

UDC 533.6.013.12 :  
533.692 :  
533.6.011.3

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-253

圧縮性流れにおける翼型抗力の計算

石 田 洋 治

1971年11月

航空宇宙技術研究所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 既 刊 報 告

- |  |  |
|--|--|
| <p>TR-232 高温タービンノズル翼二次元翼列試験<br/>(第2報対流冷却翼の数値計算およびアナログ法による翼表面温度分布について)<br/>Two-Dimensional Cascade Test of an Air-Cooled Turbine Nozzle<br/>(Port II On the Temperature Distributions of a Convection-Cooled Blade by Numerical Calculation and Analog Simulation Test)</p> | <p>1971年1月 吉田豊明, 高原北雄<br/>能瀬弘幸, 井上重雄<br/>三村富嗣雄, 臼井弘</p>        |
| <p>TR-233 PSD 法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点<br/>Studies on PSD Method to Aircraft Structural Design for Atmospheric Turbulence</p>   | <p>1971年1月 竹内和之, 山根皓三郎</p>                                     |
| <p>TR-234 Green 関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算<br/>A Calculation of Temperature Distribution with Applying Green Function to Two-Dimensional Laplace's equation</p>   | <p>1971年1月 西村英明</p>  |
| <p>TR-235 自動着陸予備実験<br/>(1) 電波高度計の性能試験<br/>Preliminary Experiments for Automatic Landing<br/>(1) On the Performance Tests of Radio Altimeters</p>   | <p>1971年4月 樋口一雄, 堀川勇壮<br/>森幹彦, 小川鑑一<br/>真柳光美, 渡辺顕<br/>名越孝行</p> |
| <p>TR-236T Small-Strain Deformation Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials, Part 1—Constitutive Equations</p>  | <p>1971年6月 Tatsuzo KOGA</p>                                    |
| <p>TR-237 自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しょう実験<br/>Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristics of FFM-10 Model</p>   | <p>1971年4月 河崎俊夫, 埜武敏<br/>斎藤秀夫, 高島一明<br/>河本巖</p>                |
| <p>TR-238 リフトジェットエンジン JR 100H の動特性について<br/>Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR 100H</p>   | <p>1971年5月 西尾健二, 遠藤征紀<br/>杉山七契, 越沼威<br/>大畑敏美</p>               |
| <p>TR-239 昇華アブレーションの直接解法<br/>A Direct Calculation of Sublimating Ablation</p>  | <p>1971年6月 久保田弘敏</p>   |
| <p>TR-240T A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems—Part 1 Theoretical Basis—</p>   | <p>1971年7月 Masao EBIHARA</p>                                   |
| <p>TR-241 YS-11A-500/600 型主翼疲れ試験<br/>(I. セーフライフ試験荷重と試験方式)<br/>Full-Scale Fatigue Test of YS-11A-500/600 Turboprop Transport Wing (I. Safe-life Fatigue Test Loads and Test Method)</p>   | <p>1971年7月 竹内和之, 野原利雄<br/>朝田洋雄</p>                             |
| <p>TR-242 熱線による3次元平均速度ベクトルとレイノルズ応力の測定<br/>Measurement of three-dimensional mean Velocity Vector and Reynolds Stress by Single Rotatable Hot-wire</p>   | <p>1971年7月 林良生, 中谷輝臣</p>                                       |
| <p>TR-243 揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法 I その理論的基礎<br/>A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems—Part 1—Theoretical Basis</p>  | <p>1971年7月 海老原正夫</p>   |

# 圧縮性流れにおける翼型抗力の計算\*

石 田 洋 治\*\*

## A Calculation of the Profile Drag of Airfoils in Compressible Flow

By Yōji ISHIDA

A method is presented, predicting the profile drag of airfoils at subcritical Mach numbers and supersonic Mach numbers. The method consists of four steps of calculations; 1) calculation of the laminar boundary layer by using Stewartson—Illingworth transformation and Thwaites' method, 2) calculation of the transition point, 3) calculation of the turbulent boundary layer by Green's method, and 4) calculation of the wake. In this method, the calculated or experimental velocity distributions on airfoils must be given in advance. The position of transition point must be also given as a parameter.

By this method, the profile drag has been calculated by several types of airfoils at subcritical Mach numbers. A comparison is made with experimental data available, and fair agreement is obtained when the transition point is located at the reasonable position from a physical point of view.

This method is also applicable to calculation of the profile drag and to the prediction of the behavior of boundary layer on airfoils in supersonic flow. It is applied to the biconvex airfoils as an example.

### 1. 序

近年高亜音速において良い性能をもつ翼型（例えば Pearcey のピーキー翼型）の研究が重要視されて来ている<sup>1)</sup>。粘性を無視した非粘性流理論の発達はもちろん重要であるが、それとともに粘性の効果、すなわち境界層の空力特性に及ぼす効果を正確に知ることが非常に重要である。なぜなら、例えば、高亜音速流では風洞実験の結果と、飛行実験の結果とが大きく異なることがしばしばあり、それは主としてレイノルズ数のちがいに基づいている<sup>2)</sup>。このようなレイノルズ数のちがいによる空力特性の解析には、翼型表面上の境界層のふるまいを正確に予測することが有力な手段となるからである。

本報告はこのような必要性から、実用上十分な精度を持つと思われる既存の境界層理論を組合せて、圧縮性流れにおける二次元翼型表面上の境界層の成長を計算し、その翼型抗力を予測することを目的としたものである。

圧縮性流れにおける翼型抗力を計算するための方法

はいくつか存在する。Nash, Moulden & Osborne<sup>3)</sup> は、層流境界層については Stewartson 変換を用いて方程式を非圧縮形に直し、Thwaites の方法を採用した。また彼等は乱流境界層については、同じく Stewartson 変換を用い、非圧縮乱流境界層に対する Spence の方法を用いた。しかし乱流境界層に対して、圧縮性変換を適用することには問題がある。したがって、この方法においては、乱流境界層に対する取扱いに批判の余地がある。またロッキード社が開発した計算法<sup>4)</sup>は境界層の計算とともに、排除厚の効果を考えて、非粘性速度分布を再計算することまで含んだすぐれたものであるが、この方法もまた乱流境界層の計算法を、より精度のよい方法でおきかえることによって、さらに改良しうられると思われる。

圧縮性乱流境界層の成長を計算する方法はいくつか存在するが、計算が比較的容易で精度の高い方法としては、Green の方法<sup>5)</sup>、Nash の方法<sup>6)</sup>および Bradshaw & Ferriss の方法<sup>7)</sup>がある。利用できる実験データとの比較から、これら三つの方法のうちで、Green の方法が一番妥当な結果を与えるように思われる<sup>7)</sup>。本報告

\* 昭和 46 年 8 月 20 日受付

\*\* 空気力学第二部

では、したがって、乱流境界層の計算法としては Green の方法を採用した。

さて、圧縮性流れの中におかれた二次元翼型の翼型抗力を計算する方法は、文献 8 の非圧縮性流れの場合の計算法と本質的に異なることはない。境界層およびウェークの計算に圧縮性の考慮を払えば翼面上に衝撃波が発生し始めるまでの亜音速領域では、翼型抗力を求める問題は翼型表面上の境界層の成長と、それに続くウェークの成長を求める問題に帰される。しかし遷音速領域において翼型表面上に衝撃波が発生している場合や、超音速領域において翼型の前縁と後縁に衝撃波が付着している場合には、翼型の無限下流における運動量欠損を、翼型の後縁における運動量厚と関連づけることはむずかしくなるので、われわれはこの場合には圧力抵抗と表面摩擦抵抗をたしあわせることによって、翼型抗力を求めることにする。

圧縮性境界層の場合には、もはや密度や温度の変化が無視できなくなるため、現象を記述する方程式系の取扱いがずっと複雑になる。しかし、流れがある条件をみたすと仮定すると、その取扱いが簡単化されることが知られている。それらの条件は、(i) プラントル数が 1, (ii) 壁が断熱, (iii) 粘性係数  $\mu$  は温度  $T$  に比例する、である。本報告では境界層の計算に際してこれらの仮定を用いた。

本報告では、層流境界層は、Stewartson-illingworth 変換を適用して方程式を非圧縮面へ変換し、非圧縮流境界層に対する Thwaites の方法を用いて計算した。乱流境界層は Green の方法によって計算した。またウェークは、上記の圧縮性変換を用いて非圧縮の場合の Squire-Young の式を、圧縮性流れの場合へ拡張することによって計算した。層流境界層から乱流境界層への遷移の位置は、パラメータとして与えられるものとした。

本計算法によって亜音速領域における翼型の抗力を計算し、利用できる実験データと比較した。妥当な遷移点位置を与えた場合には、両者がよく一致することが示された。また超音速領域における biconvex 翼型の境界層特性と、翼型抗力を計算した。

## 2. 記 号

- $x, y$ : 流れ方向および壁に垂直な方向の距離  
 $s$ : 翼型の表面に沿って測った距離  
 $u, v$ : 境界層内の  $x, y$  方向速度成分  
 $U_1$ : 境界層外速度  
 $U$ : 非圧縮面における境界層内の  $X$  方向速度

成分

- $V_1$ : 非圧縮面における境界層外速度  
 $X, Y$ : 非圧縮面における流れ方向および壁に垂直な方向の距離  
 $M_1$ : 境界層外の局所マッハ数  
 $\gamma$ : 比熱比  
 $\mu$ : 粘性係数  
 $\nu$ : 動粘性係数  
 $\theta_i$ : 非圧縮面における運動量厚  

$$\left( = \int_0^{\delta_i} \frac{U}{V_1} \left( 1 - \frac{U}{V_1} \right) dY \right)$$
 $\delta_i^*$ : 非圧縮面における排除厚  

$$\left( = \int_0^{\delta_i} \left( 1 - \frac{U}{V_1} \right) dY \right)$$
 $H_i$ : 非圧縮面における形状係数  $(= \delta_i^* / \theta_i)$   
 $L_i$ : 非圧縮面における表面摩擦関数  
 $\theta$ : 運動量厚  $\left( = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_1 U_1} \left( 1 - \frac{u}{U_1} \right) dy \right)$   
 $\delta^*$ : 排除厚  $\left( = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{\rho u}{\rho_1 U_1} \right) dy \right)$   
 $H$ : 形状係数  $(= \delta^* / \theta)$   
 $\delta$ : 境界層厚さ  
 $\Delta H$ : 遷移点における  $H$  の不連続的変化量  
 $C_f$ : 表面摩擦係数  $\left( = \tau_w / \frac{1}{2} \rho_1 U_1^2 \right)$   
 $C_{f\infty}$ : 表面摩擦係数  $\left( = \tau_w / \frac{1}{2} \rho_{\infty} U_{\infty}^2 \right)$   
 $F$ : エントレンメント率  
 $H_1$ : 形状係数  $(= (\delta - \delta^*) / \theta)$   
 $(H_1)_k$ : 形状係数  

$$\left( = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_1} dy / \int_0^{\delta} \frac{u}{U_1} \left( 1 - \frac{u}{U_1} \right) dy \right)$$
 $(H)_k$ : 形状係数  

$$\left( = \int_0^{\delta} \left( 1 - \frac{u}{U_1} \right) dy / \int_0^{\delta} \frac{u}{U_1} \left( 1 - \frac{u}{U_1} \right) dy \right)$$
 $\Delta$ : 質量流れの厚さ  $(= \delta - \delta^*)$   
 $T$ : 境界層内の温度  
 $T_m$ : 中間温度  
 $T_r$ : 回復温度  
 $T_w$ : 壁温度  
 $Re$ : レイノルズ数  $(= U_{\infty} c / \nu_{\infty})$   
 $Re_{\theta}$ : レイノルズ数  $(= U_1 \theta / \nu_{\infty})$   
 $c$ : 翼弦長  
 $\alpha$ : 迎角  
 $t/c$ : 厚み比  
 $t_w$ : 表面摩擦パラメータ  

$$\left( = (\tau_w / \mu_{\infty} U_{\infty}) (\nu_{\infty} x / U_{\infty})^{1/2} \right)$$
 $C_D$ : 翼型抗力係数

