : 衛星座標の原点, 衛星本体の重心に一致
 p, q, r : 衛星角速度 ω のそれぞれ, X, Y および
 Z 方向成分, p_0, r_0 はそれぞれ初期値
 t : 時間
 T : 系全体の運動エネルギー
 W : ダンパが消散する仕事量
 W_{av} : 同上の平均時間消散率
 X, Y, Z : 衛星本体の重心を原点とし, 本体に固定
 した右手系座標軸で, X 軸はスピン軸
 β : O 点に対するダンパのおもりの位置ベクトル
 γ : 慣性モーメント比
 $\equiv I_x/I_y$
 ε : ニューテーション角 θ の減衰率
 ζ : ダンパ単体の減衰比
 $\equiv (c/2)(km)^{-1/2}$
 ω_n : ダンパ単体の固有振動数
 $\equiv (k/m)^{1/2}$
 ω_n' : $\equiv (k'/m)^{1/2}$
 ω : 衛星の角速度
 $\equiv p i + q j + r k$
 ω_{\perp} : 同上の YZ 平面成分
 $\equiv q j + r k, \omega_{\perp} = (p^2 + r^2)^{1/2}$
 Ω : ニューテーション角周波数

$$\equiv (\gamma - 1)p$$

ξ : ダンパのおもりの変位, ξ_{ss} はその定常値,
 ξ_m はその最大値

θ : ニューテーション角

θ_1 : ダンパ取り付け位置の X 軸からの仰角

θ_3 : ダンパ振動方向の X 軸方向からの仰角

λ : ダンパの振動方向の単位ベクトル

ψ : X 軸と ω のなす角

ϕ : 位相角

Δ : a の変化分

$\dot{}$: 衛星座標に対する時間微分

$\frac{d}{dt}$: 慣性座標に対する時間微分

\circ : 慣性ダイアディックとベクトルとの積
 添字 amp は振動の振幅を表わす

2. ダンパのおもりの運動方程式

2.1 換算質量について

ダンパには質量のある可動（振動）部分が存在し、この部分の運動が摩擦熱を発生して衛星のスピン軸に直角方向の角運動エネルギーを消散してスピン軸の円錐運動を減衰させる。おもり摺動形と振子形の両者を今後簡単のためにおもり形と略称する。ダンパには可動部分以外にケースその他の不動部分の重量がかなりあるために、スピン軸上に搭載する場合以外にはスピン軸に対称な位置に 2 個または 4 個搭載することが多く、本論文では一応 2 個とする。ただしこれはおもり形の場合のみに限られ、円環形ダンパは後述するように取り付け位置には依存しないので（振動方向には関係する）重量の有効性からたいてい 1 個しか搭載しない。また、本論文ではダンパの不動部分の重量分布も衛星本体に含めて可動分以外は衛星が完全に対称、すなわちスピン軸に直角方向の慣性モーメントが相等しいとする。

おもりを質点とみなせる場合でしかも 1 個しかない場合、すなわち衛星とおもりの 2 体運動の場合には換算質量¹⁾ が極めて有効な手段になるが、おもりが複数個すなわち 3 体以上の運動ではこの概念はこのままで通用しない。しかし衛星本位の質量に比しておもりの質量が極めて微小ならばおもり同士の干渉は無視できて近似的に重ね合せの理論が成立する（付録 I 参照）。すなわち $M \gg \sum m_i$ ならば回転運動のみに関しては衛星本位の重心を固定した本体の回転運動と換算質量の衛星本位の重心まわりの運動で記述できることになり、本論文では以下 $M \gg \sum m_i$ とし、おもりを質

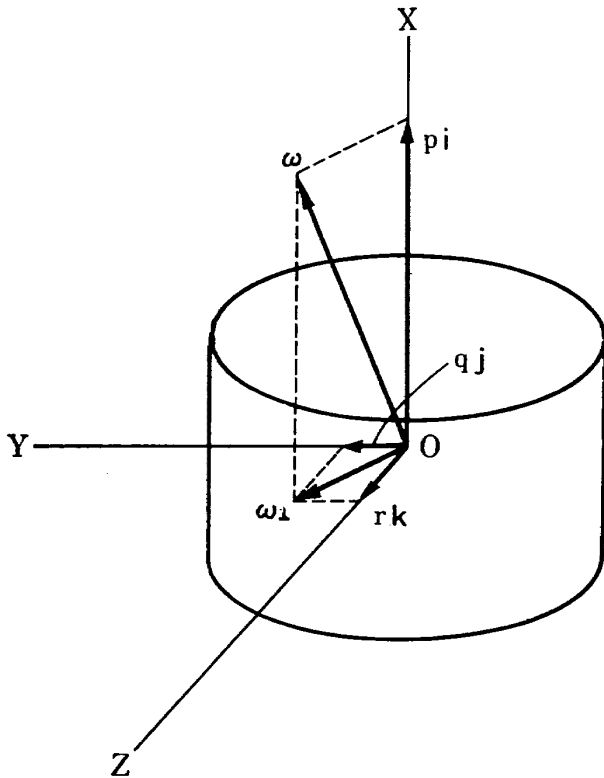


図 2 衛星の座標系

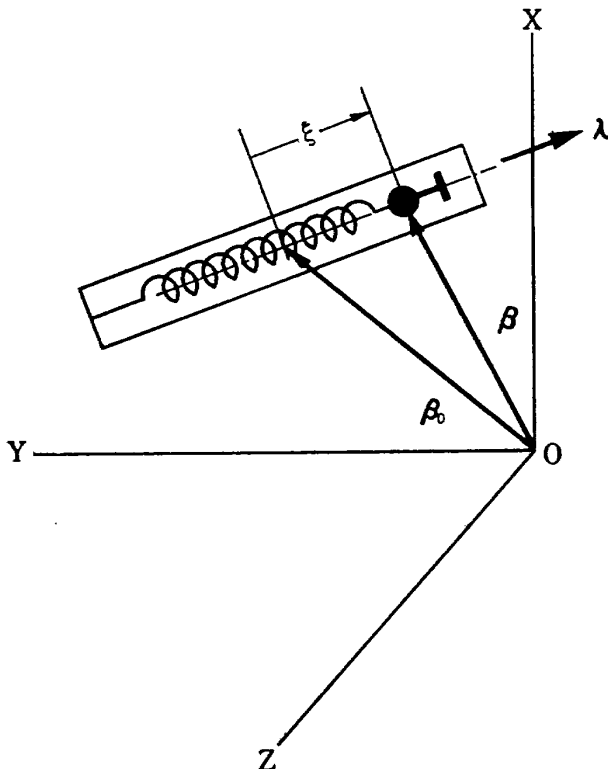


図 3 ダンパの座標系

点とし、閉管路液体ダンパでは管の断面積が充分小さい、すなわち細い管とする。

2.2 衛星座標からみたダンパの運動

衛星本体の重心を原点とし、スピン軸を X 軸、それと直角に右手系を構成する Y 軸、Z 軸の座標系の慣性座標に対する角速度 ω 、その X, Y および Z 軸成分を p, q および r とする。すなわち(図 2, 3 参照)

$$\omega \equiv [p, q, r]^T$$

この座標系に対するダンパのおもりの位置座標を

$$\beta \equiv [x, y, z]^T$$

とすれば、おもりの加速度は次式となる。

$$\frac{d^2\beta}{dt^2} = \ddot{\beta} + 2(\omega \times \dot{\beta}) + \dot{\omega} \times \beta + \omega \times (\omega \times \beta) \quad (2.1)$$

ここで d^2/dt^2 は慣性空間に対する加速度、 $\ddot{\cdot}$ と $\dot{\cdot}$ は衛星座標に対する加速度と速度を表わし、以後この表記法を続ける。上式の第一項は衛星座標に対する加速度、第二項はコリオリの加速度、第三項はオイラーの加速度と提唱する文献もあるが²⁾、要するに衛星座標の角速度の変化によって生じる加速度である。第四項は見掛けの遠心力に相当する加速度である。

ダンパのおもり(閉管路液体ダンパでは管路に沿った微小な長さ $d\xi$ の管に含まれる液体)の運動方向を λ (衛星座標に対して)とすれば上式と λ のベクトル内積はおもりの運動方向に作用する力(単位質量に対する)を表わすことになる。この演算を施すと

第 1 項…… $\lambda \cdot \ddot{\beta} = \ddot{\xi}$ (ξ はおもりの変位)

第 2 項……ゼロ ($\dot{\beta} // \lambda$ であるから)

第 3 項と第 4 項の和を A とすると…… $\lambda \cdot A$

すなわち

$$A \equiv \dot{\omega} \times \beta + \omega \times (\omega \times \beta) \quad (2.2)$$

したがって

$$m\lambda \cdot \frac{d^2\beta}{dt^2} = m(\ddot{\xi} + \lambda \cdot A) \quad (2.3)$$

この力はダンパの機構によってきまる復元力 F_r と平衡するから

$$m(\ddot{\xi} + \lambda \cdot A) = -F_r \quad (2.4)$$

F_r は粘性抵抗とバネ力(液体ダンパでは存在しない)から成る: すなわち

$$F_r = c\dot{\xi} + k\xi \quad (2.5)$$

したがって

$$m\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k\xi = -m\lambda \cdot A \quad (2.6)$$

A の中には $\dot{\xi}$ や ξ は含まれないから衛星に固定した点の加速度として取り扱えるから、この λ 成分を求めれば上式に基づいてダンパ単体の運動を解くこと

