

UDC 532.526:  
533.695.18

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

**TR-254**

翼と不連続境界との干渉について

犬 丸 矩 夫

1971 年 11 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

## 既 刊 報 告

- TR-236T Small-Strain Deformations Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials  
—Part I Constitutive Equations—
- TR-237 自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しよう実験  
Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristic of FFM-10 Model
- TR-238 リフトジェットエンジン JR 100H の動特性について  
Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR 100H
- TR-239 昇華アブレーションの直接解法  
A Direct Calculation of Sublimating Ablation
- TR-240T A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems  
—Part I Theoretical Basis—
- TR-241 YS-11A-500/600 型主翼疲れ試験  
(I セーフライフ試験荷重と試験方式)  
Full-Scale Fatigue Test of YS-11A-500/600 Turboprop Transport Wing  
(I Safe-Lie Fatigue Test Loads and Test Method)
- TR-242 熱線による3次元平均速度ベクトルとレイノルズ応力の測定  
Measurement of Three-Dimensional Mean Velocity Vector and Reynolds Stress by Single Rotatable Hot-Wire
- TR-243 揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法 I その理論的基礎  
A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems  
—Part 1 Theoretical Basis—
- TR-244 超音速風洞における動安定微係数の測定  
Measurements of Dynamic Stability Derivatives in Supersonic Blowdown Wind Tunnel
- TR-245 ヘリコプタ高度・速度線図および臨界決定点の解析的推定法  
An Analytical Method to Predict Height-Velocity Diagram Critical Decision Point of Rotorcraft
- TR-246 梁の大変形問題の解析について  
On Analysis of Large Deformation Problems of Beam
- TR-247 任意物体のまわりの自由流線理論  
On the Theory of Free Streamlines Past an Arbitrary Shape
- TR-248 亜音速流中における二次元翼上の圧力分布の粘性効果を考慮に入れた計算法のプログラム  
A Description of the Ideas Underlying a Computer Programme for Predicting the Aerofoil Pressure Distributions in Subcritical Viscous Flows

June 1971 Tastuzo KOGA

1971年 4月 河崎俊夫, 塙敏  
斎藤秀夫, 高島一明  
河本巖

1971年 5月 西尾健二, 杉山七契  
大畠敏美, 遠藤征紀  
越沼威

1971年 6月 久保田弘敏

July 1971 Masao EBIHARA

1971年 7月 竹内和之, 野原利雄  
朝田洋雄

1971年 7月 林良生, 中谷輝臣

1971年 7月 海老原正夫

1971年 7月 高島一明, 楠原盛三  
関根英夫

1971年 8月 古茂田真幸

1971年11月 泉日出夫

1971年 9月 高橋倅

1971年11月 海老原正夫, 石田洋治  
小此木時雄

# 翼と不連続境界との干渉について\*

犬丸矩夫\*\*

## Interference Between Wing and Surface of Velocity Discontinuity

By Norio INUMARU

A study is made on the aerodynamic interference between a wing and the surface of velocity discontinuity in a non-uniform potential flow field. Actually, the surface of velocity discontinuity is deformed around the wing which penetrates the surface. However, no theoretical predictions of the surface-deformation can be found in existing papers. In the present paper, a deformation of the surface is theoretically predicted, leading to the conclusion that a "sectorial region" will be formed on the wing. Formation of the sectorial region is recognized in new experiments and also in many existing experimental data. Both theoretical and experimental analysis are made on the physical roles of the sectorial region.

### 1. まえがき

プロペラ後流のように、総圧の高い気流を翼またはフラップ翼のような高揚力装置と組合せるとき、此の高速気流の断面が翼との干渉により翼を通過した後に著しく変形し、機体の周囲の流場を介して、航空機の空力特性に無視出来ない効果をもつことが、先に著者を含むグループの測定によって明らかとなった<sup>1,2,3)</sup>。ここに示されたプロペラ後流の断面、即ち、速度不連続境界の変形は、プロペラによる回転流、主翼の翼端渦を含む吹下しの場の効果を受けていて、極めて複雑である。翼を通過するプロペラ後流の効果は、これまで多数の報告で論じられているが、いずれも翼幅方向の揚力分布がその主題であって、境界の変形を論じたものは見あたらない。これは恐らく、過去の一般の航空機において、変形そのものが特に翼面上に限れば比較的微少であって、問題視されなかったこと、および主題が三次元翼と後流の組合せによる揚力利得に置かれた為であろう。勿論問題を解くためにも境界の変形を考えていては容易ではない。しかしながら先に述べた測定結果が示す如く、プロペラ後流を積極的に利用する STOL 機の低速時におけるように、揚力係数お

よび総圧差が大きくなると、この変形は翼面上でもかなり著しくなると予想され、加うるに、この変形の傾向が翼通過後の尾翼を含む機体周囲の流場に受がれて航空機の特性上無視出来なくなる。したがって、このような変形のあり方を追及しておくことは重要である。以上の観点に立ってこの報告では、主題を翼面との干渉による不連続境界の変形とそれに伴う流場の変化におき、問題を単純化したうえで、一般的な数値解法を示すこと、および干渉による流場、翼特性の変化の一般的傾向を明らかにしようとした。ただし、此の様な主題のもとに問題を解くにあたっては、現象を支配する主たる要素を充分考慮しておく必要がある。したがって、ここで翼と境界の干渉に関する過去の研究を併せて通観しておくことは重要なと思われる。

Karman & Burgers<sup>4)</sup> は干渉の問題をポテンシャル流として取扱った。この場合彼等は微小擾乱速度を用い、不連続境界における境界条件を線型化し、境界をめぐる干渉についての一般論を展開した。この方法は境界をめぐり両側に Image を仮想し、さらに両側相互の影響を或る影響係数を乗じることによって、形式的に境界条件を充す方法である。この方法は、現在に至るまで、プロペラ後流と翼の干渉についての解法の基礎となっていて、その有用性を示している。したがって主題の干渉問題をポテンシャル流として取扱い、流場の一般的傾向を求めるることは充分に意味のあるこ

\* 昭和46年9月17日受付

\*\* 新型航空機部

とである。この場合干渉による境界両側の圧力不平衡を平衡させる作用を流場変化を支配する要因とみなすことを意味する。変形に関する他の要因としては勿論多様な問題が存在するであろう。例えば粘性による shear layer の発達と運動量の輸送や拡散、境界そのものの不安定性等がこれである。翼面上の境界層の発達と圧力分布への寄与も重要である。さらに実用上は三次元翼による外部流場、プロペラによる後流内部の旋回流の影響も考えられる。此等はすべて、現象に何等かの寄与をもつものである。しかしこれ等は個々の条件の特殊性に比較的関連が深く、過去の研究結果からみても、翼をめぐる境界変形の一般的かつ、総体的な傾向を調べるうえでは、先に述べた圧力平衡作用に優先するものとは考え難い。以上により、我々は主題を粘性を無視したポテンシャル流として取扱う。ただしこれによる結果と、実験事実とを対比するとき、上述の諸要因を充分考慮する必要がある。過去の理論と実験の対比は（関連する実験は不幸にして、決して多くはない。）いずれも比の点で不確かな要素をかなり含んでいることは否めない。プロペラ後流に関する理論と実験は、此の様な面においても現在なお未完の主題であると考えられる。したがって、此の報告において、翼と境界の干渉についての、より原理的な検討を行なうことは必要かつ、有意義と考えられる。

さて、Karman & Burgers の一般論に基き、プロペラ後流と翼の干渉を理論的に取扱ったものとして、まず Koning<sup>5)</sup> による揚力線理論の計算があげられる。この報告は円形プロペラ後流を貫通する無限翼の翼幅揚力分布である。其の後 Squire<sup>6)</sup> が同様な条件のもとで揚力と誘導抵抗を求めており、此等はいずれも干渉による三次元効果を翼から放出される半無限自由渦の寄与として求めたものである。此の様な方法は後に Rethorst<sup>7)</sup> に至り、Weissinger<sup>8)</sup> 法による近似的揚力面理論として改良され三次元翼に適用された。一方、Graham<sup>9)</sup> 他は揚力線理論の適用と併せて、後流が洗う翼面のアスペクト比が小さい場合を slender body 理論を援用して計算した。この様な状況のもとで、最近に至り、Ribner & Ellis<sup>10)</sup> は従来の線型化された Image Vortex system によらないで、新しく Reduced Potential による方法を示し、これを三次元翼とプロペラ後流の問題に適用して有効性を確めた。この方法によれば、境界の両側の流場を個々に求める必要がなく、全流場を一挙に取扱うことが出来る。また、Image 法のように境界条件の線型化の必要もな

くなる。ただし、その代りに境界面上にダブレットの様な singularity を分布させて、この分布と、境界の変形とを、境界条件を充すように決定しなくてはならない。残念ながら、Ribner & Ellis は此の方法を適用するにあたり、変形の無視のみならず、従来の方法と同様な線型化をおこない、Rethorst と同様、Weissinger 法による近似的面理論を用いた。従って、方法の新しさに拘らず、結果は本質的に揚力線理論の域を出ない。

以上 Koning から Ribner & Ellis に至る現在までの解法は、本質的に揚力線理論による数値解法であって、かなりの計算量を必要とするが、我々の目的とする境界の変形は勿論、翼面上揚力の面分布、干渉に伴う境界周辺の構造について求めることが出来ない。したがって、我々の場合は充分な形での揚力面的取扱いが必要であって、同時に、不連続境界自身を空間における曲面として考えなくてはならない。ここで Ribner & Ellis による Reduced Potential の方法が有用である。これによって、境界両側の流場をまとめて取扱うと共に、境界曲面の形とその上に分布するダブルートの強さを、非線型のままの境界条件を充すように逐次近似で求めることができれば、その結果がポテンシャル流としての境界ならびに流場変化の近似解とみなせる。ただし、この様な計算には可及的に広範囲の流場を扱う必要が生じ、計算量としても多大なものになる。最近電子計算機の記憶容量の増大によって、この様な計算が或程度迄可能となった。

かくて、此の報告では、Reduced Potential の方法により、まず理論面から干渉に伴う現象の物理的考察を行なう。ついで、境界の変形とダブルートの分布についての逐次近似解法を示し、その結果が先に行なった物理的考察に合致することを示す。さらにこれを線型理論と比較して検討を加える。最後に、過去の実験事実を引用して、ポテンシャル流での結論が実際の現象の中に貫徹されている事を示す。

## 2. 問題の設定と仮定

弦長  $c$ 、厚さ 0 の二次元平板が迎角  $\alpha$  で気流中に置かれる。平板は  $xy$  面内にあり、 $y$  軸は  $c/2$  弦線と一致する（図 1）。以後この平板と wake を含む  $xy$  面内の速度不連続面を  $W$  面と呼ぶ。翼の無限遠前方において高速域と低速域の境界は  $xz$  面と一致する。以後この不連続境界を  $S$  面と呼ぶ。 $S$  面は翼との干渉により、翼の周辺とその後方で変形し、曲面となる。高低速領域の物理量を  $j, i$  を附してあらわす。無限前

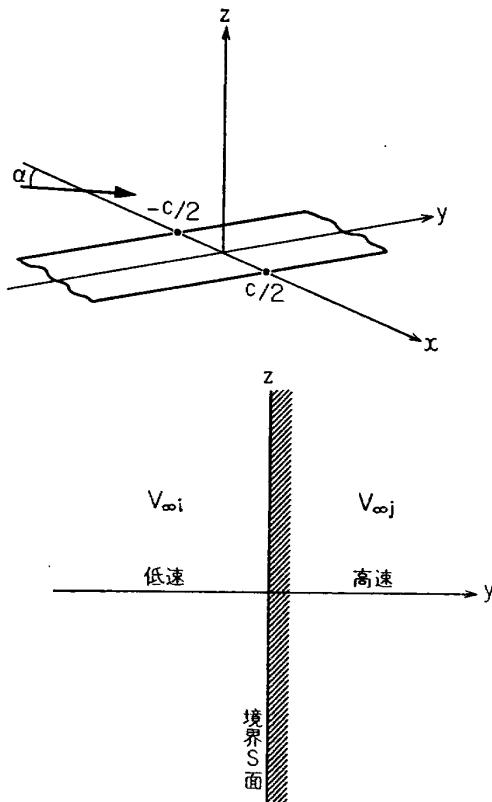


図 1 座標系と翼および不連続境界

方で速度はそれぞれ  $V_{\infty j}$ ,  $V_{\infty i}$  であって、圧力は平衡しているものとする。流れは勿論非粘性とし、迎角  $\alpha$  は高低速両域で等しいものとする。此の様な不連続面は本来不安定なものであるが<sup>11)</sup>、翼の周辺の変形を調べるうえで、ここでは問題としない。以上のように問題を設定し、 $S$  面が翼を通過するとき、どのような変形を受けるかを調べる。ここで高低速流場を各個別に考えて、それぞれ二次元流場の中に或る隔壁  $S$  面を設定したとすれば、それぞれの流場は  $S$  面上に分布するダブレットおよび  $W$  面上に同様分布するダブルエット ( $\tau_{S,W}$ ) <sub>$j$</sub>  または ( $\tau_{S,W}$ ) <sub>$i$</sub>  によって表現出来る。ただし、 $S$  面が求める解であるためには  $S_i$ ,  $S_j$  が共通の曲面でなくてはならず、また、境界条件をも充さなくてはならない。かくて、此の問題を解くことは、境界条件を充すべき境界  $S$  の形状、 $y=f(x,z)$  ならびに、この上に分布する面に垂直な軸をもつダブルエット強さ ( $\tau_{S,W}$ ) <sub>$j,i$</sub>  を求めることに帰する。さらにこの ( $\tau_{S,W}$ ) <sub>$i,j$</sub>  は後に述べるように、Reduced Potential を用いることにより、両側流場を一まとめにして共通の ( $\tau_{S,W}$ ) を求めることになる。おわりに、此の問題を近似的かつ数値的に解くために、境界  $S$  の変形は小さく、翼の迎角のも小さいものに仮定しておく。

### 3. 記号

- $x, y, z$ : 直交座標  
 $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ : Doublet の分布位置座標  
 $r = [(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2]^{1/2}$   
 $\Phi$ : 速度ポテンシャル  
 $\phi$ : 二次元平板の速度ポテンシャル  
 $\psi$ : 同上複素速度ポテンシャル  
 $\phi$ : 三次元流で附加されるポテンシャル  
 $(\Phi = \phi + \psi)$   
 $\tau_{S,W}$ : Doublet 分布密度 ( $S$  面:  $W$  面)  
 $\tau$ :  $\tau_S$  の勾配ベクトル  
 $\tau_{x,y,z}$ :  $\tau$  の座標成分  
 $V, V'$ : 速度の大きさ、およびベクトル  
 $u, v, w$ : 速度の座標成分  
 $P$ : 静圧  
 $H$ : 総圧  
 $h = H_j - H_i$   
 $\alpha, \beta, \gamma$ :  $S$  面の法線方向余弦  
 $\mu$ : 無限遠前方における低速域と高速域の速度比  
 $c$ : 翼弦長  
 $T_c = (\text{Thrust}) / q_0 S_W$   
 $q_0$ : 自由流動圧  
 $S_W$ : 翼面積  
 $S$ : 翼面に垂直な速度の不連続面  
 $W$ : 翼面および wake を含む不連続面  
 $(\ )_0$ : 二次元流での値  
 $(\ )_{i,j}$ : 低、高速域の値  
 $(\ )_{S,W}$ :  $S$ ,  $W$  面の値  
 $(\ )_a$ : 附加ポテンシャルによる、附加的物理量  
 $(\ )_{rf}$ : Reduce された物理量  
 $(\ )_{u,l}$ : 翼の上、下面の物理量  
 $(\ )_{R,L}$ : 翼の右、左の諸量  
 $M, N$ : 計算小領域の  $S, W$  面内の数  
 $\rho$ : 空気密度
- ### 4. 平板のまわりの二次元流と附加ポテンシャル
- (a) 二次元平板の周りの流速分布はよく知られているように、迎角  $\alpha$  において、
- $$u_0(x, z) = V_\infty \cos \alpha + \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{z \Gamma(\bar{x})}{(x-\bar{x})^2 + z^2} d\bar{x}$$
- $$w_0(x, z) = V_\infty \sin \alpha - \frac{1}{2\pi} \int_{-c/2}^{c/2} \frac{(x-\bar{x}) \Gamma(\bar{x})}{(x-\bar{x})^2 + z^2} d\bar{x} \quad (1)$$

ただし  $\Gamma(x)$  は平板上の渦度分布であって次式で与えられる<sup>11,12)</sup>。

$$\Gamma(x) = 2V_\infty \sin \alpha \sqrt{\frac{(c/2)-x}{(c/2)+x}} \quad (2)$$

また、この平板翼の二次元速度ポテンシャルを  $\phi$  とする。以上により二次元流の任意の一点における速度、ポテンシャルおよび翼面上の渦度は  $V_\infty$  に比例する。

さて、今ここで我々が解くべき問題の解は、高低速両域において、平板翼の二次元流場（速度  $V_{0i,j}$ ）に加えるに、翼が境界  $S$  を貫通する部分の周辺に生じる附加的な三次元流場（速度  $V_{ai,j}$ ）を合成したものと考えることが出来る。かくて合成された速度を  $V_{i,j}$  とする（図 2）。流れはポテンシャル流であるから合成速度のポテンシャル  $\Phi$  は

$$\Phi_{i,j} = \phi_{i,j} + \phi_{i,j} \quad (3)$$

対応する速度ベクトルは

$$V_{i,j} = V_{0i,j} + V_{ai,j} \quad (4)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} V_{0i,j} &= -\operatorname{grad} \phi_{i,j}, \\ V_{ai,j} &= -\operatorname{grad} \phi_{i,j} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ここに附加された三次元ポテンシャル  $\phi$  ( $x, y, z$ ) を以後附加ポテンシャル、これによる速度  $V_a$  を附加速度と称する。

(b) ここで無限前方での高、低速域の速度比を  $1/\mu$  とおけば二次元流の対応する点の速度比も同様で、次式が成立つ。

$$V_{i,\infty}/V_{j,\infty} = V_{0i}(x, z)/V_{0j}(x, z) = \mu, \quad \mu \leq 1 \quad (6)$$

したがって高速側におけるポテンシャル、速度、翼面

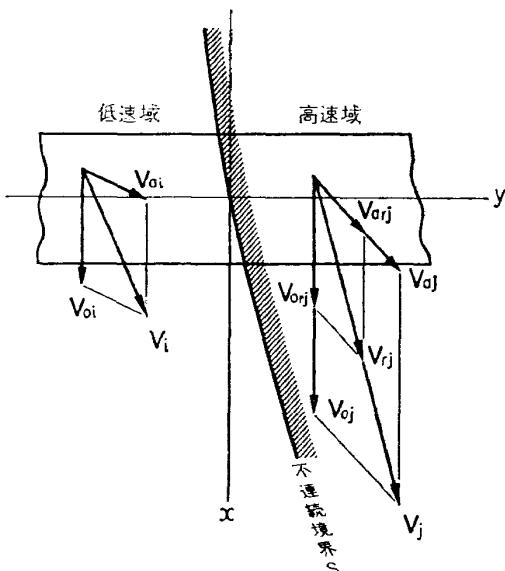


図 2  $S$  面の両側での速度ベクトル

上の渦度分布をすべて  $\mu$  を乗じて “Reduce” された流場をつくれば（図 2），

$$\phi_{rj} = \mu \phi_j = \psi_i, \quad \phi_{ri} = \mu \phi_i, \quad V_{rj} = \mu V_j \quad (7)$$

このように Reduce されたポテンシャルを Ribner & Ellis にならって、“Reduced Potential” と称し、速度については “Reduced Velocity” と呼ぶことにする。また記号的には  $( )_{rj}$  であらわす。かくて、 $\Phi$  なる三次元ポテンシャルも高速側で Reduce され、(3) 式は共通の  $\phi_i$  のもとに統一されて（図 3）， $\Phi = \phi + \phi_{i,rj}$  となる。ここで  $\phi$  は境界  $S$  を介して不連続であり、 $S$  面上に分布するダブルット  $\tau_S$  によって不連続量を規定することが出来る。即ち、 $S$  面上の任意の点に立てた法線上の両側に点  $P, Q$  をとり、 $P, Q$  を無限に  $S$  面に近づけることにより、 $S$  面上のダブルット分布密度  $\tau_S$  を次式で規定する。

$$\lim_{P, Q \rightarrow S} (\phi_{rj,P} - \phi_{i,Q}) = \tau_S \quad (8)$$

さて、 $S$  面および翼面においては、これら境界を流れが貫流しないための切線条件が充されねばならないから、必然的に翼面および wake 上にもダブルットの分布が要求され、結局、 $\tau_{S,W}$  なる分布からくる誘起速度（即ち附加速度）と二次元速度から作られる流場が、切線条件を充すことが必要となる。つぎにこの合成速度場が同時にもう一つの境界条件、即ち、 $S$  面上での等圧条件を充さなくてはならない。切線条件は

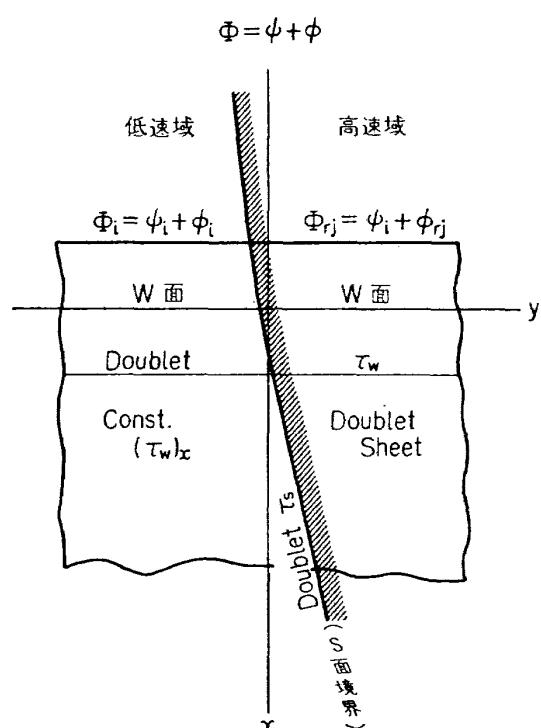


図 3  $S$  面両側の速度ポテンシャル

Reduced Velocity で充されればよいが等圧条件は、本来の  $V_{i,j}$  で規定されることに注意を要する。

かくて、上述の様に Reduced Velocity を用いる流場を、Image を用いる Image system に対して Reduced system と呼ぶことにする。附録1にこれら両 system の関係を論じた。nonuniform な流場の Reduced system による取扱いは Ribner & Ellis にはじまるが、境界両側の流場を一様に取扱うことが出来るとともに、線型化の制約がない。しかし、境界  $S$  に分布するダブレットを求めねばならず、また、この様な singularity のもつ物理的意味について常に注意が必要となる。

## 5. 等圧条件

ここで境界条件のうち、 $S$  面における等圧条件を逐次近似に便利な形で求めておく。

(a) 高、低速領域の総圧  $H_{j,i}$  は一定であるからその差  $h$  も一定である。

$$h = H_j - H_i = \frac{1}{2} \rho V_{\infty i}^2 \left( \frac{1}{\mu^2} - 1 \right) = \text{Const.} \quad (9)$$

境界面  $S$  上の任意の点に法線を立て、その上の両側に点  $P, Q$  をとり、 $P, Q$  を極限的に  $S$  に近づけるものとする。このとき両側を圧力差  $\Delta P$  とすれば等圧条件は（以後  $\lim$  を適宜省略して）

$$\begin{aligned} \lim_{P, Q \rightarrow S} \Delta P &= P_j - P_i = (H_j - \frac{1}{2} \rho V_j^2) - (H_i - \frac{1}{2} \rho V_i^2) \\ &= h - \frac{1}{2} \rho (V_j^2 - V_i^2) = 0 \end{aligned} \quad (10)$$

ここで速度にポテンシャルを導入して

$$\begin{aligned} V^2 &= (-\phi_x - \phi_{xj})^2 + (-\phi_y - \phi_{yj})^2 + (-\phi_z - \phi_{zj})^2 \\ &= (u_0 - \phi_x)^2 + \phi_y^2 + (w_0 - \phi_z)^2 \end{aligned} \quad (11)$$

(9)～(11) より境界  $S$  の両側、極限的近傍において、

$$\begin{aligned} (V_j^2 - V_i^2) &= [(u_{0j} - \phi_{jx})^2 + \phi_{jy}^2 + (w_{0j} - \phi_{jz})^2] \\ &\quad - [(u_{0i} - \phi_{ix})^2 + \phi_{iy}^2 + (w_{0i} - \phi_{iz})^2] \\ &= \frac{2}{\rho} h = V_{\infty i}^2 \left( \frac{1}{\mu^2} - 1 \right) \end{aligned} \quad (12)$$

これに (6), (7) の関係を入れて、Reduced system の値に変換すれば次式を得る。

$$\begin{aligned} V_{\infty i}^2 \left( \frac{1}{\mu^2} - 1 \right) &= \lim_{P, Q \rightarrow S} \left\{ \frac{1}{\mu^2} [(u_{0i} - \phi_{rx})^2 + \phi_{ry}^2 + (w_{0i} - \phi_{rz})^2] \right. \\ &\quad \left. - [(u_{0i} - \phi_{ix})^2 + \phi_{iy}^2 + (w_{0i} - \phi_{iz})^2] \right\} \end{aligned} \quad (13)$$

ここで (8) 式で定義された  $S$  面上に分布するスカ

ラー  $\tau_S$  (ダブルット分布密度) から次式によりベクトル  $\tau$  を定義する。

$$\tau = \text{grad } \tau_S = \text{grad} [\lim_{P, Q \rightarrow S} (\phi_{rj} - \phi_i)] \quad (14)$$

ただし、ここで  $\tau_S$  は曲面  $S$  上の分布密度であって、此の点に注意を要する。 $\xi, \eta$  をパラメタとし、 $S$  面と互に直交する曲面群、 $f_1(x, y, z) = \xi, f_2(x, y, z) = \eta$  によって、 $S$  面上に直交曲線座標を設定すれば、 $\tau_S = \tau_S(\xi, \eta)$  である。かくて、 $S$  面上の任意の点でのベクトル  $\tau$  はその点における  $S$  面への接平面に含まれ、その座標方向成分を  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  とすれば

$$\begin{aligned} \tau_x &= \lim_{P, Q \rightarrow S} (\phi_{rjx} - \phi_{ix}) \\ \tau_y &= \lim_{P, Q \rightarrow S} (\phi_{rjy} - \phi_{iy}) \\ \tau_z &= \lim_{P, Q \rightarrow S} (\phi_{rjz} - \phi_{iz}) \end{aligned} \quad (15)$$

さらに、 $(u_{0i} - \phi_{ix}) = u_i, -\phi_{iy} = v_i, (w_{0i} - \phi_{iz}) = w_i$  を考慮して、等圧条件式 (13) から、ポテンシャル勾配を消去すれば  $S$  面上の等圧条件として

$$\begin{aligned} V_{\infty i}^2 (1 - \mu^2) + \mu^2 [u_i^2 + v_i^2 + w_i^2] \\ = [(u_i - \tau_x)^2 + (v_i - \tau_y)^2 + (w_i - \tau_z)^2] \end{aligned} \quad (16)$$

ベクトル的に

$$\begin{aligned} (1 - \mu^2) |V_{\infty i}|^2 + \mu^2 |V_i|^2 &= |(V_i - \text{grad } \tau_S)|^2 \\ &= |\tau| \end{aligned} \quad (17)$$

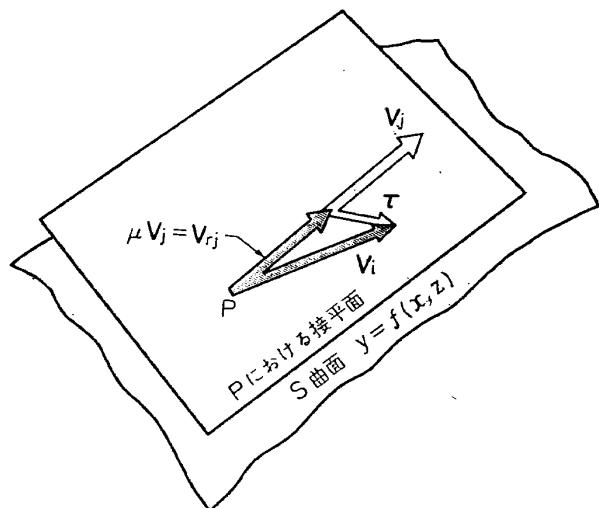
(b) (16), (17) 式の左辺第1項は高低域間の総圧差、第2項は低速域の動圧、右辺は高速側動圧をあらわしている。かくて (16) 式により、等圧条件を低速側の速度と  $S$  面上のダブルット分布勾配によってあらわすことが出来た。ここで、分布  $\tau_S(\xi, \eta)$  の微係数  $\tau_{S\xi}, \tau_{S\eta}$  と  $\tau$  の成分  $\tau_x, \tau_y, \tau_z$  の関係を求めておく。 $S$  面上任意の点において、座標曲線の切線の方向余弦を  $(\lambda_1, \mu_1, \nu_1), (\lambda_2, \mu_2, \nu_2)$  とすれば

$$\begin{aligned} \tau_x &= h_1 \lambda_1 \tau_{S\xi} + h_2 \lambda_2 \tau_{S\eta} \\ \tau_y &= h_1 \mu_1 \tau_{S\xi} + h_2 \mu_2 \tau_{S\eta} \\ \tau_z &= h_1 \nu_1 \tau_{S\xi} + h_2 \nu_2 \tau_{S\eta} \end{aligned} \quad (18)$$

ただし、

$$\begin{aligned} h_1 &= \sqrt{\left[ \left( \frac{\partial \xi}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \xi}{\partial z} \right)^2 \right]} \\ h_2 &= \sqrt{\left[ \left( \frac{\partial \eta}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial \eta}{\partial z} \right)^2 \right]} \end{aligned}$$

ここで  $S$  面の変形が小さいとすれば、曲面  $S$  は、 $xz$  面に近く、したがって曲面群  $f_1, f_2$  をそれぞれ  $yz$  面、 $xy$  面に平行に近くとすることが出来る。即ち、 $x, z$  軸に対し、 $S$  曲面上のパラメタ  $(\xi, \eta)$  曲線群を平行に近く設定出来る。したがって、この場合、

図 4 変速ベクトル  $\tau$  と速度ベクトル

$x=\xi, z=\eta$  なる近似のもとに、 $\lambda_1, \nu, \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right), \left(\frac{\partial \eta}{\partial z}\right) \approx 1, h_1, h_2 \approx 1$  として、他の係数は小さいから、(18) 式を近似的に次のように簡略化出来る。

$$\tau_x \approx \tau_{S\xi} \approx \frac{\partial \tau_S(x, z)}{\partial x}$$

$$\tau_z \approx \tau_{S\eta} \approx \frac{\partial \tau_S(x, z)}{\partial z}$$

かつ、  $\tau_z \ll \tau_x, \tau_z$  (18')

故に変形が小さいという仮定のもとに、曲面  $S$  上のダブレット分布勾配を求めるとき、ベクトル  $\tau$  の  $x, z$  成分のかわりに、実際の計算手続として  $\tau_S(x, z)$  の  $x, z$  勾配を用いて大過ない。 $\tau_y$  については (18') 式に示すように小さい値であるが、逐次近似の中で、実際に求めた変形量と  $\tau_S$  の分布状態に適合する様に決めてゆく必要がある。

つぎにベクトル  $\tau$  の物理的意味であるが、 $\tau$  は定義から明らかなように、境界  $S$  曲面の両側の速度ベクトル  $V_i, V_j$  と共に、その点における  $S$  面の接平面に含まれ、図 4 に示すように

$$V_i - \tau = V_{rj} \quad (14')$$

によって、 $S$  境界を挟む両側の速度の jump を規定する、変速ベクトルである。

(c) つぎに (16) 式を変換し、左辺に  $v_i^2$  を置けば、逐次近似に便利な等圧条件式として次式を得る。

$$v_i^2 = \frac{(1-\mu^2)(V_{i\infty}^2 - u_i^2 - w_i^2) + (u_i \tau_x + w_i \tau_z) - (\tau_x^2 + \tau_z^2)}{\left[\left(1 - \frac{\tau_y}{v_i}\right)^2 - \mu^2\right]} \quad (19)$$

この報告では不連続境界  $S$  面の変形を問題にしているから  $v_i$  の  $S$  面における分布が曲面  $S$  を決定す

るうえで重要である。二元速度  $v_0=0$  であるから  $v_i$  は附加ポテンシャルのみできる。かくて (19) により非線型のままの等圧等条件が  $S$  面上低速側の速度成分と  $\tau_S$  の分布勾配の成分によってあらわされた。(19) 式の分母の  $(\tau_y/v_i)$  は充分小さい値であって、後に数値解法の項で述べるように、逐次近似の途中で計算に加えてゆく。さて、以後の計算は低速域での速度成分を用いておこなわれるから、記号  $i$  は適宜省略する。なお、低速域の速度成分の代りに、(16) 式以下を高速域の値であらわしても問題は等価である。

高低速両域を含む翼の問題において、現在までに不連続境界の変形を論じたものは、見出しが出来なかった。すなわち、 $S$  曲面  $y=f(x, z)$  は一つの筒面（その殆どすべてが円筒）として与えられ、その面上の等圧条件は擾乱ポテンシャルから導かれる。例えば Ribner & Ellis においても翼を含めた擾乱ポテンシャルを用いており、仮に  $v, w$  方向の擾乱を無視しても、線型化された等圧条件を (10) 式に入れると、 $\Delta P = (1-\mu^2) \left( \frac{\phi_{ix}}{u_{\infty i}} \right)^2 \times \frac{1}{2} \rho u_{\infty i}^2$  となり、当然ながら厳密でない。また、この様な計算は本質的には単純揚力線理論であって、翼幅方向揚力分布（これが、これ等の文献の主目的であるが）を求めるときも、翼面の境界条件は Weissinger 法に留っている。しかし、この報告の目的は、境界の変形とその近傍の物理的考察にあるから、干渉を生じる翼弦近傍の  $S$  面、 $W$  面を完全に面として取扱わなければならない。さらに他の報告のような翼面全体の擾乱でなく、二次元速度分布は平板による厳密な値を用い、Reduced system を利用することによって、附加速度を、非線型のままの等圧条件を充すように逐次近似で求めてゆく。この附加速度はすなわち、 $S, W$  面上のダブルトによる誘起速度であるから、結局、 $\tau_{S,W}$  とその分布曲面を求ることになる。

## 6. 切線条件

ここで、境界の変形を考慮したうえで厳密な形の切線条件を逐次近似に便利な形に求める。

(a)  $S$  面上の切線条件

$S$  面の方程式をここであらためて、

$$y=f(x, z) \quad (20)$$

とおく。この境界の両側で速度の切線条件が充されねばならないから、

$$(u_{0i} - \phi_{ix}) f_x + \phi_{iy} + (w_{0i} - \phi_{iz}) f_z = 0$$

$$(u_{0i} - \phi_{rjx}) f_x + \phi_{ry} + (w_{0i} - \phi_{rz}) f_z = 0 \quad (21)$$

両辺の差をとり (15) を考慮すれば、

$$\tau_y = \tau_x f_x + \tau_z f_z \quad (22)$$

また低速域では

$$v_i = u_i f_x + w_i f_z \quad (23)$$

(22), (23) が速度ベクトル  $V_i$  および変速ベクトル  $\tau$  の充すべき  $S$  面での切線条件となる。一方  $S$  面の接平面の方程式は流動座標  $X, Y, Z$  として、

$$(X-x)f_x + (Z-z)f_z = (Y-y)$$

$S$  面への法線の方向余弦  $\alpha, \beta, \gamma$  は、

$$\alpha = -f_z/\sqrt{A}, \quad \beta = 1/\sqrt{A}, \quad \gamma = -f_x/\sqrt{A}$$

$$A = (1 + f_x^2 + f_z^2) \quad (24)$$

したがって、当然のことながら、(22), (23) 式は、物理的には、 $V_i, \tau$  (したがって  $V_{rj}, V_j$  もまた) が  $S$  面の接平面内にあることを示す。ここで、(22), (23) 式より、逆に  $S$  面の勾配  $f_x, f_z$  を求めれば、

$$f_x = \frac{\tau_y w_i - \tau_z v_i}{\tau_x w_i - \tau_z u_i} \\ f_z = \frac{\tau_x v_i - \tau_y u_i}{\tau_x w_i - \tau_z u_i} \quad (25)$$