$C_{D_F}$ : 表面摩擦抵抗係数

$C_{D_{WB}}$ : 圧力抵抗係数 (排除厚の効果を含む)

$C_{D_T}$ : 翼型抗力係数 ( $=C_{D_F}+C_{D_{WB}}$ )

$C_L$ : 揚力係数

添 字

1: 境界層外における局所的な量

$\infty$ : 無限上流または無限下流

$sp$ : 剥離点

$i$ : 非圧縮面における量

$tr$ : 遷移点

$T$ : 後縁

### 3. 計 算 法

プラントル数が1で、翼型の表面が断熱である場合を取扱う。また粘性係数  $\mu$  は温度  $T$  に比例する ( $\mu \propto T$ ) もとする。

#### 3.1 層流境界層

Stewartson-Illingworth 変換を行なうと、上記の流れの特性の下では、二次元圧縮性層流境界層方程式は、非圧縮性流れの方程式に帰着される。したがって、非圧縮境界層に対する近似計算法がそのまま適用できる。

ここでは Thwaites の方法を採用する。

Thwaites の方法によれば、運動量厚  $\theta_i$  は

$$\theta_i^2 = 0.45 \nu_\infty V_1^{-6} \int_0^x \{V_1(X')\}^5 dX' \quad (1)$$

で与えられる。 $\theta_i$  がわかるとパラメータ  $m$  は

$$m = -\frac{\theta_i^3}{\nu_\infty} \frac{dV_1}{dX} \quad (2)$$

からもとまり、形状係数  $H_i$ 、表面摩擦と関連づけられた関数  $L_i(m)$  が  $m$  の関数として与えられる。(文献 26 の 47 頁)。

非圧縮面における  $\theta_i$ 、 $\delta_i^*$ 、 $H_i$  および  $L_i$  が決まると、圧縮面における  $\theta$ 、 $\delta^*$ 、 $H$  および  $C_f$  は次の関係を使って計算される。

$$\begin{aligned} \theta &= \frac{a_\infty}{a_1} \frac{\rho_\infty}{\rho_1} \theta_i = \left( \frac{\rho_\infty}{\rho_1} \right)^{(r+1)/2} \theta_i \\ &= \left( \frac{T_\infty}{T_1} \right)^{(r+1)/2(r-1)} \theta_i \end{aligned} \quad (3)$$

$$\delta^* = \theta \left\{ \left( 1 + \frac{r-1}{2} M_1^2 \right) H_i + \frac{r-1}{2} M_1^2 \right\} \quad (4)$$

$$H = \left( 1 + \frac{r-1}{2} M_1^2 \right) H_i + \frac{r-1}{2} M_1^2 \quad (5)$$

$$\begin{aligned} C_f &= 2 \frac{\nu_\infty}{U_\infty} \frac{U_1}{U_\infty} \frac{T_1}{T_\infty} \frac{L_i(m)}{\theta} \\ &= \frac{2}{R_0} \frac{U_1}{U_\infty} \frac{T_1}{T_\infty} \frac{L_i(m)}{(\theta/c)} \end{aligned} \quad (6)$$

実際の計算においては、一度非圧縮面に変換して計算を行ない、再び圧縮面へ戻すという操作を行わずに、圧縮面に直した式で計算を行なうのが便利である。まず式 (3) を使って (1) 式を圧縮面での量に変換

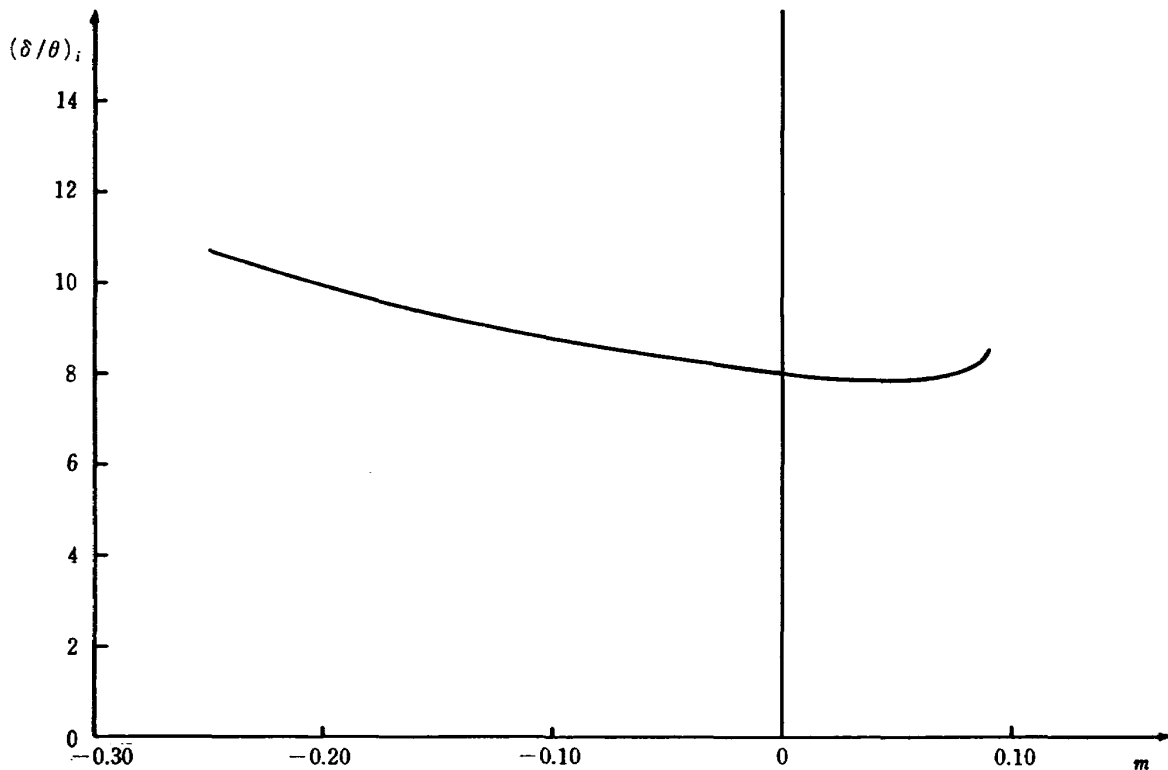


図 1  $(\delta/\theta)_i \sim m$  相関曲線

し,  $\gamma=1.4$  とおくと, 運動量厚は

$$\left(\frac{\theta}{c}\right)^3 = \frac{0.45}{R_e} \left(\frac{T_1}{T_\infty}\right)^{-3} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^{-6} \times \int \left(\frac{x/c}{T_\infty}\right)^{1.5} \left(\frac{U}{U_\infty}\right)^5 d\left(\frac{x}{c}\right) \quad (7)$$

またパラメータ  $m$  は, 圧縮面での量に変換すると,

$$m = -R_e \left(\frac{T_1}{T_\infty}\right)^{1.5} \left(\frac{\theta}{c}\right)^3 (1 + 0.2M_1^2) \frac{d(U/U_\infty)}{d(x/c)} \quad (8)$$

となる。(7), (8) 式から圧縮面における境界層外の流れの諸量の値がわかれば,  $\theta$ ,  $m$  がもとまる。したがって,  $H_i$ ,  $L_i$  は容易にもとまり, (5), (6) 式を使えば  $H$ ,  $C_f$  が計算できる。層流はく離は非圧縮流の場合と同様に,  $m=0.09$ , すなわち

$$\frac{\theta_{sp}}{c} = \left\{ \frac{-0.09(T_1/T_\infty)^{-1.5}}{R_e(1+0.2M_1^2)[d(U/U_\infty)/d(x/c)]} \right\}^{1/3} \quad (9)$$

で起こると仮定する。またこの時には,  $H_i=3.55$  であるから, (5) 式より,

$$H_{sp}=3.55+0.91M_1^2 \quad (10)$$

となる。遷移に先立ってはく離が生じたら, そこからただちに乱流境界層が始まるものとする。

境界層厚さ  $\delta$  と運動量厚  $\theta$  の比,  $\bar{\delta}=\delta/\theta$  は乱流境界層の計算において必要な入力である。これは,

$$\frac{\delta}{\theta} = \left(\frac{\delta}{\theta}\right)_i + 0.2M_1^2(H_i+1) \quad (11)$$

で与えられる(付録参照)。 $(\delta/\theta)_i$  は  $\delta$  を  $u/U=0.995$  となる  $y$  の値と定義すれば, Head の与えた図表<sup>9)</sup> からパラメータ  $m$  の関数として求めることができる。図 1 に  $(\delta/\theta)_i$  と  $m$  の関係を示す。

### 3.2 遷移点

本報告では遷移点の位置はあらかじめ与えられているものとする。これは翼型表面に粗さ要素を付着して, 境界層を人工的に遷移させた場合の解析に適している。Preston にしたがって, 指定された遷移点において運動量厚レイノルズ数  $R_\theta$  が 320 より小さい場合には,  $R_\theta$  が 320 になるように運動量厚を増す。また 320 より大きい場合には運動量厚は遷移点で連続であるとする<sup>17)</sup>。一方形状係数  $H$  はいずれの場合も不連続的に  $\Delta H$  だけ変化するものとする。(5) 式から  $\Delta H$  は,

$$\Delta H = (1+0.2M_1^2) \Delta H_i \quad (12)$$

となる。ここで  $\Delta H_i$  は非圧縮流における Trucken-

brodt の関係

$$\Delta H_i = f(R_{\theta_{itr}})$$

をみたすものとする。非圧縮面における運動量厚レイノルズ数  $R_{\theta_i}$  は, 中間温度

$$T_m = 0.5(T_w + T_1) + 0.22(T_r - T_1) \quad (13)$$

で評価した粘性係数  $\mu_m$  を用いると,

$$R_{\theta_i} = (\mu_1/\mu_m) R_{\theta_1} \quad (14)$$

から計算される。ここで  $R_{\theta_1} = U_1\theta/\nu_1$  である。壁が断熱 ( $T_w = T_r$ ) で, プラントル数がならば, 中間温度は, (13) 式から,

$$\frac{T_w}{T_1} = 1 + 0.144M_1^2 \quad (15)$$

となる。

### 3.3 乱流境界層

乱流境界層の計算は, Green の方法<sup>4)</sup> を用いて行なわれた。この方法は非圧縮流における Head のエントレンメント法<sup>10)</sup> を圧縮性流れの場合に拡張したものである。概略を次にのべる。

運動量積分方程式は,

$$\frac{d\theta}{dx} + (H+2-M_1^2) \frac{\theta}{U_1} \frac{dU_1}{dx} = \frac{C_f}{2} \quad (16)$$

エントレンメントの式は,

$$\frac{d\Delta}{dx} = F + (M_1^2 - 1) \frac{\Delta}{U_1} \frac{dU_1}{dx} \quad (17)$$

(16), (17) 式は,  $\theta$ ,  $H$ ,  $C_f$  および  $F$ ,  $\Delta$  の 5 つの未知数を含む ( $U_1$  と  $M_1$  は与えられるものとする)。したがって  $H$ ,  $F$ ,  $C_f$  に関する補助式が必要となる。

Head は圧縮性境界層の外側部分における密度変化はエントレンメント機構にほとんど効果を及ぼさないであろうと示唆した。Green はこの示唆に基づいて, 密度の変化は Head がエントレンメントと層の外側部分の速度の空間分布との間に打立てた関係に影響を及ぼさない, つまりエントレンメントは速度の空間分布を十分指定するような, 密度  $\rho$  を含まない量と結びつけられると考えた。その量として,

$$(H_1)_k = \int_0^{\delta} \frac{u}{U_1} dy / \int_0^{\delta} \frac{u}{U_1} \left(1 - \frac{u}{U_1}\right) dy \quad (18)$$