ができる。(2.6) 式と振子型および円環型ダンパとの関係は附録Ⅱで述べる。ダンパ単体の運動方程式がわかれば Energy sink 法によってニュートーションの減衰率も算定できるがこれは後述する。

3. 衛星上の加振力の場合

3.1 衛星の運動

外力のない場合の衛星本体の運動方程式は角運動量 H が一定不変であることから導かれる。すなわち

$$H \equiv I \cdot \omega = I_X p + I_Y q + I_Z r = \text{const} \quad (3.1)$$

$$\frac{dH}{dt} = \dot{H} + \omega \times H = \begin{bmatrix} I_X \dot{p} + qr(I_Z - I_Y) \\ I_Y \dot{q} + rp(I_X - I_Z) \\ I_Z \dot{r} + pq(I_Y - I_X) \end{bmatrix} = 0 \quad (3.2)$$

対称衛星では $I_Y = I_Z$ であるから

$$p = p_0 = \text{const} \quad (3.3)$$

$$q = \omega_{\perp} \sin[(\gamma - 1)p_0 t] = \omega_{\perp} \sin \Omega t \quad (3.4)$$

$$r = -\omega_{\perp} \cos[(\gamma - 1)p_0 t] = -\omega_{\perp} \cos \Omega t \quad (3.5)$$

ここに

$$\gamma = I_X / I_Y, \omega_{\perp} = \sqrt{p^2 + r^2} = |\omega_{\perp}|, \Omega = (\gamma - 1)p_0$$

この ω_{\perp} をニュートーション角 (円錐の半頂角) で表現すると (図 4 参照)

$$\omega_{\perp} = (H/I_Y) \sin \theta \simeq (H/I_Y) \theta \simeq \gamma p \theta \quad (3.6)$$

となるからニュートーションを減衰させることは ω_{\perp} すなわち q, r を減衰させることにほかならない。

3.2 衛星上の加振力の場合

衛星がニュートーションすなわち円錐運動をしているときに、衛星上の任意の固定点 $\beta_0 \equiv (x_0, y_0, z_0)^T$ に作用する力は (2.1) 式で β を β_0 に置き換えれば求まる。固定点であるから $\dot{\beta}_0, \ddot{\beta}_0$ はゼロで、結局、力は

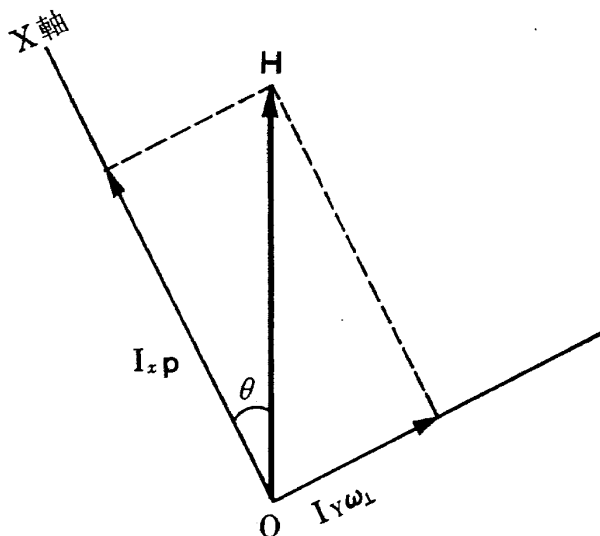


図 4 ニュートーション角

$-m\mathbf{A}$ である。したがって単位質量に作用する力は $-\mathbf{A}$ となり、 \mathbf{A} に含まれる $\omega, \dot{\omega}, \beta_0$ に p_0, q, r, \dot{p} ($\simeq 0$), $\dot{q}, \dot{r}, x_0, y_0, z_0$ などを代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &\equiv \begin{bmatrix} \dot{p} \\ \dot{q} \\ \dot{r} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \left(\begin{bmatrix} p \\ q \\ r \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} \right)^* \\ &= \begin{bmatrix} \dot{q}z_0 - \dot{r}y_0 \\ \dot{r}x_0 - (\dot{p}z_0) \\ (\dot{p}y_0) - \dot{q}x_0 \end{bmatrix} + p_0 \begin{bmatrix} qy_0 + rz_0 \\ qx_0 \\ rx_0 \end{bmatrix} \\ &\quad + p_0^2 \begin{bmatrix} 0 \\ -y_0 \\ -z_0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -(q^2 + r^2)x_0 \\ qrz_0 - r^2y_0 \\ -q^2z_0 + qr y_0 \end{bmatrix} \\ &\equiv \tilde{\mathbf{A}}_E + \tilde{\mathbf{A}}_C + \bar{\mathbf{A}} + \mathbf{A}_2 \end{aligned} \quad (3.7)$$

ここで \sim は交流成分、 $\bar{}$ は直流成分、すなわち正弦波状の加振力と一定の遠心力成分を示し、 \mathbf{A}_2 は q, r の二乗項のみから成り、 $q, r \ll p_0$ ならば無視できる。

さらに

$$\tilde{\mathbf{A}} \equiv \tilde{\mathbf{A}}_E + \tilde{\mathbf{A}}_C = [\tilde{A}_x, \tilde{A}_y, \tilde{A}_z]^T \quad (3.8)$$

とにおいてオイラー力と見掛けの遠心力の両交流分の和を求めると (3.3), (3.4), (3.5) 式から

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \tilde{A}_x \\ \tilde{A}_y \\ \tilde{A}_z \end{bmatrix} &\simeq \begin{bmatrix} (y_0 \sin \Omega t - z_0 \cos \Omega t) \omega_{\perp} (p_0 - \Omega) \\ x_0 (p_0 + \Omega) \omega_{\perp} \sin \Omega t \\ -x_0 (p_0 + \Omega) \omega_{\perp} \cos \Omega t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sqrt{y_0^2 + z_0^2} \omega_{\perp} (p_0 - \Omega) \sin \left(\Omega t + \tan^{-1} \frac{z_0}{y_0} \right) \\ x_0 \omega_{\perp} (p_0 + \Omega) \sin(\Omega t) \\ -x_0 \omega_{\perp} (p_0 + \Omega) \cos(\Omega t) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.10)$$

(3.11)

となる。以下、これを幾分詳細に検討する。まず、 \tilde{A}_y と \tilde{A}_z に着目すると振幅は相等しく位相が 90° ずれているから X 軸方向から見て $\tilde{\mathbf{A}}$ の赤道面成分 (以後スピン衛星を地球に見立てて YZ 平面を赤道面と称する) は角速度 Ω で反時計方向に一定の円を描くことがわかる。円の大きさ、すなわち振幅は y_0, z_0 には無関係で x_0 のみが位置として関係するから、赤道面に平行な同一平面内ではどこでも同一半径の円を描く、すなわち加振力の赤道面成分は同緯度面内では全て相等しい。赤道面では $x_0 = 0$ であるからこの成分は存在しない。位相は x_0 の符号のみに関係し位置に無関係である。つぎに \tilde{A}_x に着目すると振幅はスピン軸からの距離に比例し、位相は取り付けの位置角に等しい。

以上のことから $\tilde{\mathbf{A}}$ ベクトルは空間的に Ω の角速

* この式の \times 印はベクトル外積記号である。

度で回転し、ベクトルの先端を結ぶと長円になり、極点では円、赤道では定直線に縮退する。 \vec{A} の振幅は重心からの距離に比例するから(同一取り付け方向として)、等距離の点、すなわち重心を中心とする球面上に x_0, y_0, z_0 をとることにする。赤道面に投影した長円の形は円となるが、極点では x_0 が最大であるから最大の円となり、赤道上では一点となる。長円を球面上に並べると花びらのように中心線すなわちスピン軸からはなれるにつれてスピン軸に平行になろうとし、中心ほど赤道面に平行となる。この一例を図5のようにする。図では細い点線が \vec{A} ベクトルの先端を結ぶ長円を表わし、図の上半分の円周上の矢印の大きさが半長径を表わし、すなわち最大の振動振幅は子午面内に含まれ、これらの矢印は(3.11)

式の位相関係をも表わしている。すなわち(3.11)式の $t=0$ の瞬間の \vec{A} ベクトルを示したもので、この矢印は図の下半分で見ると一せいに反時計方向に回転し、常に平行である。ただし北半球と南半球(x_0 の正負)では矢印の方向が逆となる。

次に赤道上の A_x と極点上の A_y または A_z の大きさの相違や、長円面の傾きについて多少の検討を加えてその理由を明らかにしよう。対称衛星であるからZX平面内のものだけを取り上げても一般性は失われない。(3.7)式においてまずオイラー力から検討するとZX平面上では $y_0=0$ であるから \dot{q} によるものしか存在せず、単位円周上では大きさは $|\dot{q}|$ (単位質量に作用するとして)、方向は円の切線方向となる(図6参照)。見掛けの遠心力成分は図7を参考にして、