すなわち、 $S$  面切線条件を  $f$  の勾配を規定する  $V_i, \tau$  の成分の函数としてあらわした。ここで、 $u \gg v, w$  であるから (25) より、 $f_x$  を主として決めるのは  $(v_i/u_i)$  であり、 $f_z$  を主として決めるのは  $(\tau_y/\tau_z)$  である。 $\tau_y$  は小さいが  $\tau_z$  とともに  $f_z$  を決めるから、变形を求めるうえで無視出来ない。

#### (b) 翼面上の切線条件

翼面上では、二次元速度  $V_0$  がすでに切線条件を充しているから、附加速度  $V_a$  の成分だけを考えればよい。翼面は  $xy$  面内にあるから切線条件は翼面上で、

$$w_{ai,rj} = -\phi_{iz} = -\phi_{rz} = 0 \quad (26)$$

を充せばよい。

## 7. ダブレット分布による附加速度

以上によって、境界条件が (19), (25), (26) の形に求められた。これ等は厳密な条件式である。引つづいて、ここでは、以下に、逐次近似を行なうための準備として、ダブルット分布と附加速度の関係を求め、ついで解を求めるときの基本の考え方を併せて述べる。

(a) 翼面に略直交する不連続面  $S$  のうえに分布するダブルット密度  $\tau_S$ , 翼面を含む自由渦面に分布するダブルット密度  $\tau_W$  による、空間の任意の一点  $P(x, y, z)$  のポテンシャル、即ち、附加ポテンシャル  $\phi$  ( $\phi_i, \phi_{rj}$ ) は次式で得られる<sup>13)</sup>。

$$\phi(x, y, z)$$

$$= \frac{1}{4\pi} \left[ \int_S \tau_S(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}) \frac{g}{r^3} dS + \int_W \tau_W(\bar{x}, \bar{y}) \frac{g}{r^3} dW \right] \quad (27)$$

ただし

$$g = [\alpha(x-\bar{x}) + \beta(y-\bar{y}) + \gamma(z-\bar{z})]$$

$$r = [(x-\bar{x})^2 + (y-\bar{y})^2 + (z-\bar{z})^2]^{1/2}$$

積分は  $S, W$  面の全体にわたるが、变形が小であれば、 $dS = dx dz, dW = dx dy$  である。ここで  $\tau_S$  はダブルットの軸 ( $S$  面への法線に一致) が低速域から高速域へむかうときを正とし、 $\tau_W$  は翼の下面から上面へ吹出す方向を正ときめておく。(27) 式から、点  $P$  に於て、附加ポテンシャルによる附加速度  $V_a$  ( $V_{ai}, V_{arj}$ ) の成分  $u_a, v_a, w_a$  は次式で得られる。

$$-u_a = \phi_x = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_S \frac{\tau_S \alpha}{r^3} dS - 3 \int_S \frac{\tau_S(x-\bar{x})g}{r^5} dS \right. \\ \left. + \int_W \frac{\tau_W \alpha}{r^3} dW - 3 \int_W \frac{\tau_W(x-\bar{x})g}{r^5} dW \right] \\ -v_a = \phi_y = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_S \frac{\tau_S \beta}{r^3} dS - 3 \int_S \frac{\tau_S(y-\bar{y})g}{r^5} dS \right. \\ \left. + \int_W \frac{\tau_W \beta}{r^3} dW - 3 \int_W \frac{\tau_W(y-\bar{y})g}{r^5} dW \right] \\ -w_a = \phi_z = \frac{1}{4\pi} \left[ \int_S \frac{\tau_S \gamma}{r^3} dS - 3 \int_S \frac{\tau_S(z-\bar{z})g}{r^5} dS \right. \\ \left. + \int_W \frac{\tau_W \gamma}{r^3} dW - 3 \int_W \frac{\tau_W(z-\bar{z})g}{r^5} dW \right] \quad (28)$$

ただし、 $\alpha, \beta, \gamma$  はダブルットの分布位置における  $S, W$  面の法線方向余弦である。ここで点  $P$  が  $S, W$  なる不連続面に無限に近づけば、(28) は異常積分となる。この様な場合、Heaslet & Lomax<sup>14)</sup> にしたがって主値積分の意味で積分可能である。また、後に述べる様に数値解を求めるとき、ダブルットの分布する  $S, W$  面を多数の小領域に分割し、この中でダブルット密度を一様とするから、このとき  $\tau_S, \tau_W$  は積分の外に出ると同時に異常積分は点  $P$  自身を含む小領域に限られる。ただし、此の時はその小領域を囲む Vortex filament の寄与として求めることも出来て、同一の結果を与える。また、(28) 式による小領域の寄与の積分はわずかの例外 ( $r$  の高幕を含む) 場合を除き解析的に求めることが出来る。例外的な場合は数値積分を行なう。

(b) さて、数値解 ( $S$  面の形  $f$ , および  $\tau_{S,W}$ ) を求めるについて、まず、 $\tau_{S,W}$  なるダブルット分布を仮定する。この分布による翼面および  $S$  面上の附加速度  $(w_{ai,rj})_W, (u_{ai})_S, (v_{ai})_S, (w_{ai})_S$  を (28)

式により求めることが出来る。 $S$  面面上にて、二次元速度をこれに合成すれば、 $V_i$  の成分が求まる。結果として得られた  $y$  方向成分を  $(v_a)_s$  とすれば、等圧条件 (19) 式の右辺に仮定された  $\tau_s$  の勾配ならびに、これらから誘起されて合成された速度成分を入れると左辺として求まる  $(v_a)_s^2 = (v_i)^2 P$  ( $v_0=0$  かつ低速域で計算しているから) は一般にこれと一致しない。かくて仮定された  $\tau_{s,w}$  が解であるためには、次式が充されなくてはならない。

$$(v_a)_s^2 S = (v_i)^2 P \quad (29)$$

また翼面上で当然切線条件 (26) 式が充されなくてはならない。最後に仮定された分布  $\tau_{s,w}$  の分布位置が (25) 式で規定される  $S$  面の切線条件を充していなくてはならない。この  $\tau_s$  の分布位置は (28) 式の附加速度を変化させるから、境界  $S$  が変化するたびに附加速度は当然変化する。このような諸関係のもとで後に述べるような逐次近似を行なって近似解を求める。

(c) ところで、これまでに述べた  $S$  面境界条件は、いずれも  $\tau_s$  の分布勾配を含むから、計算上  $\tau_s$  の分布勾配は甚だ重要である。そこで (28) 式の積分における  $\tau_s$  の分布勾配の効果をここで検討する。前項でも述べたように、数値解を求めるとき、(28) 式の積分はダブレット一様分布の小領域に分割される。この場合、附加速度を求める点  $P(x, y, z)$  が  $S$  面から充分離れていれば問題はない。しかし、実際の計算は  $S$  面面上の附加速度を求めるので、分布勾配を無視することは出来ない。勾配ベクトル  $\tau$  のベクトル的意味については既に述べた。いま、問題を  $x$  方向の分布勾配のみに、まず限定する。原点  $(0, 0, 0)$  の  $\tau_s$  の値を便宜上 0 とし、 $S$  面の変形を無視して図 5 の如く

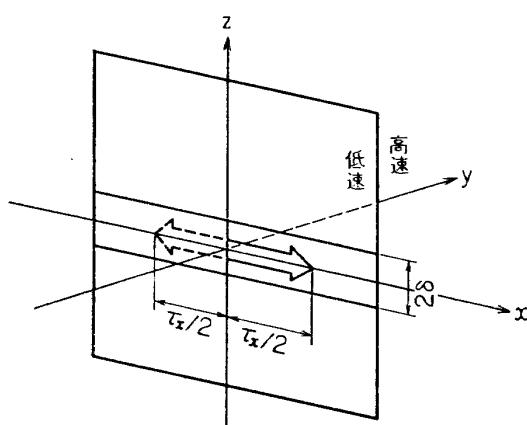


図 5 二次元的ダブルート分布における分布勾配のベクトル表示

$xz$  面内にあると考える。 $\tau_s$  が  $\tau_x=a$  なる勾配 ( $a$  は常数) をもち、 $\tau=ax$  なる分布密度で  $S$  面に分布しているとする。勿論  $z$  方向に事がらは不変である。いま、点  $P(0, y, 0)$  における附加速度を求めるに次式の様になる。ただし  $\alpha, r=0, \beta=1$  とし、積分領域は、 $z$  について  $\pm\delta$  なる小帶域を考え、(28) 式を用いて、 $x$  方向の分布勾配による  $u_a$  の変化  $\Delta u_a$  を求める。

$$\begin{aligned} -\Delta u_a(0, y, 0) &= \phi_x(0, y, 0) \\ &= -\frac{3}{4\pi} \iint \frac{ax(0-x)y}{r^5} d\bar{x}d\bar{z} \\ &= \frac{3ay}{4\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\bar{x}^2}{(y^2 + \bar{z}^2 + \bar{x}^2)^{5/2}} d\bar{x}d\bar{z} \\ &= \frac{ay}{2\pi} \left[ \frac{1}{\sqrt{y^2}} \arctan \frac{\bar{z}}{\sqrt{y^2}} \right]_{-\delta}^{\delta} \end{aligned}$$

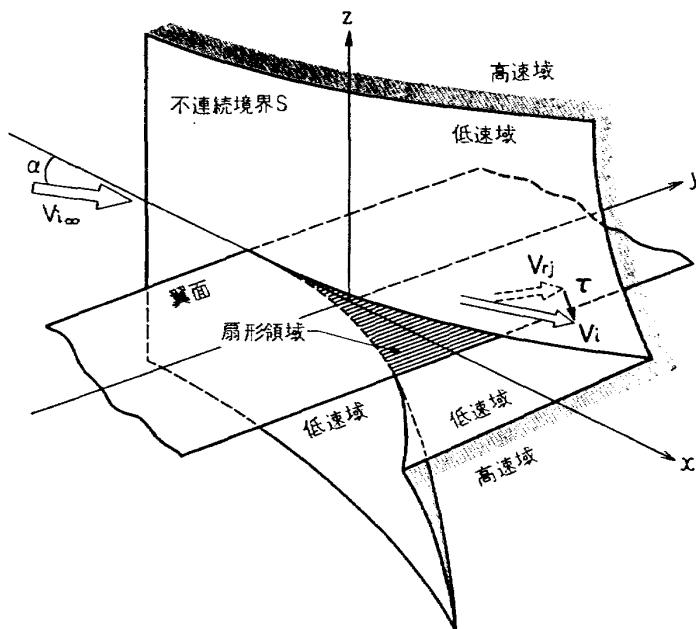
ここで  $y \rightarrow 0$  により点  $P$  を  $S$  面に収束させるならば、 $\delta$  にかかわらず、

$$\lim_{y \rightarrow 0} \Delta u_a = -\frac{a}{2} \operatorname{sign}(y) = -\frac{\tau_x}{2} \operatorname{sign}(y) \quad (30)$$

したがって、 $xz$  面の両側で  $\tau_x/2$  づつの速度の増減を生じる (図 5)。あるいは上述とは別に、ダブルートによるポテンシャルは高低速域で逆対称であるから、 $-\phi_i = \phi_{rj}$ ,  $\phi_{rj} - \phi_i = \tau_s$  より、 $-2\phi_i = \tau_s$ 、よって  $-\phi_{ix} = \Delta u_{ai} = \tau_x/2$  となって上の結果と一致する。例えれば後に計算例で示すように、翼より上側の  $S$  面では  $\tau_x > 0$  であり、低速域で  $y < 0$  により、 $\tau_x/2$  の增速が生じ、高速側の Reduced Velocity には同量の減速が起る。かくて、変速ベクトル  $\tau$  の  $x$  成分  $\tau_x$  に等しい変速が生じる (図 4)。 $x, y$  方向の成分についても同様であるから、 $S$  面上で分割された小領域内で  $\tau_s$  を一様として積分した誘起附加速度を  $u_a, v_a, w_a$  であらわすとき、分布勾配を考慮することにより、その域領内のある点における最終的合成速度として次式を得る。

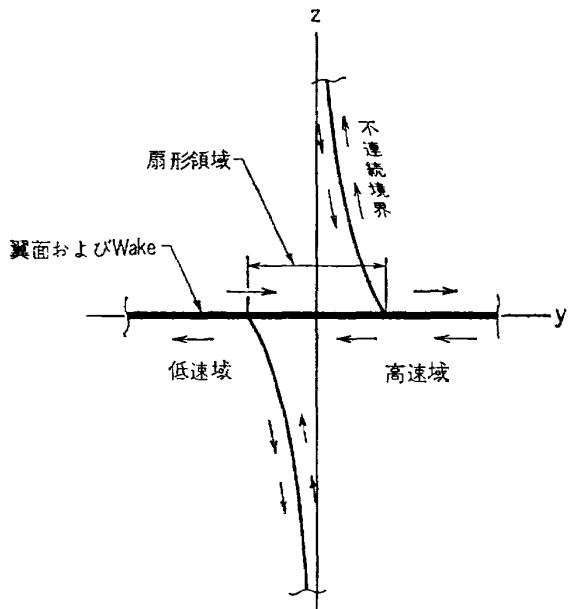
$$\begin{aligned} u_i &= u_{0i} + \bar{u}_{ai} + \frac{\tau_x}{2} \\ v_i &= \bar{v}_{ai} + \frac{\tau_y}{2} \\ w_i &= w_{0i} + \bar{w}_{ai} + \frac{\tau_z}{2} \end{aligned} \quad (31)$$

以上によって、(28) 式を数値積分して附加速度を求めるための近似式および逐次近似の基本となる考え方、基礎式の導出は終った。此の様な関係を用いた数値解法を述べるに先だって、次の項では、干渉についての物理的考察を行なう。

図 6  $S$  面の変形のスケッチ

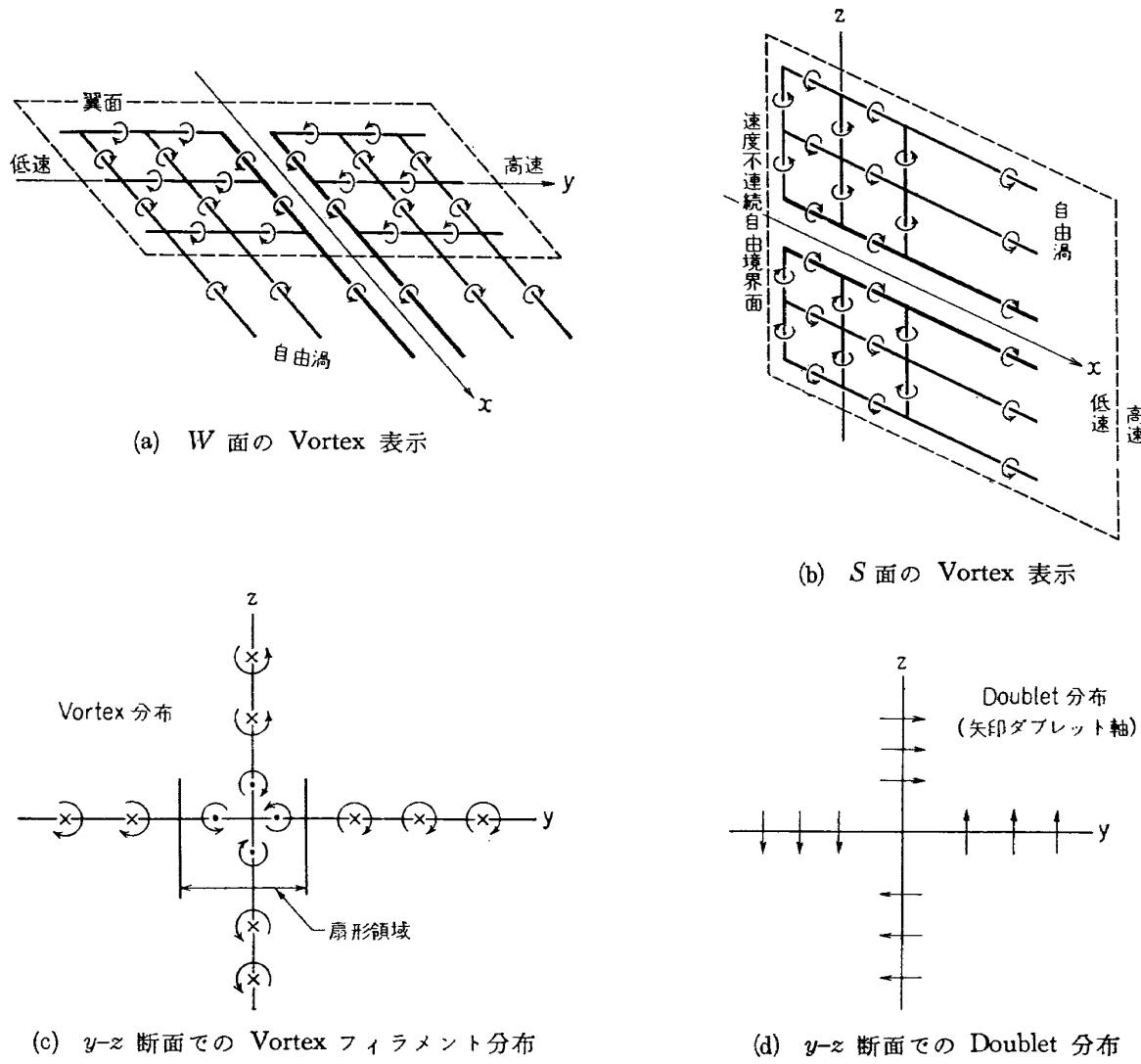
## 8. ダブレットの分布範囲と流場の変化の考察

ここでは、設定された問題について、ダブルットの分布範囲、 $S$ 面境界の変形のあり方、およびこれに伴う流場の変化について考察する。後に計算例で示すように、 $S$ 面境界は翼の上面で高速域が相対的に低圧になるために高速側へ曲げられて、変形し、翼の下面では同様に逆方向への変形が生じる。変形は翼面に近づく程当然大きくなる。このような状態を図 6 に示す。不連続境界  $S$  と翼面の交線は、図にみられるように上面と下面が逆方向に拡がり、翼面上に図中に示した扇状領域が出来る。この領域では下面を高速流が、上面を低速流が通過するので、境界  $S$  と翼面が重なり合って接合した部分と考えられる。以後、この部分を“扇形領域”と呼ぶことにする。境界をはさむ両側の速度は、図に見られるように、翼の上面では増速して高速側へ低く喰込む低速流と、これに追上げられて減速しながら上方へ向う高速流が、変速ベクトル  $\tau$  を介して等圧条件をみたす。翼の下側では事ががらが逆になる。かくて、不連続境界は干渉により、等圧条件を充すように変形し、周囲の流場は、境界上に分布するダブルットによって記述されるが、翼面上の境界条件を充すためには、翼面上にもダブルット分布が必要となる。これは同時に、翼面上の境界周辺における圧力分布、ひいては揚力分布を変化させ、境界の周辺では翼面から、三次元効果による自由渦面が放出される。

図 7 変形した  $S$  面の  $y-z$  断面

$S$ 面においても扇形領域の後方つながる、水平部を含めて、無限後方までダブルット sheet が放出される。

かくて、翼面および、翼を通過した後の不連続面の  $yz$  断面は、図 7 に示された形状をとり、 $y$ ,  $z$  軸方向に弱まりながら無限にのびるダブルット sheet が存在する。ダブルット分布は、その分布面の素片を囲む環状 Vortex と等価であるから、物理的像として描き易い Vortex の網目で表現すれば図 8 (a), (b), (c) の様になり、図 7 の断面速度成分の方向が理解出来る。

図 8  $S$ ,  $W$  面上の Vortex による流れの表現と Doublet による表現

ここで  $x$  軸に近い中央部に強い渦度の集中が生じることが理解出来る。そして、この部分が先に述べた扇形領域を形成する。勿論、この報告で取扱う範囲は変形の小さい場合であるから、扇形領域の巾も小さい。以上の図は、いづれもこの部分を強調して示したものである。

おわりに、図 8 (d) にダブレットによる表示を示す。ダブレットの軸は図示の方向をとり、図の (c) に対応する。

なお、ダブルート、または Vortex は、原理的には無限遠まで分布するが、この報告の目的は、境界近傍の干渉による、変形と諸変化の一般的傾向を求めることがあるから、近似計算の上では、適当な範囲に分布領域を限定して大過ない。ただし、この場合に限定された領域の周辺部の寄与について考慮が必要があり、また後方にのびる無限 sheet の寄与を付加えなくては

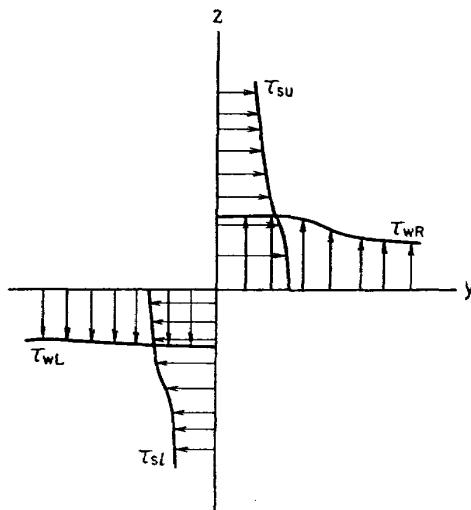
ならない。また、近似計算において、領域の大きさについての効果をも調べる必要が生じる。

## 9. 扇形領域についての考察

さきに境界の変形の考察から“扇形領域”的存在を指摘した。この部分は、翼と不連続境界の干渉において、かなめになる部分であるから、以下に、さらに詳しく検討する。

### (a) 翼と $S$ 面境界の交線附近におけるダブルート分布

まず、一般的にいって  $S$  境界と翼との交線附近で、 $y-z$  断面内に図 9 のようなダブルート分布模型を規定する。ここで変形が小さく、先に述べた扇形領域が殆ど無視出来る場合を考える。後に計算例で見られるように、 $S$  面上のダブルート分布  $\tau_s$  において、翼より上側  $\tau_{su}$  と下側  $\tau_{si}$  とは特に変形が小さい平板翼

図 9  $y-z$  面内ダブルート分布模型

で上下逆対称に近いから、ここで  $\tau_s$  を既知とし、 $\tau_{su} = -\tau_{sl}$  とする。また同様の理由により、翼面上のダブルート分布は領域を距てた左右で  $\tau_{wr} = -\tau_{wl}$  とする。この条件下で、翼面上の境界条件を充す  $\tau_w$  の分布（右側  $\tau_{wr}$ 、左側  $\tau_{wl}$ ）を考える。变形は小さいから、 $S$  面上で  $\alpha, r=0, \beta=1$ 、 $W$  面上で  $\alpha, \beta=0, r=1$  とし、(28) 式より、

$$3 \int_S \frac{\tau_s \bar{z} y}{r^5} d\bar{x} d\bar{z} + \int_W \frac{\tau_w}{r^3} dx dy = 0 \quad (32)$$

さらに問題を簡単化するために、二次元的に考えて、 $x$  方向の変化を無視する。しかるとき  $\tau_s = \tau_s(\bar{z})$ 、 $\tau_w = \tau_w(\bar{y})$  であるから、第1項は  $\bar{x}$  で積分し  $x=0$  とおいて

$$\begin{aligned} I_1 &= 3 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_s y \bar{z}}{[\bar{z}^2 + y^2]^2} \left[ \frac{\bar{x}}{r} - \frac{\bar{x}^3}{3r^3} \right]_{-\infty}^{\infty} d\bar{z} \\ &= 4y \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_s \bar{z}}{[\bar{z}^2 + y^2]} d\bar{z} \end{aligned}$$

$$\text{ただし } r = (\bar{x}^2 + y^2 + \bar{z}^2)^{1/2}$$

同様に第2項は

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_w}{(y - \bar{y})^2} \left[ \frac{\bar{x}}{\sqrt{\bar{x}^2 + (y - \bar{y})^2}} \right]_{-\infty}^{\infty} dy \\ &= 2 \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\tau_w}{(y - \bar{y})^2} d\bar{y} \end{aligned}$$

先に述べた遂対称性から、 $\tau_s, \tau_w$  を  $\tau_{su}, \tau_{wr}$  であらわすとき、

$$\begin{aligned} I_1 &= 8y \int_0^{\infty} \frac{\tau_{su} \bar{z}}{[\bar{z}^2 + y^2]^2} d\bar{z} \\ I_2 &= 2 \left[ \int_0^{\infty} \frac{\tau_{wr}}{(y - \bar{y})^2} d\bar{y} - \int_0^{\infty} \frac{\tau_{wr}}{(y + \bar{y})^2} d\bar{y} \right] \end{aligned}$$

$\tau_s$  を既知としているから、結局 (32) 式は  $\tau_{wr}$  に

関する積分方程式である。ここで、もしも  $\tau_{su} = \text{const.}$  ならば  $\tau_{su} = \tau_{wr}$  によって上式は充される。これは、 $S, W$  面において、扇形領域の無視により、図 8 (c) に見られた渦度の集中が、原点（交線）で等しい大きさの方向反対の渦として打消し合うことを意味すると考えられる。次の項で述べるように、変速ベクトル  $\tau$  のあり方から考えて、翼面のごく近傍では  $(\frac{\partial \tau_{su}}{\partial z}) \approx 0$  と考えられるから、原点のごく近傍で  $\tau_{su} \approx \text{const.}$ 。かくて、原点附近を拡大して考えるとき、扇形領域が存在せず、 $S, W$  面が直交するとともに  $\tau_{su} = \tau_{wr}$  となる。ところで、実際は図 6 に示したように、境界は多小とも変形し、扇形領域を形成するから、原点附近に集中する渦は完全には打消し合わないで、この部分に何等かの渦度分布が存在しなくてはならない。これについて次に述べる。

### (b) 扇形領域内のダブルート分布

扇形領域は翼面上に扇状に広がる不連続面であるが、变形が小さいときは当然その拡がりの角度も小さい。後述の計算例もこれを示す。また、この領域の巾が比較的広くなる翼の後縁近くでは、後の計算例も示す如くダブルート分布勾配  $\tau_x$  が  $S, W$  両面でゆるやかである。したがって、問題を簡単化するために、前項と同様に、二次元的ダブルート分布を考え、 $x$  方向の変化を無視する。領域の幅を  $2\delta$  とし、原点を中心におき、 $x=0$  とする（図 10）。扇形領域内ダブルート分布を  $\tau_{wo}(\bar{y})$ 、ただし、 $|\bar{y}| \leq \delta$ 、また、其の他の不連続面の分布を前項と同様に、 $\tau_{su}, \tau_{sl}, \tau_{wr}, \tau_{wl}$  とする。以上の条件のもとで、翼面の境界条件は (28) より次式で与えられる。

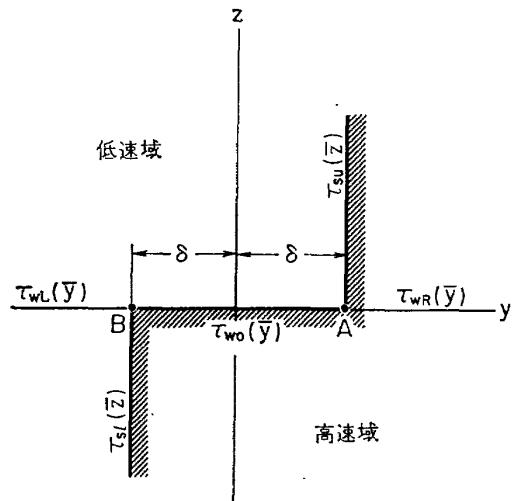


図 10 扇形領域の二次元的模型

$$\begin{aligned}
& 3 \int_{Su} \frac{\tau_{Su}(\bar{z}) \bar{z}(y-\bar{y})}{[\bar{x}^2 + (y-\bar{y})^2 + \bar{z}^2]^{5/2}} dS_u \\
& + 3 \int_{Sl} \frac{\tau_{Sl}(\bar{z}) \bar{z}(y-\bar{y})}{[\bar{x}^2 + (y-\bar{y})^2 + \bar{z}^2]^{5/2}} dS_l \\
& + \int_{WR} \frac{\tau_{WR}(\bar{y}) dW_R}{[\bar{x}^2 + (y-\bar{y})^2]^{3/2}} \\
& + \int_{WL} \frac{\tau_{WL}(\bar{y}) dW_L}{[\bar{x}^2 + (y-\bar{y})^2]^{3/2}} \\
& + \int_{W0} \frac{\tau_{W0}(\bar{y}) dW_0}{[\bar{x}^2 + (y-\bar{y})^2]^{3/2}} \\
= & I_1 + I_2 + I_3 + I_4 + I_5 = 0 \quad (33)
\end{aligned}$$

ただし、 $\int_{W0}$  は扇形領域内の積分を意味する。また  $\int_{Su}, \int_{Sl}$  は境界  $S$  面での積分であるが、変形が小なる限り、 $xz$  面に対する傾角は小さく、 $y$  軸に直角に近い。後に計算例でも示すように、この傾角は翼面に近づく程当然大きくなるが、変形は圧力差から生じ、この圧力差は有限であるから、変形も一般に有限であると考えてよい。さらにここで、翼面と  $S$  面の交線における、変速ベクトル  $\tau$  を考へば（図 4 または図 6）、境界両側の速度ベクトル  $V_i, V_{rf}$  が境界条件によって、翼面に束縛され  $\tau$  の  $z$  成分は 0 となる。すなわち、図 10 の点  $A, B$  において、

$$(\tau_z)_{A,B} = \left( \frac{\partial \tau_S}{\partial z} \right)_{A,B} = 0 \quad (34)$$

ここで二次元性の近似的仮定から、同様に  $(\tau_y)_{A,B}=0$  である。すなわち、このモデルにおいて、点  $A, B$  の近傍において、 $\tau_S$  は急変しないものとする。また、この近傍において境界  $S$  は翼面に直交するものと見なす。（33）式の積分のうち、まず  $\bar{x}(-\infty \sim +\infty)$  の積分を遂行すれば、

$$\begin{aligned}
I_1 &= 4 \int_0^\infty \frac{\tau_{Su} \bar{z}(y-\delta)}{[(y-\delta)^2 + \bar{z}^2]^2} d\bar{z} \\
I_2 &= 4 \int_{-\infty}^0 \frac{\tau_{Sl} \bar{z}(y+\delta)}{[(y+\delta)^2 + \bar{z}^2]^2} d\bar{z} \\
I_3 + I_4 &= 2 \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\tau_{WR}(\bar{y})}{(y-\bar{y})^2} d\bar{y} + 2 \int_{-\infty}^{-\delta} \frac{\tau_{WL}(\bar{y})}{(y-\bar{y})^2} d\bar{y} \\
I_5 &= 2 \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\tau_{W0}(\bar{y})}{(y-\bar{y})^2} d\bar{y}
\end{aligned}$$

$\tau_S$  が急変しないとしているから、 $I_1, I_2$  を部分積分した形

$$\begin{aligned}
I_1 &= 4 \left[ \frac{\tau_{Su}(y-\delta)}{-2\{\bar{z}^2 + (y-\delta)^2\}} \right]_0^\infty \\
& + 2 \int_0^\infty \frac{d\tau_{Su}}{d\bar{z}} (y-\delta) / \{\bar{z}^2 + (y-\delta)^2\} \cdot d\bar{z}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= 4 \left[ \frac{\tau_{Sl}(y+\delta)}{-2\{\bar{z}^2 + (y+\delta)^2\}} \right]_{-\infty}^0 \\
& + 2 \int_{-\infty}^0 \frac{d\tau_{Sl}}{d\bar{z}} (y+\delta) / \{\bar{z}^2 + (y+\delta)^2\} \cdot d\bar{z}
\end{aligned}$$

において（34）を考慮して第 2 項を翼の近傍で無視する。ここで前項 (a) で述べた様に、扇形域を近似的に無視した場合の  $\tau_{S,W}$  の上下、左右における逆対称性を想起し、点  $A, B$  の近傍において、 $\tau_{WR}, \tau_{WL}$  の  $y$  方向の勾配を充分小なるものと仮定すれば、 $I_1, I_2$  におけると同様に  $I_3, I_4$  を部分積分して第 2 項を無視することが出来る。かくて、

$$I_3 + I_4 = 2\tau_{WR} \left[ \frac{-1}{\bar{y}-y} \right]_\delta^\infty + 2\tau_{WL} \left[ \frac{-1}{\bar{y}-y} \right]_{-\infty}^{-\delta}$$

(a) の場合と同様に、 $\tau_{Su}(\bar{z}) = -\tau_{Sl}(\bar{z}), \tau_{WR}(\bar{y}) = -\tau_{WL}(\bar{y})$  とすれば、結局、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} (I_1 + I_2 + I_3 + I_4) &= \frac{2y}{(\delta^2 - y^2)} (\tau_{WR} - \tau_{Su}) \\
&= \frac{2y}{(\delta^2 - y^2)} \Delta\tau_{SW_A} = G(y) \quad (35)
\end{aligned}$$

かくて、翼面の境界条件を充す関係式として、（33）式は次の形に簡略化される。

$$\frac{1}{2} I_5 = \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\tau_{W0}(\bar{y})}{(y-\bar{y})^2} d\bar{y} = -G(y) \quad (36)$$

（36）式は Fredholm の第一種積分方程式で、これを解けば上述の諸仮定のもとでの扇形領域内ダブレット分布  $\tau_{W0}(\bar{y})$  が求まる。（36）式を左辺において部分積分し、同時に、 $\tau_{W0}(\bar{y})$  に同様な左右の逆対称性、すなわち  $\tau_{W0A} = \tau_{W0}(\delta) = -\tau_{W0}(-\delta) = -\tau_{W0B}$  を仮定すれば、

$$\begin{aligned}
-G(y) &= \left[ \frac{\tau_{W0}(\bar{y})}{y-\bar{y}} \right]_{-\delta}^{\delta} - \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial \tau_{W0}}{\partial \bar{y}} d\bar{y} \\
&= -\frac{2\tau_{W0A} \cdot y}{(\delta^2 - y^2)} - \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial \tau_{W0}}{\partial \bar{y}} d\bar{y}
\end{aligned}$$

上式の  $G(y)$  に（35）式の第 3 辺を入れれば  $\tau_{WR_A}$  が消えて、さらに両辺を  $2\pi$  で割れば、

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \frac{\partial \tau_{W0}}{\partial \bar{y}} d\bar{y} &= -\frac{\tau_{W0A} - \Delta\tau_{SW_A}}{\pi(\delta^2 - y^2)} \\
&= -\frac{\tau_{WA} \cdot y}{\pi(\delta^2 - y^2)} = F(y) \quad (37)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{ただし, } \tau_{WA} &= (\tau_{W0A} - \Delta\tau_{SW_A}) \\
\Delta\tau_{SW_A} &= (\tau_{WR} - \tau_{Su})
\end{aligned}$$

（37）式は翼理論に関して、よく知られた積分方程式<sup>15)</sup>で、 $\bar{y} = -\delta \cos\beta, y = -\delta \cos\alpha$  なる変換をおこな

い、 $F(\alpha)$  が

$$\sin \alpha F(\alpha) = -\frac{1}{2} \sum_{m=1}^{\infty} b_m \sin m\alpha$$

の形に Fourier 展開出来れば、解が容易に求まる。ところで (37) 式の  $F(\alpha)$  は

$$\sin \alpha F(\alpha) = \frac{\tau_{W_A}}{\pi \delta} \cot \alpha$$

であるから、上述の形に展開出来て、したがって得られた解  $\left( \frac{\partial \tau_{W_0}}{\partial y} \right)$  をさらに積分して、(36) 式に入れ、これが恒等的に充されるよう、未定係数を定める。最終結果として次式を得る。

$$\begin{aligned} \tau_{W_0}(y) &= -\frac{2}{\pi} (\tau_{S_{uA}} - \tau_{W_{RA}}) \cos^{-1}\left(\frac{-y}{\delta}\right) \\ &\quad + (\tau_{S_{uA}} - \tau_{W_{RA}}) \end{aligned} \quad (38)$$