を採用した。この時エントレンメント  $F$  と  $(H_1)_k$  は Head の非圧縮流における  $F$  と  $H_1$  の経験的關係をみたすものと仮定する。すなわち,

$$F = 0.0306((H_1)_k - 3.0)^{-0.633} \quad (19)$$

次に  $H_i$  と  $H_1$  の関係は、実験結果から、

$$H_i = 1 + (0.9/(H_1 - 3.3))^{0.75} \quad (20)$$

$(H_1)_k$  と  $(H)_k$  の関係は、同じく実験結果から、

$$(H_1)_k = 3.4 + 1.87/((H)_k - 0.5)^{3.8} \quad (21)$$

で与えられる。さらに  $(H)_k$  と  $H_i$  の関係は、

$$(H)_k = H_i \left[ 1 + \frac{rM_1^2}{5} \frac{(H_i + 1)(H_i - 1)^2}{H_i(3H_i - 1)(2H_i - 1)} \right] \quad (22)$$

で与えられる。 $r$  は回復係数であり、現在の場合には  $r=1$  とおいた。(18)式から(22)式までが  $F$  を決めるための補助式である。

形状係数  $H$  は、境界層内の温度分布が

$$T = T_m + (T_r - T_m) \frac{u}{U_1} + (T_1 - T_r) \left( \frac{u}{U_1} \right)^2 \quad (23)$$

で与えられるとするならば、 $T_w = T_r$  の時、

$$H = \frac{T_m}{T_1} H_i + \frac{T_r}{T_1} - 1 \quad (24)$$

で与えられる (Spence<sup>11)</sup>。

最後に、表面摩擦係数  $C_f$  は中間温度  $T_m$  ((13)式)を用いて非圧縮表面摩擦係数  $\bar{C}_f$  と関連づけられる。(Spence<sup>11)</sup>。すなわち、

$$C_f = (T_1/T_m) \bar{C}_f \quad (25)$$

ここで  $\bar{C}_f$  はレイノルズ数

$$R_{\theta_1} = \frac{\mu_1}{\mu_m} R_{\theta_1} = \frac{T_1}{T_m} \left( \frac{T_1}{T_\infty} \right)^{1.5} R_\theta \quad (26)$$

において非圧縮での法則から評価された表面摩擦係数であり、非圧縮での表面摩擦法則としては、Ludwig-Tillmann の法則

$$\bar{C}_f = 0.246 \exp(-1.561H) R_{\theta_1}^{-0.368} \quad (27)$$

を用いることができる。

実際の計算順序は次の通りである。

- (i) 初期値  $\theta, d$  が与えられる。この時  $H_1 = d/\theta$  が求まる。
- (ii) (20)式から  $H_i$  を計算する、
- (iii) (22)式から  $(H)_k$  を計算する、
- (iv) (21)式から  $(H_1)_k$  を計算する、
- (v) (19)式から  $F$  がもとまる、
- (vi) (24)式から  $H$  がもとまり、(25)式から  $C_f$  がもとまる。

(vii) この時、(16)式と(17)式は、標準的な Runge-Kutta の方法で解くことができる。計算は後縁まで行なう。

### 3.4 ウェーク

非圧縮流における Squire-Young の式

$$\frac{1}{2} (\theta_\infty/\theta_T)_i = (V_{1T}/V_{\infty i})^{(H_i T + 5)/2}$$

を圧縮流の場合へ変換すると、

$$\frac{1}{2} \frac{\theta_\infty}{\theta_T} = \left( \frac{U_{1T}}{U_\infty} \right)^{(\bar{H}_T + 5)/2} \left( \frac{T_{1T}}{T_\infty} \right)^{(\bar{H}_T - 1)/4} \quad (28)$$

となる。ここで

$$\bar{H}_T = \frac{1 + H_T}{1 + 0.2M_{1T}^2} - 1$$

である。抵抗係数  $C_D$  は、

$$C_D = 2(\theta_\infty/c)$$

で与えられるから、(28)式を用いれば、

$$C_D = 2 \sum \frac{\theta_T}{c} \left( \frac{U_{1T}}{U_\infty} \right)^{(\bar{H}_T + 5)/2} \left( \frac{T_{1T}}{T_\infty} \right)^{(\bar{H}_T - 1)/4} \quad (29)$$

となる。ここで  $\sum$  は上面と下面の和をとることを示す。(29)式からわかるように、翼型抗力  $C_D$  は後縁における境界層外速度に依存する。したがって、境界層外速度分布として非粘性速度分布を用いる時には、粘性の効果を考慮して適当に後縁速度を推定することが必要である。本方法では非圧縮の場合<sup>8)</sup>と同じように、後縁付近 (たとえば 95% 弦長点より後方) の速度を直線的に後縁まで外そうした値をもって、後縁における速度の値とした。

## 4. 結果と検討

まず最初に、本報告で採用した層流と乱流境界層の計算法の精度を調べた。図 2 は壁が断熱 ( $T_w = T_r$ ) で、境界層外速度が、

$$U_1 = U_\infty (1 - x/c)$$

で与えられる層流境界層について、表面摩擦に関するパラメータ  $t_w$  を計算した結果である。主流のマッハ数は 4 である。同図には Curle の近似解<sup>12)</sup>と、Williams の厳密解が与えたはく離点位置とが、比較のため示されている。本方法の結果は、Curle の解とよく一致しているが、はく離点付近では両者の結果は若干異なっている。Williams の与えたはく離点 ( $(x/c)_{sp} = 0.056$ )<sup>13)</sup>と、本方法の与えるはく離点 ( $(x/c)_{sp} = 0.0625$ ) は、12% の精度で一致している。

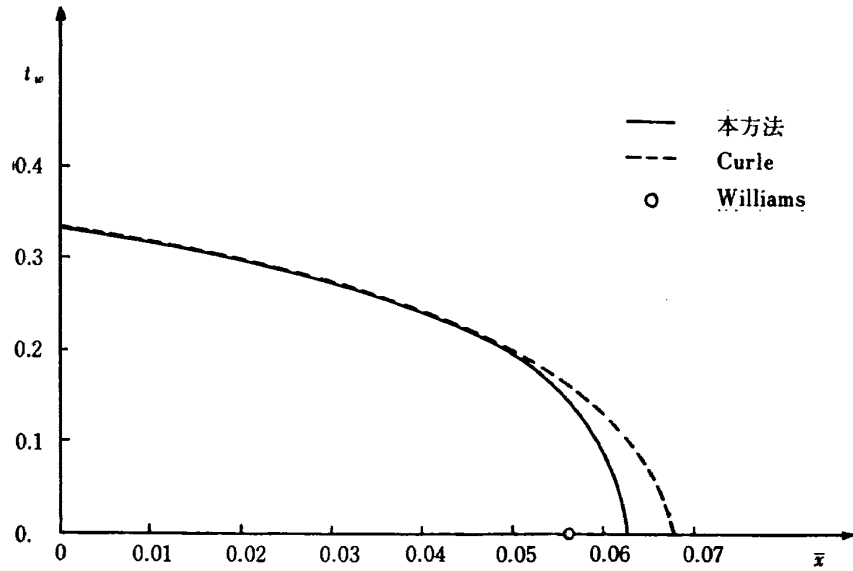


図 2  $T_w = T_r$ ,  $U_1 = U_\infty (1 - \bar{x})$  の場合の表面摩擦 ( $M_\infty = 4$ )