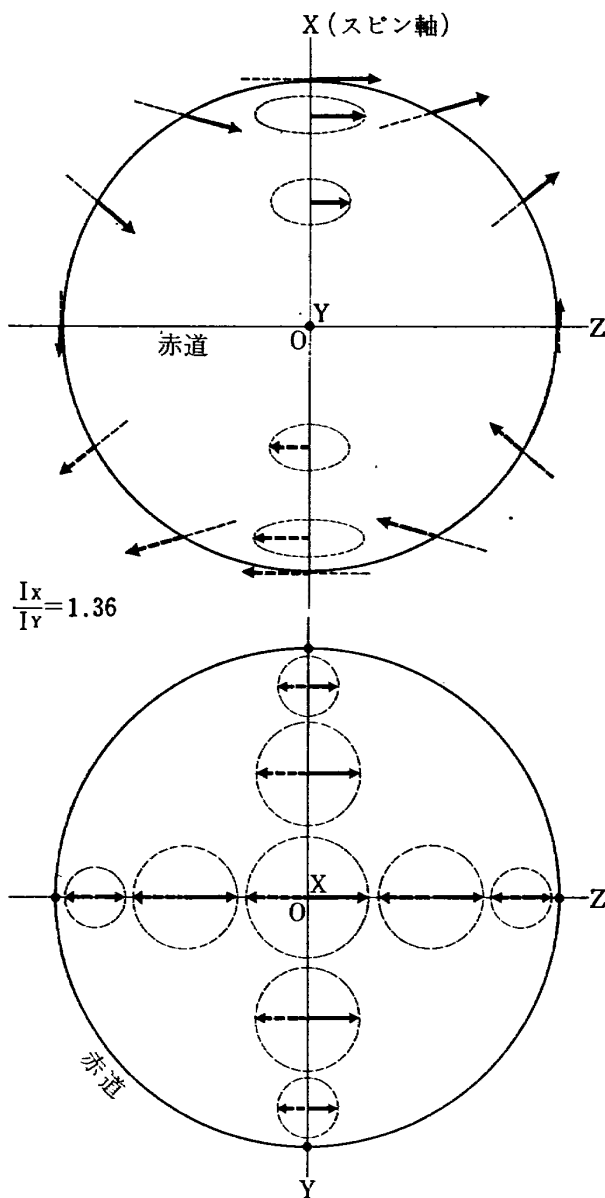


図5 加振力の場の一例

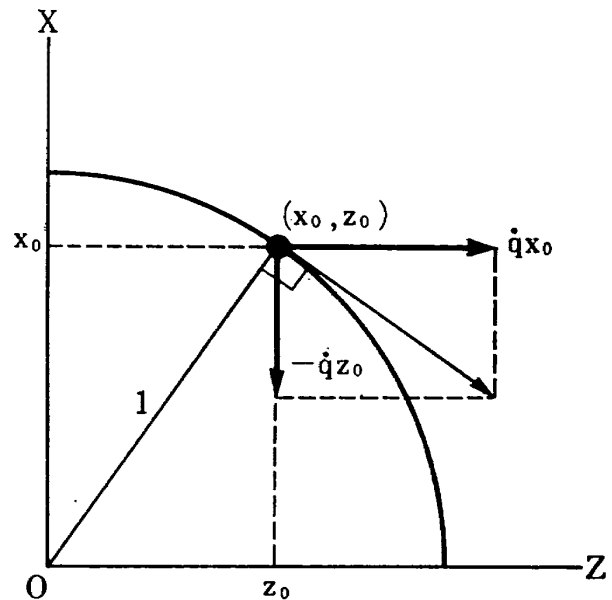


図6 \dot{q} による慣性力

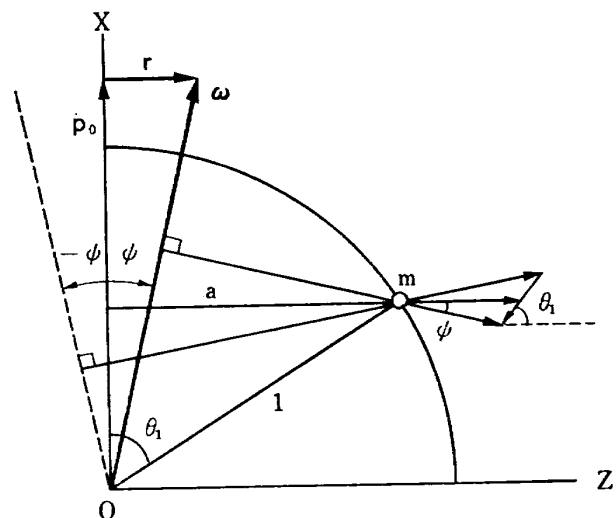


図7 遠心力の振動成分

ω 軸が X 軸となす角を ϕ とすると $\phi \approx r/p_0$, X 軸から θ_1 方向に単位距離 (原点から) の点 m に作用する遠心力は ϕ が正負の最大値をとるときに ω 軸からの腕の長さが最小と最大になり, $\phi=0$ のときに近似的に平均値 a となる。すなわち腕の長さは平均値 $a=\sin \theta_1$ であるから a の変化分を $\mp \Delta$ として図より (復号は ϕ と同順)

$$\begin{aligned} a \mp \Delta &= \sin(\theta_1 \mp \phi) \\ &\approx \sin \theta_1 \pm \phi \cos \theta_1 \quad (\phi \approx 0) \\ \therefore \Delta &= \phi \cos \theta_1 \end{aligned}$$

したがって, $a \pm \Delta$ の腕の長さに相当する遠心力の大きさは

$$(a \mp \Delta) p_0^2 = p_0^2 \sin \theta_1 \mp p_0 r \cos \theta_1 \quad (3.12)$$

$$(\because \phi = r/p_0)$$

第一項は定常遠心力 \bar{A} 成分であり, 第2項は r による振動成分である。上式はスカラー量であるが図7から明らかなように Z 軸方向に対して $\mp \phi$ の方向を持っている。 ϕ は微小であるから振動成分の Z 方向成分は上式の第2項にほぼ等しく, X 方向成分は上式に $\sin \phi \approx r/p_0$ を掛けて r の一次項のみをとると $\mp p_0 r \sin \theta_1$ となる。つまり遠心力の振動成分は大きさが $p_0 r$ で, 方向が X 軸に対して $\mp (\pi/2) - \theta_1$ のベクトルとなる。復号は $-$ は $r > 0$, $+$ は $r < 0$ に対応する。

オイラー力すなわち角加速度 \dot{q} による加振力は前述のように団位円の切線方向となるが, (2.10) と (2.11) 式から \dot{q} は r を基準にとると逆位相となるから X 軸に対して $\mp (\pi/2) + \theta_1$ (復号は $r > 0$ に対して $-$, $r < 0$ に対して $+$ が対応) となる。したがって両者

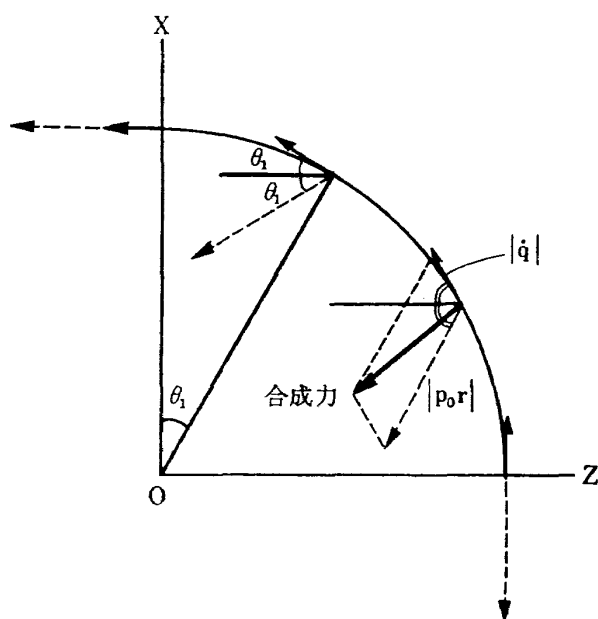


図8 オイラー力と振動遠心力

すなわちオイラー力と遠心力による交流分のベクトル方向は $r > 0$ のときは $-Z$ 方向よりそれぞれ $\pm \theta_1$ の対称な方向をとり $r < 0$ では $+Z$ 方向よりそれぞれ $\pm \theta_1$ の対称な方向をとり (図8参照), 両者はベクトル和となっていく前述の図5のようになるわけである。とくに極点においては $\theta_1 = 0$ または $\pm \pi$ となるから両ベクトルは方向的に一致し, ベクトル和は算術的和となつて最大値を与え, 赤道においては $\theta_1 = \pm \pi/2$ となつて両者は逆向きに一致し, 算術的差となるから最小値を与える。すなわち定量的に最大値は $|p_0 r| + |\dot{q}|$, 最小値は $|p_0 r| - |\dot{q}|$, その他は中間の値となる。図5においては直流分 \bar{A} は示していないが, これは, X 軸からの距離に比例し, 方向は X 軸から放射状になることが自明であるから省略した。

なお, 最大値すなわち極点における値と赤道における最小値との比は

$$\frac{|\dot{q}| + |p_0 r|}{-|\dot{q}| + |p_0 r|} = \frac{(r-1)|p_0 r| + |p_0 r|}{-(r-1)|p_0 r| + |p_0 r|} = \frac{r}{2-r} \quad (3.13)$$

r の値は2が最大 (X 方向に厚さのない平板形) で, 後述するように安定のためには $r > 1$ であるから, 平板に述べた極点が有理であるが, この場合には当然赤道の半径すなわちダンパ取り付け位置 y_0 が x_0 よりはるかに大きくとれるので, この点も考慮する必要がある。

4. 加振力場の応用

4.1 Energy sink 法

前述のように加振力場がわかれば搭載ダンパに作用する力がわかり, ダンパの運動方程式は容易に導くことができる。energy sink 法はダンパの運動によって消散するエネルギーの時間平均消散率 (例えばダンパの振動する一周中に消散するエネルギーを周期で割った値) が, 衛星のスピン運動以外の角運動エネルギーの減少率に等しいことからニューテーションの減衰率を導くものである。以下にこれを略述する。