また、(37) に (38) を入れれば、 $\tau_{W_A} = 0$ 、即ち、 $\tau_{W_{0A}} = -(\tau_{S_u} - \tau_{W_R})$  となる。(38) より

$$A \text{ 点: } y = \delta \text{ にて, } \tau_{W_0} = -(\tau_{S_u} - \tau_{W_R})$$

$$\text{原点: } y = 0 \text{ にて, } \tau_{W_0} = 0$$

$$\begin{aligned} B \text{ 点: } y = -\delta \text{ にて, } \tau_{W_0} &= (\tau_{S_u} - \tau_{W_R}) \\ &= -(\tau_{S_L} - \tau_{W_L}) \end{aligned}$$

分布の形は図 11 の様になる。 $S, W$  面でのダブレット軸の方向と  $\tau_{S, W}$  の符号については、先に 7. (a) で約束したとおりであるから、ダブレットの軸の方向は図の矢印の様になる。以上の結果は、境界の 2 次元性、ダブレット分布の逆対称性、境界  $S$  の翼面に対する近似的直交性、 $A, B$  点外側近傍での  $\tau$  の分布勾配の無視といった、極めて理想化されたモデルによる計算である。しかし、この結果は、扇形領域をめぐるダブレットの分布のあり方に有力な示唆を与える。すなわち、この領域が、翼面と境界  $S$  の重なったものと見なし得ることを先に述べたが、ダブレット分布の面からもこの考え方を裏づけるものである。いま、

境界  $S$  が扇形領域  $AB$  を介して、ダブレット分布の面でも連続的であると考えれば図 12 (a) の様になり、同様に翼面のダブレット分布が連続していると考えれば同図 (b) の如くなる。かくて、扇形領域  $AB$  間で (a) (b) なる分布が重なり合うとき、相互の打消しにより図 11 の様な分布形があらわれる。一般には、翼の上下面では多小異なり、(翼の上下面での揚力の寄与が異なるから) したがって、変形も上下面で異なる。またこれに応じる  $\tau_{W_{R,L}}$  も左右異り、 $AB$  間扇形領域のダブレット分布も複雑化するであろう。しかし、上述の重なり合いの基本は変わらないであろう。図 13 に、このような扇形域の Vortex による表示と Flow pattern を示す。図 8 (c) に示した渦度の集中は、ダブレットの不連続を避けて境界が変形することにより  $AB$  間に扇形域を形成し、図 13 の状態となる、かくて、 $AB$  間では正の揚力勾配が生じ、高速域の高い揚力へ連続的につながることになる。ここで仮に  $\tau_{S_A} < \tau_{W_{RA}}$  あるとすれば、 $AB$  間の揚力勾配は

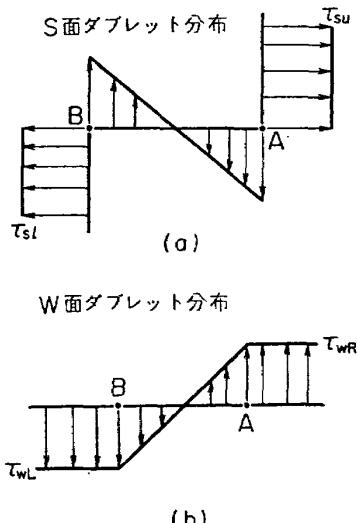


図 12  $S, W$  面ダブルトの連続的分布形態

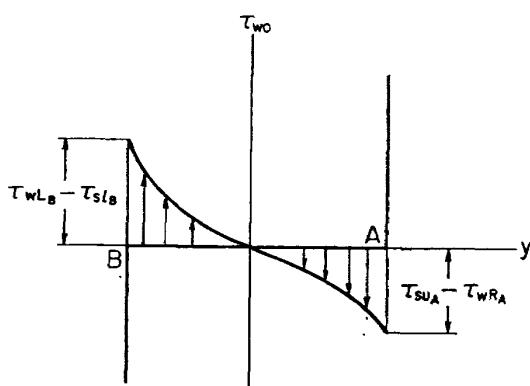


図 11 扇形領域内のダブルト分布

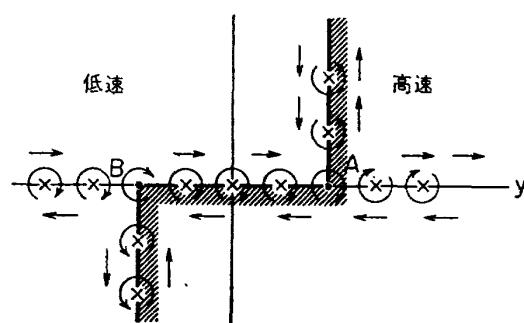


図 13 扇形領域をめぐる Vortex 分布

逆になって、物理的に矛盾を生じるから、 $A, B$ においては、常に、 $|\tau_{su_A}| > |\tau_{wR_A}|, |\tau_{su_B}| > |\tau_{wL_B}|$  でなくてはならない。後に示す近似解もこの傾向を示している。

(c) おわりに、扇形領域近傍での  $\tau_s$  の値を求めておく。これは後に求める  $\tau_s$  分布についての数値解の check になるからである。翼面上では  $w_{i,rj}=0$  また (34) 式より  $\tau_z=0$  として、切線条件 (22), (23) 式より  $f_x$  を消去すれば

$$v_i = u_i - \frac{\tau_y}{\tau_x}$$

等圧条件 (16) 式より、上式を用いて  $v_i$  を消去すれば

$$(1-\mu^2) \left( V_{\infty i}^2 - u_i^2 - u_i^2 \frac{\tau_y^2}{\tau_x^2} \right) + 2u_i \tau_x \left( 1 + \frac{\tau_y^2}{\tau_x^2} \right) - (\tau_x^2 + \tau_y^2) = 0$$

ここで (31) 式の  $u_i$  に対する  $u_a$  の寄与は (28) 式をみればわかるように、変形の小なる範囲において極めて小さい。よって、 $u_i \approx u_{0i} + \frac{\tau_x}{2}$  とおいて上式より  $u_i$  を消去する。また  $\left(\frac{\tau_y}{\tau_x}\right)^2$  は一般に小さいからこれを無視する。かくて、 $\tau_x$  に関する次式を得る。

$$\tau_x^2 - \tau_x \frac{4u_{0i}(1+\mu^2)}{(1-\mu^2)} - 4[V_{\infty i}^2 - u_{0i}^2] = 0$$

これを解いて展開の第 2 項までとすれば

$$\tau_x = -\frac{(1-\mu^2)}{(1+\mu^2)} \cdot \frac{(V_{\infty i}^2 - u_{0i}^2)}{u_{0i}} \quad (39)$$

ここで (39) 式は、 $u_{0i}$  なる二次元平板翼の翼面上の速度を含み、

$$u_{0i} = V_{\infty i} \left[ \cos \alpha \pm \sin \alpha \sqrt{\frac{(c/2)-x}{(c/2)+x}} \right] \quad (40)$$

であるから、扇形領域近傍の  $\tau_s$  は、(39) 式を数値積分して得られる。勿論  $S$  面においては翼の前方においても  $\tau_s$  の分布が存在する。しかし、後に計算例および附録 1 で示すように、無限前方から  $\tau_s=0$  の等ダブレット線が延びて、翼前縁の Singularity に達するから、(39) 式を積分するときの積分常数は 0 である。(39), (40) 式で迎角  $\alpha$  を小として簡略化し、(40) 式右辺第 2 項の 2 乗を省略、また分母 ((39) 式) の  $u_{0i}$  を近似的に  $V_{\infty i}$  におきかえれば、後縁における  $\tau_s$  の値は

$$\tau_{sT.E} = \pm c\pi \sin \alpha V_{\infty i} \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right)$$

ここで翼の後縁における、ダブルートの強さの上下面での不連続量 ( $\tau_{suT.E} - \tau_{suT.E}$ ) を求めると、これは、 $S$  面が翼を通過した後に  $S$  面に残される Vortex filament (強さ  $\Gamma_s$  とする) と等価であって、次式で与えられる。

$$\Gamma_s = 2\pi c \sin \alpha \cdot V_{\infty i} \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \quad (41)$$

## 10. 干渉による翼の特性の変化

これまでに、解を規定する諸条件、扇形領域を含む流場の Pattern とその物理的意味を考察した。ここで上述の干渉に伴う翼の特性変化につき考察し、関係式を求める。

### (a) 翼幅方向の揚力分布の変化

附加ポテンシャルによる附加的揚力を単位翼幅当たり  $L_a$  とする。翼面上の点  $P(x, y)$  において、揚力の増分  $dL_a$  は

$$dL_a = -\rho V_{\infty} [(\phi_x)_u - (\phi_x)_l] dx \\ = -\rho V_{\infty} \frac{\partial \tau_w}{\partial x} dx \quad (42)$$

前縁から後縁まで積分し、高速側では  $\tau_{wj} = \frac{1}{\mu} \tau_{wrf}$  を考慮すれば、後縁における  $\tau_w$  の値を  $(\tau_w)_{T.E}$  として

$$\left. \begin{aligned} L_{ai}(y) &= -\rho V_{\infty i} (\tau_{wi})_{T.E} \\ L_{aj}(y) &= -\rho V_{\infty j} (\tau_{wrf})_{T.E} \cdot \frac{1}{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (43)$$

したがって揚力係数の干渉による増分は翼弦長  $c$  を用いて

$$\Delta C_{il} = \frac{-2(\tau_{wi})_{T.E}}{c V_{\infty i}}, \quad \Delta C_{lj} = \frac{-2(\tau_{wrf})_{T.E}}{c V_{\infty j}} \quad (44)$$

この増分に二次元翼の揚力係数  $2\pi \sin \alpha$  を加えて

$$C_{li,j} = 2\pi \sin \alpha + \Delta C_{li,j} \quad (45)$$

ここで扇形領域の存在を無視し、 $S$  面境界と翼との交線の両側近傍で揚力が等しくなるための条件は、(44), (45) より

$$(\tau_{wrf} - \mu^2 \tau_{wi})_{T.E} = c\pi V_{\infty i} (1-\mu^2) \sin \alpha \quad (46)$$

さらに 9. (a) で述べたように、近似的な逆対称性  $\tau_{wrf} = -\tau_{wi}$  を仮定すれば、

$$-(\tau_{wi})_{T.E} = c\pi V_{\infty i} \frac{(1-\mu^2)}{(1+\mu^2)} \sin \alpha \quad (47)$$

そこで境界  $S$  をはさむ左右の翼面上ダブルートの不連続量、すなわち、 $S$  面と翼面との交線上の Vortex Filament の強さの後縁における値  $\Gamma_w$  は  $(\tau_{wi} - \tau_{wrf})_{T.E}$  であるから

$$\Gamma_w = -2\pi c V_{\infty i} \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \sin \alpha \quad (48)$$

ここで、低速側 2 次元揚力を  $L_{0i}$ 、その束縛渦の強さを  $\Gamma_0$  とすれば、

$$L_0 = 2\pi \sin \alpha \cdot \frac{1}{2} \rho V_{\infty i}^2 c = \rho V_{\infty i} \Gamma_0$$

これより、(41), (48) 式は

$$\Gamma_s = -\Gamma_w = 2\Gamma_0 \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \quad (49)$$

すなわち、扇形領域の考察で述べたように、扇形域の無視により、上述の交線上で  $\Gamma_s$ ,  $\Gamma_w$  なる方向反対の渦が互に打消し合うことを示す。なお (49) 式は、後述するように(附録 2), Reduced system と Image system の対比において、重要な関係である。

### (b) 翼弦方向揚力分布

つぎに翼弦方向の揚力分布は、翼の上下面の圧力係数の差  $\Delta C_{Pi,j}$  を、低速部の自由流動圧による無次元化を行って、次式で得られる(ただし附加的揚力)。

$$\begin{aligned} \Delta C_{Pi} &= -2(\tau_{wx})_i / V_{\infty i} && (\text{低速側}) \\ \Delta C_{Pj} &= -2(\tau_{wx})_{rf} / \mu^2 V_{\infty i} && (\text{高速側}) \end{aligned} \quad (50)$$

ただし、上式は翼の上下面がともに同じ速度域にある場合である。さきに述べた扇形領域では上下面の速度域が異なる。したがって、この部分について考察する。

図 14(a) は、翼面上の扇形領域を上から見た図であるが、この領域の  $AB$ ,  $CD$  の区間の揚力は (38)

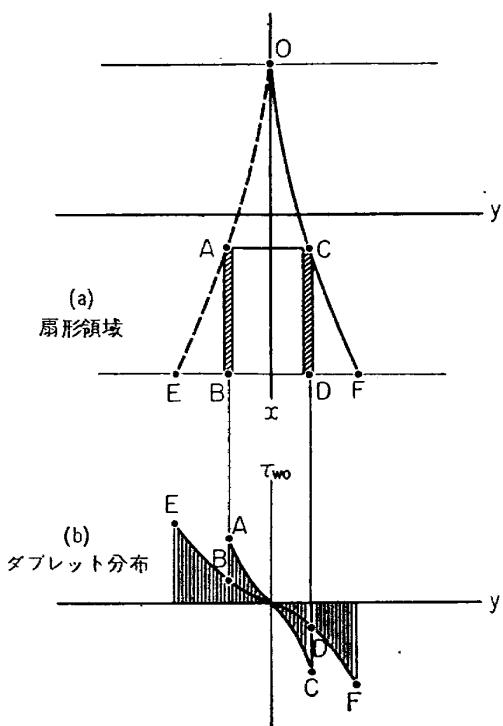


図 14 三次元扇形領域の模型とダブレット分布

式に示すような、この部分のダブルット分布  $\tau_{w0}$  によって、その  $x$  方向勾配に比例してきまる。いま、 $\tau_{w0}$  が図 11 に示すような分布形を有し、 $AC$ ,  $EF$  断面について図 14(b) の形をとれば、 $AB$  間で  $\tau_{w0x}$  は負となり、 $CD$  間の  $\tau_{w0x}$  は正となる。言いかえれば、 $x$  軸より左側で揚力増加、右側で減小の作用をもつ。中央  $x$  軸上で揚力分布は連続であって、しかも  $y$  軸に平行な断面で揚力は正の勾配をもつから、結局、扇形領域は、これが存在する翼面の後半部において、高低速両域間に存在する揚力の落差を急激に平衡させる作用を有するものと見られる。図 15(a) にこの様な関係を示す。扇形領域の外側では、このためには、附加的揚力の増減が翼の前半部に片寄る筈である。かくて、扇形領域の外側近傍では、境界をはさんで図中点線で示すような揚力の落差が残るとともに、扇形域内で此が平衡される。この様な傾向は後に計算結果か

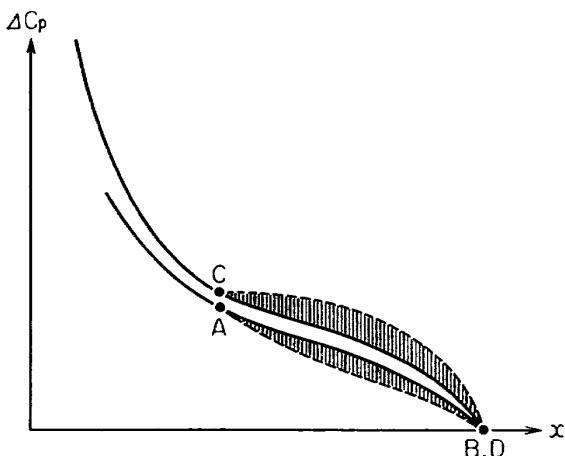


図 15 (a) 扇形領域をめぐる翼弦方向揚力分布の変化

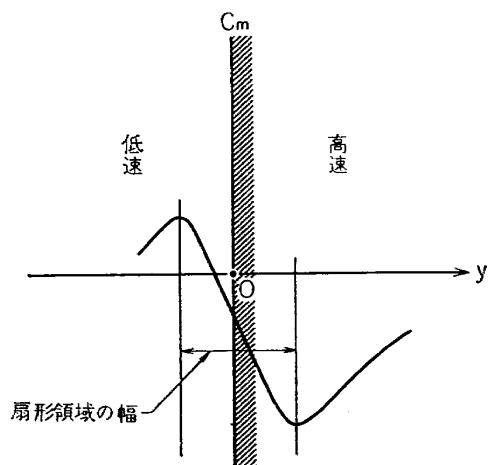


図 15 (b) 扇形領域をめぐる縦振モーメント係数の変化

らも示されるが、さらに後に述べるように、 $S$  面上のダブレットの分布状態からも想定され、かつ、実験的傍証が存在する。

#### (c) 干渉による縦搖モーメント変化

上で述べた翼弦方向揚力分布の干渉による附加的成分のあり方を考慮すれば、翼断面の空力モーメントは、境界近傍で、2 次元翼に対して相対的に、高速側で頭下げ、低速側で逆の方向に変化する筈である。したがって、扇形域内ではこれが平衡されるために、境界近傍で急なモーメントの勾配が生じるべきである。この様な作用の実験的例証は後に述べる。またこの様な変化の形を図 15 (b) に示す。

#### (d) 誘導抵抗

抵抗について、ここで問題にできるのは誘導抵抗である。これについては既に Squire<sup>6)</sup> の報告がある。これによれば、低速側で誘導抵抗の減少、高速側で増加が生じる。揚力変化(干渉による)の絶対値は高速側が大きいから差引して、誘導抵抗は増加する。此の報告の目的からみて、これ以上は立入らない。

## 11. 数値解法

翼と境界の干渉をめぐる、上述の議論により、流場を支配する諸関係と、物理的機構の大要は、ほぼ明かにされたと考える。したがって、以下に、実際的な数値解法の手順を述べる。この場合の考え方の大要はすでに 7. (b) で述べておいた。曲面  $S$  の形状  $y = f(x, z)$ 、およびダブルットの分布函数  $\tau_S(\xi, \eta)$ 、 $\tau_W(x, y)$  を厳密な形で求めることは、非線型の多重積分方程式を解くことになって、解析的取扱いは望み難い。したがって、電子計算機を用いた逐次近似法により、近似解を求める。

#### (a) 計算領域の設定

ダブルットの分布は原理的に無限遠まで拡がるが、主要な寄与は、当然に翼の周辺に限られる。よって、例えば図 16 に示すように、計算の領域を  $S$ ,  $W$  両面とも適当な範囲に限定する。この領域外の寄与は、特に周辺部と Wake Sheet が重要であるから充分考慮しなくてはならない。このため、周辺部については領域内周辺の分布勾配から寄与を附加える。また Wake Sheet については、領域の後端から、 $x$  方向に分布一定として、無限遠まで積分したうえ、附加える。計算例では図 16 に示すように、領域の外周(Wake を除く)に 2 重の小領域を附加してこの寄与を加えた(原理上は幾らでも可能)。さて、限定した領域を多数の小領域に分割し、この内部でダブルット

の強さを一様とする。また、この小領域の中央の一点を、その領域の代表点とする。かくて、逐次近似により、各代表点で、境界条件を充すような数値解を求めてゆく。代表点の数を増加すれば計算精度は上がるが、当然に計算機の容量によって制限をうける。(以下、図 16 および、図 17、計算 Flow Chart 参照)。

#### (b) 誘起速度の係数マトリックス

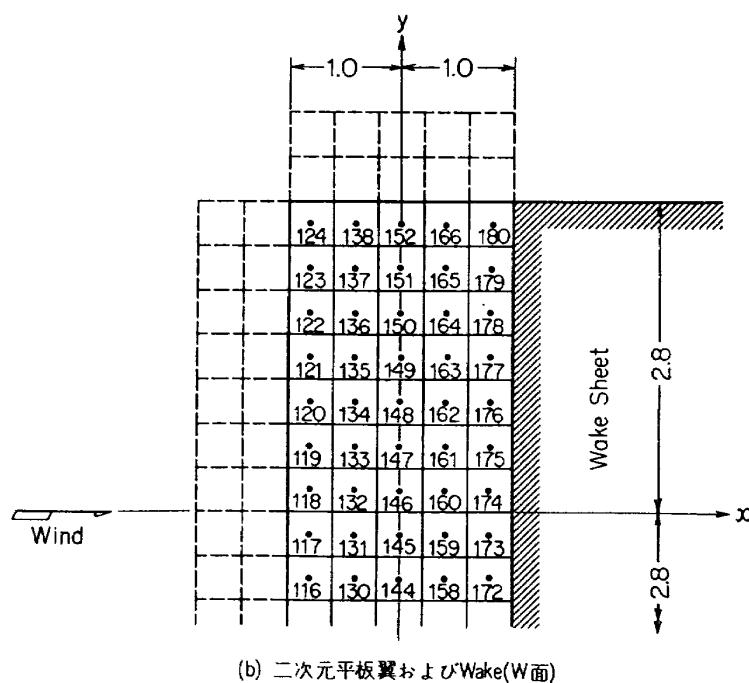
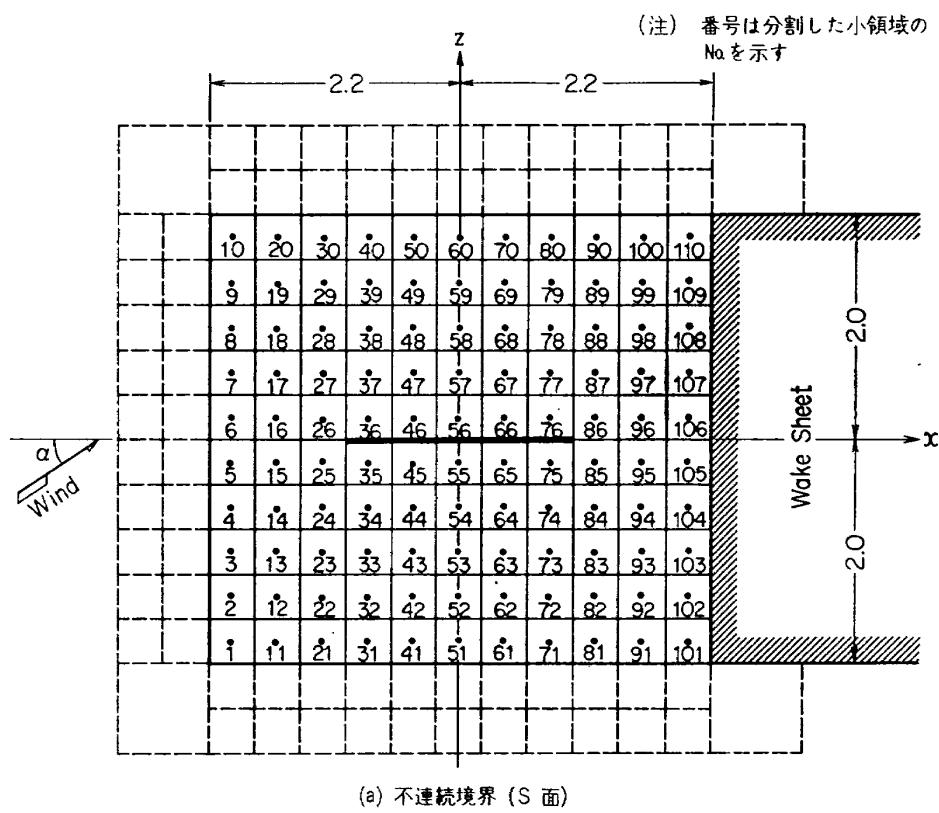
$S$  面上の代表点の数を  $M$ ,  $W$  面上を  $N$  とし、(28) 式の積分を各小領域で遂行して( $\tau$  は一様としているから積分の外へ出る),  $S$  面における附加速度  $\bar{u}_{aS}$ ,  $\bar{v}_{aS}$ ,  $\bar{w}_{aS}$  (領域の記号  $i, j$  は省く、また  $\tau$  の分布勾配の効果はまだ入っていない),  $W$  面における  $z$  方向速度  $\bar{w}_{aW}$  を求めるための係数マトリックス  $[A]$ ,  $[B]$ ,  $[C]$ ,  $[D]$  をつくる。すなわち、(28) 式より、

$$\left. \begin{aligned} -4\pi[\bar{u}_{aS}] &= [A] \cdot [\tau] \\ -4\pi[\bar{v}_{aS}] &= [B] \cdot [\tau] \\ -4\pi[\bar{w}_{aS}] &= [C] \cdot [\tau] \\ -4\pi[\bar{w}_{aW}] &= [D] \cdot [\tau] \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

ここで  $[\tau]$  は  $\tau_S$ ,  $\tau_W$  を含む  $M+N$  の Column Matrix である。かくて、 $[A], [B], [C]$  は  $M \times (M+N)$ ,  $[D]$  は  $N \times (M+N)$  の、代表点の座標のみから定まる係数マトリックスである。以後 [ ] はマトリックスまたは、分布をあらわすものとする。ここで此等の係数マトリックスに、前項で述べた領域周辺の寄与および、後方に続く Wake Sheet の寄与を附加える。いま、周辺の或る小領域の分布強さを  $\tau_0$  とし ( $n=0$  とする), その外側の領域外に、2 層 ( $n=1, 2$  とする) の同じ方形の小領域を附加えたとする。この小領域のダブルット分布強さ  $\tau_{1,2}$  は、例えば直線近似であれば  $\tau_0$  とさらにその内側の小領域での値  $\tau_{-1}$  ( $n=-1$ ) から勾配をとることにより

$$\begin{aligned} \tau_1 &= \tau_0 + (\tau_0 - \tau_{-1}) \\ \tau_2 &= \tau_1 + (\tau_0 - \tau_{-1}) \end{aligned}$$

によって得られる(ただし小領域の辺長が等しいとき)。かくて、外部小領域  $\tau_{1,2}$  を近似的に、内部領域の値  $\tau_{0,-1}$  であらわせるから、係数マトリックスの  $\tau_{0,-1}$  に相当する成分に外側領域の寄与を附加えることが出来る。すなわち、外部領域の座標は既知であるから( $S$  面の  $y$  は小として無視) (28) 式の小領域での積分を遂行し、上式を用いて係数マトリックスを修正すればよい。Wake Sheet についても同様である。この場合は後縁から一定の分布をもつ Sheet の寄与を、 $S$ ,  $W$  面とも附加える。かくて得られた係数マトリックスは、周辺部と無限 Sheet の寄与を含み、領域内の  $\tau$

図 16 計算領域の設定 ( $M+N=180$ )

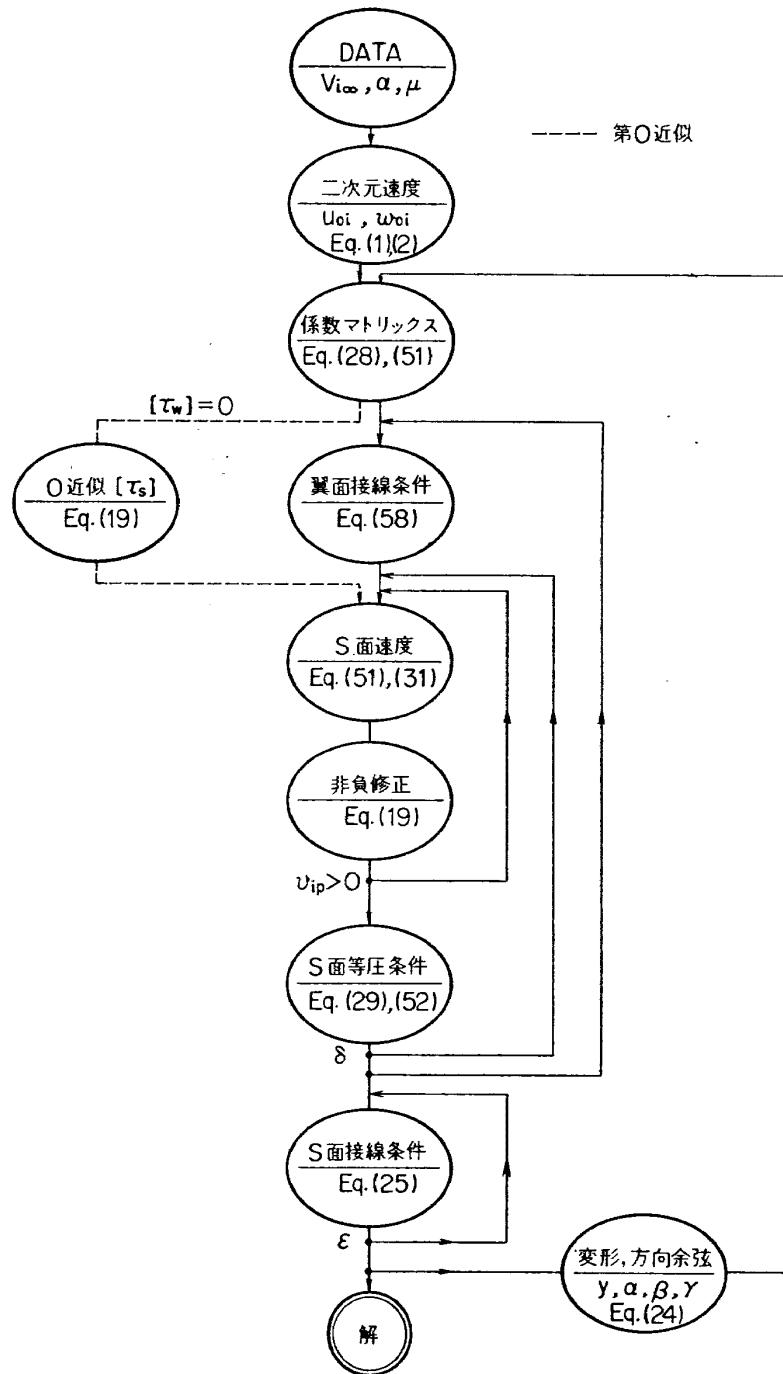


図 17 逐次近似 Flow Chart

の分布に応ずる、各代表点での附加速度（小領域内一様分布での）を近似的に与える。

#### (c) 二次元解と第0近似

まず、翼面の境界条件を充す2次元翼の速度分布を(1), (2)式を用いて各代表点で( $S$ 面のみ)求める( $u_{oi}, w_{oi}$ )。また、変形を小なるものとして第1段階において、各代表点での変速ベクトルの成分 $[\tau_y]=0$ とおく。また同様にして、 $S$ 面で、 $\alpha, \gamma=0$ ,  $\beta=1$ (方向余弦)とおく。第0近似として、等圧条件(19)式

に、 $u_i, w_i$ の代りに $u_{oi}, w_{oi}$ を入れ、 $v_i=0$ ,  $\tau_z=0$ とおいて(19)式を充す $[\tau_x]$ なるダブレット分布勾配を求める( $S$ 面の各代表点での $\tau_x$ の分布を求めたことになる)。ただし、これは最初のごく粗い近似としての $\tau_x$ を求めるためであって、(31)式の関係も無視しておこなう。以後の逐次近似においては勿論(31)式を用いて進めてゆく。このような最初の分布の仮定のやり方には、まだ改良の余地があるであろう。)。 $u \gg v, w$ であるから(19)式を充すうえで $[\tau_x]$ が最

も支配的である。そこで  $S$  面の領域の前方で  $\tau_s=0$  として、上に求めた  $[\tau_x]$  から  $[\tau_s]$  なる  $S$  面上のダブレット分布を折線近似で求める。これを  $\tau_s$  分布における第0近似とする。勿論、翼面上においては、 $[\tau_w]$  は0のままである。

#### (d) $S$ 面上の速度と非負修正

前項で求めた  $[\tau_s]$  から、各代表における  $[\tau_x]$  を多項式近似で求める ((18')式参照)。つぎに  $[\tau_s]$  から (51) 式により誘起される附加速度  $u_{as}$ ,  $v_{as}$ ,  $w_{as}$  を求める。この結果と  $[\tau_x]$ ,  $[\tau_s]$  を用い (31) 式から  $[u_i]$ ,  $[v_i]$ ,  $[w_i]$  を  $S$  面上で求める。ここで得られた  $S$  面上の速度分布は等圧条件を充さない。しかし、少くとも物理的に有意であるためには、これ等の速度と分布勾配を (19) 式の右辺に入れると、結果  $[v_{ip}^2]$  が正でなくてはならない ((29)式参照)。よって、各代表点で (19) 式の右辺を計算し、負になる場合は、その点で  $v_{ip}^2=0$  になるように、その点の  $\tau_x$  を修正する。これを便宜上、非負修正と呼ぶ。非負修正を一通り終れば、修正された  $[\tau_x]$  から、ふたたび折線近似で  $[\tau_s]$  を求め、同様の手順で  $S$  面上の速度を求める。以上を幾度か繰返せば、 $S$  面上  $M$  ケの代表点で  $v_{ip}$  はすべて正となる。

#### (e) 等圧条件による $[\tau_x]$ の修正

この様にして得られる  $[v_{ip}^2]$  と、(31) 式で得られる  $[v_{is}^2]$  は (29) 式に示すように一致しなくてはならないが、当然最初は一致しない。この両者が一致するように  $[\tau_x]$  を修正する。この場合、 $v_{ip}$  を  $v_{is}$  に近づけるために、(19) 式を  $\tau_x$  で微分した微係数を用いればよい。(19) 式は  $u_i$  を含み、 $u_i$  は (31) 式により  $\tau_x$  を含むから、この点を考慮すれば、

$$\frac{\partial(v_{ip}^2)}{\partial\tau_x}=\frac{(1+u^2)u_i-\tau_x}{\left(1-\frac{\tau_y}{v_i}\right)^2-\mu^2}$$

したがって  $\tau_x$  の修正量  $\Delta\tau_x$  は、 $v_{is}^2-v_{ip}^2=\delta'$  とおいて次式で得られる。

$$\Delta\tau_x=\delta'/\left(\frac{\partial(v_{ip}^2)}{\partial\tau_x}\right) \quad (52)$$

このようにして修正された  $[\tau_x]$  から、ふたたび  $[\tau_s]$  を求め前述の (d) の手続きによって、非負修正からやり直す。かくて (d), (e) を幾度か繰返した後、誤差  $\delta'$  の絶対値の総和  $\delta$  が或指定値以下になれば次の段階進へむ。

$$\delta=\sum_{i=1}^M|v_{is}^2-v_{ip}^2|=\sum_{i=1}^M|\delta'| \quad (53)$$

#### (f) 翼面の境界条件による $[\tau_{s,w}]$ の修正

これまでに得られた  $[\tau_s]$ ,  $[\tau_x]$  は一応、 $[\tau_y]$ ,  $[\tau_w]$

$=0$  のもとで近似的に等圧条件を充してはいるが、翼面の境界条件を充しない。したがって、次に、翼面の境界条件を充しながら同時に等圧条件をも大きく乱さないように  $[\tau_{s,w}]$ ,  $[\tau_x]$  を修正する。まず、これまでに求められた  $[\tau_s]$  を用いて  $[\tau_w]=0$  のままで (51) 式から  $[\bar{w}_{aw}]$  を求める。この値は、翼面上の代表点における  $z$  方向の吹下し速度であるから、境界条件 (26) 式より、0にならなくてはならない(翼面は  $xy$  面内に固定されており、 $w_{aw}$  について翼面上ダブルト分布勾配の寄与を考慮する必要はない)。さて、ここに求めた  $[\bar{w}_{aw}]$  を0にすべく  $[\tau_w]$  を定めるならば、翼面上は条件が充されるが、(51) 式の第1, 2, 3式を介して、 $S$  面上の速度も変化し、等圧条件が乱される。いま、

$$-4\pi[\bar{w}_{aw}]=[E] \quad (54)$$

とおいて、 $[\tau_{s,w}]$  の修正量を  $[\Delta\tau_s]$ ,  $[\Delta\tau_w]$  とする。これを (51) 式の第2, 第4式に入れて、 $\tau$  の変化分に対する、速度の増分  $[\Delta v_s]$ ,  $[\Delta w_w]$  を求めれば、

$$\begin{aligned} [B]\cdot[\Delta\tau] &= [B_s]\cdot[\Delta\tau_s]+[B_w]\cdot[\Delta\tau_w]=-4\pi[\Delta v_s] \\ [D]\cdot[\Delta\tau] &= [D_s]\cdot[\Delta\tau_s]+[D_w]\cdot[\Delta\tau_w]=-4\pi[\Delta w_w] \\ &=-[E] \end{aligned} \quad (55)$$