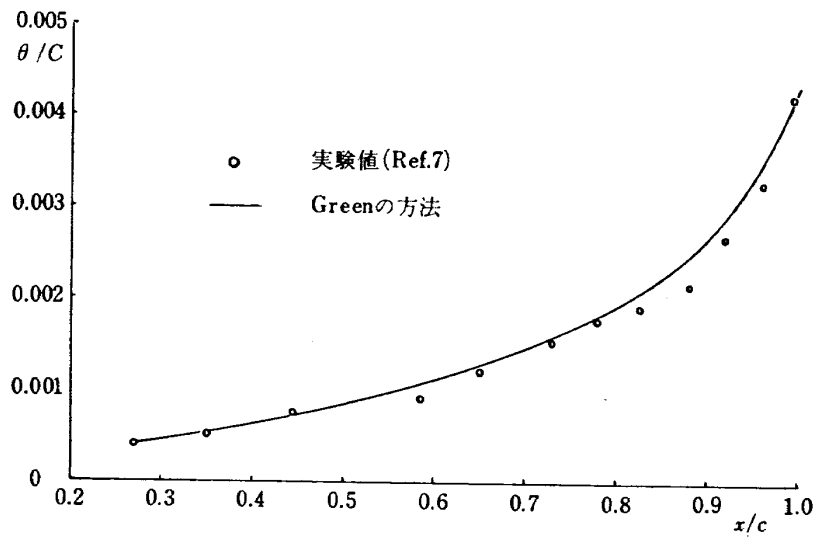


図 3(a) Green の方法による NPL-3111 翼型面上の運動量厚の計算

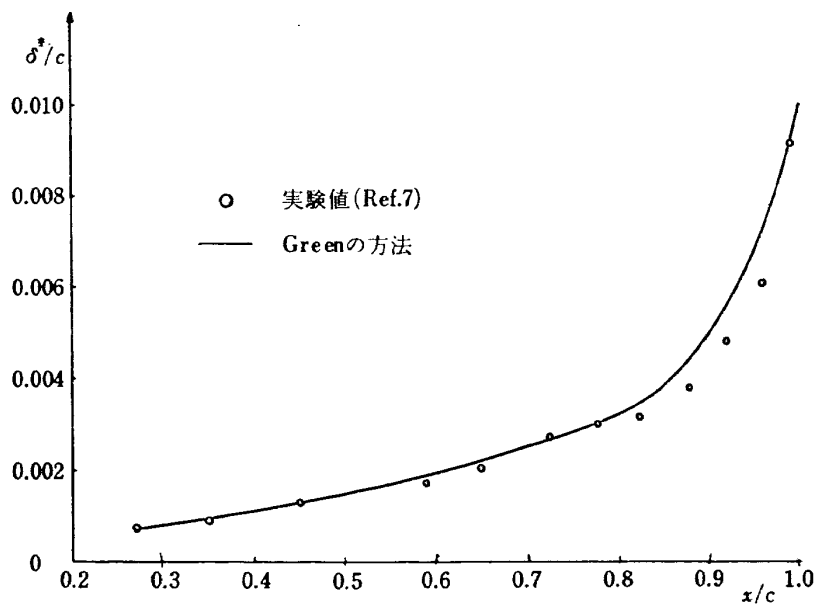


図 3(b) Green の方法による NPL-3111 翼型面上の排除厚の計算



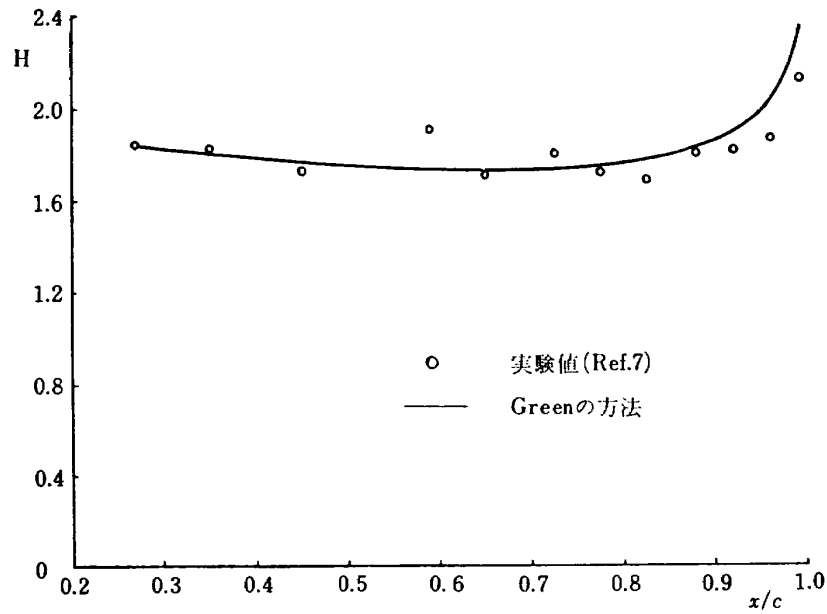


図 3(c) Green の方法による NPL-3111 翼型面上の形状係数の計算

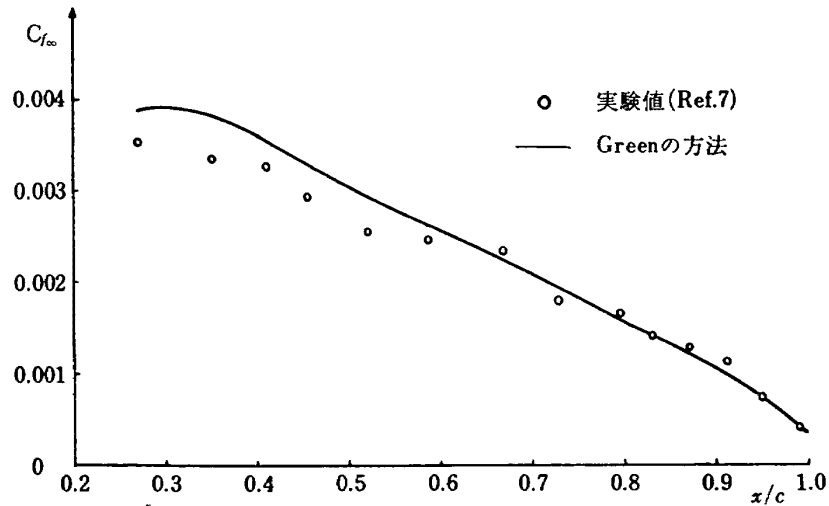


図 3(d) Green の方法による NPL-3111 翼型面上の表面摩擦の計算

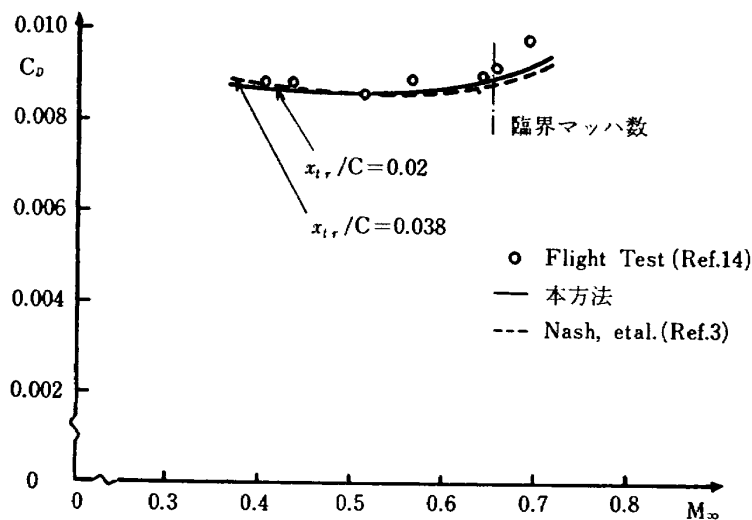


図 4 NACA-2218 翼型 ( $\alpha=0$ ,  $R_o \approx 2 \times 10^7$ )

次に、図 3 (a), (b), (c), (d) は Firmin の実験結果<sup>7)</sup>と Green の方法で計算した結果を比較したものである。境界層外の速度分布は実験的に測定されたものを用いた。運動量厚、排除厚、形状係数および表面摩擦の比較において、一致は良好である。ただ形状係数については、後縁に近づくにつれて実験値よりも大き目に予測されてしまう。後縁付近の境界層のふるまいをさらに正確に予測する理論の発展が必要である。

図 4, 図 5, 図 6 は、3つの翼型について、本計算法によって翼型抗力をもとめた結果を示したものである。まず図 4 は NACA-2218 翼型の翼型抗力  $C_D$  をマッハ数に対して示したものである。実験は Mair<sup>14)</sup>によって実機を使って行なわれたもので、風洞実験では避けられない風洞壁干渉のようなものもなく、レイノルズ数も  $10^7$  のオーダーと大きいので、計算法のチェックにはふさわしいデータである。非粘性速度分布は、Van Dyke の 2 次理論<sup>15)</sup>を使って、迎角  $\alpha=0^\circ$  で計算したものをを用いた。遷移点はほぼ前縁 ( $x_{tr}/c=0.02$ ) に与えた。実機飛行実験のためレイノルズ数が大きいので、遷移点を前縁付近に与えることは妥当であると考えられる。この時、実験値との一致は良好である。また同図には Nash, et al. の方法で計算された結果も示されている。低いマッハ数領域では、Nash, et al. の方法の方が実験値とよく一致しているが、臨界マッハ数 ( $M_\infty=0.65$ ) に近づくにつれて、本方法の方がより実験値に近い値を与えることがわかる。臨界マッハ数を越えると、実験値と計算値の一致は悪くなるが、それは翼面上に衝撃波が発生しはじめるからである。このように翼面上に衝撃波が発生し、局所的に超音速な領域が存在しているマッハ数領域（遷音速領域）においては、本計算法はその有効性を失なう。それは、本方法で使ったポテンシャル流の計算法 (Van Dyke の方法) がこのマッハ数領域では適用できないことと、衝撃波と境界層の干渉の現象を、本方法で使った境界層理論が予測できないという二つの点によっている。したがって遷音速領域で精度のよい計算を行なうためには、本方法とは全く別のアプローチが必要であろう。しかしながら、亜臨界の高亜音速の場合には、本計算法は高レイノルズ数に対しても十分良い結果を与えることがわかる。

図 5 は NACA-64A010 翼型の場合である。実験値は NACA で行なわれた風洞実験<sup>16)</sup>から引用した。計算値は、Van Dyke の方法でもとめた非粘性速度分布を用いて計算された。遷移点は 50% 弦長点 ( $x_{tr}/c=0.5$ ) に与えたが、これは非圧縮流での計算法<sup>8)</sup>でもと

められた遷移点位置が、マッハ数によって大きく変化しないと仮定して、その位置をそのまま用いたものである。(なお、NACA の実験は自然遷移の条件の下で行なわれたが、遷移点位置は報告されていない)。低いマッハ数で計算値が少し大き目になるが、 $M_\infty=0.7$ までは実験値と計算値はよく一致している。 $M_\infty>0.7$ で一致が悪くなるのは、図 4 の場合に説明した事情と全く同じである。

図 6 は、厚み比 18.5% の Joukowski 翼型の場合について、いくつかの計算法によって計算された翼型抗力の値をマッハ数に対して示したものである。迎角  $\alpha=0^\circ$ 、レイノルズ数  $Re=10^7$ 、遷移点  $x_{tr}/c=0.094$  の条件の下で計算した。同図の実線は本方法の結果で、速度分布は Van Dyke の方法でもとめたものを使った。いっぽう破線は Nash, et. al. の方法の結果であって、速度分布は Weber の方法でもとめた非圧縮速度分布を、Wilby の圧縮性修正を使って変換したものをを用いている<sup>18)</sup>。計算が行なわれたマッハ数領域全体にわたって、両者は相当な違いを示している。その理由として考えられるものは、境界層外速度分布のちがいと、乱流境界層の計算法のちがいである。前者については次図で少し検討する。後者については、Nash, et. al. は乱流境界層の計算に、圧縮性変換と Spence の方法<sup>19)</sup>を組合せたものをを用いたが、乱流境界層の場合には層流境界層の場合ほど明確に、圧縮性変換が圧縮面と非圧縮面の対応を与えないことはよく知られている。さらに筆者の経験によれば Spence の方法は一般に運動量厚  $\theta_i$  を大き目に予測する傾向がある。これらの事情のために両者の間にちがいが生じたものと考えられる。同図にはまた、非粘性速度分布として Kaplan の方法<sup>20)</sup>で計算したものをを用いて、Young & Winterbottom<sup>21)</sup> が計算した翼型抗力の値が、 $M_\infty=0.685$  の時に示されている。この図から言えることは、当然のことであるが、計算法のちがいで、使用した非粘性速度分布のちがいで、予測される翼型抗力の値が異なることが言える。

図 7 は上に述べた速度分布のちがいで、予測される翼型抗力の値がどの程度異なってくるかを、図 6 の場合と同じ条件に対して、 $M_\infty=0.685$  の時に計算した結果を示したものである。四つの非粘性速度分布、すなわち Weber/Wilby の方法、Weber の方法、Kaplan の方法および Van Dyke の方法でそれぞれ計算された速度分布を使って、本計算法でもとめた翼型抗力の値を、同図中に示した。Kaplan の速度分布を除いては、他の三つの速度分布はすべて臨界マッハ数を

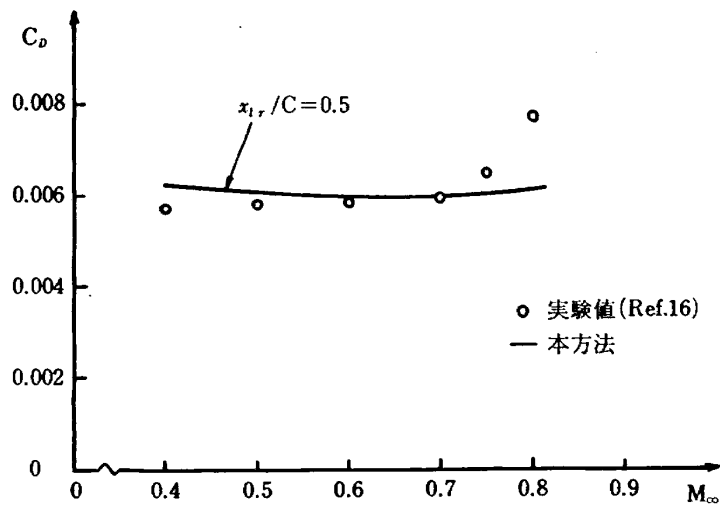


図 5 NACA-64A010 翼型 ( $\alpha=0^\circ$ ,  $R_o=1.2\sim 1.8\times 10^6$ )

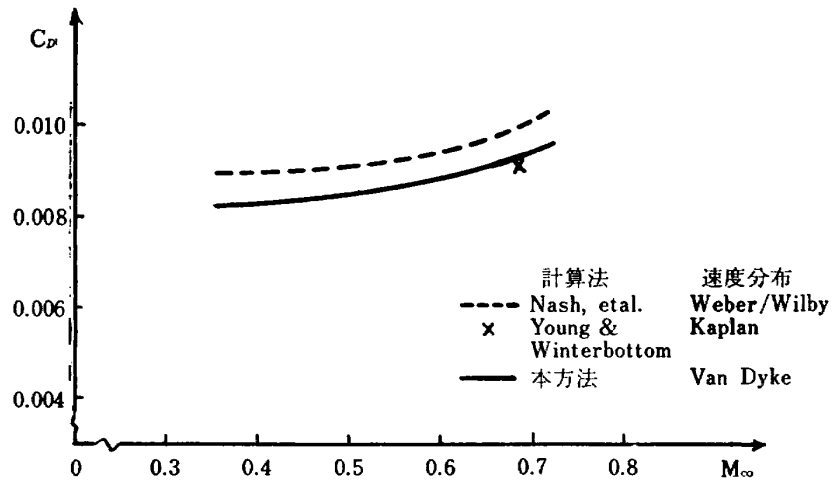


図 6 Joukowski 翼型 ( $\alpha=0^\circ$ ,  $t/c=0.185$ ,  $x_{tr}/c=0.094$ ,  $R_o=10^7$ )