基本となる式は角運動量が一定であることと運動エネルギーとニューテーション角 θ の関係である。すなわちダンパを無視して近似的に

$$H^2 = I_X^2 \dot{\theta}^2 + I_Y^2 \omega_{\perp}^2 \quad (4.1)$$

$$2T = I_X \dot{\theta}^2 + I_Y \omega_{\perp}^2 \quad (4.2)$$

$$I_X \dot{\theta} = I_Y \omega_{\perp} \quad \text{ただし} \quad \theta \approx 0 \quad (4.3)$$

これら3式から, $I_X/I_Y = r$ とおいて

$$2T = \frac{H^2}{I_X} \{1 + (r-1)\theta^2\} \quad (4.4)$$

$$\therefore \quad \dot{T} = \frac{H^2}{I_X} (\gamma - 1) \theta \dot{\theta} \simeq H \Omega \theta \dot{\theta} \quad (4.5)$$

一方、ダンパ単体の運動方程式は (2.6) 式の A に $\dot{\omega}, \omega, \beta$ の値を代入すれば求められるが、 β の変化分は等価的にバネ常数 k を変え、右辺の強制振動力項は β_0 すなわちダンパの中立点だけで決まる (3.11) 式の λ 成分で与えられる (附録 III 参照)。この振動の定常解をもってエネルギーの消散率を求める。この振動周期は当然 $2\pi/\Omega$ の周期をもつ。すなわち

$$m\ddot{\xi} + c\dot{\xi} + k'\xi = f \sin(\Omega t + \phi) \quad (4.6)$$

の微分方程式からこれの定常解は

$$\xi_{ss} = \frac{f}{\sqrt{(m\Omega^2 - k')^2 + (c\Omega)^2}} \sin(\Omega t + \phi') \quad (4.7)$$

dt 時間にダンパが為す仕事は $c\dot{\xi}d\xi$ であるから振動の一周期間に為す (消散する) 仕事量は

$$\int_0^{2\pi/\Omega} c(\dot{\xi}_{ss})^2 dt = \frac{2\pi}{\Omega} \frac{\frac{1}{2} f^2 \Omega^2 c}{(m\Omega^2 - k')^2 + (c\Omega)^2} \quad (4.8)$$

したがってエネルギー消散率の平均値 W_{av} は

$$W_{av} = \frac{\frac{1}{2} f^2 \Omega^2 c}{(m\Omega^2 - k')^2 + (c\Omega)^2} \quad (4.9)$$

これの逆符号が (4.5) 式に等しいわけで、これから θ の減衰率 ε が求まる。そのためには f を θ の関数として表現する必要がある。(3.6) 式, (3.11) 式から

$$f \equiv m(\tilde{A}_{amp} \cdot \lambda) = m\gamma p_0 \theta \begin{bmatrix} \sqrt{y_0^2 + z_0^2} (p_0 - \Omega) \\ x_0 (p_0 + \Omega) \\ -x_0 (p_0 + \Omega) \end{bmatrix}^T \times \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} = m\gamma p_0^3 \theta g_1 \quad (4.10)$$

$$\text{where} \quad g_1 \equiv \begin{bmatrix} \sqrt{y_0^2 + z_0^2} (2 - \gamma) \\ x_0 \gamma \\ -x_0 \gamma \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} \lambda_x \\ \lambda_y \\ \lambda_z \end{bmatrix} \quad (4.11)$$

g_1 はダンパの取り付け位置と振動方向および $\gamma (\equiv I_X/I_Y)$ のみの関数で p_0 や θ は含まない長さだけの dimension を持つものである。(4.5), (4.9) および (4.10) 式から

$$H \Omega \theta \dot{\theta} = - \frac{\frac{1}{2} m^2 \gamma^2 p_0^4 \theta^2 g_1^2 \Omega^2 c}{(m\Omega^2 - k')^2 + (c\Omega)^2}$$

$H \simeq I_X p_0$ において

$$\varepsilon \equiv - \frac{\dot{\theta}}{\theta} = \frac{\frac{1}{2} \frac{m g_1^2}{I_Y} \gamma (\gamma - 1) p_0^4 m c}{(m\Omega^2 - k')^2 + (c\Omega)^2} \quad (4.12)$$

$$= \frac{\zeta \omega_n \gamma (\gamma - 1) p_0^4 m g_1^2 / I_Y}{(\Omega^2 - \omega_n'^2)^2 + (2\zeta \omega_n \Omega)^2} \quad (4.13)$$

$$\text{where} \quad \omega_n' = \sqrt{k'/m}, \quad \omega_n = \sqrt{k/m},$$

$$\zeta = \frac{c}{2} \frac{1}{\sqrt{km}}$$

これがダンパを任意の位置に取り付け、任意の方向に振動させた場合のニューテーション減衰率を表わす。明らかに $\gamma - 1 > 0$ すなわち $I_X > I_Y$ が安定条件である。

4.1.1 最適なダンパ・パラメータ

ニューテーションを速く減衰させるにはダンパを衛星の適当な位置に搭載し、適当な方向に振動させる必要がある。適当な位置・方向とは前述の加振力が大きくなる位置・方向のことで、ダンパにはなるべく大きな加振力を与える必要がある。この適当な位置・方向は図 5 から容易に推察ができ、定量的には (3.11) 式から容易に求めることができる。それでは加振力が与えられた場合にダンパ単体のパラメータはどのようにして決めたらよいか問題となる。すなわち (4.6) 式で右辺が与えられたとき、さらに一定の大きさの m が与えられたときに c, k' (この中にはダンパ単体のバネ常数 k 以外のものも含むこともある、後述の例参照) をどのような値にすべきかを検討してみる。

ニューテーションの減衰を速めるためにはダンパが単位時間当りに消散するエネルギーを大きくする必要がある。すなわち (4.9) 式を最大にする c, k' を求めることである。まず

$$\frac{\partial W_{av}}{\partial k'} = 0 \quad \text{より} \quad k' = m\Omega^2$$

または

$$k'/m \equiv (\omega_n')^2 = \Omega^2 \quad (4.14)$$

すなわち等価的固有周波数が Ω に同調するようにダンパ単体の k を調整することである。つぎに c に関して

$$\frac{\partial W_{av}}{\partial c} \bigg|_{k'=m\Omega^2} = 0 \quad \text{より} \quad c = 0$$

この結果は (4.7) 式より明らかなように ξ_{ss} を無限大に持って行くことでダンパの振動振幅を無限大にすることにほかならない。現実にはダンパは重量的にも容積的にも限度があるので $\xi_{ss} \rightarrow \infty$ は無意味であり、結局 ξ_{ss} をある所定の長さ ξ_m に押える必要がある。すなわち (4.7) 式より

$$\frac{f}{c\Omega} = \xi_m$$

$$\therefore \quad c = \frac{f}{\xi_m \Omega} \quad (4.15)$$

以上のことをまとめると、最適ダンパ・パラメータとは、等価的固有周波数を加振周波数すなわちニューテーション角速度 Ω に同調させていわゆる tuned damper にしてダンパがなるべく振動し易い状態に

し、ダンパのおもりの振動振幅が与えられた衝程 ξ_m に押えられるように粘性抵抗 c を調整してエネルギー消散させるようにしたものである。

ダンパ・パラメータを最適にした場合のニューテーション減衰率を求めてみる。いま、ニューテーションの初期値を θ_0 とすれば、(4.10), (4.15) 式より

$$C = \frac{m\gamma p_0^2 \theta_0 g_1}{\xi_m \Omega}$$

(4.9) 式より

$$W_{av} = \frac{\frac{1}{2} f^2 c \Omega^2}{(c \Omega)^2} = \frac{\frac{1}{2} f^2}{c} = \frac{1}{2} m \xi_m g_1 \Omega \gamma p_0^2 \theta_0^2 / \theta_0$$

これと (4.5) 式の逆符号を等しいと置いて

$$\frac{1}{2} m \xi_m g_1 \Omega \gamma p_0^2 \theta_0^2 / \theta_0 = -H \Omega \theta \dot{\theta}$$

$H \simeq I_x p_0$ において

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{m \xi_m g_1}{I_Y} \frac{p_0}{\theta_0} \quad (4.16)$$

もちろん、この結果は (4.12) 式に最適な k', c を代入しても得られる。この結果から、減衰率は取付に係する g_1 に正比例することがわかる。

なお、tuned damper にするとニューテーション角がある程度以上になると不安定になり得るので^{b)}、実用上は ω_n を多少大きくする必要がある。

4.2 具体的応用例

4.2.1 スピン軸上取り付けの場合

スピン軸上にスピン軸に直角に取り付けた場合^{a)} のダンパの運動方程式を誘導してみる。振動方向を Y 軸方向とする：

$$\lambda = j$$

$$\beta_0 = (x_0, 0, 0)^T$$

(3.7) 式より

$$A_Y (= A \cdot \lambda) \simeq \dot{x}_0 + p_0 q x_0 - p_0^2 y$$

$$\xi = y$$

故に (2.6) 式より

$$\begin{aligned} m \ddot{y} + c \dot{y} + k y &= -m(\dot{x}_0 + p_0 q x_0 - p_0^2 y) \\ \ddot{y} + 2\zeta \omega_n \dot{y} + (\omega_n^2 - p_0^2) y &= -x_0(\dot{r} + p_0 q) \\ &= -x_0 \omega_{\perp} (p_0 + \Omega) \sin \Omega t \end{aligned}$$

または (3.6) 式より

$$\ddot{y} + 2\zeta \omega_n \dot{y} + (\omega_n^2 - p_0^2) y = -x_0 \gamma p_0 \theta (p_0 + \Omega) \sin \Omega t$$