ただし、上の第2式において、翼面の境界条件を充すため  $[\Delta w_w]=-[\bar{w}_{aw}]$  でなくてはならないから (54) 式から、(55) 第2式が導かれる。また、 $[B_s]$ ,  $[B_w]$ ,  $[D_s]$ ,  $[D_w]$  は  $[B]$ ,  $[D]$  なる係数マトリックスを、それぞれ  $\tau_s$ ,  $\tau_w$  の係数マトリックス分割したものをあらわす。かくて、(55) 式は、 $\Delta\tau_s$ ,  $\Delta\tau_w$  なる増分によって、翼面の境界条件が充されるとともに  $S$  面の速度  $v_i$  なる  $y$  方向成分が  $\Delta v_s$  なる変化を各代表点で生じることを示す ( $M+N$ ) 元の連立方程式である。さて、ここで、 $\tau_s$  の微小変化による、 $S$  面上の速度のうち、 $x$ ,  $z$  方向の速度変化を無視し、(55) 式の結果として、 $\tau_s$ ,  $v_i$  が  $[\tau_s+\Delta\tau_s]$ ,  $[v_i+\Delta v_s]$  という分布に変化したとする。このとき、これ等が等圧条件 (19) 式を充すための条件を考える。 $S$  面上の代表点のうち、任意の一点  $n$  での  $\tau_x$  の変化は  $[\tau_s]$  が折線近似で求めてあるから、次式で近似出来る。

$$\Delta\tau_x=(\Delta\tau_{s,n+1}-\Delta\tau_{s,n-1})/2A \quad (56)$$

ただし、 $A$  は小領域の辺長、 $(n-1)$ ,  $(n+1)$  は点  $n$  を含む小領域の前後の小領域をあらわす。(56) 式の増分  $\Delta\tau_x$  が等圧条件 (19) 式の右辺、すなわち (29) 式の  $(v_{ip})$  におよぼす変化  $\Delta v_{ip}$  は、(52) 式を求めたと同様に今度は (19) 式を  $\tau_x$  で微分し、

$$\begin{aligned} \Delta v_{iP} &= \left( \frac{\partial v_{iP}}{\partial \tau_x} \right) \Delta \tau_x = \frac{1}{2v_{iP}} \left[ \frac{\partial (v_{iP}^2)}{\partial \tau_x} \right] \Delta \tau_x \\ &= \left[ \frac{u_i(1+\mu^2) - \tau_x}{2v_{iP}\xi} \right] \Delta \tau_x = \eta \Delta \tau_x \quad (57) \\ \text{ただし, } \xi &= \left[ \left( 1 - \frac{\tau_y}{v_i} \right)^2 - \mu^2 \right] \end{aligned}$$

(57) 式の  $\Delta v_{iP}$  と (55) 式の  $\Delta v_S$  を等しくおけば、翼面の境界条件を充すための修正において、等圧条件が著しく損はれなくて済む。したがって、(55) の第 1 式と (57) より、(56) を考慮して、

$$\begin{aligned} [B_S] \cdot [\Delta \tau_S] + [B_W] \cdot [\Delta \tau_W] &= -4\pi[\eta \Delta \tau_x] \\ &= -4\pi \left[ \frac{\eta(\Delta \tau_{S_{n+1}} - \Delta \tau_{S_{n-1}})}{2\Delta} \right] \end{aligned}$$

上式の右辺は、 $\Delta \tau_{Sn}$  であらわされたから、 $S$  面上の各代表点 ( $n=1 \cdots M$ ) について  $\tau_i$  を求めるとともに左辺へ移項し、 $[B_S]$  なる係数マトリックスを  $[B_S]$  に修正してまとめることが出来る。これをおこなえば結局 (55) 式は

$$\left. \begin{aligned} [B'_S] \cdot [\Delta \tau_S] + [B_W] \cdot [\Delta \tau_W] &= 0 \\ [D_S] \cdot [\Delta \tau_S] + [D_W] \cdot [\Delta \tau_W] &= -[E] \end{aligned} \right\} \quad (58)$$

(58) 式は、( $M+N$ ) 元の一次連立方程式であるから、これを解いて、 $\Delta \tau_S$ 、 $\Delta \tau_W$  を求め、第 1 近似解を求める。すなわち、

$$[\tau_S]_1 = [\tau_{S0} + \Delta \tau_S], \quad [\tau_W]_1 = [\tau_{W0} + \Delta \tau_W] \quad (59)$$

(ただし第 0 近似  $\tau_{W0}=0$ )

$$[\tau_x] = [\tau_{x0} + \Delta \tau_x] \quad (60)$$

### (g) 逐次近似

(59) 式で得られた第 1 近似は、大よその等圧条件および翼面の切線条件を充し、さらに変形が小ならば  $S$  面の切線条件も近似的に充している筈である。そこで、逐次近似としては、ふたたび上述の (d) 以下の手順を繰返し、(53) 式の  $\delta$  を充分に小さくする。

### (h) $S$ 曲面と切線条件

ところで、これまでの結果は未だ、 $S$  面における切線条件を充分にみたしていない。また、 $\tau_y=0$  であって、 $S$  面への法線の方向余弦  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  も  $xz$  面としての計算である。そこで第 3 の段階として、境界  $S$  の曲面の形を求めてゆく。まず (25) 式を用いて、 $\tau_y=0$  での  $[f_x]_0$ 、 $[f_z]_0$  を求める。つぎに、求めた曲面の勾配  $[f_x]_0$  を用いて、丁度  $[\tau_x]$  から  $[\tau_S]$  を求めた場合と同様に、折線近似によって、代表点の  $y$  座標であらわした曲面形  $[y]$  を求める。この  $[y]$  から、さきに  $[\tau_z]$  を求めたと同様に、多項式近似で  $[f_z]_S$  を求めるとき、当然に  $[f_z]_0$  と  $[f_z]_S$  とは一致しない。そこで、各表代点における、両者の差を  $\epsilon'$  とし、

$\epsilon'$  の絶対値の総和を  $\epsilon$  とおいて、

$$\epsilon = \sum_{i=1}^M |\epsilon'| = \sum_{i=1}^M |f_{zS} - f_{z0}| \quad (61)$$

かくて、 $\epsilon'$  を各代表点で 0 に収集させるべく  $[\tau_y]$  を求める。この場合、例えば第  $n$  回近似  $[f_z]_n$  を  $[f_z]_S$  に近づけるため、(25) 第 2 式を  $\tau_y$  で微分し、各代表点で  $\epsilon'$  が 0 に近くなるように、 $\tau_y$  の変化  $\Delta \tau_y$  を定める。

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_z}{\partial \tau_y} &= \frac{u_i}{\tau_y u_i - \tau_x w_i} \\ \Delta \tau_y &= \epsilon' / \left( \frac{\partial f_z}{\partial \tau_y} \right) \end{aligned} \quad (62)$$

前の段階での  $\tau_y$  にこの  $\Delta \tau_y$  を加え、ふたたび (25) 式によって  $[f_x]_{n+1}$ 、 $[f_z]_{n+1}$  を求める。このような手順を  $\epsilon$  が指定された値より小さくなるまで反復し、 $[\tau_y]$  (したがって同時に  $[f_x]$ 、 $[f_z]$  も) を定める。さて、ここで求められた  $f_x$ 、 $f_z$  を用い、各代表点における  $S$  面の法線方向余弦  $\alpha$ 、 $\beta$ 、 $\gamma$  を (24) 式で求める。また、新しい変形後の座標  $[y]$  も上の計算の中ですでに求まっている。したがって、逐次近似の次の段階に移るためには、 $S$  曲面の新しい座標と法線方向余弦を用い、(51) 式の誘起速度の係数マトリックスを再計算しなくてはならない。すなわち、 $S$  面の新しい変形後の座標を用いて (28) 式における各小領域内積分を再度遂行する。かくて再び上に述べた (d) 以下の手順を繰返し、 $S$  面の等圧条件から定まる  $\delta$ 、切線条件から定まる  $\epsilon$  が指定値以下になり、かつ、逐次近似の前段階と比較して  $\tau$  分布、 $S$  面速度分布、曲面の形が殆ど変化しなくなるまで、近似計算を反復する。この様にして最後に収束した結果は、最初に設定した問題における、近似的数値解とみなすことが出来る。

### (i) 近似の良否と計算の精度

計算された結果が厳密解に対して有する近似の良否と、計算上の精度とを的確に求めることは、この場合容易でない。何故ならば、先づ ( $M+N$ ) ケの小領域で置かえた事による誤差は、領域外ダブレット分布の無視につながり、また、隣接する小領域での分布勾配の寄与の無視、翼前縁附近での急激な圧力勾配に応ずる近似の良否、等の問題にかかり、此等がいわば有機的に解に関連しているからである。このために、ここで求められた近似解が予想される厳密解と著しい差をもたないことを推定するためには、単なる計算上の誤差に留らず、第 1 に、此の得られた解が、これまでに述べた流場の理論的ならびに物理的な考察の結果

とよく一致すること、第2に、既存の理論による結果と比較して、合理的であること、および第3に、設定された領域の広さの大小による計算結果の差違を吟味することが必要と考えられる。したがって、この様な検討を、以下の計算例とその考察、ならびに、線型理論との比較の項で述べる。そこで、以後、計算上の誤差については、先に述べた  $\delta$ ,  $\epsilon$  を代表点の数で割った平均誤差を求めて、この平均誤差がその対応する物理量（例えば  $\delta$  ならば  $v_i^2$ ）の最大値に対する割合を問題にするに留める。

## 12. 計算例とその考察

この項では、計算結果とその考察をおこなうが、まず、“計算例1”では比較的に変形の大きい場合につき、変形のあり方、流場のPattern、翼特性の変化を吟味し、ついで“計算例2”において、迎角 $\alpha$ 、速度比 $\mu$ が変形に及す効果を調べる。さらに、“計算例3”において、設定領域の大小による誤差の吟味をおこなう。

### (a) 計算例1. (変形と流場の考察)

計算の条件は次の通りである。

自由流速(低速側)	$V_{\infty i}=25$
弦長	$c=2.0$
速度比	$\mu=0.7$
迎角	$\alpha=0.01(\text{rad})$
設定領域	$M=110, N=70$
代表点の数	180, 小領域の辺長 $\Delta=0.4$
使用電子計算機	HITAC 5020(96 K)

#### i) 計算領域の設定と計算上の誤差

計算領域は図16に示すとおりであって、 $S$ 面上に110、翼面上に70の代表点を置き、合計180の小領域の集合とした。逐次近似においては、したがって、(58)式の180元のマトリックスの計算をおこなう。前項11(h)で述べた $S$ 面切線条件による係数マトリックスの修正を(すなわち、曲面 $S$ の形の近似を)4回反復すれば、最も変形の大きい $S$ 面領域後端においても前段階での値と比較して有効数字3桁以上一致する、収束した近似解が得られる。この場合の境界条件の計算上の誤差は、集積誤差は、 $\delta<0.0033$ 、平均誤差 $\delta/M<0.00003$ 、これに対応する $v_i^2$ はその最大値 $(v_i^2)_{\max}\approx 0.105$ である。同様にして、 $\epsilon/M<0.000012$ 、これに対応する $|f_z|_{\max}\approx 0.063$ の程度である。 $\delta$ ,  $\epsilon$ は $S$ 面上の境界条件の誤差であるが、翼面上の境界条件の誤差は、(54)式の[E]であらわされ、計算結果は $0.4\times 10^{-8}$ 以下である。なお、ここ

で注意すべきことは、(19)式の等圧条件を充すときは、 $V_{\infty i}^2=625$ に対し、 $v_{ip}^2$ が極めて小さいことである。計算は有効数字7桁でおこなわれているから、 $v_{ip}^2<1\times 10^{-4}$ 以下は誤差範囲に入り( $v_i<0.01$ )、したがって、計算結果に示された領域の翼より前方における微小な $v$ については、この点を留意する必要がある。

#### ii) ダブレットの分布状態

図18に $S$ ,  $W$ 面の代表点におけるダブルット分布強さを示す。翼よりも上方の $S$ 面では、 $\tau_x>0$ であって、下側では逆になる。また、当然に翼に近づく程、ダブルットは強くなり、翼面近傍で理論値、すなわち、(39)式を数値積分した値によく連っている。ところで先に述べたように境界条件を充してゆくときには、ダブルットの分布勾配が大きい要素となる。したがって、計算されたダブルット分布勾配 $\tau_x, \tau_y, \tau_z$ が充分に連続的かつ、合理的でなくてはならない。図19(a), (b), (c)に計算値を示す。この中で $\tau_x$ が最も計算上支配的であって、値も大きい。変形が小さいから $\tau_y$ は充分に小さい。

#### iii) $S$ 面の変形

図20に計算された曲面 $S$ の形態を示す。これは、曲面を $xy$ 面に平行な平面で切断した切口の曲線群であるが、図6に示した境界の変形のあり方が明瞭に示されている。図では、 $y$ 方向の尺度を拡大して示してあるので変形が大きく見えるが実際の扇形領域の幅が、この程度の状況では、あまり大きくなことがわかる。翼面上の扇形領域の幅を的確に求めることは、この計算法では当然に不可能である。境界の $y$ 方向への拡がりの勾配は、 $z=\pm 0.2$ において、 $\pm 1^\circ$ 以下である。

図21に変形した境界の $yz$ 断面を示す。翼の近くでは、 $5\sim 6^\circ$ 程度の $z$ 方向勾配が予想される。翼の後半から後縁附近にかけて、扇形領域が拡大し、これに伴って、翼により切断された $S$ 面が左右にどんどん開いてゆくことがわかる。またこの計算の領域内に関する限り、翼通過後の上下面の開きの勾配はかなり一定しているように見える( $z$ 一定の断面で)。ただし、Wake Sheet そのものが三次元翼の場合と同様に何等かの発達を遂げてゆく筈である。したがって翼通過後の境界 $S$ を含むWakeのあり方は、nonuniformな流場におけるVortex systemの挙動として、今後に残された課題である。此の計算の結果は、この様な流れの発達の初期条件として、一つの手がかりを与えるであろう。なお、図21(a)は翼より前方での変形で

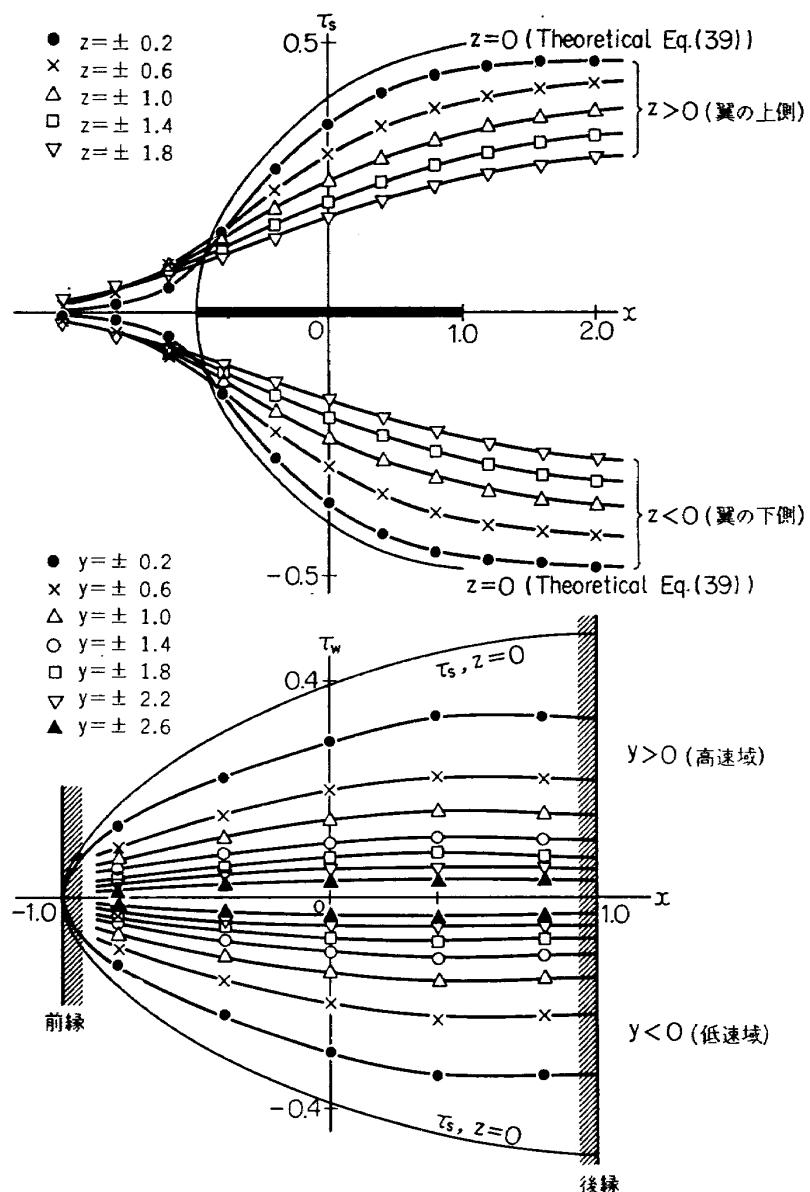
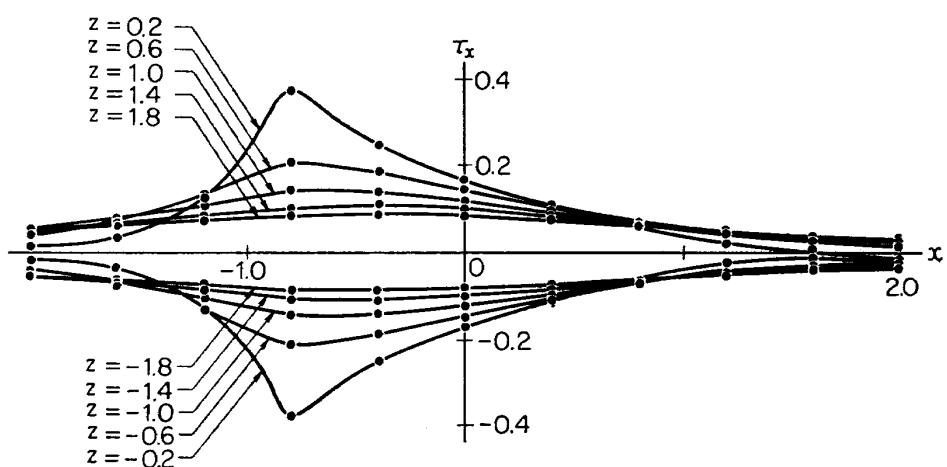
図 18  $S$  面,  $W$  面における Denblet 分布

図 19 (a) ダブレット分布勾配

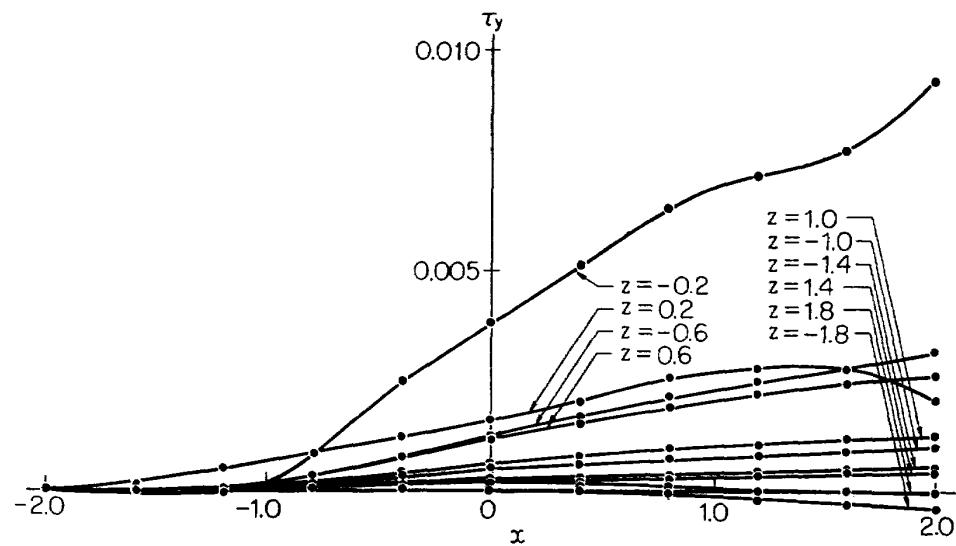


図 19 (b) ダブルエット分布勾配

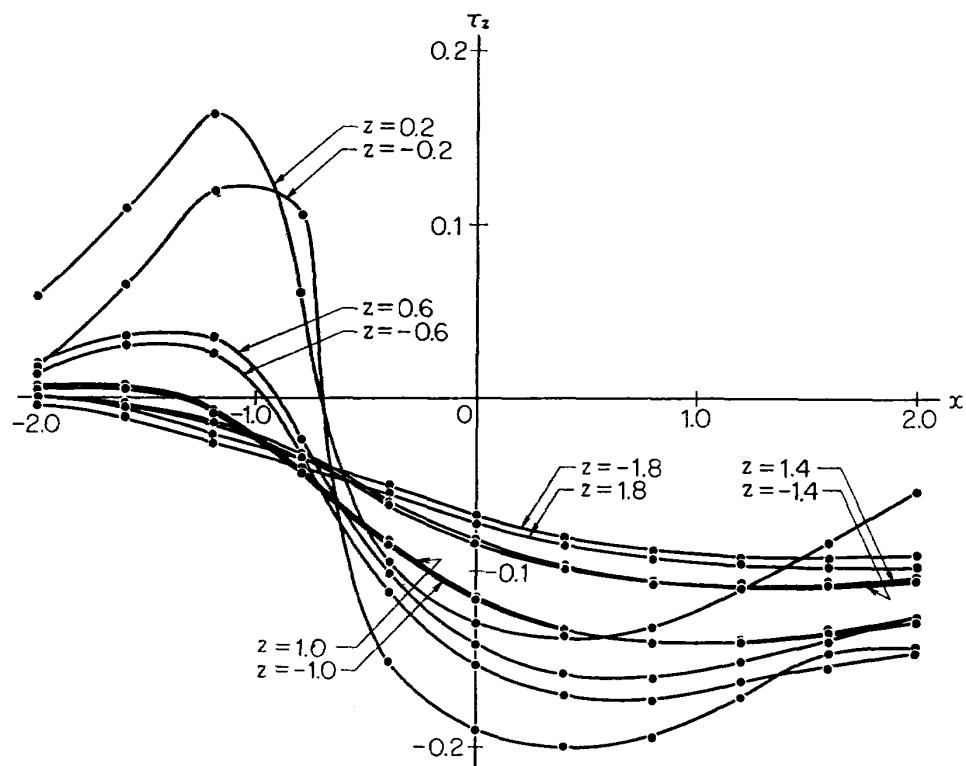
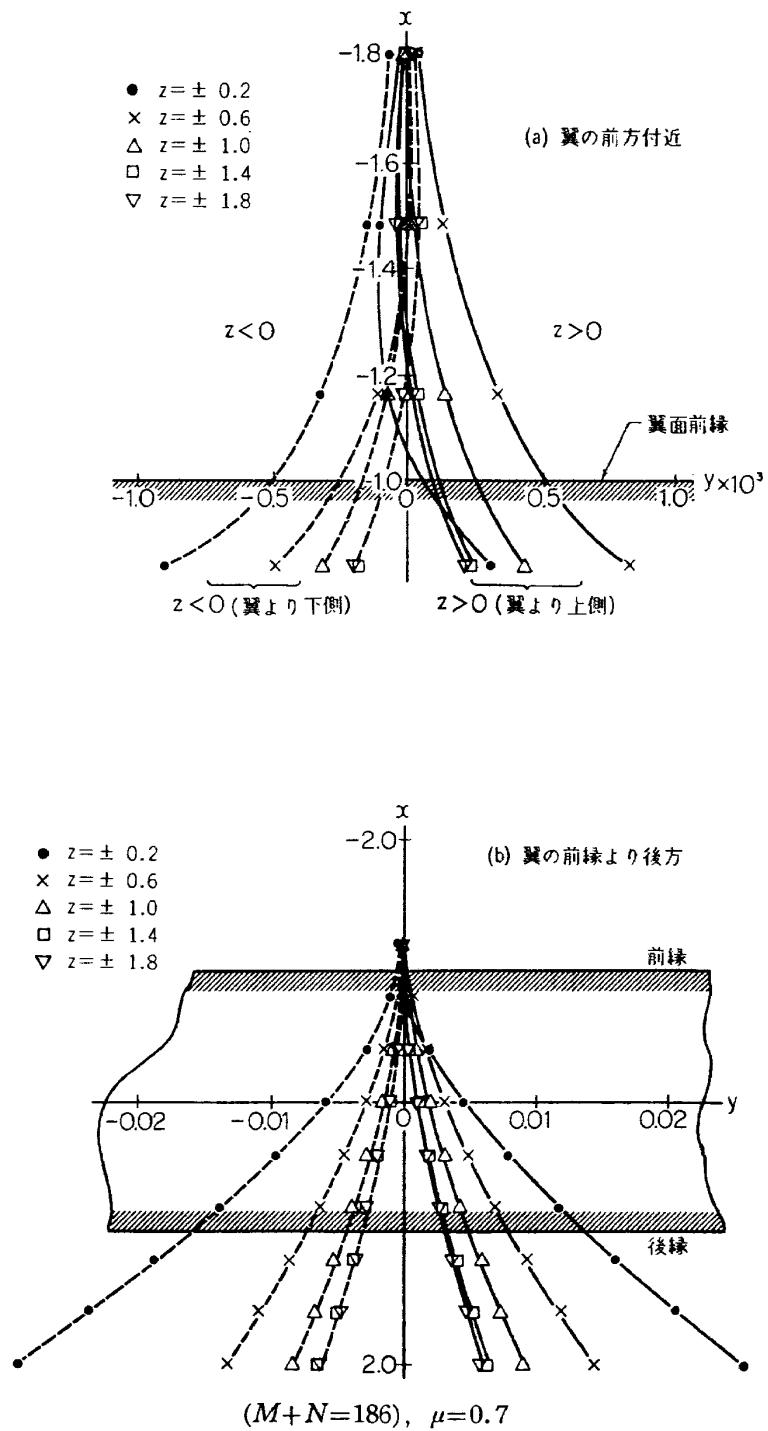
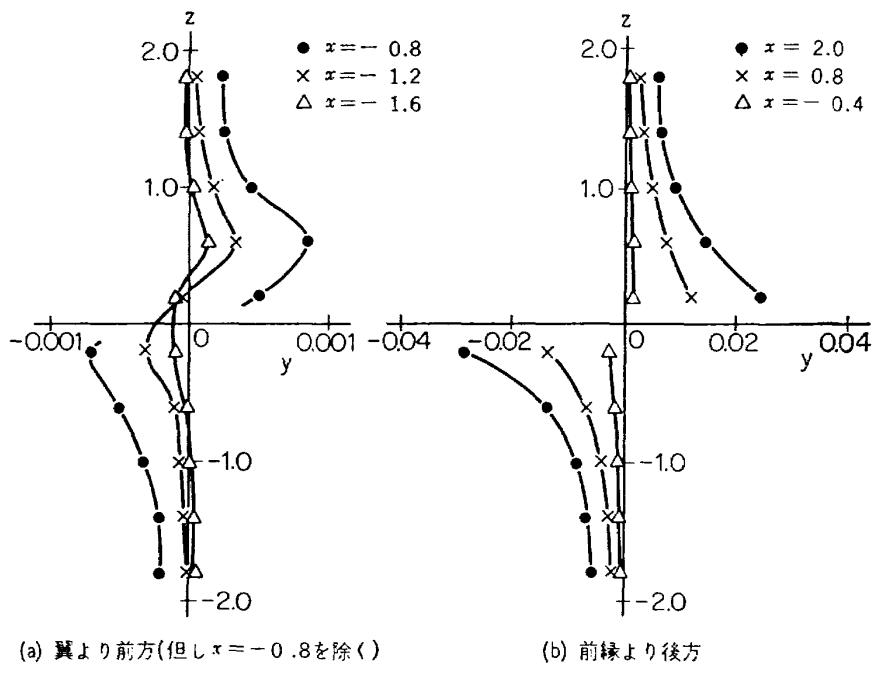
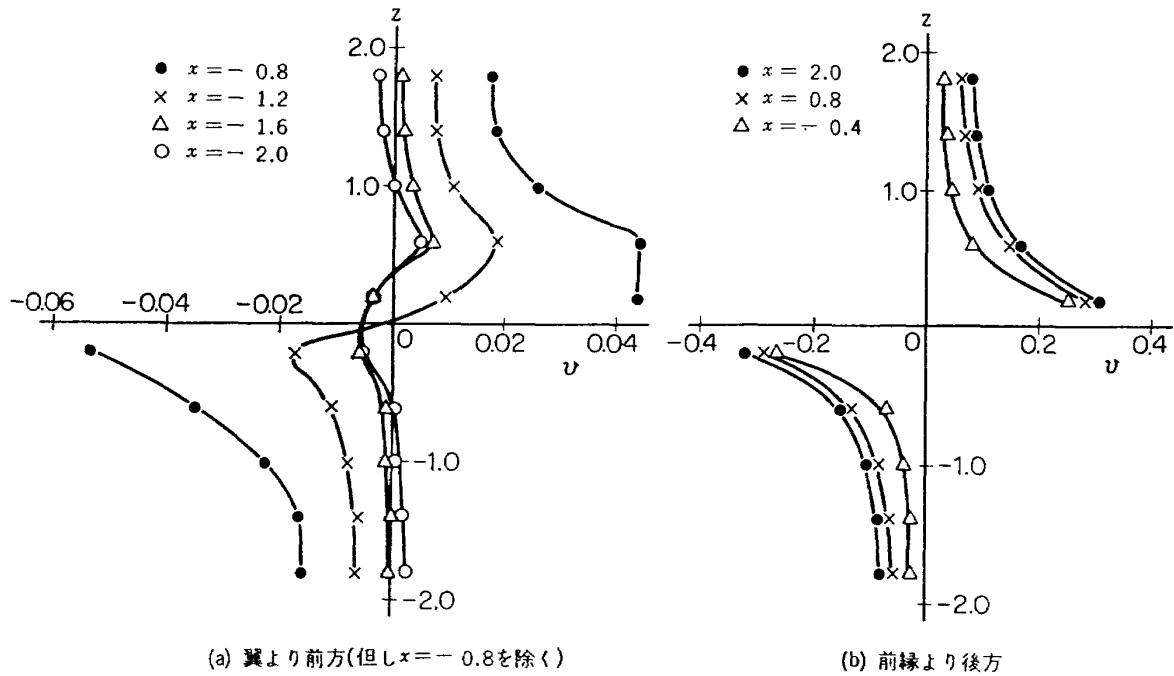


図 19 (c) ダブルエット分布勾配

図 20  $S$  境界の変形 ( $x-y$  断面)

図 21  $S$  境界の変形 ( $y$ - $z$  断面)図 22  $y$  方向速度成分  $v$ 

あるが、この領域は、翼による切断の手前であるから、流場は連続していて、しかも変形は小さい。ここで補足的に  $S$  面における  $y$  方向速度成分を示す。図 22 は、図 21 の変形に応じる  $y$  方向速度  $v_i$  の分布であって、 $v_i$  は変形の起因であるから重要である。ただし、図中 (a) の翼より前方の値は極めて小さく、一部は先に述べた等圧条件での計算誤差範囲に入っている。

#### iv) 翼の特性変化

図 23 に高低速両域において附加される揚力係数  $\Delta C_{L,i,j}$  ((44)式参照) の翼巾方向の分布を示す。低速域で揚力増加、高速域では干渉によって減少が起るが、無次元化した係数で比較するとはば境界をはさんで逆対称的である。つぎに図 24 に、この結果から揚力そのものの変化を求めて図示した。いわゆる Strip Theory として、干渉を無視すれば、境界で揚力は不

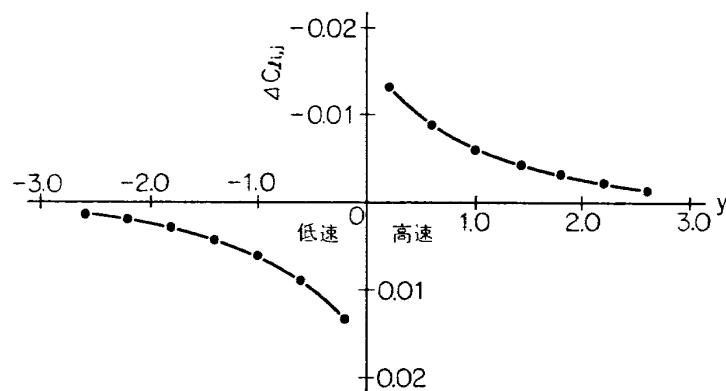


図 23 翼幅方向, 附功される揚力係数

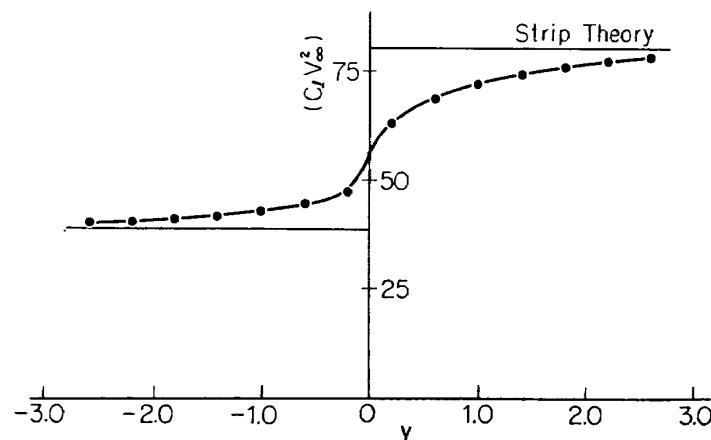
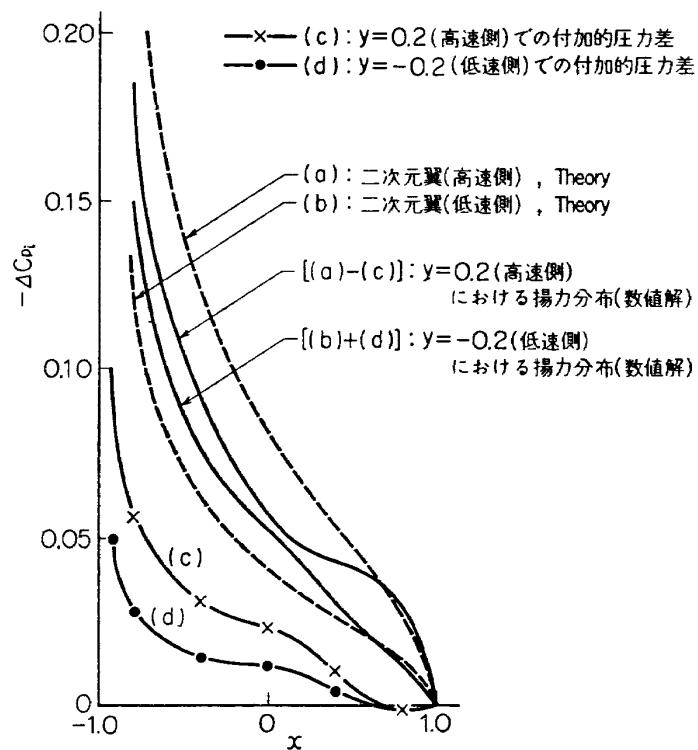


図 24 翼幅方向揚力分布

図 25 翼弦方向揚力分布,  $(M+N)=138, \mu=0.7$   
[ $1/2 \rho V_{\infty}^2$  (低速側) で無次元化した値]