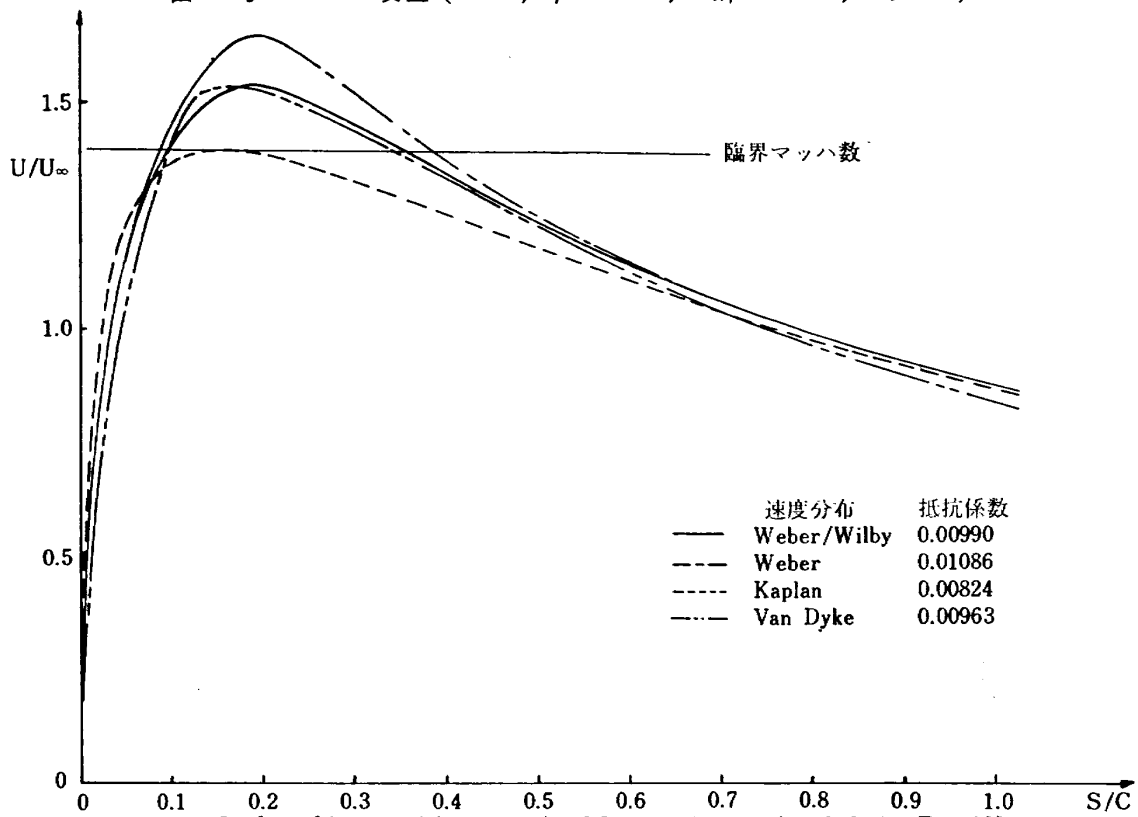


図 7 Joukowski 翼型 ( $t/c=0.185$ ),  $M_\infty=0.685$ ,  $x_{tr}/c=0.094$ ,  $R_o=10^7$

越える領域を持つので、このマッハ数 ( $M_\infty=0.685$ ) において圧縮性修正を適用することには、精度の点で問題があるが、非粘性速度分布のちがいによる翼型抗力のちがいを見るのが目的であるので、この問題はここでは考えないことにする。Weber/Wilby と Weber の速度分布は主として超臨界マッハ数領域において大きく異なるだけであるが、予測された抵抗値は約 10% もことなっている。一方、Weber/Wilby と Van Dyke の速度分布はほとんど同じであるために、予測された抵抗値のちがいも小さい。また Kaplan の速度分布は最大速度の値が一番小さいが、それに対応して予測された抵抗値も一番小さくなっている。このように速度分布のちがいは翼型抗力の予測値に大きな影響を及ぼすが、これは Osborne<sup>18)</sup> によって指摘されたように、翼型の上下面での両方で、速度分布のちがいによる影響がたしあわされるからである。したがって翼型抗力の計算を正確に行なうには、粘性の影響だけでなく、非粘性流における圧縮性の影響も精度よく評価するこ

とが非常に重要である。

本計算法はまた、おだやかなマッハ数 ( $M_\infty < 4$ ) の超音速流中の翼型の抗力を、少なくとも定性的に評価するために用いることができる。すでに述べたように、翼型表面上に衝撃波が存在しているマッハ数領域(遷音速領域)では本方法は適用できないが、マッハ数がさらに上って、衝撃波が翼型の前縁と後縁に付着するようになると、適用できるようになる。この場合には翼面上の圧力分布(したがって速度分布)は、例えば Busemann の二次理論によって非常に精度よく計算できるので、それを用いて翼型表面上の境界層の計算を行なうことができるからである。前縁における衝撃波と境界層の干渉は、そこでは境界層が十分に発達していないので重要な影響を与えないであろう。また後縁における衝撃波と境界層の干渉は、後縁付近の境界層に影響を及ぼすが、翼型の迎角が大きくなればその影響の及ぶ範囲は小さい。またマッハ数が高くなると、断熱で  $\mu \propto T$  という仮定は正しくなくなるが、

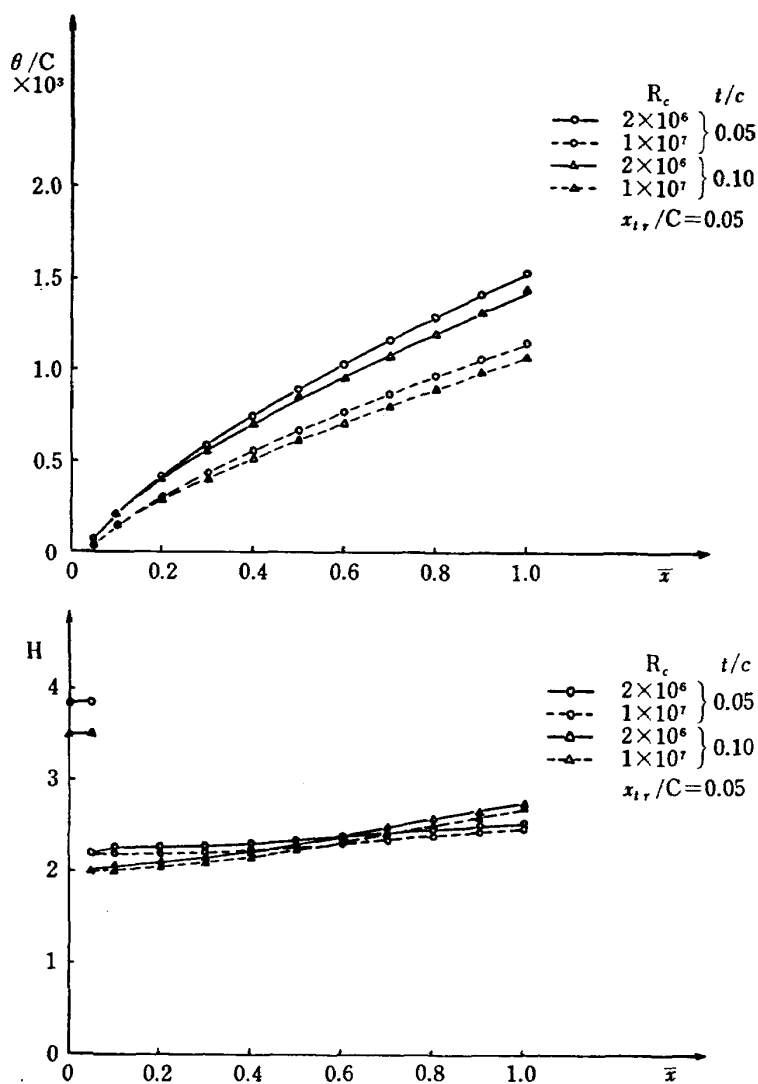


図 8 biconvex 翼型, 運動量厚と形状係数 ( $M_\infty=1.5$ )

$M_\infty$  が 4 以下の超音速流ならば、この仮定でもそれ程大きな誤差は生じない。例えば、断熱、平板層流境界層の表面摩擦は、 $\mu \propto T$  と  $\mu \propto T^{\omega}$  ( $\omega=0.8$ ) に対して、 $M_\infty=4$  では前者は後者より約 10% 大きくなるだけである<sup>24)</sup>。表面における熱伝達の効果についても、断熱の場合と熱伝達がある場合とでは、 $M_\infty=4$  では表面摩擦に 10% 程度の相異しか与えない。低超音速マッハ数ではこの事情はもっと好転する。乱流境界層に対する Green の方法は、 $M_\infty=3$  までは実験結果とよい一致を示すことが報告されている<sup>25)</sup>。それゆえ、対象を低超音速マッハ数領域に限れば、本計算法は十分に有効であると考えられる。「序」においてのべたように、超音速流においては翼型抗力は、翼型表面上の圧力を積分して得られる圧力抵抗と、局所表面摩擦を積分して得られる摩擦抵抗の和として得られる。一計算例として biconvex 翼型の境界層特性と抵抗特性を示す。非粘性速度分布は Busemann の二次理論<sup>22)</sup>を用

いて計算した。図 8 から図 14 までは、biconvex 翼型の境界層特性を示したものである。

図 8 はマッハ数  $M_\infty=1.5$  における厚み比 5% と 10% の biconvex 翼型の運動量厚と形状係数を示したものである。レイノルズ数  $R_0=2 \times 10^6$ ,  $1 \times 10^7$  の二つの場合について計算した。厚み比が一定ならば、運動量厚はレイノルズ数が増すと減少する。形状係数も同じ傾向をもつが、レイノルズ数による変化は小さい。またレイノルズ数が一定ならば、運動量厚は厚み比が増すと減少する。形状係数については、翼型の前半では厚み比 5% の方が 10% のものより大きい、後半ではそれが逆転している。しかし厚み比による形状係数の変化は小さいことがわかる。

図 9 は厚み比 5% の biconvex 翼型について、レイノルズ数を一定 ( $R_0=2 \times 10^6$ ) にして、マッハ数を変えた時の運動量厚と形状係数を示したものである。運動量厚はマッハ数が増すと減少する傾向にあるが、形

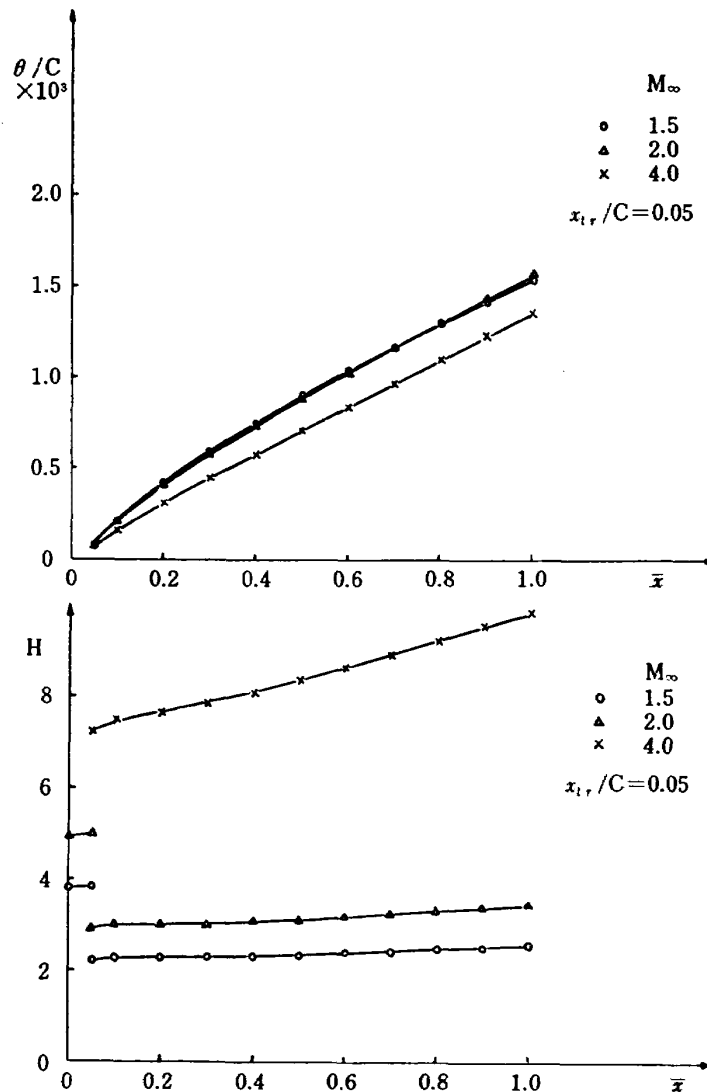


図 9 biconvex 翼型、運動量厚と形状係数  
 ( $t/c=0.05$ ,  $R_0=2 \times 10^6$ )