この場合は明らかに定常遠心力によって等価バネ常数または固有周波数が小さくなり安定のための必要条件は $|\omega_n| > |p_0|$ である。つぎにこの式からニューテーションの減衰率を導いてみる：

$$y_{ss} = \frac{x_0 \gamma p_0 \theta (p_0 + \Omega)}{\sqrt{(\omega_n^2 - p_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \Omega)^2}} \sin(\Omega t + \phi)$$

(4.9) 式より

$$W_{av} = \frac{m x_0^2 \gamma^2 p_0^2 (p_0 + \Omega)^2 \Omega^2 \zeta \omega_n}{(\omega_n^2 - p_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \Omega)^2} \theta^2$$

(4.5) 式より

$$\dot{T} = -W_{av} \quad \text{と} \quad \text{おいて}$$

$$H \Omega \theta \dot{\theta} = -\frac{m x_0^2 \gamma^2 p_0^2 (p_0 + \Omega)^2 \Omega^2 \zeta \omega_n}{(\omega_n^2 - p_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \Omega)^2} \theta^2$$

$H \simeq I_x p_0$ において

$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{\theta}}{\theta} = \frac{\zeta \frac{m x_0^2}{I_Y} \cdot r^2 (r-1) p_0^4 \omega_n}{(\omega_n^2 - p_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \Omega)^2}$$

この式から $r-1 < 0$ すなわち $I_x < I_y$ ならば明らかに発散することがわかる。

4.2.2 赤道上取り付けの場合

赤道上に取り付け、スピン軸方向に振動させる場合^{a)}を取り上げる。

$$\lambda = i$$

$$\beta_0 = (0, y_0, 0)^T$$

$$A \cdot \lambda = A_x = y_0 \gamma p_0 \theta (p_0 - \Omega) \sin(\Omega t + \phi)$$

$$\xi = x$$

$$\begin{aligned} \therefore m \ddot{x} + c \dot{x} + k x &= -m y_0 \gamma p_0 \theta (p_0 - \Omega) \sin(\Omega t + \phi) \\ \ddot{x} + 2\zeta \omega_n \dot{x} + \omega_n^2 x &= -y_0 \gamma p_0 \theta (p_0 - \Omega) \\ &\quad \times \sin(\Omega t + \phi) \end{aligned}$$

この場合は前例と異なり、バネ常数は影響を受けない。

$$x_{ss} = \frac{y_0 \gamma p_0 \theta (p_0 - \Omega)}{\sqrt{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \Omega)^2}} \sin(\Omega t + \phi')$$

$$W_{av} = \frac{m y_0^2 \gamma^2 p_0^2 (p_0 - \Omega)^2 \Omega^2 \zeta \omega_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \Omega)^2} \theta^2$$

$\dot{T} = -W_{av}$ より

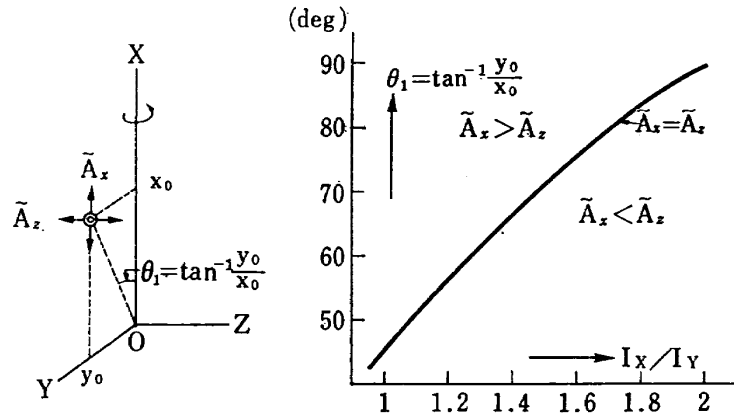
$$\varepsilon \equiv -\frac{\dot{\theta}}{\theta} = \frac{\zeta \frac{m y_0^2}{I_Y} \gamma (r-1) (2-r)^2 p_0^4 \omega_n}{(\omega_n^2 - \Omega^2)^2 + (2\zeta \omega_n \Omega)^2}$$

前例と同様に $I_x < I_Y$ では発散する。

4.2.3 スピン軸と赤道以外の点に取り付けた場合

この場合には図5の長円の長径方向に振動させるのが明らかに有効であるが、これは数値計算例にゆずってここでは $X-Y$ 平面上に取り付けたときに X 方向に振動させるべきか Z 方向に振動させるべきかを論ずる。

図5からわかることはスピン軸に近い場合（取り付け位置を $(x_0, y_0, 0)$ としたときに $x_0 \gg y_0$ の場合）には当然 $\tilde{A}_{xamp} \ll \tilde{A}_{yamp}$ ($\tilde{A}_{yamp} = \tilde{A}_{zamp}$) であるから赤道面に平行に振動させるのが得策であり、赤道面に近い取り付けの場合 ($x_0 \ll y_0$) には $\tilde{A}_{xamp} \gg \tilde{A}_{yamp}$ となるからスピン軸方向に振動させるのが得策である。した


 図 9 取付位置と \tilde{A}_x , \tilde{A}_z の比較

がってある取り付け位置では $\tilde{A}_{xamp} = \tilde{A}_{yamp}$ となっ
 てどちらに振動させても同じ結果が得られる場合があ
 る。ここではこのときの取り付け位置を求めてみる。

(3.11) 式より $\tilde{A}_{xamp} = \tilde{A}_{yamp}$ において

$$y_0(p - \Omega) = x_0(p + \Omega)$$

$$\frac{I_X/I_Y}{2 - I_X/I_Y} = \frac{y_0}{x_0} \quad (4.17)$$

この関係を図 9 に示す。この式は同時に、 I_X/I_Y が
 与えられたときに赤道に取り付けるべきか、極点に
 つけるべきかの関係も表わしている。すなわち(4.17)
 式の左辺で与えられる値が、寸法的に（質量分布的に
 ではなく）与えられた形状から来るダンパ取り付け可
 能な x_0 または y_0 に対して y_0/x_0 に等しいときはど
 ちらにつけても効果は同じで、 y_0/x_0 の方が大きい場
 合にはスピン軸の頂上に、小さい場合には赤道上に取
 り付けた方が有効であることも表わしている。

4.2.4 円環型ダンパの最適取付

最適取り付けはおもり型、円環型に関係なくダンパ
 の可動部分が最も加振され易いように取り付けること
 であるが、円環型では加振力の場を円環路に沿って線
 積分すれば円環路中の液体に加わる加振力となる。と
 ころでループ線積分は Stokes の定理によって面積分
 に変換されるから

$$\oint A \cdot \lambda d\xi = \int_S (\nabla \times A) \cdot n ds \quad (4.18)$$

ここに S はループに囲まれる面、 n はその単位法線
 ベクトルである。(3.7), (3.8) 式より

$$\nabla \times A = \nabla \times \tilde{A}_E = 2\dot{\omega} \quad (4.19)$$

すなわち円環型ダンパではオイラー力だけが利用でき
 るわけで、遠心力や 2 次高調波は全く寄与しない。 S
 が平面であれば加振力は S の面積に比例し、その法線
 方向は $\dot{\omega}$ の最大方向すなわちスピン軸と垂直な方向
 なら場所に関係しないことがわかる。

5. 数値計算例

本章では前節迄の解析結果を評価するために、衛星
 ーダンパ系の厳密な運動方程式をデジタル計算機で
 解き、解析結果と比較する。そのためのシミュレーシ
 ョンに関する詳細は省略し⁶⁾、ここでは概要だけにと
 どめる。

系の厳密な運動方程式は次の 3 式より成る。

$$\frac{d}{dt}(I \cdot \omega) = \beta \times F \quad (5.1)$$

$$m \frac{d^2 \beta}{dt^2} = -F \quad (5.2)$$

$$F \cdot \lambda = c\dot{\xi} + k\xi \quad (5.3)$$

ここで m は前述の換算質量を表わし、ダンパの振動
 の原点はニューテーションをしていないときの定常遠
 心力がバネ力と釣り合った点をとっている（附録Ⅲ参
 照）。

5.1 子午面内の最適振動方向

図 5 から、最大の振動振幅は子午面内に含まれるこ
 とを前述したが、それでは子午面内のどの方向になる
 かを求めてみる。

まずダンパの取り付け位置を $X-Y$ 平面内の原点
 (重心) を中心とする単位円周上に、 X 軸から θ_1 の
 角度の位置に取り付け、振動方向を X 軸から θ_3 の
 方向にとり、最適な θ_3 を θ_1 の関数として求めてみ
 る。(3.11) 式から

$$\tan \theta_3 \equiv \frac{\tilde{A}_{yamp}}{\tilde{A}_{xamp}} = \frac{x_0 \omega_{\perp} (p_0 + \Omega)}{y_0 \omega_{\perp} (p_0 - \Omega)}$$

$$= \cot \theta_1 \frac{\gamma}{2 - \gamma}$$

$$\therefore \theta_3 = \tan^{-1} \left[\cot \theta_1 \cdot \frac{I_X/I_Y}{2 - I_X/I_Y} \right] \quad (5.4)$$