連続であるが、干渉を考慮した結果は両域の揚力が当然図の様に連続的につながり、一般によく知られた分布形態を示す。この揚力勾配の急激な部分に、これ迄議論した扇形領域が存在する。

図 25 には、計算結果から導いた、翼弦方向の揚力分布を示す。点線で示すような境界両側の 2 次元翼揚力分布（比較の便宜上すべて低速側の自由流動圧で無次元化してある）に対し、干渉による附加揚力（図中の (c), (d) 曲線）が低速側で附加され、高速側で減じられる。ところが、この増減される附加揚力が翼の前縁の方へ偏るため、結果として得られる境界の近くの揚力分布は、図に見られるように境界をはさんで翼の後半に揚力の落差を残す。即ち、先に述べた図 15 (a) の形となる。この様な落差が扇形領域で解消されるべきことは既に述べた。言いかえれば図 25 は先の理論的考察の、計算による裏づけとなる。

#### (b) 計算例 2. (迎角および $\mu$ の影響、収束と発散)

迎角  $\alpha$ 、速度比  $\mu$  の効果で変形量がどのように変るかをしらべるために、以下の条件で同様な計算をおこなった。領域の広さは、計算例 1 より小さい。

自由流速（低速側）	$V_{\infty i}=25$
弦 長	$c=2.0$
速度比	$\mu=0.9, 0.8, 0.7, 0.6,$ $0.55$ (このとき $\alpha=0.01$ )
迎 角	$\alpha=0.01, 0.02, 0.03$ (このとき $\mu=0.9$ )
設定領域	$M=88, N=50$
代表点の数	$(M+N)=138$ 、小領域の辺長 $\Delta=0.4$
使用電算機	HITAC 5020(65 K)

#### i) 変形量の増大とその外挿による推定について

図 26 に、翼の後縁近く ( $x=0.8$ ) での、 $z=\pm 0.2$  (翼に接する計算小領域) の位置での  $S$  面境界の  $y$  座標の偏差  $\Delta y$  を、 $\alpha$  および  $\mu^2$  に対して示してある。迎角  $\alpha$  および速度比  $(1/\mu)$  が増加すれば当然に翼面上下の境界の変形幅  $\Delta y$  は増加する。このような効果は特に  $\alpha$  において直線的であるが、大迎角で強い高速流を受けるとき境界の変形が、すでに翼面上においても無視し得ない程に大きくなり得ることを示している。図 27 に、図 26 の位置に対応する  $y$  方向の速度成分  $v_i$  の変化をあわせて示した。図中には、12 (a) i) に述べた等圧条件からの  $v_i$  の誤差範囲をも示してある。

ここで我々の計算は変形の小さい場合に限られているから、上述の精度の高い計算の結果を利用して、実際に生じるであろう大きい変形量を外挿して求める試みがなされてよいであろう。このような試みの結果を附録 5 にまとめて示した。また、このような外挿による大きい変形量を実験値と比較して合理的な結果を得た（附録 5）。かくて変形の小さい場合の上述の結果が、STOL 機などの場合に生じる大きい変形の推定に役立ち得ることを主張し得る。また、このような手法は航空機の複雑な空力特性を解明するうえに有力な手がかりを与えるであろう。

#### ii) 計算の収束と発散

計算は非線型の問題を逐次近似で解いてゆくから、当然にその収束と発散が問題となる。速度比  $(1/\mu)$  および迎角  $\alpha$  が大きくなると、逐次近似の収束状況は急速に悪くなる。逐次近似の収束状態を示すために、図 28 に、 $\mu=0.575, (M+N)=138, \alpha=0.01 \text{ rad}$

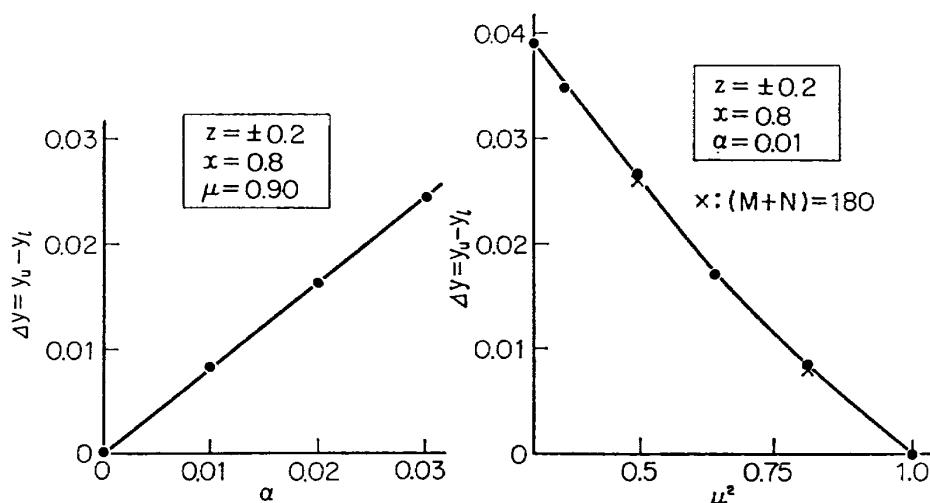
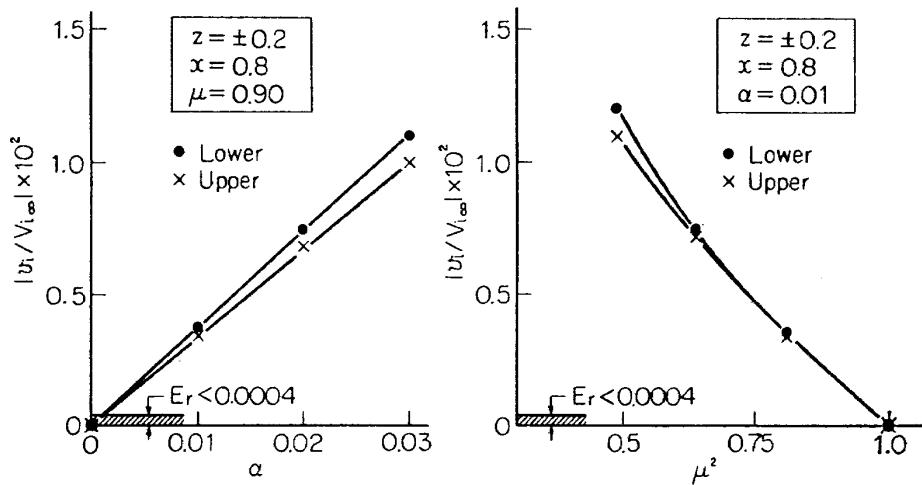
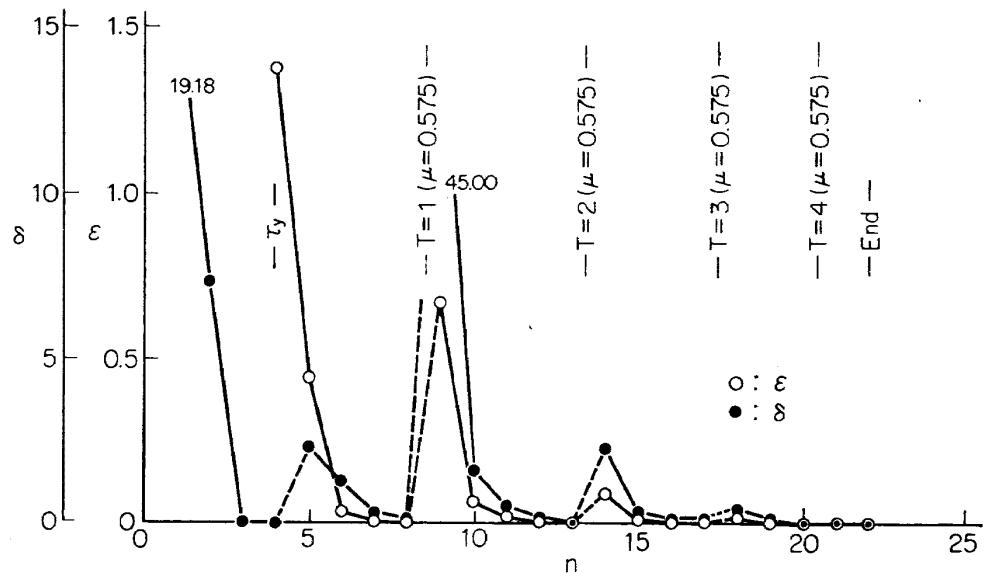


図 26 迎角  $\alpha$ 、速度比  $\mu$  による変形量の推移  $(M+N)=138$

(注)  $Er$ : 等圧条件を充たすときの計算上の誤差範囲図 27 迎角  $\alpha$ , 速度比  $\mu$  による  $(v/V_{i\infty})$  の推移図 28 逐次近似による誤差の収束 ( $\mu=0.575$ )

における集積誤差  $\delta$ ,  $\epsilon$  の各近似の段階での変化を示した。横軸  $n$  は翼面の切線条件による  $\tau$  の修正回数である (図 17 Flow Chart, Eq. (58) 参照)。図 28 の計算は  $n=22$  で終っているが、例えば  $\mu=0.9$  では  $n=8$  においてほぼ収束する。すなわち、両側の高低速度差が大きくなると収束が悪化して、多大な計算時間を必要とする。図中の  $T$  は係数マトリックスの修正回数、すなわち、 $S$  面の変形によるダブレット分布座標の修正回数である (勿論、 $T=0$  では  $S$  面は  $xx$  面内にある)。また図中の  $\tau_y$  は、 $S$  面の切線条件について求めた  $\tau_y$  (勿論これまでに  $\delta$  は充分 0 に収束している) を計算 (等圧条件式) の中に組込みはじ

めた段階を示す。図でみられるように、 $\tau_y$ ,  $T$  の計算への組込みの度に、 $\delta$ ,  $\epsilon$  に大きい jump が生じ、この jump の量が逐次減少してゆくことがわかる。 $T=4$  では図のように jump はほとんどあらわれないで、計算が収束したことを示している。ところでこの jump 量は变形が大きくなる程著しくなる。従ってまた、収束も、計算時間についても苦しくなってくる。 $\mu=0.5$  の場合計算時間は約 1.5 時間を要した。計算領域が拡がれば当然計算の所要時間も増加し、例えば計算例 1 の場合約 2 時間を要している。計算機の記憶容量が充分であれば、現在の計算よりもさらに幾つか

のマトリックスを記憶出来るので計算時間はかなり大幅に減じうる。 $(M+N)=180$ において、 $\alpha=0.01$ のまま $\mu$ を変えて収束を調べたところ、 $\mu=0.3$ に至るまで発散は見られなかった。

ただし、計算時間が多大になるので、収束の最終段階までは試みていない。ところが $(M+N)=138$ において、 $\alpha$ と $(1/\mu)$ と共に大きくして（例えば $\mu=0.6$ 、 $\alpha=0.04$ ）試みたところ、翼面の境界条件を充した後の第1近次において非負修正が収束しなかった。すなわち(58)式による等圧条件を充したまでの修正方法の近似度が悪化する様に思われる。したがって、変形が大きい場合についての逐次近似の方法は、さらに工夫が必要である。ただし、変形が大きくなると、小領域の大きさに比し、扇形域の大きさが無視出来なくなり、扇形域内にも計算領域を設定しなくてはならなくなる。この様な場合、物理的に考えても既に我々の上述の計算法は不適当である。最初に問題を設定するにあたり、迎角 $\alpha$ 、したがってまた変形を小さいとした主な理由は、此の様な点にある。勿論、計算機の容量の増大と、計算速度の増加を前提とすれば、扇形域内にも多数の小領域を設けて、精密な計算を行うことは、原理的には可能である。しかし、此の報告における主題は、干渉による変形のメカニズムを知ること、および流場と翼特性の変化の傾向を知ることにあるから、計算の技術上の問題には此以上立入らない。

### (c) 計算例 3. (設定領域の大きさの影響)

これまでの計算例で、翼と不連続境界の干渉による扇形領域の形成、およびこの領域をめぐる諸変化が、先に述べた流場の物理的考察の結果と定性的に一致することを示した。ところで上述の計算は、ダブレットの分布領域を近似の便宜上、翼の周辺に限定したうえでおこなわれている。すなわち、領域外では、領域の周辺とWake Sheetを除いて、ダブルートの強さを0としている。原理上ダブルート分布は、急速に弱まりながらも無限に広がるから、当然この様な近似から誤差を生じる。したがって、ここで問題にしている変形した境界近傍の諸量が、設定された領域の大きさによって、どの様な影響を受けるかを調べておくことが、近似の良否と精度に関連して、必要である。

#### i) ダブルート分布と変形量

さて、これまでにも述べたように、此の報告に於ける流場の近似計算は、必然的に大きい電算機の記憶容量を必要とし、計算のための設定領域の広さは、使用しうる計算機の容量によって制限をうける。特に此の計算では、ダブルート誘起速度を求める係数マトリッ

クスを、変形に応じて逐次修正してゆくから、まず $(M+N) \times (M+N)$ のマトリックスを記憶する必要がある。さらに(58)式に示すように、翼面境界条件を充すとき、このマトリックスを修正して連立方程式を解くから、もう一つの同じ大きさの記憶容量を必要とする。かくて、計算はまず、65Kの容量で、代表点の数 $(M+N)=138$ についておこない（計算例2）、次に、領域の大きさを広げるために、96Kの容量の計算機を用いて、 $\mu=0.9$ および0.7（計算例1）の場合を $(M+N)=180$ について計算した。したがって以下に領域の広さの効果を比較する。いづれも計算は計算機の容量を一ぱいにして行なわれた。図29は翼の後縁の近く( $x=0.8$ )でのダブルート分布の状態を比較したものである。図では、複雑化をさけるために $\tau_s$ の比較が充分でないが、 $\tau_s$ の値には領域の広さの効果が殆どあらわれない。これは $\tau_s$ が等圧条件によって厳しく束縛されているためと考えられる。一方 $\tau_w$ なる翼面上の分布は、計算領域（特にその翼幅）を増す程、干渉効果が領域周辺で大きくなる。翼面上の $\tau_w$ 分布は、直接に、干渉による揚力変化に対応するから、領域を限定したことにより、翼面の干渉効果を小さく評価する結果になる。この傾向は、後に線型理論との比較において、詳しく検討するが、領域限定による必然的傾向である。ただし、S面境界の近くでは当然この影響は、図に見られるように、極めて小である。したがって、領域周辺を除き、境界の近傍をめぐる現象を調べるうえで大過ないと考えられる。つぎに図30に、同様 $x=0.8$ の断面における変形量の比較を示す。領域広さの効果は同様に、領域周辺部で大きく、翼の近くでは誤差が少ない。以上の様な設定領域限定による誤差は、当然、変形が大きくなる程著しくなる。問題を設定するときの、変形を小とした仮定の第2の理由は此の点にある。

#### ii) 不連続境界S面周辺のダブルート分布

上述の様に、境界Sの周辺の計算結果は誤差が少いと見られる。ここで図29に示した計算結果について、 $\tau_{s,w}$ の考察を試みる。図中に(39)、(40)式を用いて求めた翼面上、境界との交線近傍における $\tau_s$ の近似的理論値を、翼の上・下面について示してある。図に見られるように、 $\tau_s$ の曲線（翼より上側で $\tau_{su}$ 、下側で $\tau_{si}$ ）は延長すれば、理論値によくつながる。 $\tau_w$ の値については比較すべき理論値がないが、参考のため、(47)式による $|\tau_w|_{T.E}$ （すなわち $x=1.0$ における近似的理論値）を図中に示した。扇形領域、したがって変形を無視すれば、 $\tau_s$ 、 $\tau_w$ は図中 $y=0$ 、

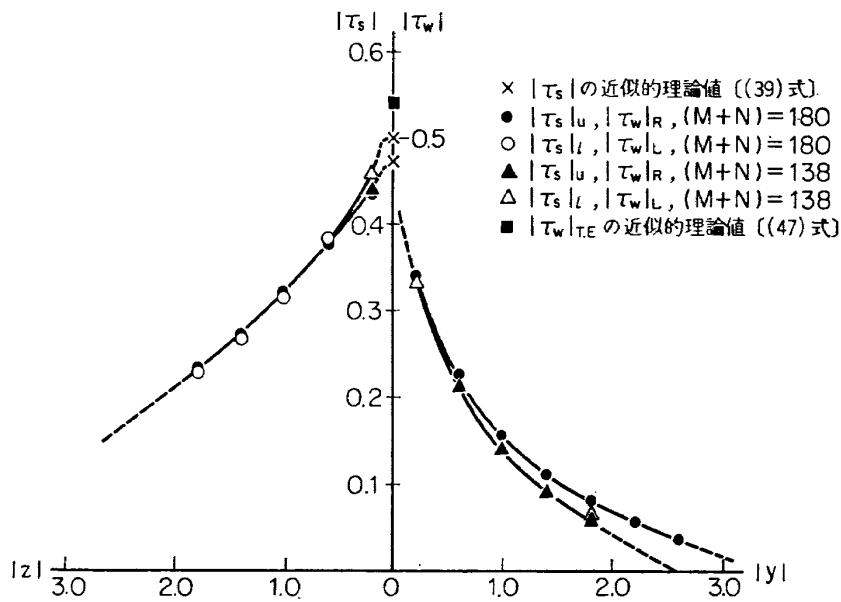
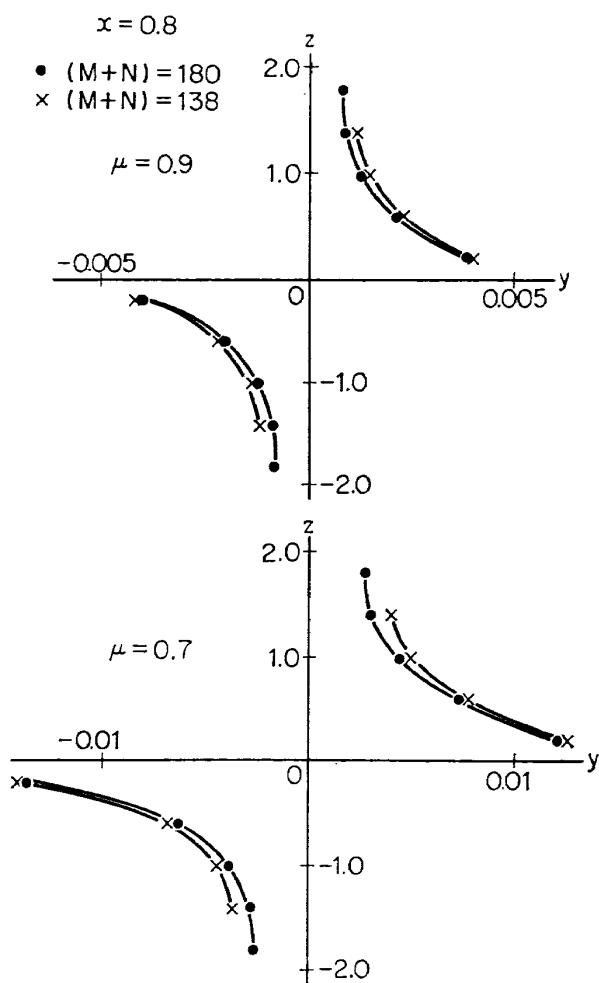
図 29  $\tau$  分布に及ぼす設定領域の広さの効果 ( $x=0.8, \mu=0.7$ )

図 30 変形量に及ぼす設定領域の広さの効果

においてこの  $|\tau_w|_{T.E.}$  に至り、互い打消し合うべきものであるが、図にみられるように、 $\tau_{su}, \tau_{si}$  は異ると同時に、 $\tau_w$  は、物理的に考えて、先に 9. (b) の末尾に述べたように  $|\tau_s| > |\tau_w|$  なる傾向を示していると考えてよいであろう。以上により、我々の計算精度が、先に述べた理論的考察に耐えることを認めてよいであろう。なお、変形が小さい限り、(34) 式によって、 $|\tau_s|$  の曲線の末端勾配は近似的に 0 でなくてはならない。図は点線で、この想定される傾向を示した。扇形領域の近傍の  $\tau_{s,w}$  および変形量の翼面上の正確な数値は、この報告での計算がこの領域を小としてダブルット分布から排除しているから、直接に求めることは出来ない。これを求めるためには、この項の (b) ii) で述べたように、この部分に多数の計算小領域を設けるか、または、(33) 式に相当する厳密な積分方程式を解かねばならないが、おそらく、極めて困難であろう。

以上、述べた結果により、境界をめぐる干渉についての計算が、最初に行った理論的考察を充分裏づけていることが明かにされた。かくて、理論的立場から最後に行なうべき検討として、従来の線型理論との比較の問題が残されている。これを次の項で述べる。

### 13. 線型理論との比較

此の報告の結果と、線型理論の結果とを比較するにあたり、重要なことは、まず第一に、これまで行なわれている取扱が、Ribner & Ellis を除き、ほとんど、

Image による方法が主体となっていることである。ここで Image による流場の表現を Image System と呼ぶことにすれば、Reduced Velocity を用いる方法をこれに対して、Reduced System と呼んでよいであろう。そこで、この様な 2 種の取扱の間の関係と相違をまず確めておくことが必要である。しかし、Reduced System は新しいものではなくて、すでに此の様な相違は、Ribner & Ellis 等によって確かめられていると思われる所以、この報告の末尾に附録 1 で論じた。

つぎに、第二として、線型化の意味を明確にしておく必要がある。これは線型理論とその比較において、本質的な問題となるからである。かくて、以下の議論においては、まず (a) において、境界面  $S$  上のダブレット分布に関連させて線型化に 2 つの段階が指摘される。ついで線型化の各段階に応じた線型理論との比較を (b), (c), (d), (e) において述べる。

#### (a) 線型化の意味

さて、附録 1 で論じられているように、Image System と Reduced System の本質的な相違は、Image System が、境界の左右の流場を個々に扱うとともに、微小擾乱速度による線型化を前提としているのに対し、Reduced System では、境界左右の流場を一挙に取扱うとともに、本質的に線型化を前提としていない点にある。Reduced System で、Image 法と同様な微小擾乱による線型化をおこなえば、境界変形の無視のものとて、結果は Image System と等価になる(附録 1)。これは、すなわち、Ribner & Ellis の手法である。ところで、Reduced System では先に述べたように、左右の流場を同時に平等に扱う代償として、不連続境界  $S$  におけるダブルート(あるいは Vortex)の分布  $\tau_S$  を求めなくてはならない。ここでまず、解となるべき  $\tau_S$  を規定する境界条件のうち、最も基本となる等圧条件 (16) 式を考える。(16) 式の  $u_i$ ,  $v_i$ ,  $w_i$  に (28) 式の附加速度(二次元速度は既知である)を入れれば、次の形の汎函数となる。ただし、未知函数  $\tau_{S,W}(\bar{x}, \bar{z})$  および  $f(\bar{x}, \bar{z})$  を一般的な形  $\varphi(\xi)$  であらわし、その微係数を  $\varphi_\xi$  であらわす。

$$\begin{aligned} F[I(\varphi), \varphi_\xi] &= F\left[\int K(\varphi(\xi), \varphi(\xi), \xi, \xi) \varphi(\xi) d\xi, \varphi(\xi) \right] \\ &= (V_{\infty i^2} - V_{0i^2})(1 - \mu^2) \quad (63) \end{aligned}$$

ここに、 $I(\varphi)$  は上式の第 2 辺に示されるように、(28) 式から導かれた領域の積分を含む汎函数である。すなわち、(28) 式の積分がダブルートの分布位置座標、 $y=f(\bar{x}, \bar{z})$  という、境界面を規定する未知函数

を含み、第 2 辺の  $K$  はしたがって、未知函数  $\varphi$  の幂を含むから、汎函数  $I(\varphi)$  は非線型である。ここで、境界の変形はさておき、ダブルートの分布位置が  $xz$  面内に限られるとすれば、 $K=K(\xi, \xi)$  となり、 $I(\varphi)$  は核  $K$  を含む線型汎函数となる。かくて、ダブルートの分布位置を固定することは、第 1 の線型化である。

つぎに、 $I(\varphi)$  を線型化したうえで、なお汎函数  $F$  は  $I(\varphi)$  および  $\varphi_\xi$  に関して 2 次式である。この 2 次の項を小さいものとして省略すれば、(63) 式の  $F$  は線型汎函数となる。かくて、此の省略が第 2 段階の線型化を構成する。古くは Karman & Burgers から、Ribner & Ellis に至る従来の線型理論はすべて、第 2 段階迄の線型化を意味する。これに対し、此の報告は、遂次近似を行うことにより、形式的には、非線型のまま問題への接近をはかったことになる。

以上は最も重要な等圧条件式から、線型化の意味を調べたのであるが、 $S$  面における切線条件は、第 1 の線型化において、境界の変形を無視することにより、すでに近似的に充される。すなわち、ダブルートの分布する  $xz$  面の法線方向の速度成分  $v_i = v_{ri}$  の連続性が保証され、これは直ちに、一般の線型理論における  $S$  面切線条件である(附録 1. (A.3) 式参照)。

最後に、翼面の切線条件は、第 1 の線型化により  $I_W(\varphi) = 0$  なる、最も簡単な積分方程式となる。以上によって、線型化が、厳密には、2 つの段階に分けられることを指摘した。したがって、これ等の段階に応ずる、我々の結果との比較を以下の項目で述べる。

#### (b) ダブルートの位置を固定した線型化との比較

此の報告で述べた、非線型のままの計算法では、ダブルートの分布位置を  $S$  面の切線条件を充すように、境界の変形に応じて遂次変えてゆくわけであるが、境界の変形が小なる場合には、例へば薄翼理論の取扱いと同様に、ダブルートの分布位置が固定(ここでは  $xz$  面内)されていると考えて、近似的な曲面を、流れの勾配から求めることが出来る。此の場合、計算上は誘起附加速度場を規定する(51) 式の係数マトリックスが定値となり、この意味で、関係式の一部が線型化されたことになる。すなわち、上述の第 1 の線型化である。此の方法による、変形量の計算結果を図 31 に比較して示す。この場合  $\tau_y$  は 0 とし、(25) 式の切線条件を充すように遂次近似を行ったものである。予想されるように、翼面から距った変形の小さい範囲では、係数マトリックスを遂次変えてゆく場合とほとんど一致する。ただし、翼面に隣接する部分で

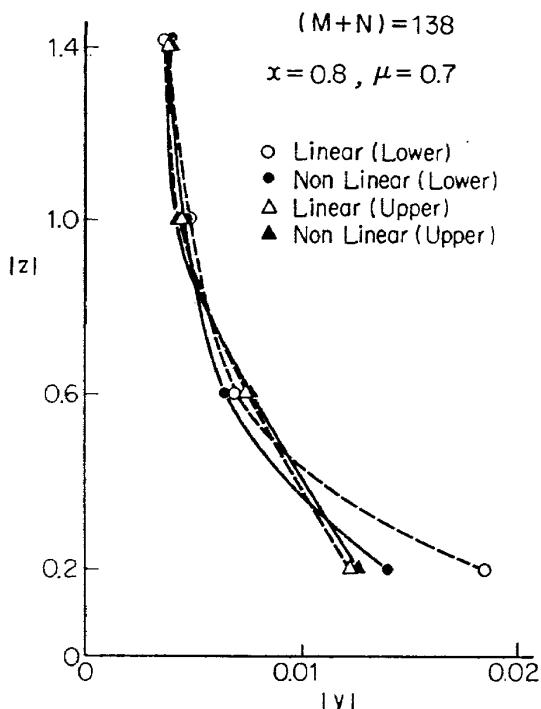


図 31 線型理論との比較（変形）

は、特に翼の下側で差があらわれ、変形が大きく計算される。これは、境界が変形し、ダブレットの位置が変化するとき、境界をめぐる物理量の急変が緩和されることにより、変形自体も緩和されるためと推測される。言いかえれば、翼の存在によって生じる物理量の急変が、翼面上に扇形領域が形成されることにより、調節緩和される様に考えられる。

### (c) 線型化された揚力線理論との比較（1）（ダブルレットの分布と線型化）

翼と境界の干渉について、これまで多数の報告でおこなわれた議論は、すべて先に述べた第2段階迄の線型化をおこない、かつ、本質的には揚力線理論である。したがって、まず、 $S$  面上のダブルレット分布について、線型理論との比較をおこない、これに基いて、揚力線理論との比較をおこなう。勿論これまでに、境界の変形を求めた例はないので、可能な比較は、翼の揚力特性に関するものに限られる。

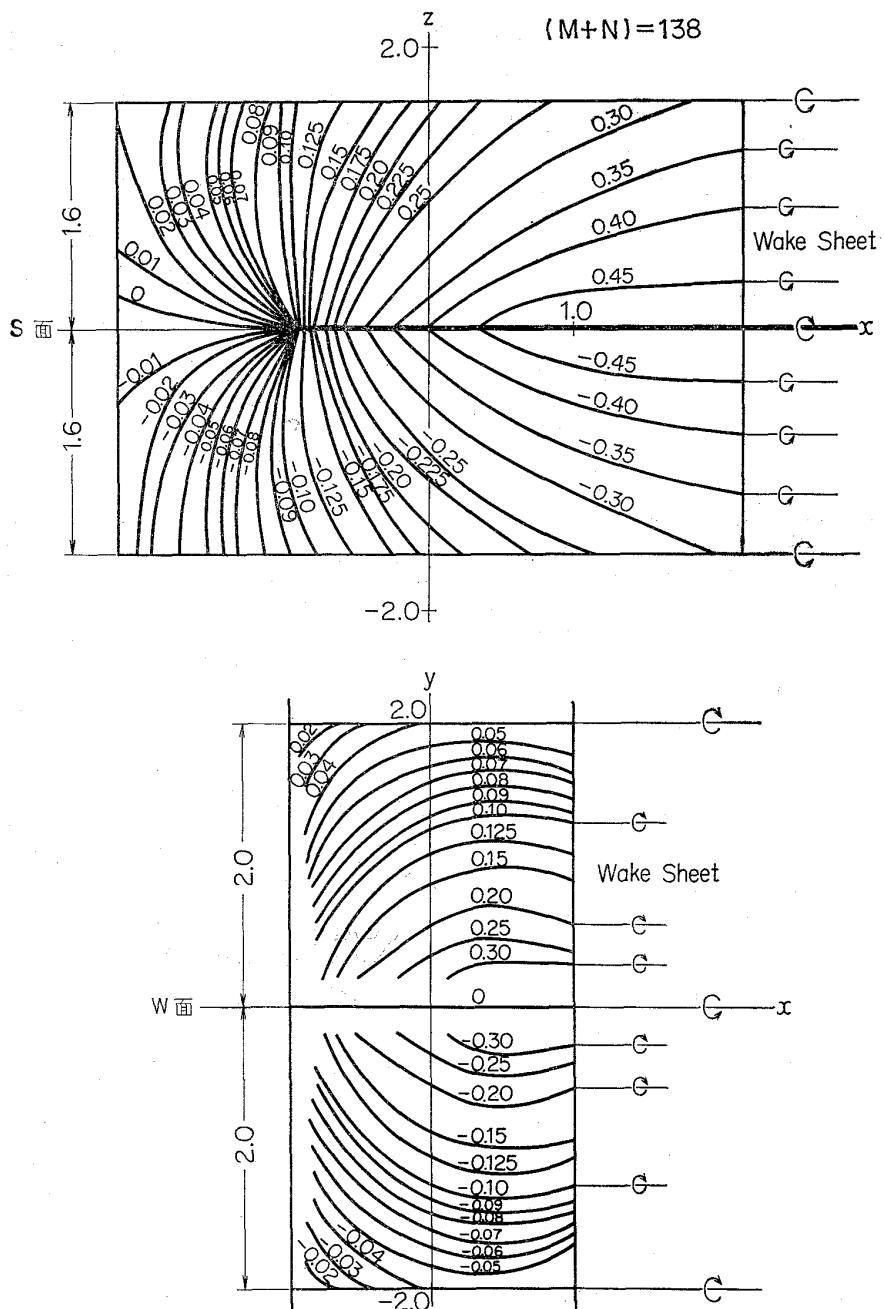
いま Reduced System をとり、2次元翼を一本の無限束縛渦に置かえる。（以下、附録1参照）。この束縛渦が、平面境界を垂直に貫通するとき、 $S$  面上のダブルレット分布は、貫通点から放射状に発する等ダブルレット線（直線）であらわされる（ただし、線型理論において）。したがって、この場合、 $S$  面上無限遠（後方 Wake は除く）でダブルレット強さは 0 にならず、また、 $z$  軸上で  $\tau_z$  なる分布勾配は 0 である（附録1.