状態係数はマッハ数の増加とともに急激に増加する。これは形状係数においては、 $M_1^3$  の項が含まれるので、マッハ数が大きくなるとこの項の寄与が大きくなるためである。なお遷移点は5%弦長点に与えた。

図10は同じく厚み比5%のbiconvex翼型の境界層の排除厚を示したものである。遷移点は5%弦長点である。マッハ数が一定ならば、排除厚はレイノルズ

数の増加とともに減少する。またレイノルズ数が一定ならば、排除厚はマッハ数が増すと急激に増すことがわかる。 $M_\infty=4$  では、排除厚は後縁付近では1%弦長の厚さになる。厚み比5%の翼型に対して1%弦長の排除厚はかなり大きい。

図11は、biconvex翼型の表面摩擦係数  $C_{f\infty}$  を示したものである。マッハ数  $M_\infty=2.0$ 、レイノルズ数

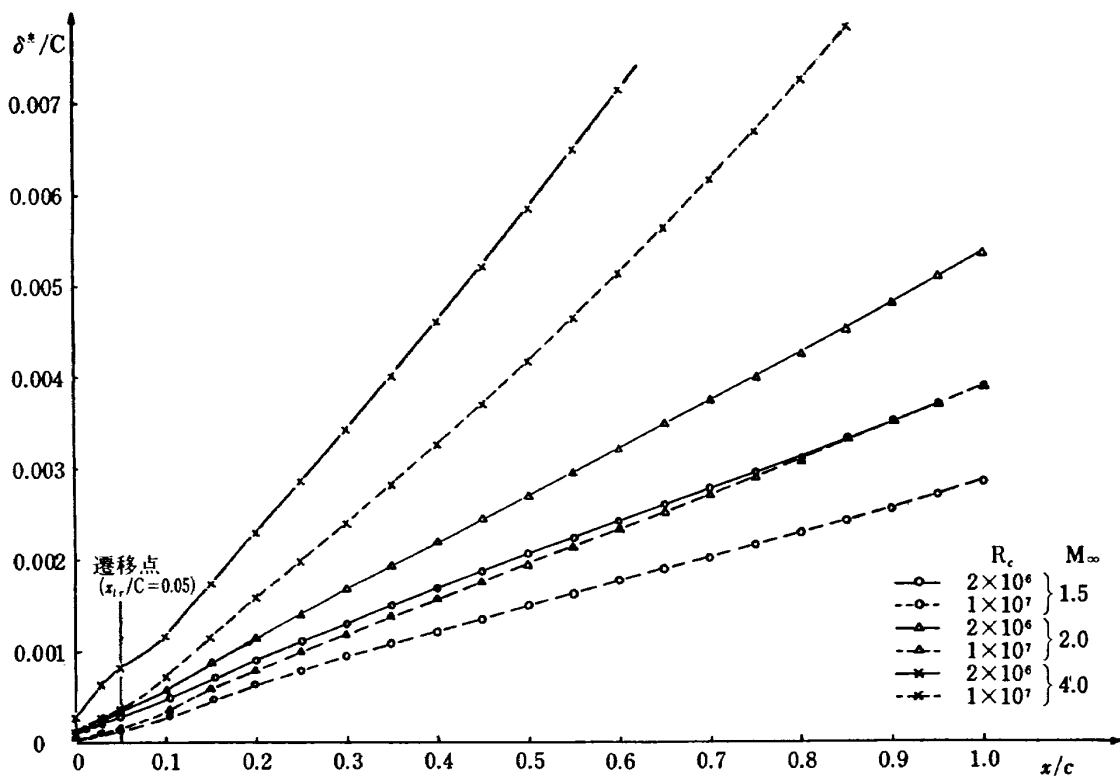


図10 biconvex 翼型, 排除厚 ( $t/c=0.05$ )

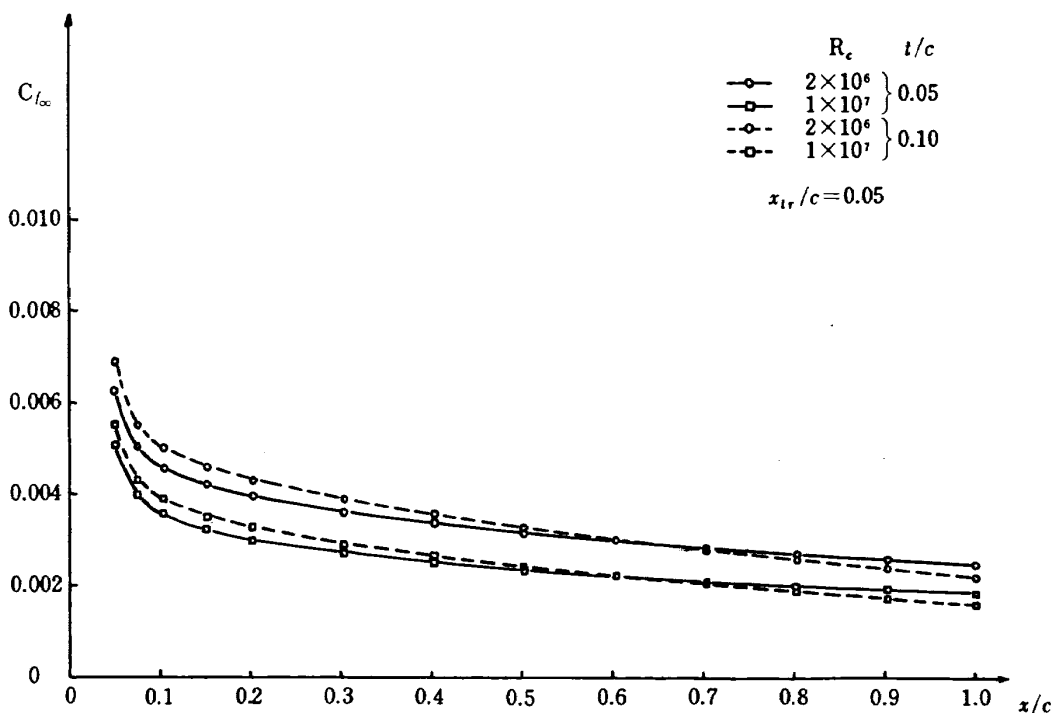


図11 biconvex 翼型の表面摩擦係数のレイノルズ数による変化,  $M_\infty=2.0$

$R_o=2 \times 10^6, 1 \times 10^7$  の条件の下で厚み比 5% と 10% の翼型について計算した。遷移点 5% は弦長点に与えた。厚み比が一定ならば、 $C_{f\infty}$  はレイノルズ数が増すと減少する。またレイノルズ数が一定ならば、 $C_{f\infty}$  は翼型の前半では厚み比 10% の方が大きい、後半では逆に厚み比 5% の方が大きくなっている。しかしこのマッハ数では、厚み比による  $C_{f\infty}$  の変化はそれほど大きくはない。

図 12 は、マッハ数  $M_\infty=4$  の場合の表面摩擦係数を示したものである。傾向は  $M_\infty=2$  の場合と同じであるが、レイノルズ数による変化（厚み比が一定の場合）の大きさは、小さくなっている。一方、レイノルズ数を一定にした時の、厚み比による  $C_{f\infty}$  の変化量は、逆に大きくなっていることがわかる。

図 13 は、厚み比 5% の biconvex 翼型の表面摩擦係数  $C_{f\infty}$  数の、レイノルズ数を一定 ( $R_o=2 \times 10^6$ ) にした