$I_X/I_Y=1.36$ の場合を計算した例が図 10 である。

つぎに (5.4) 式で与えた θ_3 がはたして最適かどうかを調べるために $\theta_1=45^\circ$ のときの各種の θ_3 についてニュートン減衰率をシミュレーションで求めた。任意の θ_3 方向に対する加振力は θ_3 の正弦波状に変化するはずであるから、最適な θ_3 のときの ϵ_0 で正規化した ϵ の値 ϵ/ϵ_0 がどの程度、理論的な正弦波（負の分は正の方向に折り返したもの）にのるかを調べたのが図 11 である。理論値と極めて良く一致することがわかる。ただしこの場合の諸元は

$$I_X/I_Y=1.36$$

$$mx_0^2/I_Y=0.000645$$

$$p_0=8.79[\text{rad/sec}]$$

$$q(t=0)=0$$

$$r(t=0)=0.293[\text{rad/sec}]$$

ω_n と ζ の値は $\xi_m=0.4$ になるように最適化した値をそれぞれの場合に算出して用いた。以下の数値

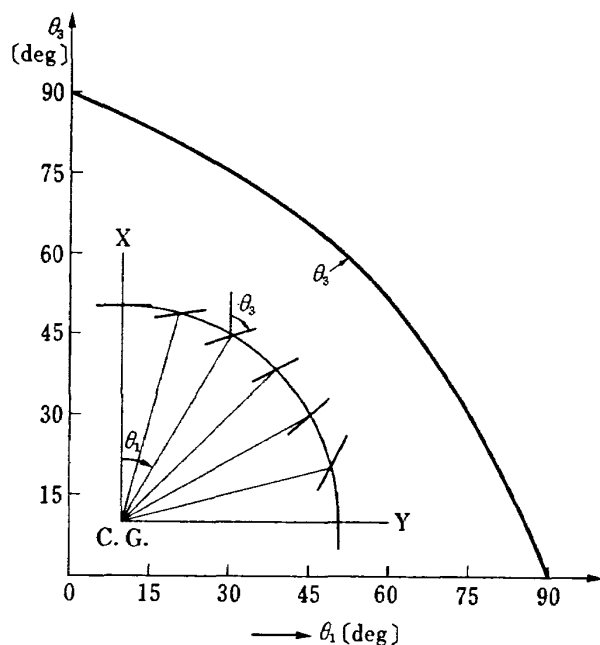


図 10 子午面内の最適振動方向

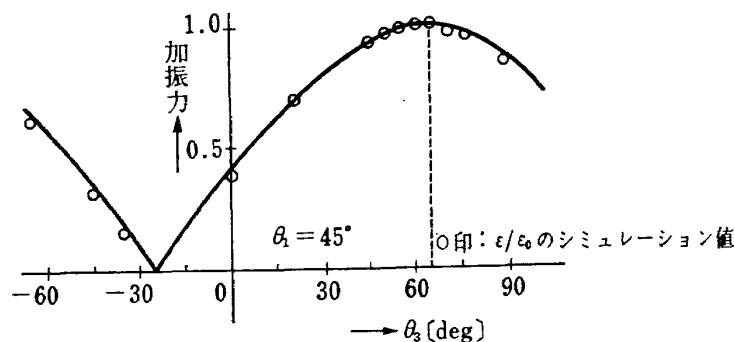


図 11 加振力とニュートン減衰率

計算例はすべてこれらの数値を与えたものである。

5.2 球形衛星に対する取り付け

外観が球形の衛星の外面上の3種類の取り付けかたを比較してみる。3種とは、1) 最適取り付け（前節の例の最適な θ_3 の方向）、2) 振動方向を緯度線方向にとる、3) 振動方向をスピン軸方向にとる、である。

図 5 から明らかなように、ダンパを極点に取り付けて極点での切線方向（赤道面に平行）に振動させるのが最大の減衰率となるのでこれを ϵ_0 とおいてほかの減衰率 ϵ を正規化し、各種の緯度上に取り付けた場合の ϵ の変化を調べたのが図 12 である。

最適取り付けの場合の θ_1 に対する ϵ/ϵ_0 曲線、すなわち図の A 曲線は次のようにして理論的に求めた。この場合どの取り付けでも、振幅 ξ_m が 0.4 になるように最適のダンパパラメータにしてある。しかるときには (4.16) 式から明らかなように減衰率 ϵ は取り付けに関する g_2 に比例するから、極点取り付けの場合を g_{20} とすれば、 $\epsilon/\epsilon_0=g_2/g_{20}$ となる。衛星を単位球とし、取り付け場所と原点を結ぶ動径の X 軸となす角を θ_1 とすれば (X-Y 平面上に取り付け、振動方向 λ もこの平面内に含まれるものとする) (4.11) 式より

$$g_2 = \left[\begin{array}{c} \sin \theta_1 \cdot (2-\gamma) \\ \cos \theta_1 \cdot \gamma \\ -\cos \theta_1 \cdot \gamma \end{array} \right]^T \cdot \left[\begin{array}{c} \cos \theta_3 \\ \sin \theta_3 \\ 0 \end{array} \right]$$

ただし θ_3 は (5.4) 式で与えられる最適値であるから

$$g_2 = \sqrt{\gamma^2 - 4(\gamma-1)\sin^2 \theta_1}$$

ところで g_{20} は $\theta_1=0$ の場合であるから

$$\epsilon/\epsilon_0 = g_2/g_{20} = \sqrt{\gamma^2 - 4(\gamma-1)\sin^2 \theta_1} / \gamma$$

同様に 2) の場合、すなわち B 曲線は

$$g_2 = \left[\begin{array}{c} \sin \theta_1 \cdot (2-\gamma) \\ \cos \theta_1 \cdot \gamma \\ -\cos \theta_1 \cdot \gamma \end{array} \right]^T \cdot \left[\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 1 \end{array} \right] = \gamma |\cos \theta_1|$$