図 A.2 参照）。これは線型化において、等圧条件で  $\tau_x, \tau_y$  および擾乱速度の2次の項を省略したために生じる結果であって、厳密には無限遠で  $\tau_s=0$ 、かつ、 $z$  軸上でも  $\tau_z \neq 0$ 、等ダブルレット線は、附録図 A.4 の様に、何等かの形で後方へ湾曲し、吹流された状態となる。すなわち、これが非線型の効果である。ところで揚力面理論となると、上述の単純揚力線は前後に分布した束縛渦となり、この様な等ダブルレット線のあり方は助長される。図 32 に我々の計算結果における、 $S, W$  面の等ダブルレット線の分布状態を示す。 $S$  面上の等ダブルレット線の図の様な湾曲は、線型理論の単純揚力線では（放射状分布の対称性のために）あらわれなかった揚力線の位置への吹下し効果をもち、その方向から考えて、干渉効果が翼幅方向の遠方へ及ぶのを減ずる作用をもつ。Ribner & Ellis は、このような  $S$  面上のダブルレット（したがって Vortex）分布を、単純揚力線と類似した馬蹄渦系で置かえている（附録1. 図 A.5）。かくて、揚力線による線型理論では、境界から離れた翼幅位置での干渉効果を大きめに求める傾向を有することが明かである。一方、逆に、我々の計算では、 $S$  面の領域を限定することにより、本来、図 32 に見られるように緩かに湾曲すべき領域外のダブルレット分布を、領域周辺に集中し、後方へ流れる Vortex に置かえたことによって、干渉効果を、（その翼幅方向の減衰を強めることにより）少なめに求ることになる。この点に関する考察は、さらに、次の項で行なう。

### (d) 線型化された揚力線理論との比較（2）（翼幅方向揚力分布）

前項において、ダブルレットの分布のあり方から、線型化の効果、線理論と面理論の差異を考察した。干渉による翼幅方向の揚力分布については、此迄、多数の、線理論による報告があるが、未だに決定的な結果は見られないと言つてよい。この主な理由は、理論が本質的には線理論であって、上に述べた限界と傾向を有すること、および、比較すべき実験が、プロペラ旋回流や境界層を含む多様な条件を含んでいる為であろう。線理論が実験値となかなか一致しない（定量的に）ことは Squire も指摘している。また此の報告が目ざしている様な、境界をめぐる干渉の物理的機構も明確でないことが実験との比較評価をさまたげている様に思はれる。

さて、翼幅方向の揚力分布を調べる場合に、境界をはさむ両側の二次元揚力の落差  $4L_0 = (L_{0f} - L_{0i})$  に対する、干渉による揚力変化の割合を求めるのが便利

図 32 等ダブルネット線 ( $\mu=0.7, \alpha=0.01$ )

である。図 33 に、 $(M+N)=180$  の場合の、 $\mu=0.9, 0.7$  での計算結果を示す。揚力変化は低速側 2 次元揚力  $L_{0i}$  からの増分  $\Delta L = (L - L_{0i})$  であらわしてある。横軸は、翼幅方向の距離を翼弦長  $c$  で無次元化した。図に見られるように、STRIP THEORY に比し、左右の揚力は連続的に変化し、 $\mu$  が小さくなる程、境界をめぐって、高速側揚力の減少が著しい。ここで  $\mu=1.0$  なる限界、すなわち、低速側の速度が、高速側と等しくなる場合、および速度 0 になる場合の翼幅分布を、揚力線理論により、近似的に求めて、図中に示す。この計算については附録 2 に別に論じた。

本来この限界線の間に含まれるべき  $\mu \neq 1, 0$  の曲線は、我々の計算において、限界を超えている。したがって、この点における詳しい検討が必要である。さきに、この項目の (c) で、線理論が干渉効果を翼幅方向に大きく求め、我々の計算が領域の限定のために小さく求める傾向にあることを、ダブルネットの  $S$  面分布のあり方から指摘しておいた。図の比較において、この傾向は推測出来る。参考のために、Squire による線理論の計算を併せて示す。これは  $\mu=0$  での円形断面気流を貫く、2 次元翼の揚力分布であって、 $A_s$  は気流中の翼の Aspect 比である (Squire の求めた

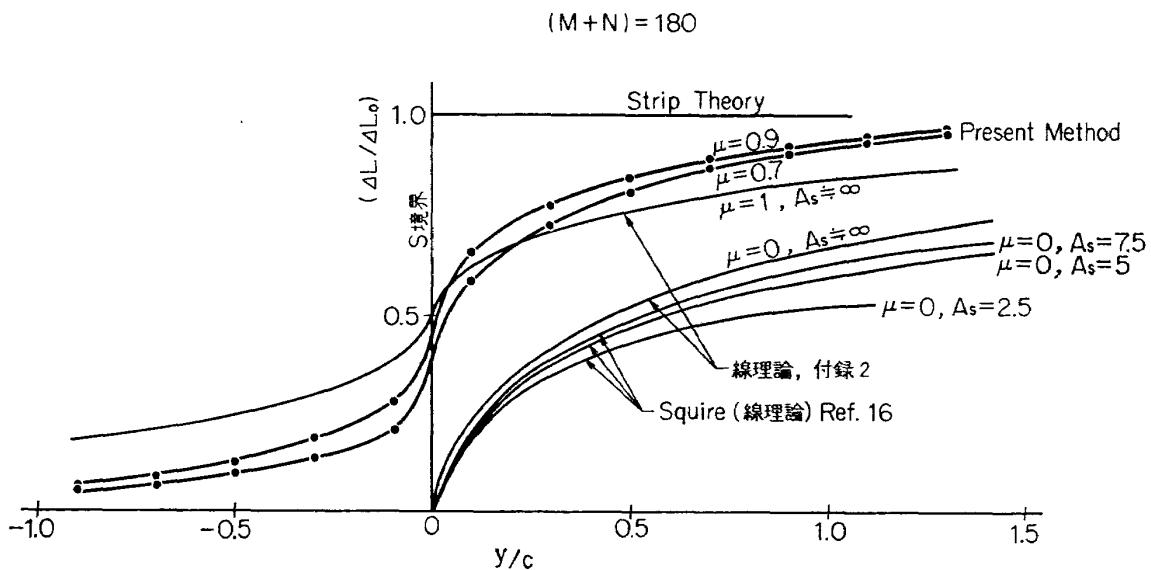


図 33 翼幅方向揚力分布比較 (1)

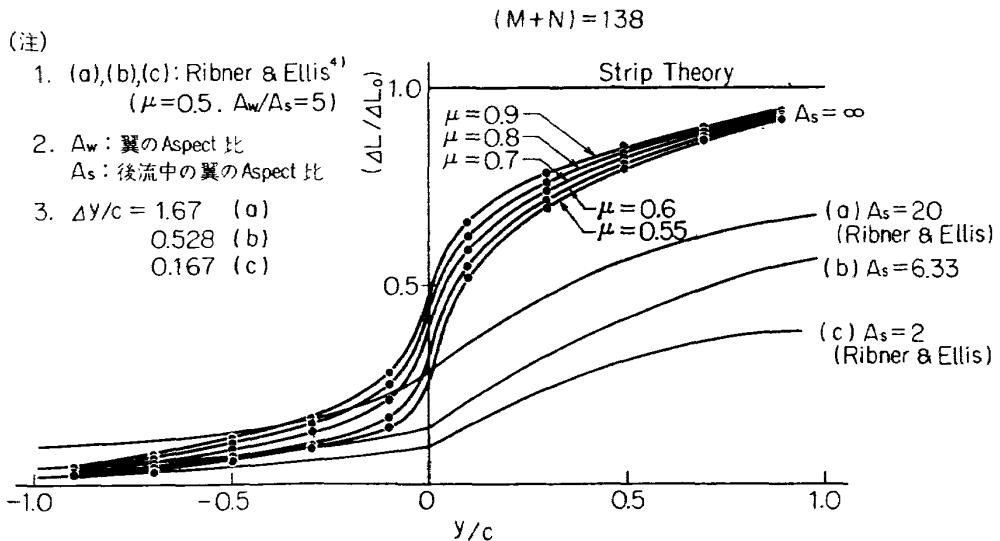


図 34 翼幅方向揚力分布比較 (2)

係数により算出した)。同じ線理論として、上述の限界線とのつながりは良好である。

つぎに Ribner & Ellis による、Weissinger 法での近似的面理論の結果を我々の結果と比較して図 34 に示す。図中の  $A_s=20$  は充分に大きい値であるから、我々の結果とのつながりは依然としてよくない。Ribner & Ellis の計算は、 $A_s$  が大きくなるとき、計算上の strip の幅が大きくなり（図中  $\Delta y/c$ ）、加えて、彼等の採用した、附録 1. 図 A.5 に示す様な分布モデルが、どの程度適切であるかについても疑問が残る。

以上の様な比較による差異について、本質的な原因

を調べるために、 $S$  面上のダブルエット分布形態による、翼幅方向揚力分布の変化を調べることが重要となる。この様な計算の詳細を附録 3. に示した。附録 3. では  $S$  面のダブルエット分布を、No. 1 から No. 4 に至る 4 種類の馬蹄渦系のモデルに置かえて（附録 3. 図 C.2 参照）、その翼幅方向分布の変化を調べた（附録 3. 図 C.6 参照）。この結果と、線理論ならびに、我々の面理論の結果とを比較して、図 35 に示す。図の No. 1 は、 $S$  面上の渦系が翼との交線上の渦を除き、翼面に吹下しの寄與をもたない場合（馬蹄渦の自由渦に属する一方が無限遠に達する場合）である。このとき、翼幅分布の干渉効果は、線理論より大きい。

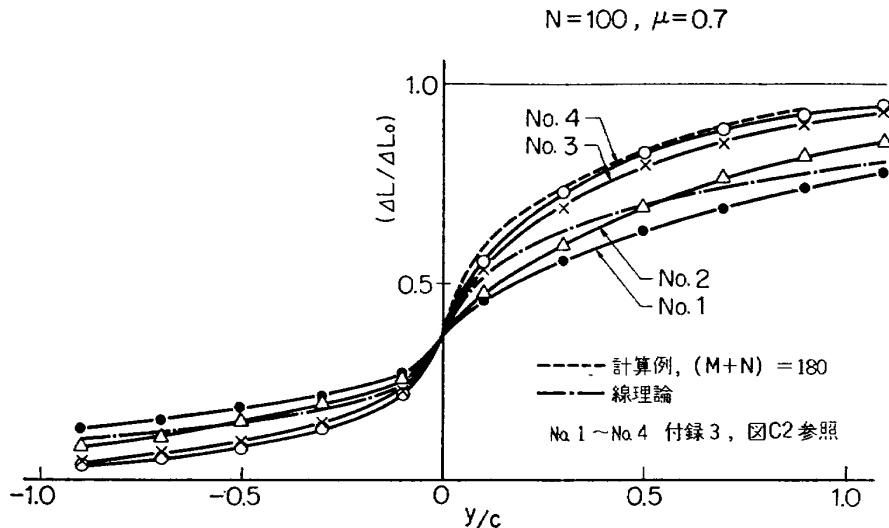


図 35 翼幅方向揚力分布比較 (3)

つぎに、No. 2 のモデルは、No. 1 において無限遠にあった馬蹄渦系の一方の脚が、 $z=\pm 2.0$  に集中して存在する場合である。この結果は図に見るように線理論と略、同程度であるが、やはり遠方では線理論の方が干渉効果が大きい。ところで我々の計算における設定領域の上下限は、図 32 に示すように、 $(M+N)=138$  において、 $z=\pm 1.6$  であり、 $(M+N)=180$  では  $z=\pm 2.0$  である。図 32 のダブレット分布の寄与を領域内で無視し、図中、Wake Sheet の両端の渦系に集中すると考えれば No. 2 と同程度になる。しかし実際の分布は図 32 に示すように複雑であって、領域内の分布に翼への吹下しの寄与を有する。したがって、翼幅方向の干渉効果の減衰は、No. 2 より更に急な筈である。かくて図 35 の No. 3, No. 4 に至ってはじめて我々の結果と略同等になって来る。

以上によって、 $S$  面上のダブルート分布が翼幅方向分布、したがって換言すれば、翼幅方向の、干渉効果の減衰に極めて大きな影響力をもつことが明かにされた。これは物理的に考えても当然のことである。したがってまた、線理論が干渉効果を大きく、我々の面理論による計算が少なく求める傾向にあることは明かであって、正確な分布はこの中間のいづれかに存在するであらう。我々の計算は 2 次元平板による厳密な速度分布（微小擾乱速度、あるいは幾つかの束縛渦による表現ではなく）を用い、厳密な等圧条件に束縛されているから、領域内のダブルート分布に関する限り、その妥当性を主張しうるものである。また、上述の比較（図 35）および領域拡張の効果（前述、12. (c) 計算例 3）からみても、特に境界周辺において、著しく結

果が変化するとは考え難い。しかしながら領域限定の効果は、我々の計算法については、計算機の容量の制限から来る避け難い現象である。かくて、面理論による翼幅分布の厳密な値は、依然将来の問題として残されている。

#### (e) 翼弦方向揚力分布とその必然性

これまで厳密な面理論によって、干渉効果を求めた例は見あたらないので、我々の計算結果による翼弦分布を他の計算例と比較することが出来ない。したがって、ここでまず可能な検討は、Ribner & Ellis の  $S$  面上分布モデル（附録 1. 図 A.5）に準じ、幾つかの馬蹄渦系に置かえた  $S$  面分布に応じる翼弦揚力分布の変化を調べることである。すでに、翼幅方向分布に関し、同様な検討を附録 3. で行っている。したがって、同じモデルについて、翼弦分布の検討を附録 3. に併せて論じた。その結果を基礎として以下に検討を加える。

附録 3. において、 $S$  面ダブルートの分布モデル、No. 1 と No. 4 について附加的揚力の弦長方向分布を比較した。ここに、No. 1 は先に述べたように、 $z$  軸に平行な渦系のみであり、No. 4 は、翼幅分布で最も我々の計算に近い値を示したモデルである。その結果、二次元翼の分布に比較して、前縁部に揚力の分布が高いこと、この傾向は境界から遠い方が強いことが示された。したがって、また、同一の揚力においては後縁の揚力が相対的に減じることが示されている。さらに境界の近くでは、翼弦中央部で曲線に“うねり”が出て相対的な揚力分布の増減が生じることが示された（附録 3. 図 C.5 参照）。また No. 1 に比し

No. 4 の方がこのような分布曲線の“うねり”的傾向が強く、また翼幅方向位置での曲線の変化幅が減ることが示された。またこれを我々の面理論の結果と比べると、この“うねり”が、極めて強く出ることが示された。かくて、この“うねり”的現象が、 $S$  面上のダブルレットの分布のあり方に強く支配されていることが推察出来る。図 36 に我々の計算における附加揚力の翼弦分布を二次元的分布と比較して示す。翼幅方向での変化は、附録 3. に示すように境界から遠ざかる方が前縁に揚力が偏る傾向が強い。しかし、全般にわたって、上述の“うねり”からくる揚力の増減が翼弦中央部に見られる。後縁で揚力が減じることは、これ迄述べて来た通りである。

附録 3. では計算上翼弦方向に 5 本の束縛渦を置いたことになり、本文の計算法では、5 ケの小領域、したがって 6 本の束縛渦を置いたと同等である。

古くから三次元翼に関しては、特に翼の後退角に関する面理論による翼弦分布が求められていて<sup>17)</sup>、面理論としての計算法の本質は我々の方法と差はない。したがって、我々の求めた図 36 の結果が、先に述べた理論的ならびに物理的考察の結果と併せて、干渉の

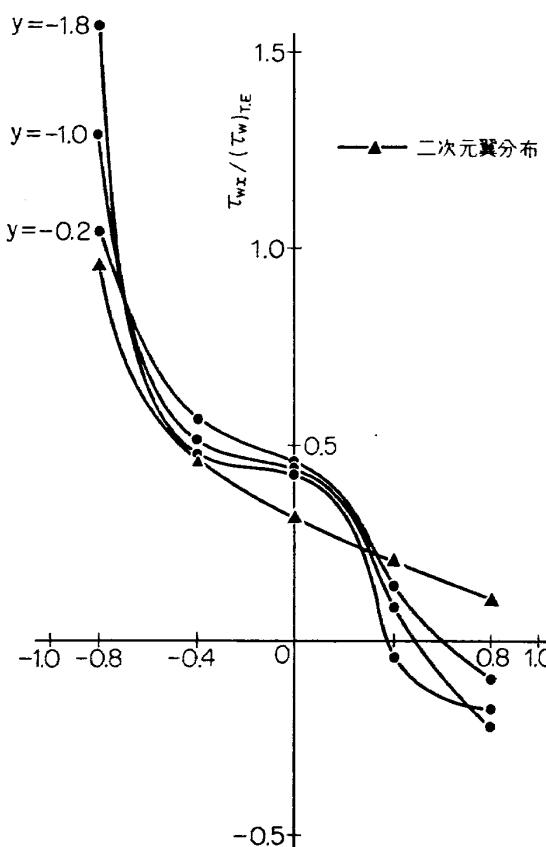


図 36 翼弦方向の附加的揚力分布の偏倚、 $(M+N)=180$ ,  $\mu=057$

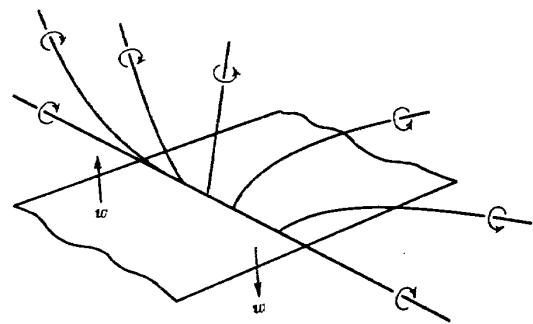


図 37

あり方を示していると考えてよいであろう。面理論の結果に対して直観的な説明はかなり危険であるが、上述の結果から推測するに、図 37 に示す如く、 $S$  面上の等ダブルレット線が前方で前傾し、後方で後傾していることが（図 32 参照）、図 36 にみられる分布を生じる原因と考えられる。これ等の傾斜した渦線が図 37 に示す誘起吹下し速度を与えるからである。したがって、これまでに述べた分布の傾向は  $S$  面のダブルレット分布から生じる必然的傾向と見なすことも可能であろう。

#### (f) 翼面の放出する Wake Sheet の変形とその影響

これまで不連続境界の境界条件の線型化とその意味を論じたが、我々の計算において、翼面から放出される Wake Sheet は  $xy$  面内に含まれて変形しないと仮定して計算が進められている。したがって、不連続境界の変形に対する精度の高い取扱いにたいして上述の仮定が悪い影響をもたないことを確めておく必要がある。この検討を附録 6. にまとめて示した。結果として我々の計算に対し、問題にすべき効果を与えないことが示された。

### 14. 実験的例証

これまでに、理論的立場から我々の方法による結果と既存の方法による結果との比較考察をおこなった。したがって、これまでの結果を基礎として、過去に蓄積された実験的事実を再吟味する必要がある。その結果が上述の主張を裏づけるならば、理論の正当性、換言すれば、粘性の効果を無視した理想流のパターンが、実在の現象の根底を支配していると認めてよいであろう。ところで過去におこなわれた実験報告はすべて風胴内でのプロペラ後流と翼の干渉に関するものであって、かつ不幸にして我々の目的に適した報告の数は多くない。加えて上述の計算による小さい変形量を

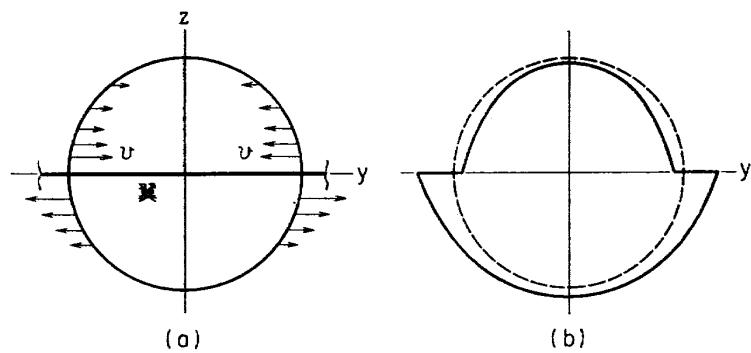
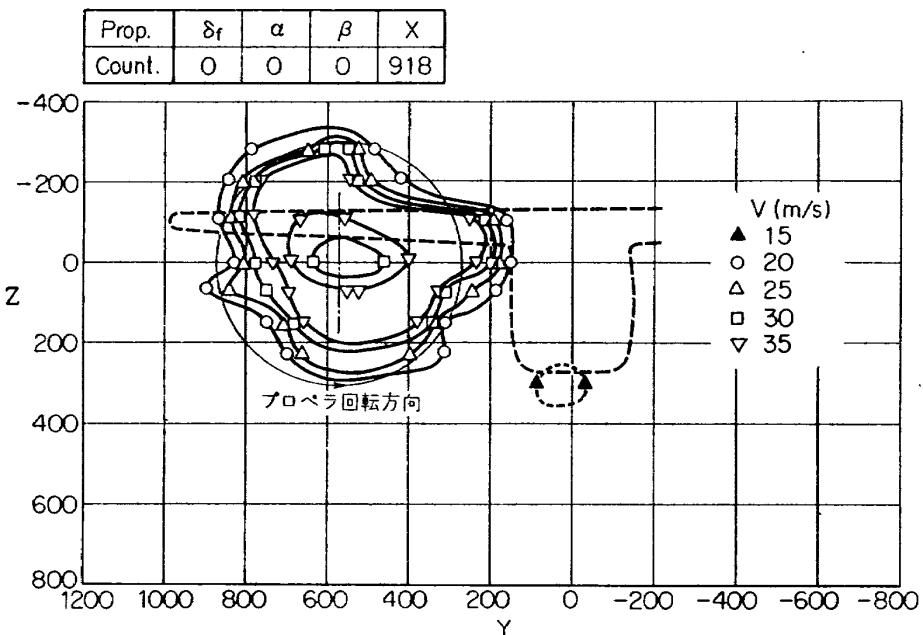
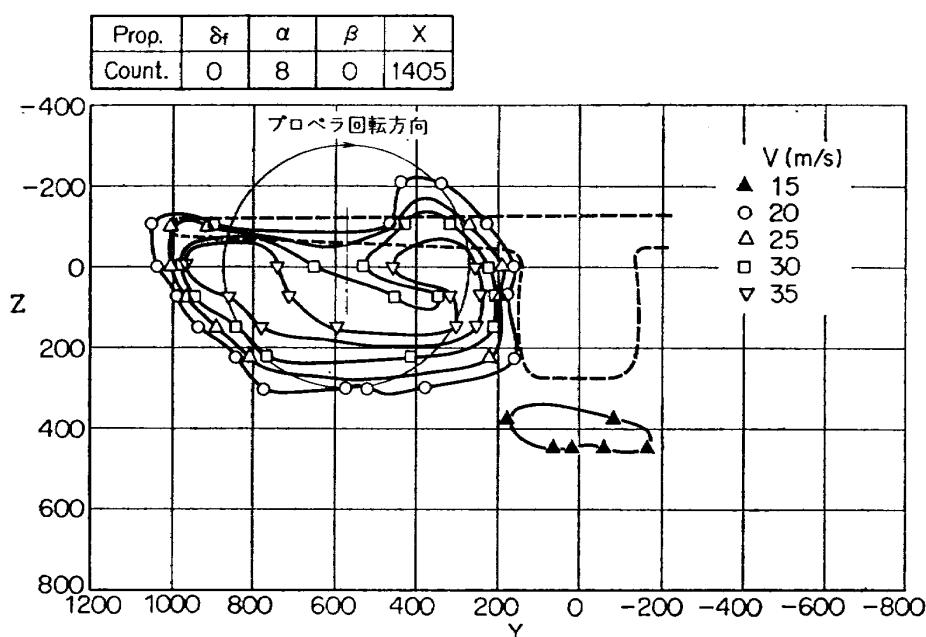


図 38

図 39 (a) 境界の変形の測定例 (丸, 他), フラップ  $0^\circ$ ,  $T_e=1.0$  ( $V_{\infty i}=18 \text{ m/s}$ )図 39 (b) 境界の変形の測定例 (丸, 他), フラップ  $0^\circ$ ,  $T_e=1.0$  ( $V_{\infty i}=18 \text{ m/s}$ )

直接に粘性流中において確かめることは多くの困難がある。ここにおいて、過去の実験事実から以下に我々の主張を裏づける多くの事実を指摘すると共に、別に水槽を用いた水流での実験（附録 4. 参照）をおこなって、我々の指摘した扇形領域の実在を例証した。また、先に述べた小さい変形からの外挿による大きい変形量を求め、これと水槽実験とを比較することによって定量的裏づけを得た（附録 5.）。

#### (a) 不連続境界の変形と扇形領域の存在

これまで、干渉による不連続境界の変形を中心として論じて来た。したがって、まずこの様な変形が実験的に例証されなくてはならない。ところで我々の問題は、翼に垂直な平面境界の変形であるが、境界が円筒形の場合、すなわちプロペラ後流が翼を通過する様な場合も、翼と境界が交わる部分で同様な物理的機構が支配している筈である。いま、これについて考えてみよう。後流境界が翼と交る部分では、図 38 に示すように、横方向の速度成分  $v$  を生じるから、境界は翼を通過した後、同図 (b) の方向に変形し後方へ流れると従って、この変形が著しくなることが予想される。著者を含むグループは後流偏倚型 STOL 機の模型について、翼を通過後の後流断面を計測し、ほぼこの予想を裏づける結果を得た<sup>3)</sup>。図 39 (a), (b) にその一例を示す。此の実験ではプロペラの  $T_e \approx 1$  (片発の推力を翼面積で無次元化したもの) である。実験の条件から求めて、これは  $\mu \approx 0.52$  に相当する。この

実験では、主翼のアスペクト比が小さく ( $AR=5$ )、後流は翼幅の 60% 以上を、おおっている。また、測定結果によても、後流内部にかなりの旋回流がある。このような模型の複雑さにもかかわらず、図 38 の傾向が明らかに見られる。図 39 (a) は迎角  $\alpha=0^\circ$ , (b) は  $8^\circ$  の場合であり、また、(a), (b) では図中に示すようにプロペラの回転方向が逆である。変形が、プロペラ旋回流によって、大きく影響されることが、この結果からもわかる。なお、図中の  $\beta$  は横滑り角、 $X$  は測定断面の前後位置で、図は模型の尾翼附近であって、測定断面が前方、翼へ近づく程、断面は円形に近づくが、上述の図 38 の傾向は同様に見られる。すなわち、翼を通過するときつくられた変形の傾向が、我々の計算結果、図 20 (b) に示すように後方へ持続されて、変形そのものは大きく発達する。

我々の測定では、プロペラの中心が翼面より下側にある。これに対して、ほぼ中心が翼面によって切られる場合の例を図 40 に示す。図 40 は、Sweberg<sup>18)</sup>による測定であって、通常形態の双発機について NACA の実物風洞における測定結果である。図は尾翼附近の断面での自由流に対する動圧比一定の等高線を示す。この実験条件での  $\mu$  の値は  $\mu \approx 0.84$  の程度であるが、迎角およびフラップ角（図では  $50^\circ$ ）が大きくなるとき明瞭に変形がみられる。すなわち、STOL 機のみならず、通常形態のプロペラ機でも同様な変形が

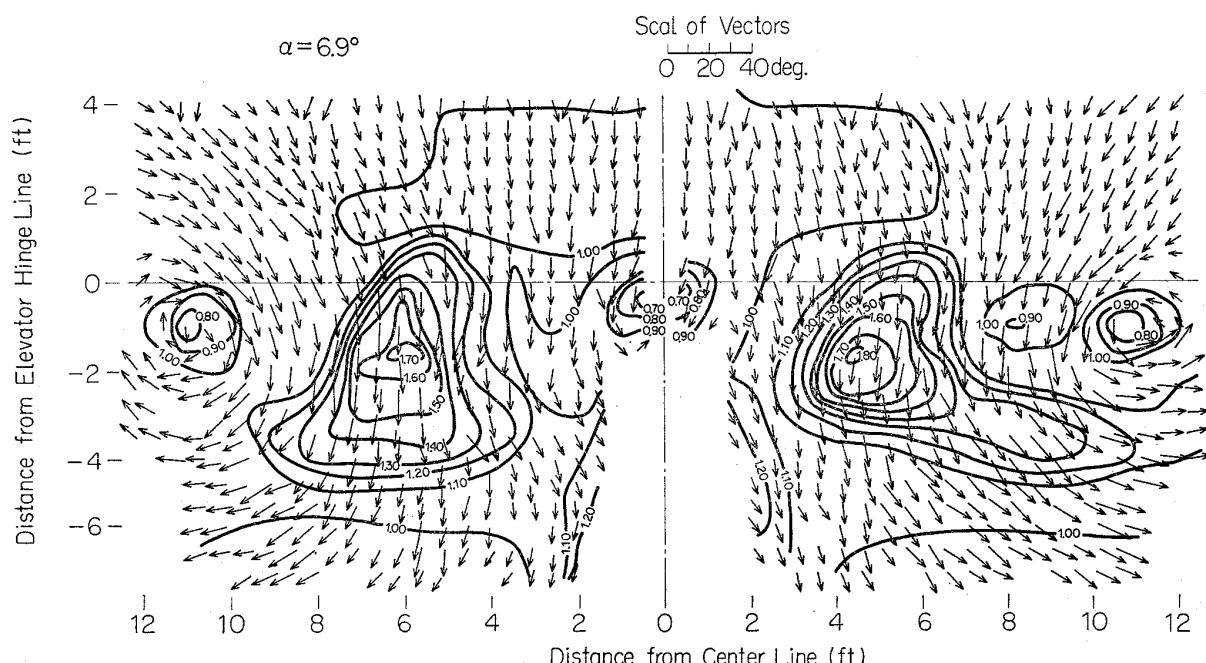


図 40 境界の変形の測定例 (Sweberg), フラップ  $50^\circ$ ,  $T_e \approx 0.06$

明かに生じる。以上の例はいづれも干渉による変形のあり方を例証するものと考えられ、また同時に、翼を通過した後方の Wake 流場のなかに翼面上での変形の結果が明瞭な形で持続されていることをも示すものである。また翼面上に扇形領域が存在することの間接的例証とも考えられる。ただし、此等の結果は Wake 中の断面での形状であるから、翼面上に、例えば図 20 の計算例が示すような形で扇形領域が実在することの確証としては弱い。このために、別に水槽の中で円形水流を翼に作用させて水流ジェット（円形断面）の変形を調べる実験をおこなった。その結果をまとめて附録 4. に示す。これによって、翼面上に、扇形領域が先の計算が示す様な形で実在することが確認された。さらに附加えるならば次項で述べる Stuper<sup>19)</sup> の報告の中にも同様な方向への変形が予想されている。つぎに不連続境界の変形が定量的に我々の計算と一致するか否かの問題がある。先にも述べたように、計算の結果としての小さい変形量の実測には困難が伴う。この故に、本文 27 頁に言及した変形量の外挿をおこない、さらに円形断面への修正を加えて、実験（附録 4.）の測定と比較した。その結果、変形量についても概数値としての一致が見られた。この問題についての詳細を附録 5. に、まとめて示した。

かくて、境界の変形と扇形領域の存在は明らかとなつたが、扇形領域のもつ作用については先の理論的説明と、数値計算による裏づけがあるに過ぎない。先に図 15 (a), (b) で述べたこの様な作用は未だ明かにされていないから、過去の実験事実の吟味から導出し指摘されねばならない。此の問題について以下 (b) から (d) に述べる。

#### (b) 境界をめぐる翼弦方向揚力分布の変化

Stuper<sup>19)</sup> はプロペラ後流が翼に及ぼす効果について、これまでの報告のうち最も詳細と思われる実験結果を示している。此の結果は先に述べた Graham<sup>9)</sup> 他、および Rethorst<sup>7)</sup> によって理論との比較に用いられている。Stuper の報告は、プロペラによる旋回流を整流した、非回転流での結果を含んでいるから貴重である。すなわち、プロペラと整流板を収めた円筒から高速気流を吹出し、翼への干渉効果を調べたものである。ここで我々が注目すべきは、各翼幅位置で測定された翼型圧力分布の結果である。すなわち、我々の関心は、その測定結果が、図 15 (a) および図 25 に示す傾向を有しているか否かにある。此の観点から彼の結果を整理して図 41 に示す。図の横軸は翼弦方向の位置、縦軸は次式で示す値である。

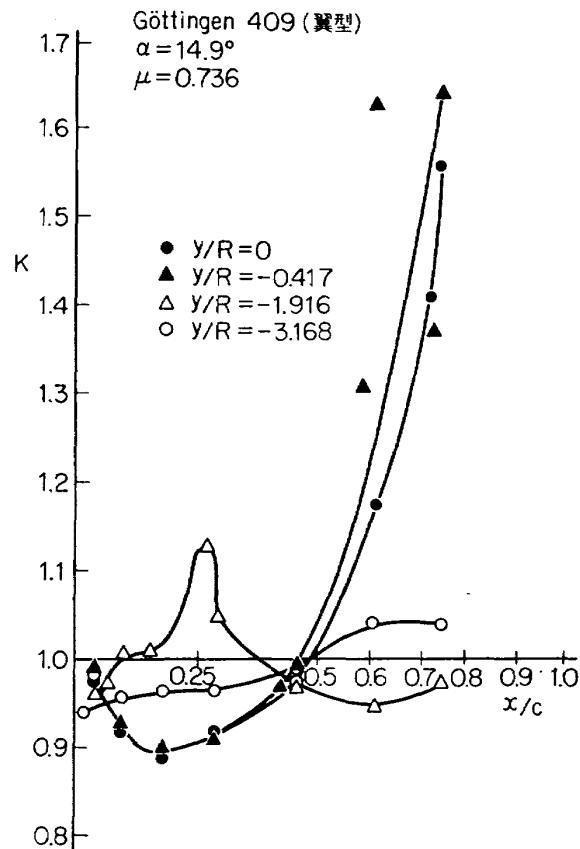


図 41 翼弦方向揚力分布の変動（文献 16, Stuper より導出）

$$K = \frac{(P_u - P_t)_s}{(P_u - P_t)_0} \times \frac{(C_l)_0}{(C_l)_s} \quad (64)$$

ただし、 $(\ )_s$  は後流の存在する場合、 $(\ )_0$  は存在しない場合である。翼断面の揚力係数  $(C_l)_0$ ,  $(C_l)_s$  は、圧力分布を積分して、彼のデータの中に示されている。また、各翼弦位置での圧力差は、彼の報告中の圧力分布の図から実測して求めた。ここで結果が  $K=1$  の直線であれば、その翼幅位置では、後流の影響（後流の内外にかかわらず）を受けても、（すなわち、揚力の変動にもかかわらず）圧力分布の形態が変わることを示す。彼の実験では、後流の境界で、プロペラ外筒の粘性効果により、その Wake のために、流速の急減した部分があり、これを避けて、境界両側各 2ヶ所で求めて図 41 に示した。これから、後流内部（黒印）では前縁の方で揚力が相対的に減じ、後半部では著しく増加していることがわかる。後流外部では、影響は小さいながら、此と逆であり、また、この様な変化が、境界 ( $y/R = \pm 1$ ) に近い程大きく出ている。ここで比較のために、我々の計算結果から算出した  $K$  の値を図 42 に示す。定性的傾向は両者間に一致が見られ、また、翼弦の途中で曲線に山が出来ている。これは、図 36 にも示された“うねり”による

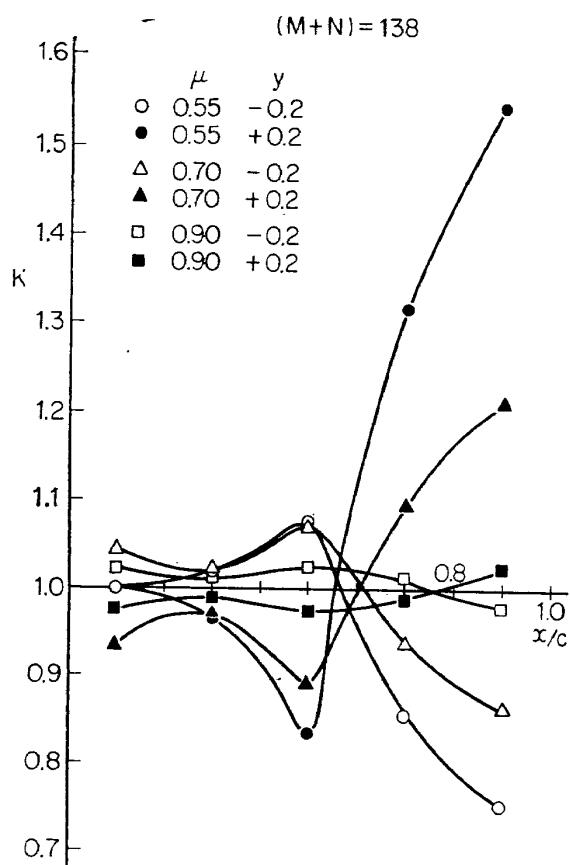


図 42 翼弦方向揚力分布の変動  
(計算結果より)