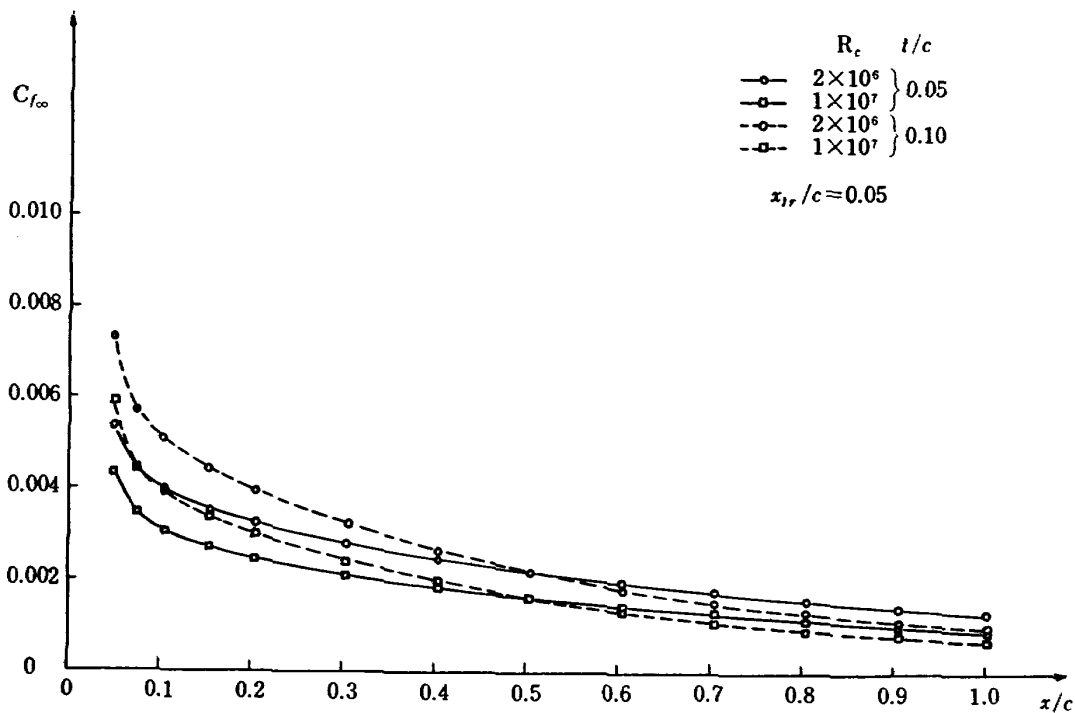


図 12 biconvex 翼型の表面摩擦係数のレイノルズ数による変化,  $M_\infty=4.0$

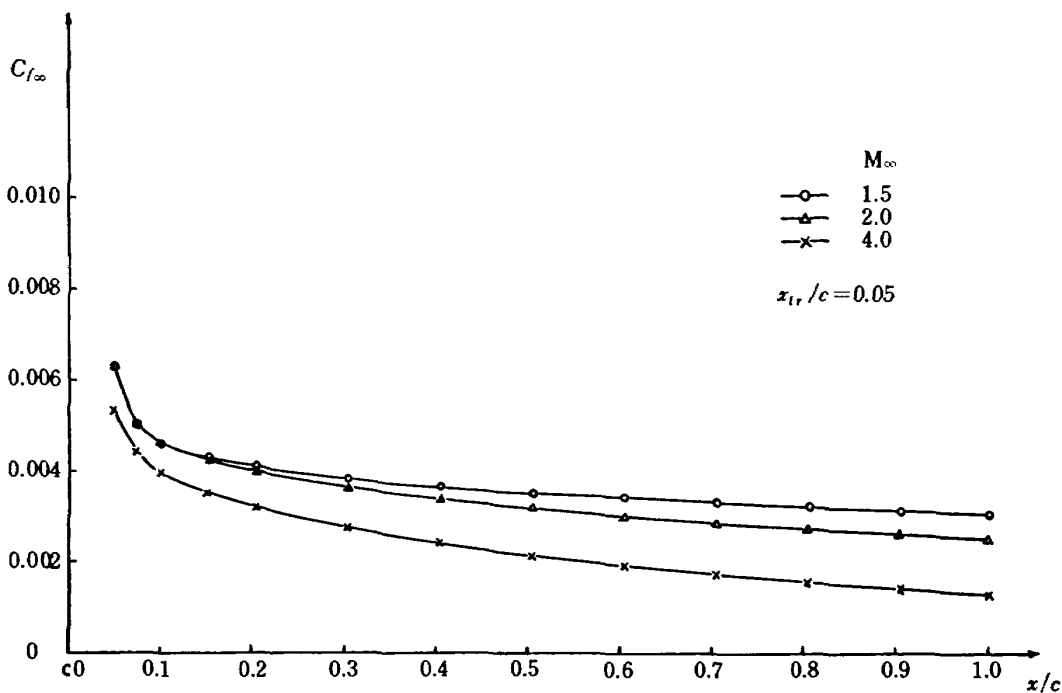


図 13 biconvex 翼型 ( $t/c=0.05$ ) の表面摩擦係数,  $R_o=2 \times 10^6$

時のマッハ数による変化を示したものである。遷移点は5%弦長点である。 $C_{f\infty}$ はマッハ数が増すと減少することがわかる。

次に biconvex 翼型の抵抗特性を見てみよう。すでにのべたように、翼型抗力  $C_{D_T}$  は圧力抵抗  $C_{D_{WB}}$  と表面摩擦抵抗  $C_{D_F}$  の和としてもとめられた。図10で見たように、翼型表面上の排除厚の成長はマッハ数が増すにつれて大きくなるので、抵抗特性を評価する際にこの排除厚の効果を考慮するのが妥当である。われわれは、排除厚の効果は、その厚さだけ翼型の形状が変えられるというモデルを採用することにする。この時、biconvex 翼型の形状を  $y = \pm y(x)$  とすれば、実質的な翼型の形状は

$$y^* = \pm y(x) \pm \delta^* \quad (30)$$

で定義される。(複号は+を上面、-を下面とする)。Busemann の二次理論によれば、この変形された翼型の圧力抵抗  $C_{D_{WB}}$  は、迎角  $\alpha=0$  の時、

$$C_{D_{WB}} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \left\{ \left( \frac{dy_e^*}{dx} \right)^2 + \left( \frac{dy_t^*}{dx} \right)^2 \right\} dx \quad (31)$$

で与えられる。ここで、 $y_e^*$  および  $y_t^*$  は、それぞれ中心線および対称翼型の座標である。対称翼に対しては、 $y_e^* = 0$ 、 $y_t^* = y(x) + \delta^*$  であるから、結局(31)式は、

$$C_{D_{WB}} = \frac{4}{\sqrt{M_\infty^2 - 1}} \int_0^1 \left\{ \frac{dy}{dx} + \frac{d\delta^*}{dx} \right\}^2 dy \quad (32)$$

となる。排除厚の効果を考慮しない場合の圧力抵抗

$C_{D_{WB}}$  は、上式で  $d\delta^*/dx$  の項を0とおくことによって得られる。表面摩擦抵抗  $C_{D_F}$  に及ぼす排除厚の影響は、(30)式で与えられる翼型に対して速度分布を計算し、それを用いて表面摩擦  $C_{f\infty}$  をもとめ、積分することによって評価することができる。しかし  $C_{D_F}$  に及ぼす排除厚の影響は小さい。例えば、図14は  $M_\infty = 4$ 、 $R_c = 10^7$  の時の、厚み比5%のbiconvex翼型の  $C_{f\infty}$  を、排除厚の効果を含んだ場合と含まない場合について示したものである。排除厚の効果を考慮に入ると、 $C_{f\infty}$  は増加することがわかる。しかしその増加分  $\Delta C_{f\infty}$  は、全領域にわたってほぼ0.0001のオーダーであり、したがって表面摩擦抵抗の増加分  $\Delta C_{D_F}$  も0.0001のオーダーである。この時、比  $\Delta C_{D_F}/C_{D_F}$  は約0.02である。マッハ数が4以下ではこの比の値はもっと小さくなる。また図15は、圧力抵抗に及ぼす排除厚の効果を示したものである。排除厚の効果による圧力抵抗の増加分、 $\Delta C_{D_B} = C_{D_{WB}} - C_{D_W}$  の  $C_{D_W}$  に対する比、 $\Delta C_{D_B}/C_{D_W}$  がマッハ数に対して示されている。マッハ数が2以下では、排除厚の効果は圧力抵抗を増加させるが、2以上では逆に圧力抵抗を減少させることがわかる。 $M_\infty = 4$ 、 $R_c = 10^7$  の時、排除厚の効果により、圧力抵抗は排除厚がない場合の圧力抵抗  $C_{D_W}$  の約3%も減少することがわかる。

さて、図16(a),(b)は、厚み比5%のbiconvex翼型の抵抗特性を示したものである。翼型抗力  $C_{D_T}$ 、表面摩擦抵抗  $C_{D_F}$ 、圧力抵抗  $C_{D_{WB}}$  がマッハ数に対して示されている。 $C_{D_T}$  はマッハ数とともに急激にへる。これは主として圧力抵抗  $C_{D_{WB}}$  の減少によるものである。 $C_{D_F}$  はマッハ数によって、それほど大

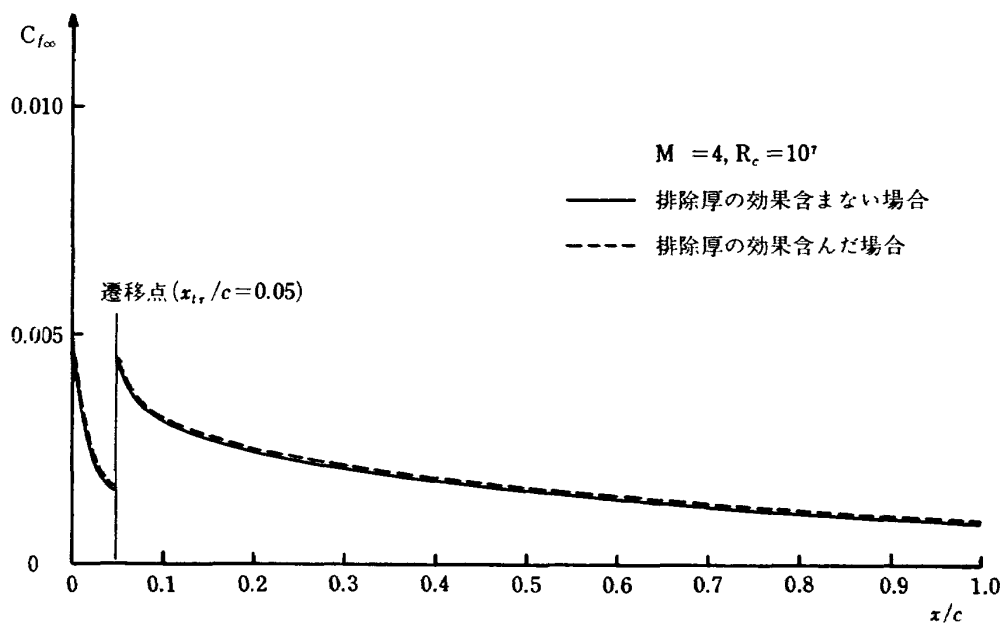


図14 biconvex 翼型の表面摩擦係数に及ぼす排除厚の効果



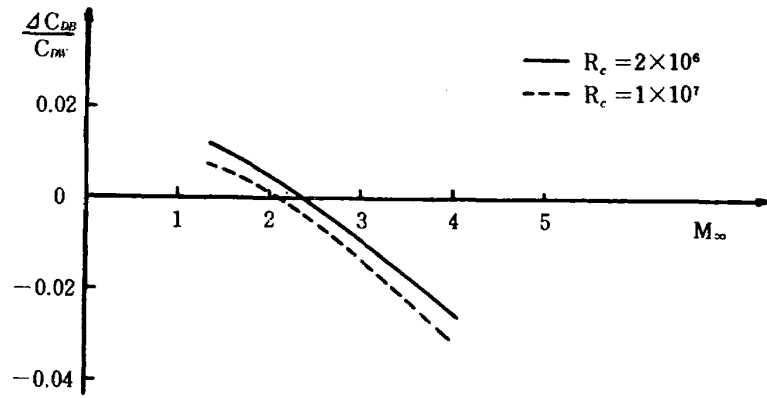


図 15 境界層の圧力抵抗に及ぼす効果

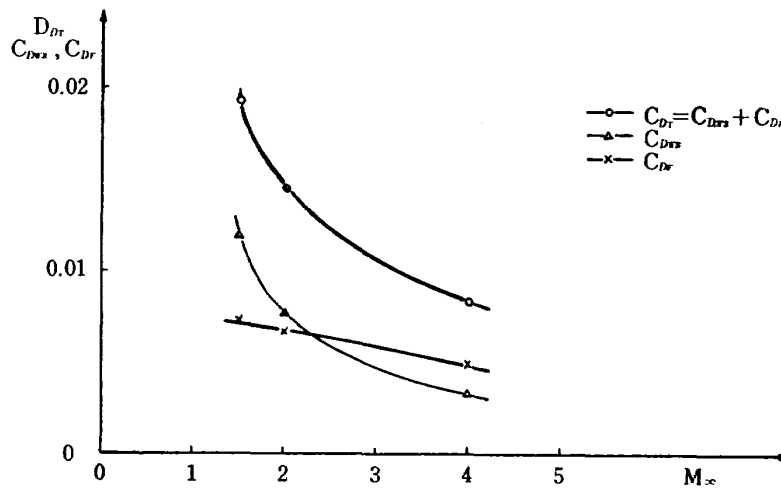


図 16(a) biconvex 翼型抵抗係数 (\$t/c=0.05\$, \$R\_e=2 \times 10^6\$)

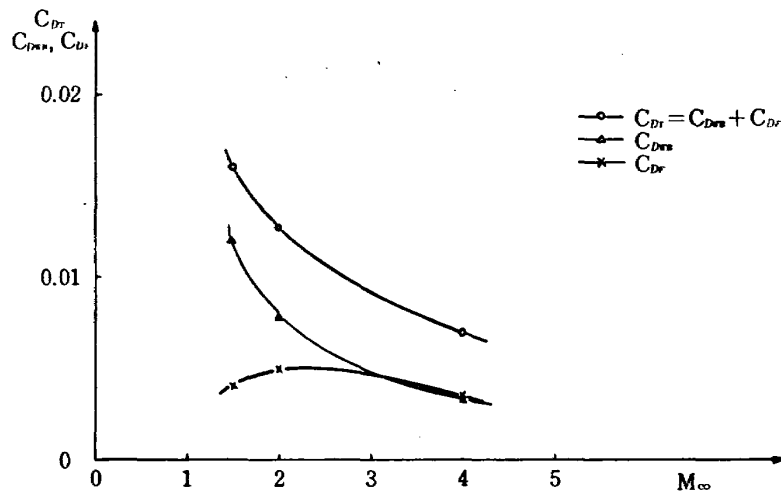


図 17(b) biconvex 翼型抵抗係数 (\$t/c=0.05\$, \$R\_e=1 \times 10^7\$)