$$\therefore \epsilon/\epsilon_0 = g_2/g_{20} = |\cos \theta_1|$$

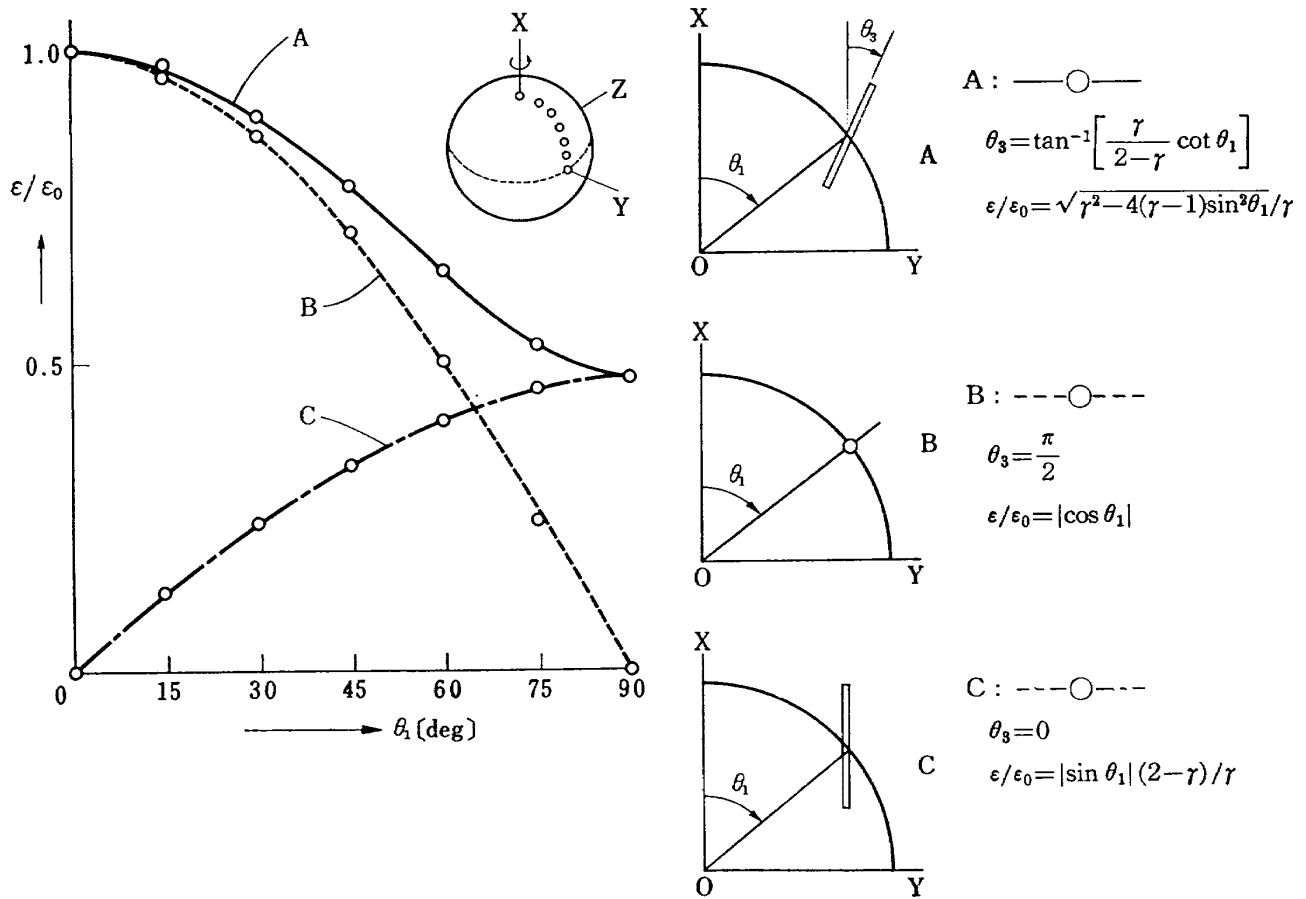


図 12 ダンパを球面上に取り付けた場合の減衰率の比較

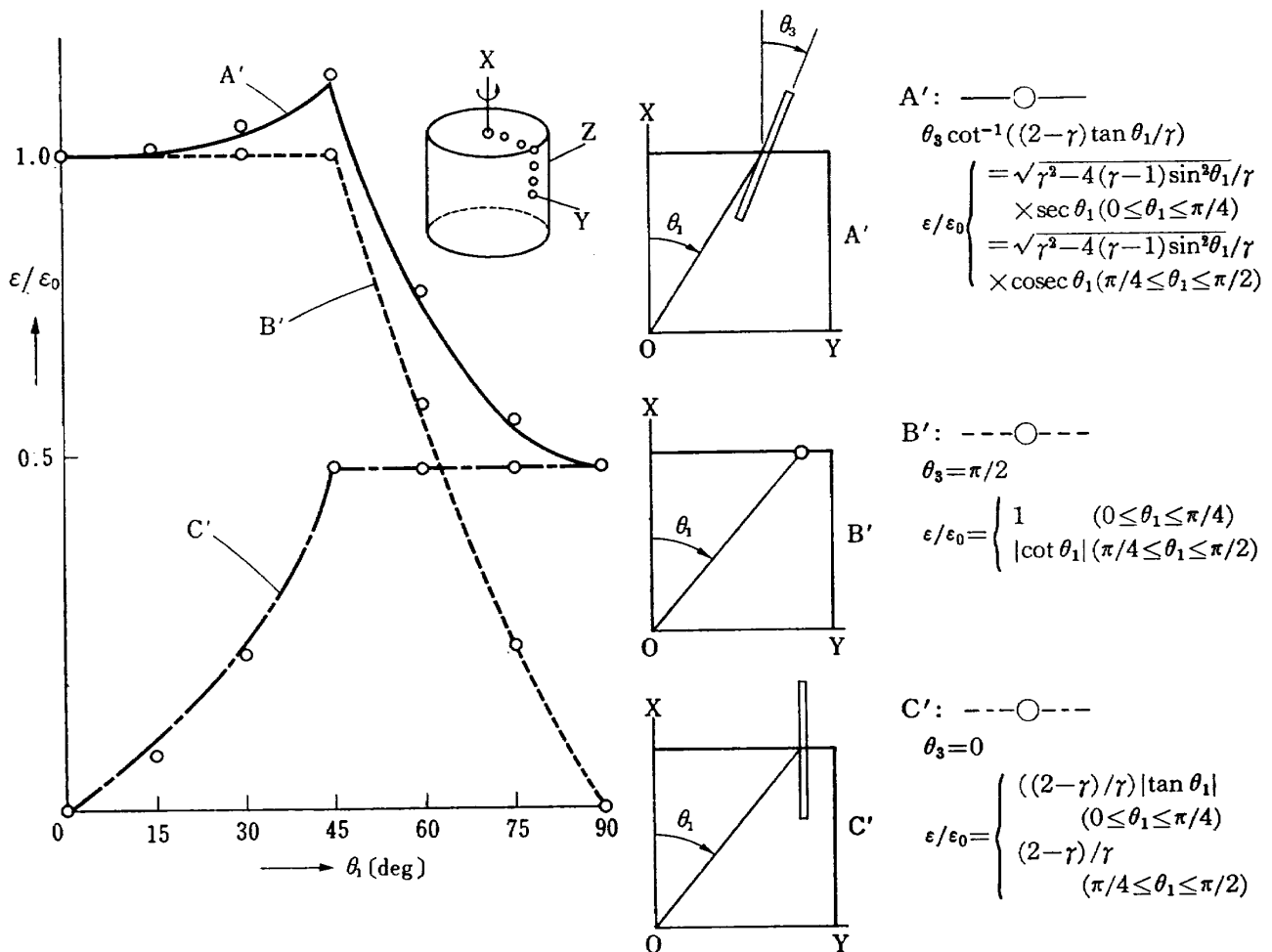


図 13 ダンパを円筒面上に取り付けた場合の減衰率の比較

3) の場合, すなわち C 曲線は

$$g_1 = \begin{bmatrix} \sin \theta_1 \cdot (2-\gamma) \\ \cos \theta_1 \cdot \gamma \\ \cos \theta_1 \cdot \gamma \end{bmatrix}^T \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = (2-\gamma) |\sin \theta_1|$$

$$\therefore \varepsilon/\varepsilon_0 = g_1/g_{10} = \{(2-\gamma)/\gamma\} |\sin \theta_1|$$

厳密式 (5.1), (5.2) (5.3) 式のシミュレーションから求めた $\varepsilon/\varepsilon_0$ は図 12 の○印で示したが, 理論値と極めてよく一致するのがわかる。

5.3 円筒形衛星に対する取り付け

実用化されているスピン衛星の形は円筒形が割合に多いので直径と高さの等しい円筒形衛星の対称軸（スピン軸）を含む平面内に前節と同様な取り付けをした場合を求めてみた。その結果を図 13 に示す。

この場合の理論曲線 A', B', C' は前節の結果を少し修正するだけで求められる。すなわちこの場合には球面ではないから, 取り付け位置までの距離(原点から)が変化するので, その変化の倍率を掛けてやれば良い。その倍率とは, $0 \leq \theta_1 \leq 45^\circ$ までは $\sec \theta_1$, $45^\circ \leq \theta_1 \leq 90^\circ$ までは $\operatorname{cosec} \theta_1$ である。すなわち

$$\begin{aligned} 1) \quad A' \quad \varepsilon/\varepsilon_0 &= \begin{cases} \sqrt{\gamma^2 - 4(\gamma-1)\sin^2 \theta_1} \sec \theta_1 / \gamma, & (0 \leq \theta_1 \leq 45^\circ) \\ \sqrt{\gamma^2 - 4(\gamma-1)\sin^2 \theta_1} \operatorname{cosec} \theta_1 / \gamma, & (45^\circ \leq \theta_1 \leq 90^\circ) \end{cases} \\ 2) \quad B' \quad \varepsilon/\varepsilon_0 &= \begin{cases} 1 & (0 \leq \theta_1 \leq 45^\circ) \\ |\cot \theta_1| & (45^\circ \leq \theta_1 \leq 90^\circ) \end{cases} \\ 3) \quad C' \quad \varepsilon/\varepsilon_0 &= \begin{cases} \{(2-\gamma)/\gamma\} |\tan \theta_1| & (0 \leq \theta_1 \leq 45^\circ) \\ (2-\gamma)/\gamma & (45^\circ \leq \theta_1 \leq 90^\circ) \end{cases} \end{aligned}$$

この場合もシミュレーション値とよく一致している。

6. 結 言

対称スピン衛星用ニューテーションダンパに関してその最適な搭載位置, 振動方向を, ニューテーションによって発生する慣性力のうち加振力を最も有効に利用する観点から求めた。また, ダンパ単体の最適パラメータに関しても論じ, いくつかのシミュレーション例で解析の正当性を実証した。とくに加振力の場のパターンを示した事はダンパ取り付けの最適化に直観性を与え, ダンパ単体の運動方程式の誘導を極めて容易にただけでなく, 将来の人工衛星に課せられる厳しい姿勢制御の要求で問題となるニューテーションを検出するためのニューテーションセンサの取り付けにも有効であろう。さらにまた, 打ち上げロケットのプリセッション検出用センサの取り付けやプリセッション解析の示唆を与えるものと思う。

参 考 文 献

- 1) B.T. Fang "Kinetic Energy and Angular Momentum about the Variable Center of Mass of a Satellite" AIAA Journal Vol. 3, No. 8 (1965) pp. 1540-1542
- 2) C. Lanczos "The Variational Principle of Mechanics" University of Toronto Press, (1960) p. 103
- 3) K.W. Wadleigh et. al. "Spinning Vehicle Nutation Damper" J. Spacecraft, Vol. 1, No. 6, (1964) pp. 588-592
- 4) P.G. Bhuta et al "Decay Rates of a Passive Precession Damper and Bounds" J. Spacecraft, Vol. 3, No. 3 (1966) pp. 335-338
- 5) 村上, 狼「対称スピン衛星用ニューテーションダンパの解析」NAL TM-207
- 6) D.J. Baines "Design of the Rotational Kinetic Energy Dissipation System for the W.R. E. Satellite WRESAT I" Australian Defence Scientific Service Weapons Research Establishment, Technical Note HSA 134, p. 4

附 録 I. 換算質量と近似的重ね合せの理論

衛星本体の質量を M , ダンパなどの付属質量(質点とする)を m_i , 慣性座標に対する衛星本体の重心位置を σ , 衛星・ダンパ系全体の重心位置を σ_0 , 衛星本体に対する m_i の位置を β_i とする。

系全体が外力を受けないとすれば

$$\frac{d\sigma_0}{dt} = \text{const} \equiv C \quad (\text{A.1})$$

重心の定理から

$$\sigma_0 = [M\sigma + \sum m_i(\sigma + \beta_i)] / (M + \sum m_i) \quad (\text{A.2})$$

系全体の角運動量を H としてこれを計算すると

$$H = I \cdot \omega + \sigma \times M \frac{d\sigma}{dt} + \sum \left\{ (\sigma + \beta_i) \times m_i \frac{d}{dt} (\sigma + \beta_i) \right\}$$

(A.2) 式より系全体の質量 $(M + \sum m_i)$ を M_t とおいて

$$\sigma - \sigma_0 = -\sum (m_i \beta_i) / M_t \quad (\text{A.3})$$

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\sigma_0}{dt} - \frac{1}{M_t} \sum \left(m_i \frac{d\beta_i}{dt} \right) \quad (\text{A.4})$$

$$H = I \cdot \omega + M_t \left(\sigma \times \frac{d\sigma}{dt} \right) + \sigma \times \sum \left(m_i \frac{d\beta_i}{dt} \right) + \sum (m_i \beta_i) \times \frac{d\sigma}{dt} + \sum \left(m_i \beta_i \times \frac{d\beta_i}{dt} \right)$$