ものと見られる。かくて、我々の指摘した、図 15(a)の傾向、したがってまた扇形領域の役割が、実験結果の中にも示されていると考えてよいであろう。

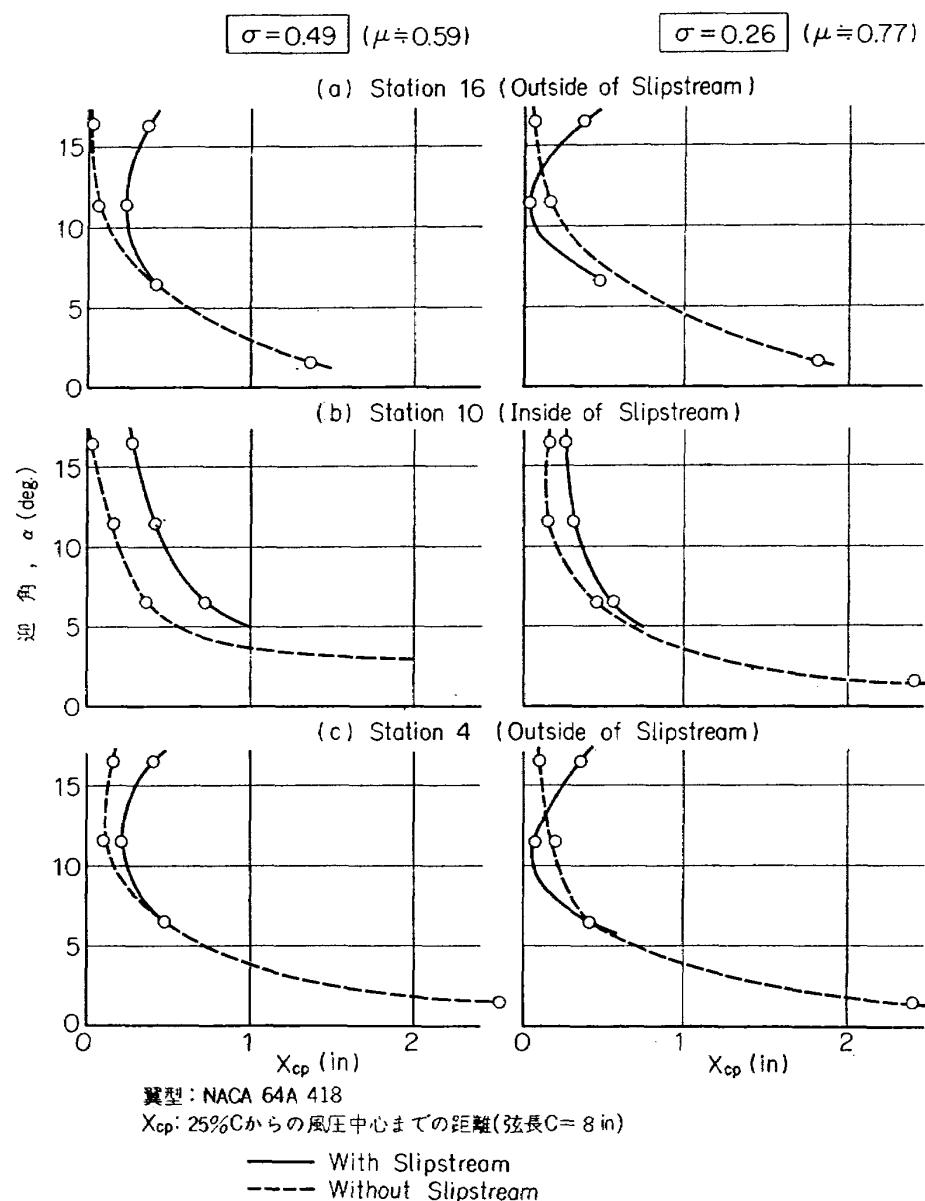
### (c) 境界をめぐる翼の風圧中心位置の変化

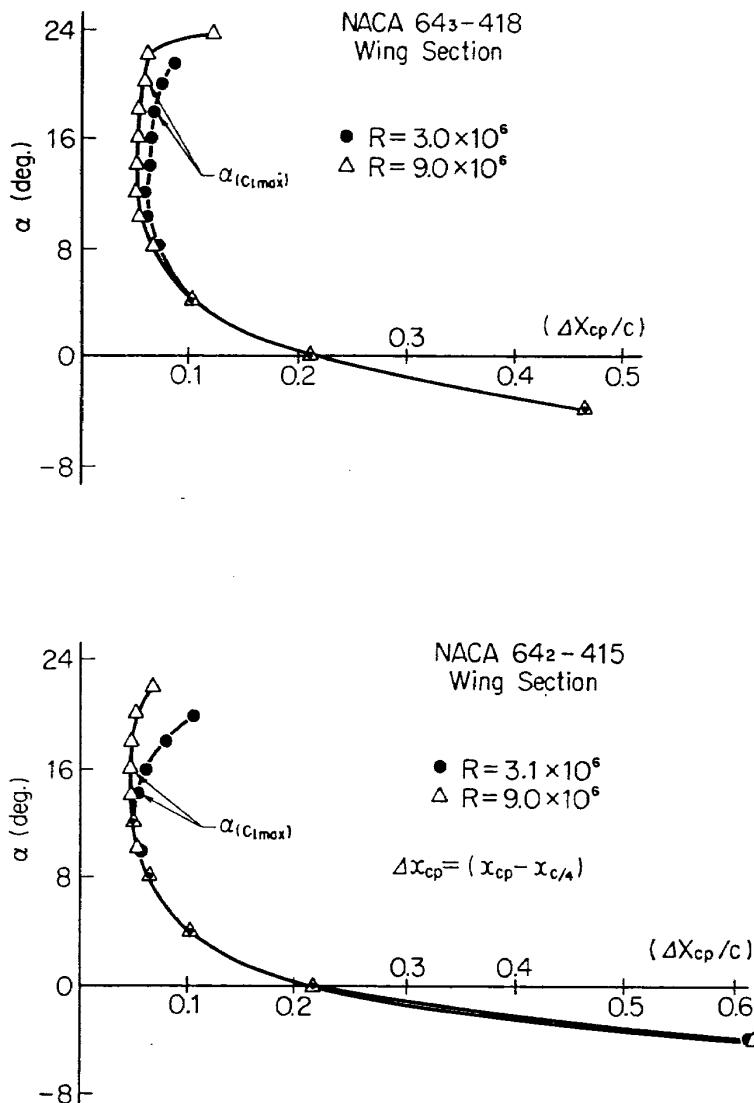
Brenckmann<sup>20)</sup>は、旋回流を含んだプロペラ後流を翼に作用させ、翼を一定の翼幅を有する幾つかの翼型素片(翼型 NACA 64A 418)に分割して組合せて、この各素片の受ける平均値としての揚力を測定した。此の測定結果は、その後、Ribner & Ellis<sup>10)</sup>によって、計算との対比に用いられている。しかし、ここで我々が注目する部分は、同時に彼によって行なわれた、風圧中心の位置の測定結果である。彼は翼幅の中央と、後流の外側の両側対称な位置の合計 3ヶ所で測定し、迎角に対する変動を示している。この場合、翼幅の中央はプロペラ後流の中心位置と一致しているので、後流中の旋回流の効果は、甚だ小さいと見てよい。彼の測定結果を、そのまま、図 43 に示す。図中  $\sigma$  は後流と自由流の速度を比較するパラメタであって、速度比  $\mu$  との関係は次式で示される。

$$\sigma = \frac{(\bar{q}_f - q_0)}{(\bar{q}_f + q_0)} = \frac{(1 - \mu^2)}{(1 + \mu^2)} \quad (65)$$

ただし、 $\bar{q}_f$  は後流中の平均流速による平均動圧、 $q_0$  は自由流動圧である。 $\sigma$  が大きい程、後流速度は相対的に大きくなる。さて、図中点線で示す後流のない場合の風圧中心  $c.p$  の変動は(迎角変化に対する変動)、その傾向において、3ヶ所の翼幅位置で著しい差は認められない。中心位置(Station 10)に対する両側(Station 4, 16)の翼幅位置は、 $|y/c| = 1$  の程度であって、プロペラ後流の境界は、 $|y/c| = 0.5$  の位置を通過する。また、この実験では翼は 2 次元的に風洞の固定壁を貫いており、固定壁間の翼の Aspect は 4 である。この翼の翼型と類似の翼型について、風圧中心の変動を測定値<sup>23)</sup>から近似的に求めた結果を図 44 に示す。定性的には、よく似た傾向を示し Brenckmann の測定が少くとも定性的には、変化の傾向を検出するに耐えることを認めてよいであろう\*。かくて、図 43 における、プロペラ後流の存在する場合の  $c.p$  の変動を眺めると、後流の内外で明かな相違があらわしていることを指摘出来る。すなわち、 $\sigma = 0.26$  において、より明確にあらわされている様に、後流の外側では、迎角の増加に応じて  $c.p$  は著しく前進し、同一迎角で後流のない場合より前進している。後流中では、これと逆になっている。また、後流の外側では、後流の作用によって、明かに曲線の形状が変化している。すなわち、 $c.p$  の急激な前進と後退が見られる。一般に、Camber のあるこの様な翼の  $c.p$  は迎角の増加に伴って、図 44 の様に前進し、ついで失速の附近に至って後退をはじめるのであるが、失速の附近では、前縁の Suction Peak の負圧勾配増大により、境界層の面から、Bubble を含む複雑な現象を生じる<sup>22)</sup>。特に翼の上面に Long Bubble を生じるときは圧力分布の相対的な平坦化が生じ、 $c.p$  は後退する筈である。ところで比の実験に使用されている翼型は、後縁剥離による失速の傾向が強いとされており<sup>17)</sup>、この現象は当然に Reynolds 数の効果を受ける。図 44 には 2 次元類似翼型での Reynolds 数の効果が示されている。すなわち、失速に至るまでは Reynolds 数の効果はあまり認められないが、Reynolds 数の増加によって失速が遅れる結果として、低 Reynolds 数では迎角に対し、より速かな  $c.p$  の後退が生じる。図 43 において、 $\sigma$  が増加したとき、曲線の形は変わらないが、 $c.p$  の全体的な後退が見られる。これには Brenckmann

\* この測定の精度について、直接著者に問合せたが、彼の主目的は翼幅揚力分布にあって、 $c.p$  の測定の精度に関する明確な保証は得られなかったことを附記しておく。

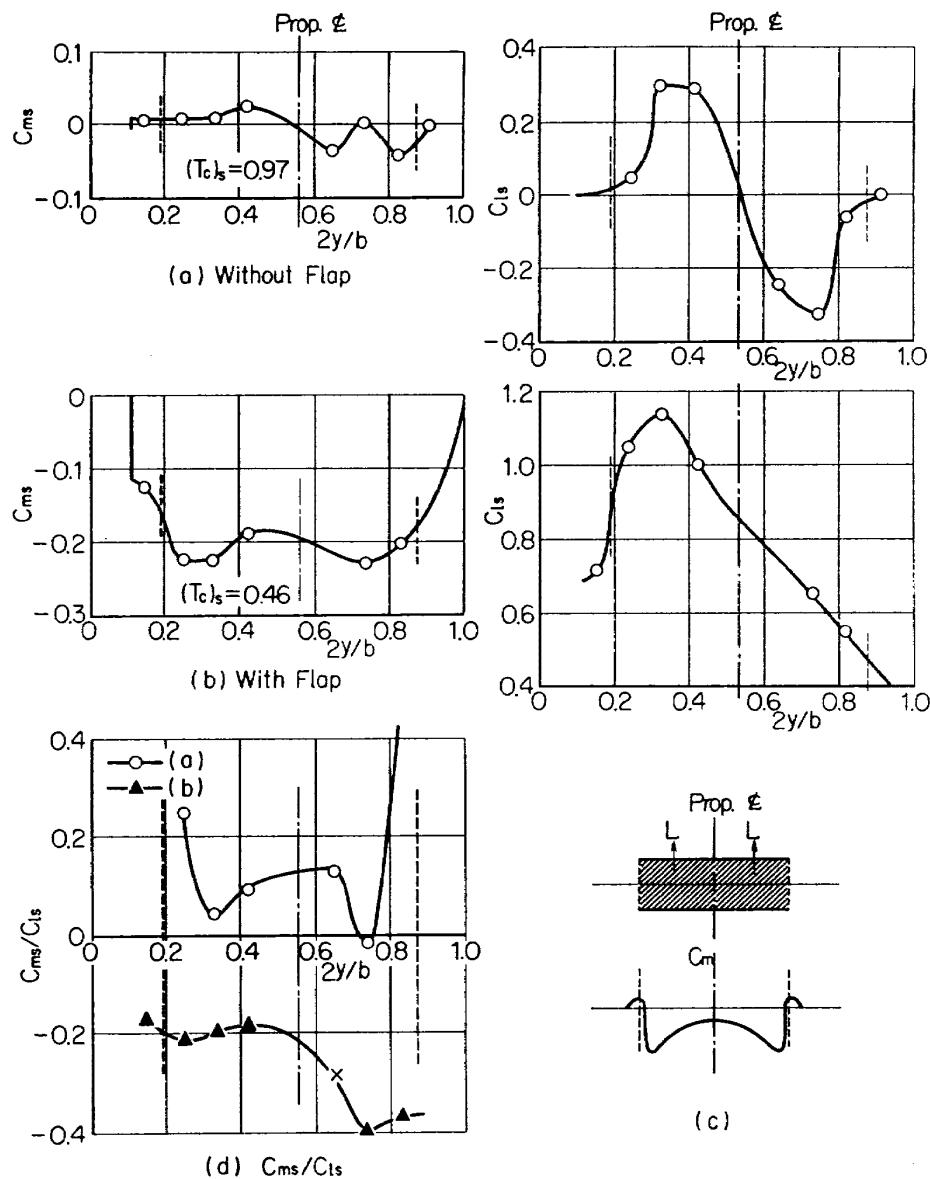
図 43 プロペラ後流による風圧中心の位置変化 (Brenckmann)<sup>20)</sup>

図 44 翼型における風圧中心位置の変化 (Abott & Doenhoff より)<sup>23)</sup>

が指摘する様に確かに、後縁失速の抑制による“Des-tall”の作用が存在することを認めてよいであろう。しかし、これのみをもって、図 43 の後流の内外における急激な曲線の変化を説明することは不可能である。彼の実験結果を見ても、後流内外で、明かな失速を揚力において認めることは出来ない。かくて、先に述べた干渉による附加揚力のあり方が重要になって来る。附加揚力は理論的に、後流の外側で前縁の方に偏り、したがって  $c_p$  を前進させる。後流内部では逆に負の附加揚力が前縁に偏る結果、 $c_p$  は後退する。かくて、後流の外側では前縁の Suction Peak とその負圧勾配が増強される結果、失速をめぐる  $c_p$  変動の促進が生じると考えることが出来る。以上のように、 $c_p$  の変動の測定結果から、干渉をめぐる、翼弦方向の揚力分布のあり方が例証される。

#### (d) 境界をめぐる縦揺モーメント係数の変化

最近、George & Kisielowski<sup>21)</sup> によって、干渉におけるプロペラ旋回流の効果の計算と実験が行なわれた。彼の使用した模型は、後流偏向型双発機の半截模型であって、形態が複雑である。したがって、流場の変化も複雑であり、彼による、縦揺モーメント係数  $C_m$  の測定結果は翼幅方向に複雑な変化を示している。しかしながら、これまでの結果を考慮すればモーメントの変化の定性的な説明が可能である。彼等の測定結果を、そのまま、図 45 (a), (b) に示す。図中の  $(\cdot)_s$  は、後流の平均動圧  $\bar{q}_f$  を用いて無次元化したものである。横軸は胴体中心 ( $y=0$ ) からの翼幅方向無次元距離であり、(全翼幅=b), プロペラ中心線と、プロペラの Disc の両端の位置が破線で示されている。なお、翼とプロペラ中心は同一平面内にあ

図 45 翼幅方向、モーメント係数の変化 (George & Kisielowski)<sup>21)</sup>

り、翼型は NACA 0015 である。図中 (a) はフラップ上げ、(b) はフラップ下げ (全翼幅、1/3 翼弦スプリットフラップ、45°) の場合の  $(C_m)_s$ 、 $(C_l)_s$  を示す。これらの係数は、先の Brenckmann の測定と同様に、翼を 8 ケの翼素で組立てたうえ、各翼素片の受ける力を測定したものである。なお、図中に示す  $(T_c)_s$  は、プロペラ円板面積で無次元化してあり、 $\mu$  に置かえれば、(a) において  $\mu=0$ 、(b) において  $\mu \approx 0.73$  に相当する。ここで  $(C_m)_s$  の変化を眺めると、(b) においては明瞭な傾向が見られるが、(a) では明確でない。 $(C_m)_s$  については原論文に明らかな説明がなされていない。一方揚力係数  $(C_l)_s$  はプロペラの強い旋回流の効果により、プロペラ中心線をはさみ、ほぼ逆対称な揚力分布形となる (迎角はいづれ

も  $\alpha=0$  である)。ところで、旋回流の効果を除いた一般的な翼幅方向モーメント変化は、図 15 (b) および、これまでの議論によって、境界をめぐり、図 45 (c) の形態になってしかるべきである。すなわち、翼を横ぎる境界部分に  $C_m$  の勾配が存在すると見られる。ここで、図の(a)、(b) のデータから  $(C_m)_s/(C_l)_s$  を求めれば、

$$\frac{(C_m)_s}{(C_l)_s} = \frac{M/c}{L} \doteq \frac{L(\Delta x_{c,p}/c)}{L} = \frac{\Delta x_{c,p}}{c} \quad (66)$$

ここで、 $M$ 、 $L$  は、 $c/4$  翼弦まわりのモーメントおよび揚力、 $\Delta x_{c,p}$  は  $1/4$  翼弦と風圧中心との距離である。この結果を図の (d) に示す。図中  $\times$  印は測定値のない点を曲線から計算した値である。ここに示された  $c.p.$  の変動したがってまた、附加揚力による

$C_m$  の変動は、図中 (c) と同様な傾向を示す。この絶対値については、測定の精度、模型の複雑性を考えれば、定量的議論の対称となし難いであろう。しかし、ここでも干渉をめぐる扇形領域の作用についてこれまでの議論を支持する実験的例証が見られる。

以上、実験的な例証として、幾つかの実験例をとりあげた。境界の変形、翼弦方向圧力分布、風圧中心の変化および三次元模型における縦搖モーメントの測定値のいづれの面からも、先の理論的結果の支持を得たと共に、実験結果に対し、逆に、理論面からの干渉をめぐる新しい説明を可能にしたと考えられる。

## 15. 結 論

総圧が両側で異なる不連続境界と翼の干渉について、まず最初に理論的考察を加えた。問題を単純化するために、二次元平板翼とこれに垂直な平面境界を考え、干渉による境界の変形と、これに伴う流場の変化、翼の特性の変化について、ポテンシャル流の立場からその物理的機構の解明を試みた。また、変形が少ない範囲で、Reduced System を用い、近似的な数値解を求めた。かくて、得られた数値解と、理論的考察の結果との一致から、非粘性の流場における干渉に関し、以下の理論的結論を得た。

(a) 干渉の結果、不連続境界は、翼面をはさむ上側と下側で、左右逆方向に変形し、翼面上に扇形領域を形成する(図 6)。この変形をめぐり、流場は低速側で相対的に吹下し、高速側で吹上る(図 7)。

(b) 変形は、迎角および速度差の増加に伴って増大し、やがて翼弦に較べても無視し得なくなる。また変形量は、翼通過後の流場に受つがれて増大してゆく。

(c) 扇形領域は上面が低速域、下面が高速域に接し、ダブレット分布においても翼面と境界が接合した部分と考えることが出来る。かくて、この部分におけるダブレット分布の形態は図 11, 12 の様になる。

(d) 扇形領域は、それが明らかに存在する翼の後半部において、左右の揚力差、縦搖モーメント落差を急速に平衡させる作用を行なう。

(e) 扇形領域につながる翼面上の揚力分布は、干渉による附加揚力の分布が前縁の方向へ偏る結果として、低速側では前方へ偏り、高速側で後方へ偏る。かくて境界の近傍をはさんで、縦搖モーメントの落差を生じ、これが扇形領域で平衡させられる。

以上の結論に基いて、まず、理論的立場から、近似的数値解と従来の結果との比較検討を行った。比較すべき線型理論の結果は、本質的に単純揚力線理論であ

るから、線型化の意味から再検討を加えて以下の結論を得た。

(f) 従来の線型理論は線型化のため、翼幅方向の干渉効果の減衰を少なめに求める傾向にあり、一方、この報告における近似解は領域限定(計算機の容量によって支配される)の効果により、この減衰を大きめに求める傾向を有する。

(g) 翼弦方向揚力分布の偏倚は、等圧条件を充すべき境界上のダブレット分布のあり方から必然的傾向として説明される。

(h) 薄翼理論と同様に、ダブレットの位置を固定したうえでの変形量の計算は翼の近傍を除いて、よく一致する。

かくて最後に、非粘性流の立場からの結論が、過去の実験的事実の中に指摘しうるか否かを検討し、以下の結果を得た。

(i) 干渉による境界の変形の事実が、我々の実験結果および、Sweberg の実験結果の中に例証された。これは同時に扇形領域の存在を示すものである。

(j) 境界をめぐる左右の翼弦方向揚力分布の Stuper による測定の中に、揚力分布の偏りの事実が例証として指摘された。

(k) 同様な事実が、Brenckmann による風圧中心の変動の測定結果の中に見出され、干渉をめぐる理論に基いて新しい説明がなされた。

(l) 境界をめぐるモーメント勾配の存在が、George & Kisielowski の実験結果の中に指摘しうることを示した。

以上によって、この報告は、不連続境界と翼面の干渉における、物理的機構と、現象の一般的傾向を明かにするとともに、近似的数値解を求めるための一つの一般的手法を示した。さらに、実験値を吟味することにより、粘性を伴なう実際の干渉の中に、上述の物理的機構が貫ぬかれていることを示し、航空機(特に STOL 機)の空力特性を解明するうえで一つの手がかりを与えたと言ってよいであろう。この報告の結果に基いて今後、解かれるべき課題は極めて多い。まず理論面では、我々の手法を用いた近似解の精密化であり、これには計算機の容量の増大と計算技術の改良が必要である。また、実験的には、境界層や後流内の旋回流を排除したうえでの純化された実験が望まれる。さらに、大きい課題として、この報告に示した干渉の結果を初期条件として、航空機の胴体、尾翼を含む、主翼の背後の non-uniform な流場での Vortex System の力学的解明が未解決の課題として今後に残されて

いる。

おわりに、この論文は昭和 46 年に東京大学に学位論文として提出され、東京大学工学部航空学科、近藤次郎教授および中口 博教授の御指導と御助言を得て、はじめてこの様な形にまとめることが出来た。ここに附記して厚く御礼申上ます。また、研究の途上において、多くの助言と支持を戴いた日本大学谷一郎教授、北海道大学小橋安次郎教授、東京大学東 昭助教授、航空宇宙技術研究所、武田 嶽部長、高木廣治部長、河崎俊夫部長に厚く謝意を表します。

### 参考文献

- 1) 犬丸、北村、川幡ほか、プロペラ後流偏向型 STOL 機の風洞試験 (I), NAL TM-88, 1966.
- 2) 犬丸、北村、川幡ほか、プロペラ後流偏向型 STOL 機の風洞試験 (II), NAL TM-107, 1967.
- 3) Inumaru N. and others; Wind tunnel investigations of the STOL airplane, with attention to the relations between the aerodynamic characteristics and the wake structure. (NAL TR-197T)
- 4) Von Kármán T. and Burgers J.M.; Aerodynamic Theory (Durand) Vol. II, Springer, 1935.
- 5) Koning C.; Aerodynamic Theory (Durand) Vol. IV, Springer, 1935.
- 6) Squire H.B. and Chester W.; Calculation of the Effect of Slipstream on Lift and Induced Drag, ARC R & M 2368, 1950.
- 7) Rethorst S.C.; Aerodynamics of Nonuniform Flows as Related to an Airfoil Extending Through a Circular Jet, JAS. Jan. 1958.
- 8) Weissinger J., Über die Auftriebsverteilung von Pfeilflugeln, Forschungsbericht Nr. 1553, 1942.
- 9) Graham E.W., Lagerstrom P.A., Licher, R.M. and Bean B.J.; A Preliminary Theoretical Investigation of the Effects of Propeller Slipstream on Wing Lift, Douglas Aircraft Co., Rep. SM-14991, 1953.
- 10) Ribner H.S. and Ellis N.D.; Theory and Computer Study of a Wing in a Slipstream, AIAA 4th Aerospace Sciences Meeting June, 1966.
- 11) 谷 一郎, 流体力学上巻, 岩波, 1944.
- 12) Durand W.F.; Aerodynamic Theory, Springer, 1935.
- 13) Robinson A. and Laurmann J.A.; Wing Theory, Cambridge Univ. Press, 1956.
- 14) Lomax H., Heaslet M. and Fuller F.B.; Integrals and Integral Equations in Linearized Wing Theory, NACA Rep. 1054, 1950.
- 15) 佐藤常三; 積分方程式論とグリーン函数, 柏葉書房, 1944.
- 16) Squire H.B.; The Lift and Drag of a Rectangular Wing Spanning a Free Jet of Circular Section; Phil. Mag., 1939.
- 17) 山名正夫, 中口 博, 飛行機設計論, 養賢堂, 1968.
- 18) Sweberg H.H.; The Effect of Propeller Operation on the air flow in the region of the Tail Plane for a Twin-Engine Tractor Monoplane, NACA WR L-381, 1942.
- 19) Stüper J.; Einfluss des Schraubenstrahls auf Flügel und Leitwerk, Luftfahrt-forschung, Vol. 15 No. 4, 1938.
- 20) Brenckmann M., Experimental Investigation of the Aerodynamics of a Wing in a Slipstream, JAS. 1958. May,
- 21) George M. and Kisielowski E.; Investigation of Propeller Slipstream Effects on Wing Performance, USAAVLABS Tech. Rep. 67-67, 1967.
- 22) Tani I.; Low-Speed Flows Involving Bubble Separations, Progress in Aero.-Sci. Vol. 5, 1964.
- 23) Abbott I.H. and Doenhoff A.E.; Theory of Wing Sections, Dover Publ. Inc. 1958.

## 附録 1. Image System と Reduced System

Non-uniform な流場において、これまでの最も一般的な取扱いは、Image System による方法である。これは Perturbation Velocity を用いると共に、境界における等圧条件、切線条件を線型化する (Karman & Burgers, 4), p. 244)。一方 Ribner & Ellis<sup>10)</sup> によって、Reduced Potential による方法が computer study として示された。この様な取扱いを Image System に対して、Reduced System と呼ぶことにする。この両者の関係が線型理論の範囲内で等価であることを示し、線型化の意味を、明らかにする。最も簡単な例として、水平に置かれた uniform な無限の揚力線がこれに垂直な、不連続境界を貫ぬく場合を考える。

### (1) Image System

$P, Q$  を、境界に対して対称な位置にある揚力線 ( $Y$  軸) 上の二点とする。また境界面上の任意の点を  $S$  とする。いま、同一の迎角、同一形態で境界に対し、対称な半無限翼が境界両側にあると考えて、これをそれぞれ  $Y$  軸上の揚力線で置かえたとすれば、境界の両側翼端の位置に自由渦線があらわれる。その方向は図 A.1 の如くであって、強さは低速側で  $\Gamma$  ならば高速側で  $\Gamma/\mu$  となる。この翼端を境界の方へ極限まで近づければ、境界を貫通する二次元翼に相当する。ただし、ここで左右の渦系による相互干渉を生じ

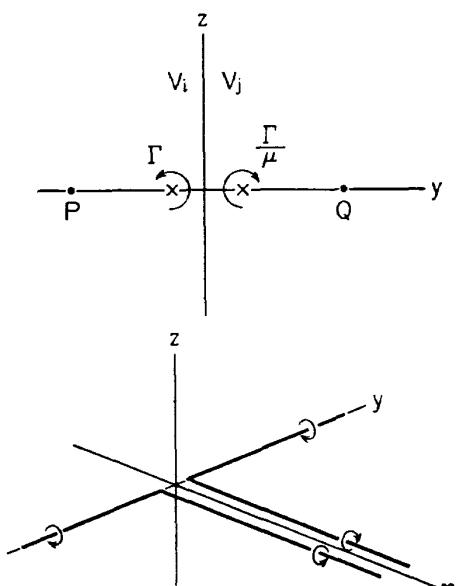


図 A.1

るから、これを評価しなくてはならない。Karman & Burgers による Image System では、境界を距てた渦系相互の影響を求めるとき、次の様な影響係数  $\nu$  を乗じることにより（境界のないときの誘起速度に乗じる）不連続境界での境界条件を充している。

$$\nu_i = \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}$$

:  $j$  域において  $i$  域の渦系の Image が  $i$  域に及ぼす効果

$$\nu_{ij}' = \frac{2\mu^2}{1+\mu^2} \times \frac{1}{\mu}$$

:  $j$  域に存在する渦系が  $i$  域へ及ぼす効果

$$\nu_j = \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2}$$

:  $i$  域において  $j$  の渦系の Image が  $j$  域へ及ぼす効果

$$\nu_{ji}' = \frac{2}{1+\mu^2} \times \mu$$

:  $i$  域に存在する渦系が  $j$  域へ及ぼす効果  
(A.1)

ここで、このような  $\nu$  を用いて、点  $P, Q$  における下向き誘起速度  $w_{P,Q}$  を求めると

$$w_P = \Gamma f - \nu_{i'}' \frac{\Gamma}{\mu} f - \nu_i \Gamma_{iI} f = 2\Gamma \left( \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2} \right) f$$

$$w_Q = \frac{\Gamma}{\mu} f - \nu_j \Gamma f - \nu_j \Gamma_{jI} f = 2 \frac{\Gamma}{\mu} \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) f$$

(A.2)

ただし、 $f$  は境界がないときの誘起速度の係数 ( $P, Q$  は対称の点であるから共通)。また  $\Gamma_{i,jI}$  は Image をあらわす。ここで、 $w_Q$  に  $\mu$  を乗じて、Reduced Velocity  $w_{Qrj}$  をつければ、 $w_{Qrj} = -w_P$  となる。これは結局、境界面  $X$  軸上に、強さ  $2\left(\frac{1-\mu^2}{1+\mu^2}\right)\Gamma$  なる時計周り方向の半無限自由渦が及ぼす効果に等しい。また、対称な点での擾乱速度の絶対値は、Reduced Velocity において等しく、方向は反対となる。

次に境界面上の点  $S$  の両側における速度成分を求める。上と同様にして、 $v$  成分は、

$$v_{Si} = -2\Gamma \left( \frac{\mu^2-1}{1+\mu^2} \right) g$$

$$v_{Sj} = 2 \frac{\Gamma}{\mu} \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) g$$

$$\mu v_{Sj} = v_{Srj} = v_{Si}$$

(A.3)

ただし、 $g$  は  $f$  と同様な影響係数である。かくて点  $S$  の両側において、線型化された境界条件（切線条件）、 $(v_{Si}/v_{Sj}) = \mu$  が充される。また、点  $S$  の両側

の  $x$  方向擾乱速度  $u_S$  を求めると（揚力線のみが寄与をもち），

$$\begin{aligned} u_{Si} &= \Gamma h + \nu_i' \frac{\Gamma}{\mu} h + \nu_i \Gamma h = 4\Gamma \left( \frac{1}{1+\mu^2} \right) h \\ u_{Sj} &= \frac{\Gamma}{\mu} h + \nu_j' \Gamma h + \nu_j \frac{\Gamma}{\mu} h = 4u\Gamma \left( \frac{1}{1+\mu^2} \right) h \\ \mu u_{Sj} &= u_{Srj} = \mu^2 u_{Si} \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

ただし， $h$  は  $S$  点に及ぶ影響係数で  $h=z/4\pi(x^2+z^2)$  である。かくて、線型化された等圧条件， $(u_{Sj}/u_{Si})=\mu$  が充される。

## (2) Reduced System

さて、ここで同じ問題について、Reduced System で考える。この場合、Image System を考えないで、境界両側の流場を平等かつ一挙に取扱うかわりに、境界面上に分布する、強さ  $\tau(x, z)$  のダブレット分布を求めなくてはならない。いま、この  $\tau$  分布を仮に仮定して、境界面上の点  $S$  における誘起速度を求める。まず、 $x$  方向擾乱速度  $u_0$  は、

$$\begin{aligned} u_{Si} &= \Gamma h + \Gamma h + \frac{1}{2} \tau_x \\ u_{Srj} &= \Gamma h + \Gamma h - \frac{1}{2} \tau_x \\ u_{Srj} &= \mu u_{Si} \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

この速度成分が線型化された等圧条件  $u_{Srj}=\mu^2 u_{Si}$  を充すためには、上の第 1、2 式の差をとり、第 3 式を入れて、

$$\begin{aligned} u_{Si} - u_{Srj} &= \tau_x = u_{Si}(1-\mu^2) \\ &= \left( 2\Gamma h + \frac{\tau_x}{2} \right)(1-\mu^2) \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

ただしここに、 $\tau_x = \frac{\partial}{\partial x}(\phi_{rj}-\phi_i) = -\frac{\partial}{\partial x}(\phi_i) + \frac{\partial}{\partial x}(\phi_{rj}) = (u_{Si}-u_{Srj})$  なることは、Reduced された附加ポテンシャル  $\phi$  について、本文で詳しく述べた。

(A.6) 式より、結局、 $\tau_x$  は次式を充さねばならない（線型化等圧条件から）

$$\tau_x = 4\Gamma h \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \quad (\text{A.7})$$

この  $\tau_x$  を (A.5) 式に入れれば、 $u_{Si}$ 、 $u_{Srj}$  は (A.4) 式の Image System による結果と一致する。

ここで、 $z=\text{const.}$  なる、 $x$  軸に平行な直線上で、(A.7) を積分すれば、

$$\begin{aligned} \tau(x) &= \frac{4\Gamma}{4\pi} \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \int \frac{z}{x^2+z^2} dx \\ &= \frac{\Gamma}{\pi} \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \left[ \arctan \frac{x}{z} + c \right] \end{aligned}$$

無限遠前方  $x \rightarrow -\infty$  にて  $\tau=0$  とすれば、 $c=\frac{\pi}{2} \times \text{sign } z$ 、よって結局

$$\tau(x, z) = A\theta, \quad A = \frac{\Gamma}{\pi} \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \quad (\text{A.8})$$

によってあらわされる  $\tau$  分布が線型化された等圧条件を充し、等ダブルエット線であらわして、図 A.2 の様な放射状分布となる。さらに図中に示すように、揚力線の貫通点から後方（すなわち、翼を通過の後）に、上下面のダブルエットの不連続から生じる、強さ  $2\pi A = 2\Gamma \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right)$  の半無限渦線があらわれる。これは、とりもなおさず、Image System で (A.2)、(A.3) 式であらわされた渦線に等しい。つぎに、この様な分布が、Reduced System において線型化された切線条件、 $v_{Si}=v_{Srj}$  を充すか否かを調べておく。Image System では  $v$ への寄与は、上図の  $2\pi A$  なる  $x$  軸上の渦線の寄与のみであった。これを除く、上図  $\tau$  による分布渦面の寄与を  $4v$  とするとき、 $4v$  が境界面上任意の点で 0 ならば、両 System は等価で、等しく切線条件を充す。図 A.3 によってこれを求め

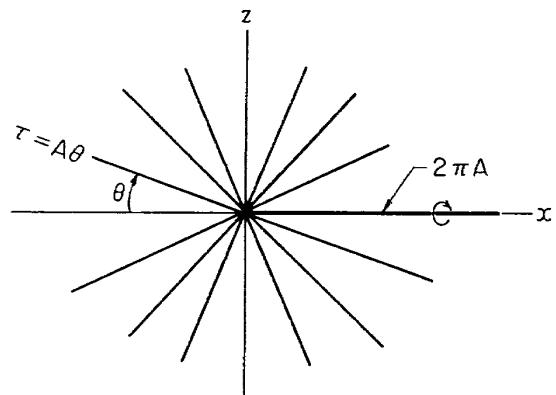


図 A.2

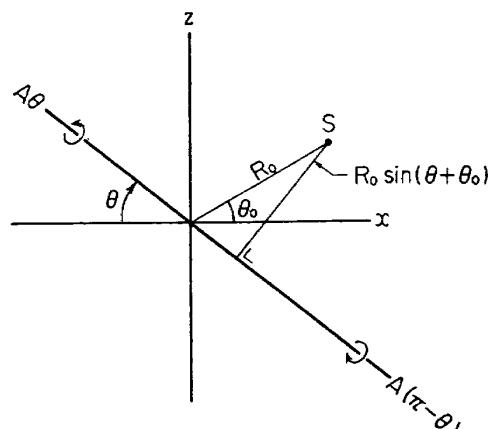


図 A.3

れば、 $(\theta + \theta_0) = \varphi$  とおいて、

$$\begin{aligned} \Delta v &= \frac{A}{4\pi R_0} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{\sin \varphi} [\{\cos(\pi - \varphi) + 1\} \\ &\quad - \{\cos \varphi + 1\}] d\theta \\ &= \frac{-2A}{4\pi R_0} \int_{-\pi}^{\pi} \cot \varphi d\theta = 0 \end{aligned} \quad (\text{A.9})$$

したがって、Reduced System における図 A.2 の  $\tau$  分布は、境界面上において線型化された境界条件を充す。また、その対称性と、 $2\pi A$  なる  $x$  軸上の渦線の強さが等しいことから、点  $P, Q$  に誘起する吹下し速度も等しい。点  $P, Q$  が、 $Y$  軸上にない場合も、両 System の結果が等しいことは、幾らかの計算のうちに検証される。さらに、揚力線が一本でなく、多数になった場合も重ね合せにより同様の等価性は明かである。かくて、線型化された Reduced System と Image System が、図 A.2 に示す  $\tau$  分布のもとで等価であることが明かとなった。

### (3) 線型化の意味と Reduced System

ここで問題は、本来、線型化を必要としない Reduced System において、線型化が具体的にどの様な意味をもつかを吟味することである。これはひいては、我々の方法と、線型理論との相違を確めることになるからである。

厳密な等圧条件式（本文 (16) 式 p. 5）において、境界の変形なきものとして  $\tau_y = 0$  とおけば、

$$\begin{aligned} V_{\infty i}^2(1-\mu^2) + \mu^2[u_i^2 + v_i^2 + w_i^2] \\ = [(u_i - \tau_x)^2 + v_i^2 + (w_i - \tau_z)^2] \end{aligned}$$