きく変化しないからである。レイノルズ数  $R_e=2 \times 10^6$  の場合には、 $M_\infty > 2.5$  では、 $C_{D_F}$  の方が  $C_{D_{WB}}$  より大きくなっている。したがって、表面摩擦抵抗の全抵抗への寄与が大きいことがわかる。しかし、 $R_e=10^7$  では、 $M_\infty > 3$  で  $C_{D_F} \approx C_{D_{WB}}$  であり、レイノルズ数が大きくなると、表面摩擦抵抗の全抵抗への寄与は小さくなることをわかる。

## 5. 結 論

圧縮性流れにおける翼型の翼型抗力を計算する方法を、現在利用できる境界層理論を使って構成した。計算に際して必要な入力値は、境界層外速度と遷移点位置である。物理的に妥当な位置に遷移点を与えると、本計算法は、亜臨界マッハ数の亜音速領域における翼型

抗力を、実用上十分の精度でもって評価することができる。この場合、非粘性速度分布を圧縮性修正を使ってもとめる時には、圧縮性の効果を十分良く評価できるものを使用することが重要であることがわかった。さらに、本計算法は超音速における翼型の境界層特性を少なくとも定性的に調べるのに使うことができる。

### 参 考 文 献

- 1) 佐藤淳造: Peak 翼型について, 日本航空宇宙学会誌, 第 18 巻, 第 201 号, pp. 374~388
- 2) J. A. Blackwell, Jr. Effect of Reynolds Number and Boundary Layer Transition on Shock-induced Separation. AGARD C.P. 35, 1968, pp. 21.1~21.10
- 3) J. F. Nash, T. H. Moulden and J. Osborne: On the variation of profile drag coefficient below the critical Mach Number. ARC C.P. 758, 1963
- 4) J. E. Green: The Prediction of Turbulent Boundary Layer Development in Compressible Flow, J. Fluid Mech. Vol. 31, 1968, pp. 753-778
- 5) J. F. Nash: Turbulent-boundary-layer behaviour and the auxiliary equation. A.R.C.C.P. 835, 1965
- 6) P. Bradshaw and D. H. Ferriss: Calculation of boundary-layer development using turbulent energy equation II—Compressible flow on adiabatic walls. NPL Aero. Rep. 1217, 1966
- 7) M. C. P. Firmin and T. A. Cook: Detailed exploration of the compressible, viscous flow over two-dimensional aerofoils at high Reynolds Number. ICAS Paper No. 68-09, 1968
- 8) 河崎俊夫, 石田洋治: 低マッハ数における翼型の翼型抗力の計算, 航空宇宙技術研究所報告, TR-198, 1970
- 9) M. R. Head: An Approximate Method for Calculating the Laminar Boundary Layer in Two-Dimensional Incompressible Flow. ARC R & M 3123, 1957
- 10) M. R. Head: Entrainment in the Turbulent Boundary Layer. ARC R & M 3152, 1960
- 11) D. A. Spence: The Growth of Compressible Turbulent Boundary Layers on Isothermal and Adiabatic Wall. ARC R & M 3191, 1961
- 12) N. Curle: The Steady Compressible Laminar Boundary Layer, with Arbitrary Pressure Gradient and Uniform Wall Temperature. Proc. Roy. Soc. A249, 1958, p. 206
- 13) N. Curle: A Two-Parameter Method for Calculating the Two-Dimensional Incompressible Laminar Boundary Layer. Jour. Roy. Aero. Soc., Vol. 71, 1967, p. 117 の中にこの数値が与えられている。
- 14) B. A. Mair: Flight Measurements of Profile Drag at High Speeds. ARC R & M 2555, 1951
- 15) M. D. Van Dyke: Second-order subsonic airfoil theory including edge effects. N.A.C.A. Rep. 1274, 1956
- 16) L. S. Stiever, Jr.: Effects of subsonic Mach number on the forces and pressure distributions on four NACA 64A-series airfoil sections at angles of attack as high as 28°. NACA TN 3162, 1954
- 17) J. H. Preston: The minimum Reynolds number for a turbulent boundary layer and the selection of a transition device. J. Fluid Mech., Vol. 3, 1958, p. 373
- 18) J. Osborne: The Variation of Profile Drag with Mach Number up to the Critical Value; a Comparison of Recent Predictions with Early Flight and Wind-Tunnel Measurements and a Comment on an Earlier Prediction. ARC R & M 3520, 1968
- 19) D. A. Spence: The development of turbulent boundary layers. J. Aero. Sci. 1956, p. 3
- 20) C. Kaplan: Compressible flow about symmetrical Joukowski profiles. NACA Rept. 621, 1938
- 21) A. D. Young & N. E. Winterbottom: Note on the effect of compressibility at subsonic Mach numbers in the absence of shock waves. ARC R & M 2400, 1940
- 22) A. Busemann: Aerodynamischen Auftrieb bei Überschallgeschwindigkeit, Lufo. Bd. 12, 1935, S. 210~220
- 23) J. A. Bennett & S. H. Goradia: Method for analysis of Two-Dimensional airfoils, with subsonic and transonic application, Lockheed Company, ER 8591
- 24) H. Schlichting: Boundary Layer Theory. 1960 McGraw Hill
- 25) W. J. Sumner & J. R. Shanebrook: Entrainment Theory for Compressible, Turbulent Boundary Layer on Adiabatic Walls. AIAA Journal Vol. 9, No. 2, 1971, p. 331
- 26) N. Curle: The Laminar Boundary Layer Equations (1962), Clarendon Press, Oxford.

## 付録 本文 (11) 式の導出

まず運動量厚, 排除厚はそれぞれ

$$\theta = \int_0^{\delta} \frac{\rho u}{\rho_1 U_1} \left(1 - \frac{u}{U_1}\right) dy, \quad \delta^* = \int_0^{\delta} \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_1 U_1}\right) dy$$

で与えられる。ここで座標変換,  $dy = (\rho_1/\rho) dY$  を使  
うと,

$$\begin{aligned} \theta &= \int_0^{\delta} \frac{u}{U_1} \left(1 - \frac{u}{U_1}\right) dY = \Delta \int_0^1 \frac{u}{U_1} \left(1 - \frac{u}{U_1}\right) d(Y/\Delta) \\ &= \Delta(c_1 - c_2) \end{aligned} \quad (\text{A-1})$$

$$\delta^* = \delta - \int_0^{\delta} \frac{u}{U_1} dY = \delta - \Delta c_1 \quad (\text{A-2})$$

ここで,  $c_1 = \int_0^1 f(t) dt$ ,  $c_2 = \int_0^1 \{f(t)\}^2 dt$  である。断熱,  
プラントル数 1 の場合, 境界層内の温度分布は, Crocco  
によれば,

$$\frac{T}{T_1} = 1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \left(1 - \frac{u^2}{U_1^2}\right) \quad (\text{A-3})$$

しかるに, ((A-3)式を使う)

$$\begin{aligned} \delta &= \int_0^{\delta} dy = \int_0^{\delta} \frac{\rho_1}{\rho} dY = \int_0^{\delta} \frac{T}{T_1} dY \\ &= \int_0^{\delta} \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 - \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \frac{u^2}{U_1^2}\right\} dY \\ &= \Delta \left\{ \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) - \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 c_2 \right\} \end{aligned} \quad (\text{A-4})$$

したがって, (A-1)と(A-4)より,

$$\frac{\delta}{\theta} = \frac{1}{c_1 - c_2} \left\{ \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2\right) - \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 c_2 \right\}$$

また非圧縮流では,  $\delta = \Delta$  ゆえ, (A-1)より

$$c_1 - c_2 = (\theta/\delta)_i \quad (\text{A-5})$$

となる。それゆえ,

$$\frac{\delta}{\theta} = \left(\frac{\delta}{\theta}\right)_i \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 (1 - c_2)\right\} \quad (\text{A-6})$$

また, (A-1)と(A-2)より, 非圧縮流の場合には,

$$H_i = \left(\frac{\delta^*}{\theta}\right)_i = \frac{1 - c_1}{c_1 - c_2}$$

となる。これと(A-5)とから,

$$1 - c_2 = \left(\frac{\theta}{\delta}\right)_i (H_i + 1) \quad (\text{A-7})$$

をうる。(A-7)を(A-6)へ代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{\delta}{\theta} &= \left(\frac{\delta}{\theta}\right)_i \left\{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 \left(\frac{\theta}{\delta}\right)_i (H_i + 1)\right\} \\ &= \left(\frac{\delta}{\theta}\right)_i + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2 (H_i + 1) \end{aligned}$$

が得られる。

TR-253 正 誤 表

頁	欄	行	誤	正
1	右	4	Stewarson	Stewartson
4	右	9	プラントル数がならば	プラントル数が 1 ならば
5	左	6	(22) 式の右辺 [1+……] 内の第 2 項の 分母; $1 + \frac{rM_1^2}{5} \left\{ 1 - \frac{H_i(H_i+1)}{(3H_i-1)(2H_i-1)} \right\}$	(22) 式の右辺 [1+……] 内の第 2 項の 分母; $1 + \frac{rM_1^2}{5} \left\{ 1 - \frac{H_i(H_i+1)}{(3H_i-1)(2H_i-1)} \right\}$

- |         |   |           |                       |
|---------|---|-----------|-----------------------|
| T R-244 | 超音速風洞における動安定微係数の測定<br>Measurements of Dynamic Stability Derivatives in Supersonic Blowdown Wind Tunnel  | 1971年 7 月 | 高島 一明, 榊原 盛三<br>関根 英夫 |
| T R-245 | ヘリコプタ高度・速度線図および臨界決定点の解析的推定法<br>An Analytical Method to Predict Height-Velocity Diagram Critical Decision Point of Rotorcraft  | 1971年 8 月 | 古茂田真幸                 |
| T R-246 | 梁の大変形問題の解析について<br>On Analysis of Large Deformation Problems of Beam   | 1971年11月  | 泉 日出夫                 |
| T R-247 | 任意物体のまわりの自由流線理論<br>On the Theory of Free Streamlines Past an Arbitrary Shape  | 1971年 9 月 | 高橋 俣                  |
| T R-248 | 亜音速流中における二次元翼上の圧力分布の粘性効果を考慮に入れた計算法のプログラム<br>A Description of the Ideas Underlying a Computer Programme for Predicting the Aerofoil Pressure Distributions in Subcritical Viscous Flow                             | 1971年11月  | 海老原正夫, 石田 洋治<br>小此木時雄 |
| T R-249 | 一般化 Newton-Raphson 法の計算機容量問題に対する改良最適化アルゴリズム<br>Modified Optimization Algorithm for Computer Storage Problems in Generalized Newton-Raphson Method   | 1971年10月  | 志 甫 徹                 |
| T R-250 | はりの大変形解析<br>Large Deflection of Cantilever Beams  | 1971年10月  | 多田 保夫, 日下 和夫          |
| T R-251 | 対称スピニング衛星のニュートン運動による慣性力の場とそのニュートンダンパへの応用<br>Inertial Force Field Due to Nutational Motion of Spinning Axi-symmetric Satellite and its Application to Nutation Damper  | 1971年11月  | 村上 力, 狼 嘉彰            |
| T R-252 | A Study of Subsonic Two-Dimensional Wall-Interference Effects in a Perforated Wind Tunnel with Particular Reference to the NAL 2m×2m Transonic Wind Tunnel Inapplicability of the Conventional Boundary Condition | 1971年12月  | Masao EBIHARA         |

---

## 航空宇宙技術研究所報告 253 号

昭和 46 年 11 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町 1880  
電話武蔵野三鷹(0422)44-9171(代表)☎182

印刷所 有限会社啓文堂松本印刷  
東京都文京区水道 2-7-5

---