(A.3), (A.4) 式を代入して整理すれば

$$\begin{aligned}
 H = & I_0 \omega + M_i \left(\sigma_0 \times \frac{d\sigma_0}{dt} \right) + \sum \left(\frac{M}{M_i} m_i \beta_i \times \frac{d\beta_i}{dt} \right) \\
 & + \sum_{j>i>1} \left\{ \frac{m_i m_j}{M_i} (\beta_i - \beta_j) \times \frac{d}{dt} (\beta_i - \beta_j) \right\}
 \end{aligned} \quad (A.5)$$

この式の第1項は衛星本体の重心まわりの本体の角運動量、第2項は系全体が慣性座標の原点に対するもの、第3項は質点 m_i が衛星本体の重心に対するもの、第4項は m_i, m_j 相互間の相対運動によるものである。

H の時間微係数をとれば第2項は消えて

$$\begin{aligned}
 \frac{dH}{dt} = & I_0 \frac{d\omega}{dt} + \omega \times I_0 \omega + \sum \left(\frac{M}{M_i} m_i \beta_i \times \frac{d^2 \beta_i}{dt^2} \right) \\
 & + \sum_{j>i>1} \left\{ \frac{m_i m_j}{M_i} (\beta_i - \beta_j) \times \frac{d^2}{dt^2} (\beta_i - \beta_j) \right\}
 \end{aligned} \quad (A.5)'$$

ダンパが1個なら、(A.5), (A.5)' 式の第4項は現われず、 Mm_i/M_i が換算質量である。

$i=2$ の場合には $\beta_1 - \beta_2 = \text{const}$ または

$$(\beta_1 - \beta_2) // \frac{d}{dt} (\beta_1 - \beta_2)$$

のような特別な場合にしかゼロにならない。

$M \gg m_i, m_j$ ならば質点の相対運動による項は他の項に比べて微小なので近似的に無視でき、衛星本体の重心まわりの本体と換算質量 ($m_i M/M_i$) の角運動の重ね合わせに等しくなる。

附録 II. (2.6) 式と振子型および円環型ダンパとの関係

(2.6) 式はおもりに摺動型ダンパに関して誘導したものであるが、振子型と円環型ダンパも一般的には (2.6) 式で表現可能ではあるが、実用性は少ない。ここでは (2.6) 式からそれらのための実用的な式を導く。

円環型では平均流速が $\dot{\xi}$ の平均流速モデル⁶⁾ を採用する。円環中における液体の単位長密度を ρ 、ループ全長を L 、単位長の粘性抵抗係数を κ とすれば

$$\oint \dot{\xi} \rho d\xi + \oint \xi \kappa d\xi = - \oint (\lambda \cdot A) \rho d\xi$$

ξ と $\dot{\xi}$ は場所すなわち ξ に無関係であるから

$$\rho L \dot{\xi} + \kappa L \xi = - \rho \oint A \cdot \lambda d\xi \quad (A.6)$$

バネ常数はゼロである。

振子型の場合は振子のアーム長を a 、振れ角を ϕ 、振子平面の単位法線ベクトルを n とする。 $\xi = a\phi$ であるから (2.6) 式から

$$ma^2 \ddot{\phi} + ca^2 \dot{\phi} + ka^2 \phi = -ma \lambda \cdot A$$

$\lambda = n \times a/a$ であるから右辺は $-ma \times A \cdot n$ となり

$$ma^2 \ddot{\phi} + c_\phi \dot{\phi} + k_\phi \phi = -ma \times A \cdot n \quad (A.7)$$

右辺は明らかに振子に作用するトルクであり、 $ca^2 = c_\phi, ka^2 = k_\phi$ の関係になっている。

附録 III. ダンパの厳密な運動方程式

ダンパの中立点を β_0 とする任意のダンパ位置 β は

$$\beta = \beta_0 + \lambda \xi, \quad \beta_0 = (x_0, y_0, z_0)^T$$

与えられ、スピンをしないときのダンパ位置から中立点迄の距離を ξ_0 とおけばスピンをしているときのダンパのバネの伸びは $\xi_0 + \xi$ となるから (5.2), (5.3) 式より次式を得る。

$$\begin{aligned}
 -F \cdot \lambda / m = & -2\zeta \omega_n \dot{\xi} - \omega_n^2 (\xi_0 + \xi) \\
 = & \dot{\xi} + (\dot{\omega} \times \beta_0) \cdot \lambda + \{\omega \times (\omega \times \beta_0)\} \cdot \lambda \\
 & + \{\omega \times (\omega \times \lambda \xi)\} \cdot \lambda
 \end{aligned} \quad (A.8)$$

$$\begin{aligned}
 \therefore \dot{\xi} + 2\zeta \omega_n \dot{\xi} + \{\omega_n^2 + (\omega \cdot \lambda)^2 - \omega^2\} \xi + \omega_n^2 \xi_0 \\
 = & (\lambda \times \beta_0) \cdot \dot{\omega} - (\omega \cdot \lambda) (\omega \cdot \beta_0) + (\lambda \cdot \beta_0) \omega^2 \\
 = & (\lambda \times \beta_0) \cdot \dot{\omega} - p q (\lambda_x y_0 + \lambda_y x_0) \\
 & - q r (\lambda_y z_0 + \lambda_z y_0) - r p (\lambda_x z_0 + \lambda_z x_0) \\
 & + p^2 (\lambda_y y_0 + \lambda_z z_0) + q^2 (\lambda_x x_0 + \lambda_z z_0) \\
 & + r^2 (\lambda_x x_0 + \lambda_y y_0)
 \end{aligned} \quad (A.9)$$

$$p = \text{const}, \quad q, r \ll p \text{ とすれば}$$

$$(\omega_n')^2 \equiv \omega_n^2 + (\omega \cdot \lambda)^2 - \omega^2 \simeq \omega_n^2 - p^2 (1 - \lambda_x^2) \quad (A.10)$$

$$\omega_n^2 \xi_0 \simeq p^2 (\lambda_y y_0 + \lambda_z z_0)$$

$$\xi_0 = (\lambda_y y_0 + \lambda_z z_0) p^2 / \omega_n^2 \quad (A.11)$$

(A.10) 式は等価的バネ常数 k' に相当する等価的固有角周波数であり、(A.11) 式はスピン速度 p_0 による定常変位量である。したがって β_0 を中心に振動する tuned damper にするためには ω_n として (A.10) 式より

$$\begin{aligned}
 \omega_n^2 - p^2 (1 - \lambda_x^2) - \Omega^2 = 0 \\
 \omega_n = \sqrt{1 - \lambda_x^2 + (\gamma - 1)^2} \cdot p
 \end{aligned} \quad (A.12)$$

に相当するバネ常数にし、静止時のバネの原点は $\beta_0 - \lambda \xi_0$ にする必要がある。

(A.8) 式から明らかのように A のうちで ξ に関与するのは見掛けの遠心力の項だけで、これがバネ常数を等価的に変える働きをするが (厳密には $p q \xi$ のような時間変化するバネ力を含む)、最も有力な加振力は β_0 だけで決まる (ξ も微小量とする)。

- | | | | |
|--------|--|----------|----------------------|
| TR-242 | 熱線による3次元平均速度ベクトルとレイノルズ応力の測定
Measurement of Three-Dimensional Mean Velocity Vector and Reynolds Stress by Single Rotatable Hot-Wire | 1971年7月 | 林 良生, 中谷輝臣 |
| TR-243 | 揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法 I その理論的基礎
A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems
—Part 1 Theoretical Basis— | 1971年7月 | 海老原正夫 |
| TR-244 | 超音速風洞における動安定微係数の測定
Measurements of Dynamic Stability Derivatives in Supersonic Blowdown Wind Tunnel | 1971年7月 | 高島一明, 榊原盛三
関根英夫 |
| TR-245 | ヘリコプタ高度・速度線図および臨界決定点の解析的推定法
An Analytical Method to Predict Height-Velocity Diagram Critical Decision Point of Rotorcraft | 1971年8月 | 古茂田真幸 |
| TR-246 | 梁の大変形問題の解析について
On Analysis of Large Deformation Problems of Beam | 1971年11月 | 泉 日出夫 |
| TR-247 | 任意物体のまわりの自由流線理論
On the Theory of Free Streamlines Past an Arbitrary Shape | 1971年9月 | 高橋 倅 |
| TR-248 | 亜音速流中における二次元翼上の圧力分布の粘性効果を考慮に入れた計算法のプログラム
A Description of the Ideas Underlying a Computer Programme for Predicting the Aerofoil Pressure Distributions in Subcritical Viscous Flows | 1971年11月 | 海老原正夫, 石田洋治
小此木時雄 |
| TR-249 | 一般化 Newton-Raphson 法の計算機容量問題に対する改良最適化アルゴリズム
Modified Optimization Algorithm for Computer Storage Problems in Generalized Newton-Raphson Method | 1971年10月 | 志 甫 徹 |
| TR-250 | はりの大変形解析
Large Deflection of Cantilever Beams | 1971年10月 | 多田保夫, 日下和夫 |

航空宇宙技術研究所報告251号

昭和46年11月発行

発行所	航空宇宙技術研究所
	東京都調布市深大寺町1880
	電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表) 182
印刷所	株式会社 東京プレス
	東京都板橋区桜川 2-27-12