ここで  $u_i, v_i, w_i$  を

$$u_i = V_{\infty i} + u_s, \quad v_i = v_s, \quad w_i = w_s$$

なる擾乱速度におきかえれば、

$$\begin{aligned} (1-\mu^2)[-2V_{\infty i}u_s - u_s^2 - v_s^2 - w_s^2] \\ = (\tau_x^2 + \tau_z^2) - 2(V_{\infty i}\tau_x + u_s\tau_x + w_s\tau_z) \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

(A.10) 式の中で  $V_{\infty i}$  を含まない 2 次の項を省略（線型化）すれば、線型理論における等圧条件 (A.6) 式、即ち、 $\tau_x = u_s(1-\mu^2)$  をうる。しかしながら、線型理論における分布は、図 A.2 に見られるように、 $|z| \rightarrow \infty$  では  $\tau \neq 0$  であって、この意味で無限遠での条件を充していない。この条件を充すためには、図 A.4 に見られるように、等ダブレット線が非線型効果により適当に湾曲して後方へ向はねばならない。すなわち、線型理論は、この湾曲の効果を無視したものと見ることが出来る。湾曲の効果は、揚力線への吹下し効果をその絶対値において減じる方向に働くから、線型理論は翼幅方向の干渉効果を大きめに求ることになる。

以上は単一の揚力線による擾乱についての場合であるが、揚力線が翼面に幾つか分布すれば、これ等の効果の重ね合せによって、翼面のまわりのダブルエット分布は、湾曲の度を強める。このような境界面上のダブルエット、即ち渦系の分布を Ribner & Ellis<sup>10)</sup>においては、図 A.5 に見られる馬蹄渦系に置きかえて、Weissinger 法による近似的面理論への接近をはかっている。しかし、此の様な近似が、どの程度現実に近いかについては依然として疑問が残る。少くとも我々の設定した計算領域内においては、図 32 (本文 p. 33) に見られる様に複雑な分布形態を示すからである。

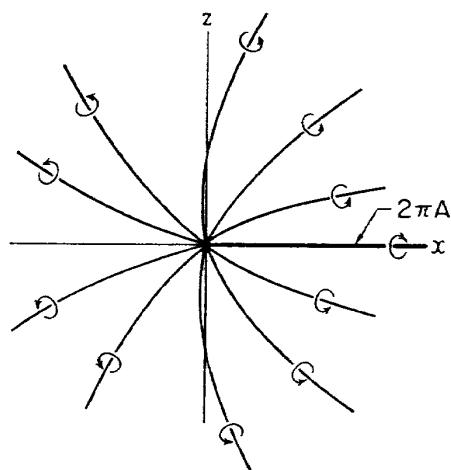


図 A.4

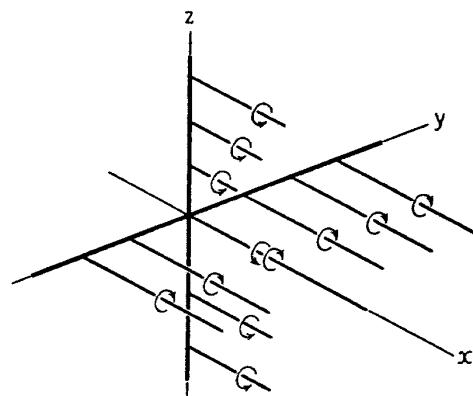


図 A.5

## 附録 2. 揚力理論による翼幅方向揚力分布

附録 1. で述べたように、線型化された Image System と Reduced System は等価であり、かつ、この場合、揚力線理論においては、Reduced System にお

ける境界面上の等ダブルット線が、その対称性から、揚力線の位置に吹下し効果をもたない。この様な関係を利用して、揚力線理論における翼巾方向の揚力分布を求める。

### (1) $\mu=0$ の場合

低速域の速度が 0 の場合 ( $\mu=0$ ) には、風胴の境界修正と同様に、Image System を用いて、簡単に数値計算が出来る。この場合、低速側に渦系は実在しないから、此の領域に附録 1. (A.1) 式より  $\nu_f=-1$  として Image を置き、任意の点  $y$  における吹下し速度を求める。揚力線の循環を  $\Gamma(y)=\gamma(y)\Gamma_0$ 、ただし、 $\Gamma_0$  は二次元翼の揚力線のもつ渦度とし、

$$w(y) = \frac{\Gamma_0}{4\pi} \int_0^\infty \frac{d\gamma(y')}{dy'} \left[ \frac{1}{y-y'} + \frac{1}{y+y'} \right] dy' \quad (B.1)$$

ここで、2 次元翼の揚力傾斜  $a_0$ 、幾何学的迎角  $\alpha_0$  を用いて、よく知られた関係式

$$2\Gamma(y) = a_0 c (V\alpha_0 - w(y)) \quad (B.2)$$

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} a_0 c \alpha_0 V \quad (B.3)$$

これと (B.1) から、

$$\gamma(y) = 1 - \frac{a_0 c}{8\pi} \int_0^\infty \frac{d\gamma(y')}{dy'} \left[ \frac{2y}{y^2 - y'^2} \right] dy' \quad (B.4)$$

ここで積分を数値積分に置かえて、計算上の strip の幅と、積分領域とを決めれば、 $\gamma(y)$  なる翼幅方向の循環分布を数値的に求めることが出来る（図 B.1）。

### (2) $\mu=1$ の場合

境界を距てた左右の速度差が無限に 0 に近づく場合、即ち  $\mu \rightarrow 1$  の場合は、附録 1. (A.1) 式より、 $\nu_i, \nu_f \rightarrow 0$ 、すなわち、Image は消失し、実在する渦系のみの寄与が残り、かつ、その寄与に乘じる係数

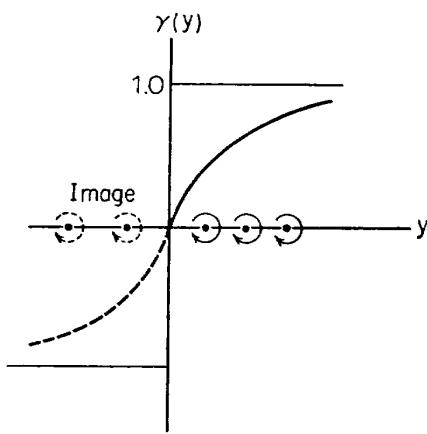


図 B.1

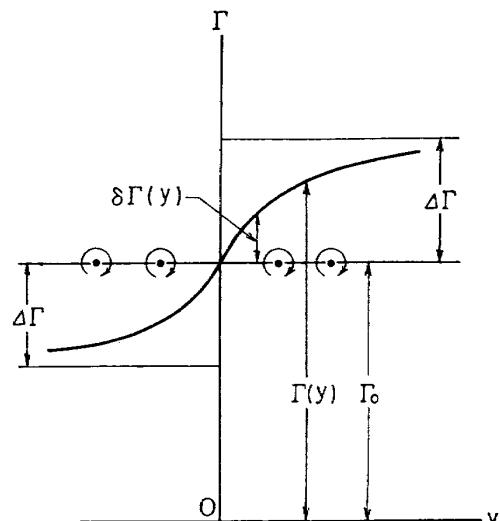


図 B.2

$\nu_i, \nu_f \rightarrow 1$  となる。したがって、 $\mu=0$  の場合の Image が、実在の渦系に代るだけで、(B.4) 式の関係が不变に保たれる。ただし、この場合、(図 B.2 参照) $\Gamma_0$  を境界左右の平均値とし、左右の分布の近似的な逆対称性を前提として、

$$\delta\Gamma(y) = \Gamma(y) - \Gamma_0$$

$$\gamma(y) = \frac{\delta\Gamma(y)}{\Delta\Gamma} \quad (B.5)$$

として、(B.2)、(B.3) 式に相当する次式

$$2\Gamma(y) = a_0 c (V \pm \Delta V) \left( \alpha_0 - \frac{w(y)}{V \pm \Delta V} \right) \quad (B.6)$$

$$\Delta\Gamma = \frac{1}{2} \Delta V a_0 c \alpha_0 \quad (B.7)$$

を用いて、(B.4) と全く同一の関係式を得る。

### (3) $\mu \neq 0, 1$ の場合

この場合は、Reduced System をとることにより、境界左右の相対関係は、図 B.3 のようになる。Reduce してあるから  $\Gamma_{0i} = \Gamma_{0rf}$  である。 $y=0$  なる境界の翼との交点においては、 $S$  面および  $W$  面から  $x$  軸上に集中する渦系が互いに打消し合って（本文 (49) 式、p. 15）、両側に同方向の渦系のみが残る。また、境界面上に分布する渦系は、線型理論における対称性（図 A.2）から、揚力線の位置に寄与をもたない。かくて、ここに残された渦系は、その分布において、図 B.1, 2 と同等である。すなわち、

$$\gamma_i(y) = \frac{\delta\Gamma_i(y)}{\Delta\Gamma_0}$$

$$\gamma_{rf}(y) = \frac{\gamma\Gamma_{rf}(y)}{\Delta\Gamma_0} \quad (B.8)$$

ここで境界における左右の揚力の連続性から、

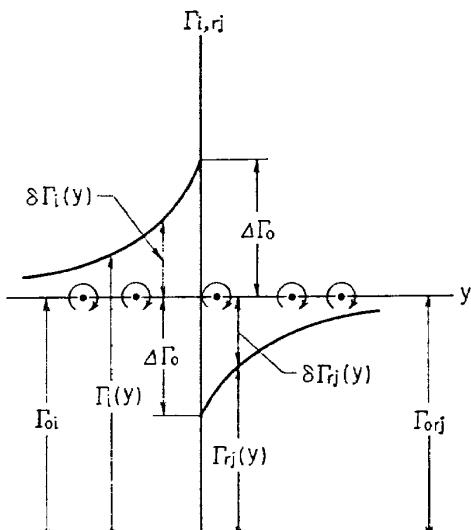


図 B.3

$$\begin{aligned} L_i &= \rho V_{\infty i} (\Gamma_{0i} + \Delta\Gamma_0) \\ &= L_j = \frac{1}{\mu^2} \rho V_{\infty i} (\Gamma_{0rj} - \Delta\Gamma_0) \end{aligned}$$

よって  $\Delta\Gamma_0$  は、

$$\Delta\Gamma_0 = \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \Gamma_{0i} = \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \frac{1}{2} a_0 c \alpha_0 V_{\infty i} \quad (B.9)$$

したがって、(B.4) 式を数値的に解いた  $\gamma(y)$  を用いて、高低速両域に附加される循環は、

$$\begin{aligned} \delta\Gamma_i(y) &= \gamma_i(y_i) \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \Gamma_{0i} \\ \delta\Gamma_j(y) &= -\gamma_{rj}(y_j) \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \frac{\Gamma_{0i}}{\mu} \quad (B.10) \end{aligned}$$

速度は境界で不連続であって、 $\Gamma$  の値も不連続となる。境界左右の 2 次元揚力差を  $\Delta L_0$  とし、境界における低速側揚力の、2 次元揚力  $L_{0i}$  からの増分を  $\Delta L_{Si}$  とおくとき、

$$\mathcal{L} = \frac{\Delta L_{Si}}{\Delta L_0} = \frac{\delta\Gamma_i(y=0)}{\rho V_{\infty i} \Gamma_{0i} \left( \frac{1}{\mu^2} - 1 \right)} = \frac{\mu^2}{1+\mu^2} \quad (B.11)$$

したがって、 $\mu \rightarrow 1$  ならば  $\mathcal{L} \rightarrow 0.5$ 、 $\mu = 0$  ならば  $\mathcal{L} = 0$  となり、この 2 つの場合が、境界をはさむ翼幅方向揚力分布の線理論における限界となる（本文、図 33、p. 34 参照）。ただし、本文でも検討しているように、我々の求めた面理論としての分布と、上述の方法による線理論の結果との一致は、(B.11) の  $\mathcal{L}$  の値を除いて、よくない。この点について、さらに附録 3. の中で考察する。

### 附録 3. 不連続面のダブレット分布と翼面揚力分布

Reduced Systemにおいては、不連続面上ダブルート分布は、等ダブルート線であらわして、例えば本文図 32 (p. 34) の様になる。これは附録 1.においてすでに述べた。ところで、この不連続境界  $S$  面上のダブルート分布のあり方（したがって Vortex 分布のあり方）によって、翼面上の揚力分布が、翼幅、翼弦両方向にどの様な変化を受けるかが問題となる。特に、附録 1. で述べた線型理論におけるダブルート分布、附録 2. で言及した線理論と面理論の差、さらに、我々の計算法における領域限定の効果に関連して、これは重要である。Ribner & Ellis<sup>10)</sup> はその近似的面理論において附録 1. 図 A.5 に示す馬蹄渦系のモデルを用いている。我々はここで面理論として同様な馬蹄渦系による置換を行ない。翼面揚力分布のこれに応じる変化を調べる。いま本文、図 16 (p. 17) に示す設定領域にならい、同一の座標系のもとに、翼面を翼弦方向に 5 列、翼幅方向に左右各 10 ケ宛（本文計算例では最大 7 ケ）の小領域を設定する（すなわち、 $N=100$ ）。この小領域の辺長を本文計算例と同様に  $\Delta=0.4$  とし、その小領域の中央に各代表点を置く。この小領域を囲んで図 C.1 に示すように各 1 ケ宛の馬蹄渦を置く。此等の馬蹄渦の強さの分布を、翼面上の各代表点で境界条件が充足されるように決めてゆけば、面理論としての翼面揚力分布が得られる。ただし、ここで扱うのは、干渉によって附加される揚力である。ここで  $\mu=0.7$ （計算例 1. 本文 p. 21 と同様）とし、 $S$  面上の Vortex の分布を、図 C.2 の No. 1 から No. 4 迄の 4 種を仮定し、これ等について調べる。

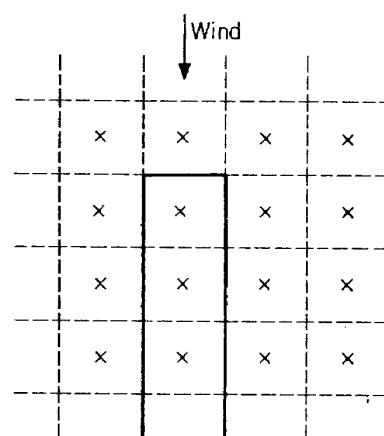


図 C.1

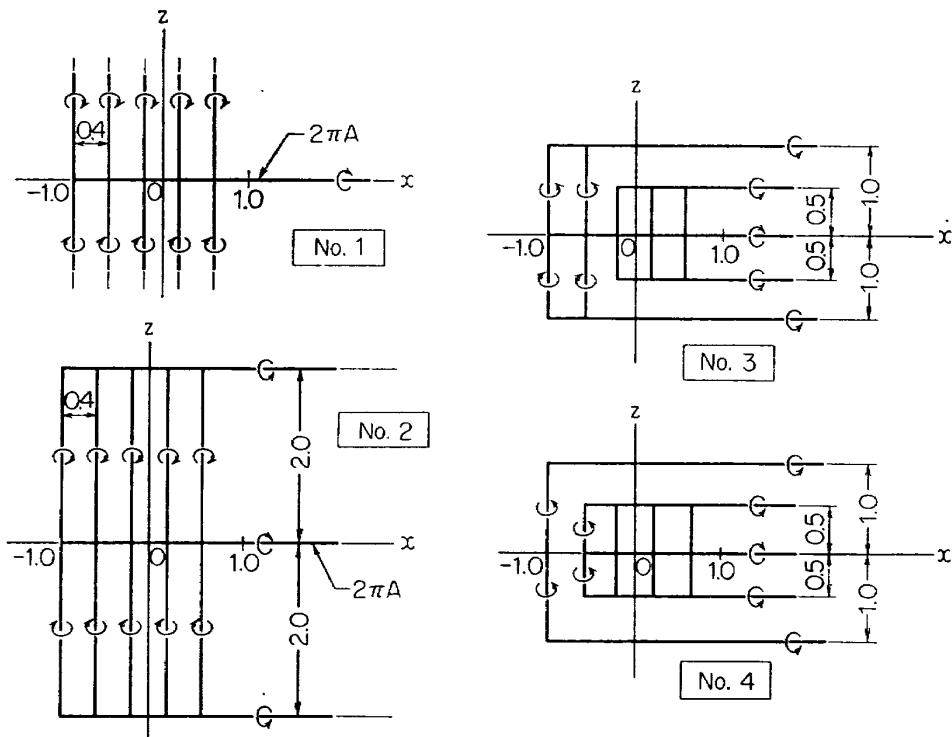


図 C.2

図の No. 1 は、 $z$  軸に平行な Vortex Filament が無限に延びる場合であって、これ等  $S$  面上の渦線は、 $x$  軸上の分枝を除いて、翼面への寄与をもたない。No. 2, 3, 4 は Ribner & Ellis の馬蹄渦系を面分布に拡張したものである。No. 2, 3, 4 の順に、 $S$  面上馬蹄渦の分枝が  $x$  軸に近づいている。また、中央  $x$  軸上に延びる半無限渦系は 2 本（翼の上側と下側）合せて、翼の後縁で強さ  $2\pi A$ （附録 1. (A.8) 式）となる。この場合、 $x$  軸上の 2 本の分枝の強さの分布は、本文 (39) 式 (p. 14) の  $\tau_x$  の数値積分から得られ、これを図 C.3 に示すように階段状分布で近似して渦系が形成される。勿論、これ等の No. 1 から No. 4

に至る  $S$  面上に仮定された渦系は、 $S$  面における境界条件を充さない。しかし、ここで求めるのは、この様な分布の変化が、翼面に及す効果を調べることであるから、ここでは問題にする必要がない。

かくて、仮定された  $S$  面の分布から、翼面上各代表点における  $z$  方向吹下し速度を求める。つぎに、求められた速度場に対して、翼面上の各代表点の  $z$  方向速度を 0 とするような（翼面境界条件を充すような）翼面上の Vortex 分布を求める。ここに求めた翼面上分布が  $S$  面に及ぼす 2 次的効果はここでは考慮しない。何となれば、Reduced System においては、その近似的逆対称性のために、これ等の Vortex System（翼面上の）が  $S$  面上にもつ、 $x$  方向附加速度したがってまた  $\tau_x$  への寄与は極めて小さいからである。また、 $y$ ,  $z$  方向すなわち、 $v$ ,  $w$  の寄与については我々の解析において、はじめて可能となる。

### (1) 翼弦方向揚力分布

上述の方法で求めた翼面上の  $\Gamma$  の分布を用いて、任意の翼幅位置で、前縁から  $x$  の位置までの  $\Gamma$  の和  $\sum \Gamma(x)$  を求める。上述の計算では、翼弦方向の最後方の代表点の  $x$  座標は  $x=0.8$  であるから、 $\sum \Gamma(0.8)$  で無次元化して  $A(x)$  を求める。

$$A(x) = \sum \Gamma(x) / \sum \Gamma(0.8)$$

また、二次元翼の揚力分布に応じる  $S$  面上の  $\Gamma$  分

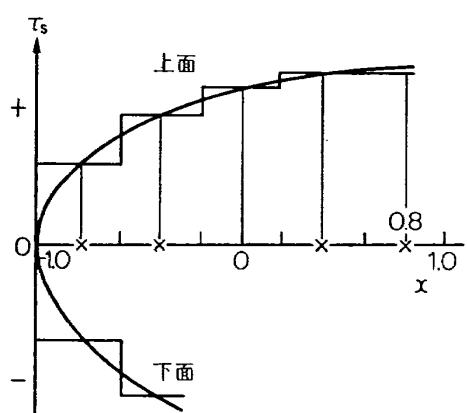


図 C.3

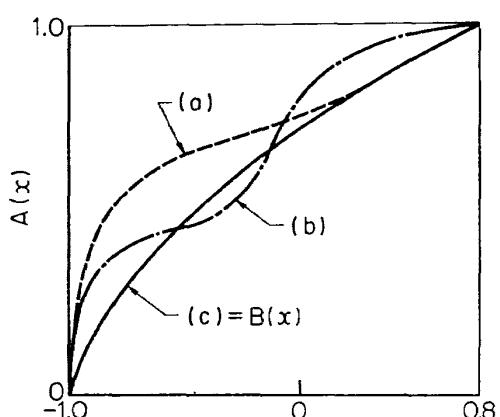


図 C.4

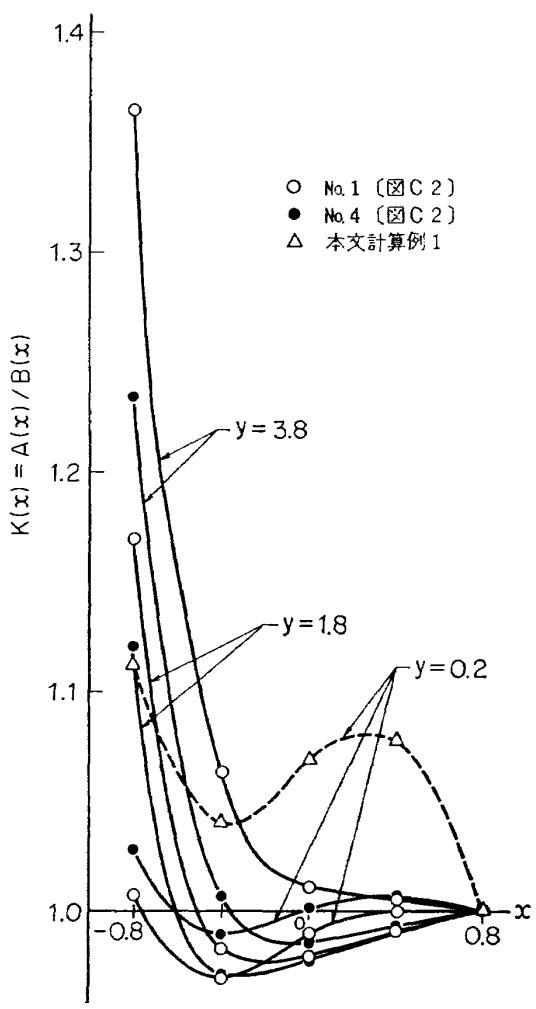


図 C.5 翼弦揚力分布の変化

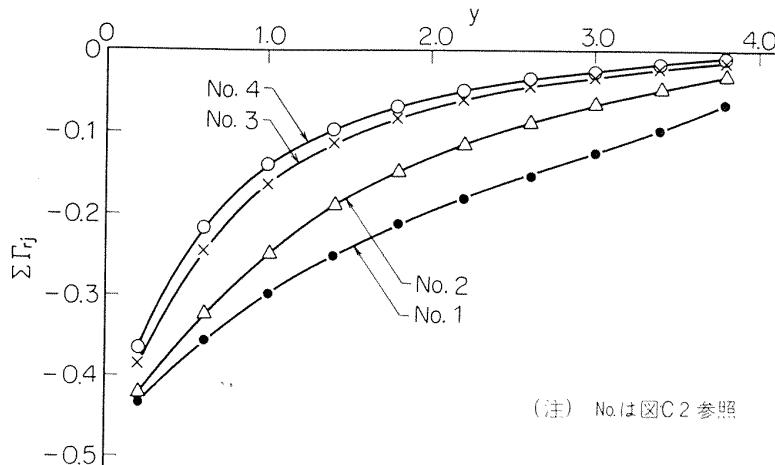
布、したがって  $\tau_s$  の翼面上での理論値、すなわち、本文 (39) 式の積分結果（これは同時に、(49)式により、翼面上、境界との交線における  $\Gamma_W$  と絶対値において等しい）について同様の無次元化をおこない、 $B(x)$  を求める。

$$B(x) = (\tau_s(x)/\tau_s(0.8))_{z=\pm 0}$$

かくて、 $A(x)$ 、 $B(x)$  を比較すれば一般に、図 C.4 の様になる。このとき実際の揚力分布は、各点における、これ等の曲線の勾配である。したがって、例えば図中 (a) の曲線は、主として前縁附近に分布が偏るとともに、それに続く後方で全般的に揚力分布が減少することを示す。また図中 (b) の曲線は、前縁部に集中する共に後部まで揚力が急減することを示す。このため曲線に波型の“うねり”が出来る。曲線の勾配を求めるることは、むしろ精度を落すからここで、計算例 No. 1, No. 4 について  $K(x) = A(x)/B(x)$  なる比を求めて図 C.5 に示す。図中に示すように、前縁部のみに偏る傾向は、むしろ、境界から離れた位置で著しい。一方、境界近傍  $y=0.2$  では、図 C.4(b) に示すような“うねり”が出来る。図中に本文計算例の結果を併せて示す。No. 1 より No. 4 の方が、そして、本文計算例の方が、この“うねり”的傾向、したがって、前縁で分布の増加、後方で減少の傾向が著しい。したがって、この傾向が不連続境界のダブルレット分布のあり方、すなわち、等ダブルレット線の前後への傾きに関連していることが明かである（本文、図 37, p. 36 参照）。

## (2) 翼幅方向揚力分布

前縁から後縁までの  $\Gamma$  の和  $\sum \Gamma$  は、その翼幅位置での循環の強さであるから、これの翼幅方向への変化を見れば、翼幅方向揚力分布が比較出来る。これを図 C.6 に示す。S 面上ダブルレットの分布形態、No. 1 から No. 4 への変化を見れば、当然ながら、S 面上馬蹄渦の半無限分枝が  $x$  軸に近づく程、翼幅方向の、干渉による揚力変化の減衰が速やかである。この結果と、我々の計算および揚力線理論との比較は、本文、p. 32 以下に述べてある。ここで明らかなことは、境界面上のダブルレットの分布のあり方が、翼幅および翼弦方向の附加揚力の分布に極めて密接に影響することである。したがって、揚力線理論、あるいは、Ribner & Ellis の示した簡単化したモデルが、本来変形を伴う境界近傍において、充分な精度をもつ事は期待薄である。すなわち、我々の示した面的取扱い（変形を考慮した）において、はじめて、現象の本質的傾向が明かにされ得ると考えられる。

図 C.6 翼幅方向循環分布 ( $\mu=0.7$ ,  $\alpha=0.01$ ,  $V_{\infty i}=25$ )

#### 附録 4. 扇形領域の水槽実験による例証

本文においては、文献3および文献18の結果を引用し、翼を通過した後のWake中の高速気流断面の変形から、翼面上における、扇形領域の存在を例証した。しかし、此等の例証は、翼面上に計算されたような形で扇形領域が実在することへの直接的証明にはなっていない。そこで、さらに以下に述べるような水槽実験を行なった。

##### (1) 実験の目的をより測定の内容

実験の目的は水槽の一般流（速度  $V_0$ ）の中に、円形断面の水流ジェット（速度  $V_j$ ）を平行に噴出させ（図D.2参照），これを平板翼に作用させて、翼面上

に生じるであろう扇形領域を実際に確認することである。このために翼の周辺のジェット水流の挙動を撮影記録し、さらに翼の後縁直後での水流の動圧の分布を測定した。

##### (2) 使用した水槽とその諸元

船舶技術研究所小型回流水槽（図D.1）

水槽測定部断面 深さ 450 mm × 幅 600 mm

流速 約 0.5 m/sec ~ 2.0 m/sec

##### (3) 実験の配置および測定方法

実験における配置状況を図D.3に示す。口径2インチのポンプから図のように鋼管を通じて水を導き、口径50 mm のノズルから水流ジェットを噴出させて、翼弦長100 mm の翼に衝突させる。流れの状況を撮影するための手段としてこの場合は、ジェットへ



図 D.1 小型回流水槽

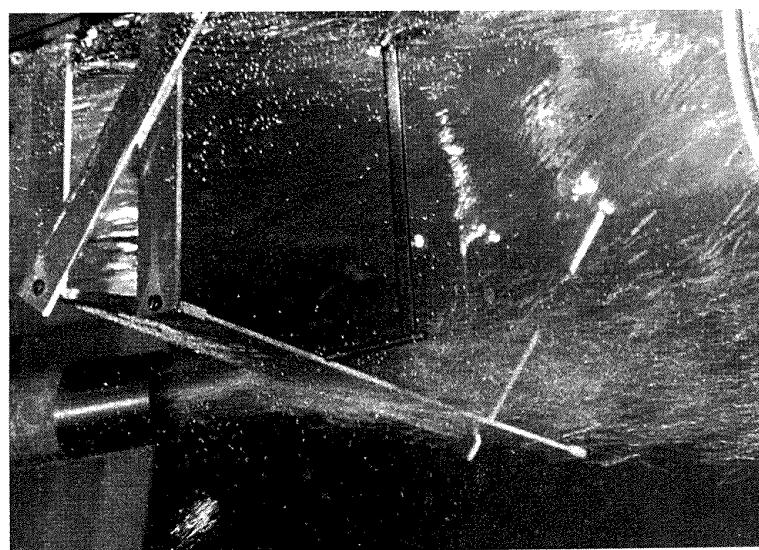


図 D.2 実験の状況

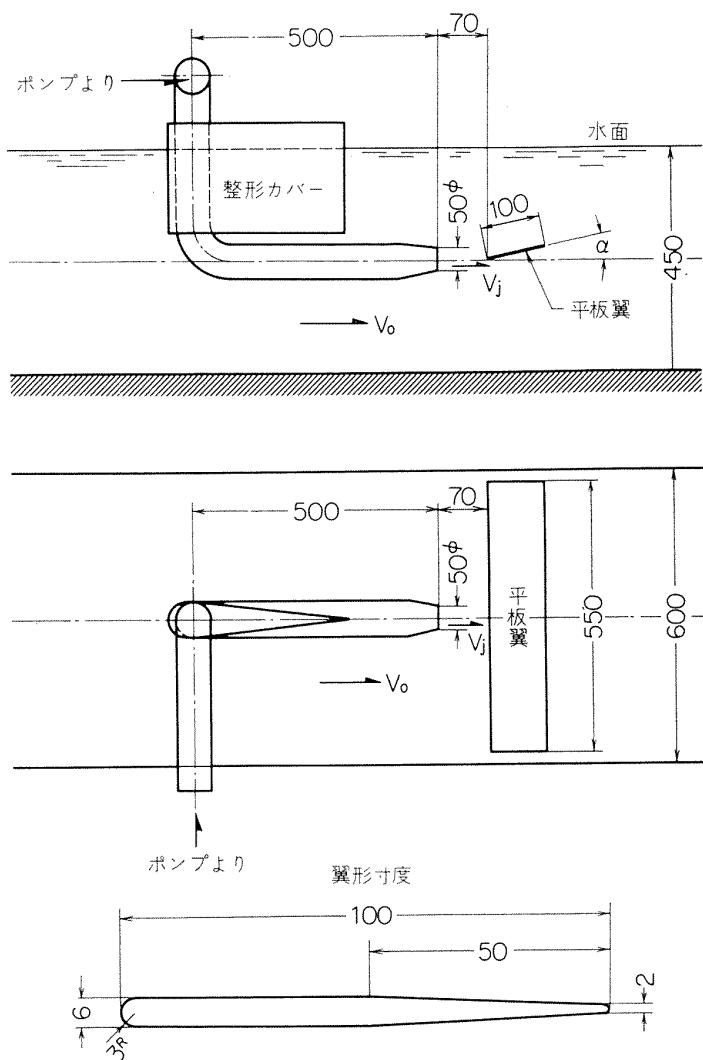


図 D.3 実験配置図 (単位 mm)

の気泡または染料の投入をおこなった。いずれも、ポンプの吸込側にこれらを投入し、写真撮影は水槽底面の透明アクリル壁を通しておこなった。後縁における水流動圧の測定は、ピトー管およびトラバース装置を用い、断面を 2 mm 乃至 5 mm のピッチで主流方向の動圧成分を走査し、水柱マノメーターで測定した。ジェット流速  $V_j$  はポンプの容量一ぱいにとり、その結果  $V_j \approx 2.24 \text{ m/sec}$  となった。また一般流速  $V_0$  は変形を明らかに見るために最小速度  $V_0 \approx 0.48 \text{ m/sec}$  にとった。

#### (4) 扇形領域の存在

ジェット水流が翼を通過するときの翼の上下面に

おける境界の変形状態を図 D.4, 5 (気泡) および図 D.6, 7 (染色) に示した。いずれの場合も翼の上面 (負圧側) で縮流を生じ、下面 (圧力側) で幅の拡張が生じている。この傾向を明白にするために、図では迎角の大きい状態 (約 16°) で示されている。かくて、境界をめぐり、翼面上に扇形領域が実在することは明白である。また、扇形領域が後縁へ向って拡がる形状についても例えば本文図 20 に示した計算の結果と同様な傾向が見られる。此の実験においては、翼を通過した後に少くとも後縁から 1/2 翼弦長後方附近までは、境界の変形の傾向がそのまま受つがれている。これよりさらに後方では粘性による拡散や非定常な混

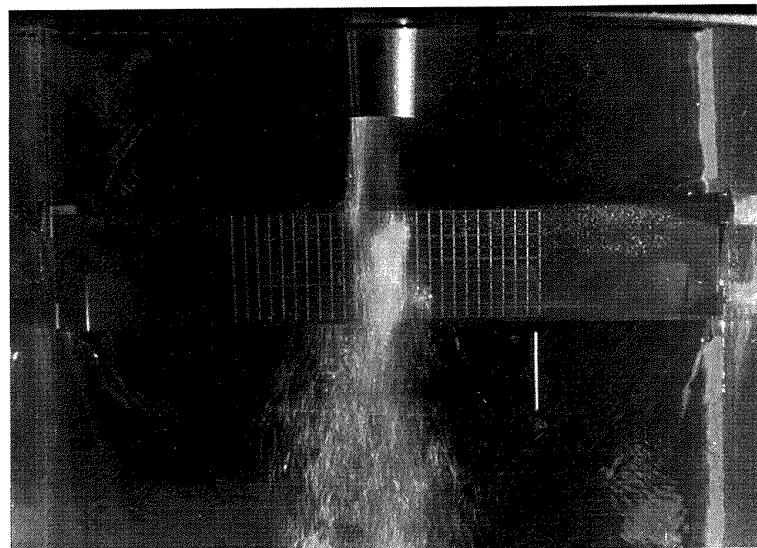


図 D.4 水流境界の変形 ( $\alpha=16.7^\circ$ , 負圧側, 気泡混入,  $V_0=0.48 \text{ m/sec}$ )

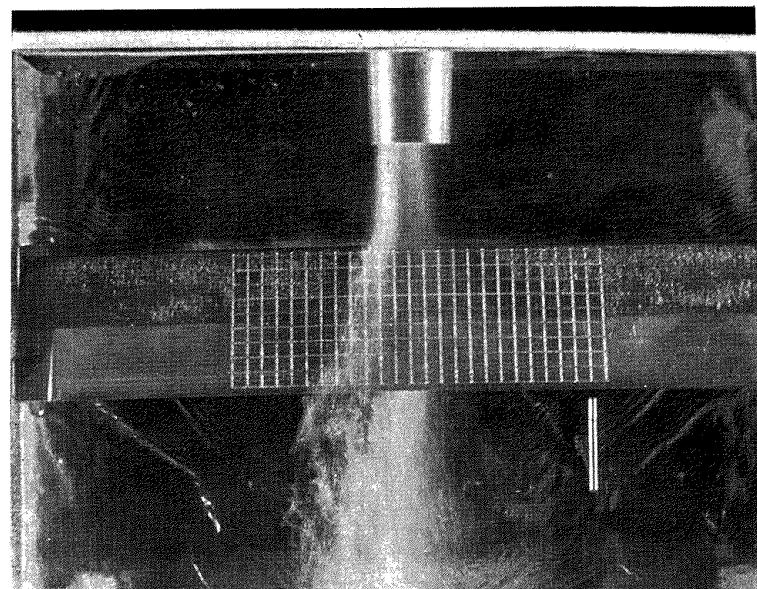


図 D.5 水流境界の変形 ( $\alpha=16.7^\circ$ , 圧力側, 気泡混入,  $V_0=0.48 \text{ m/sec}$ )

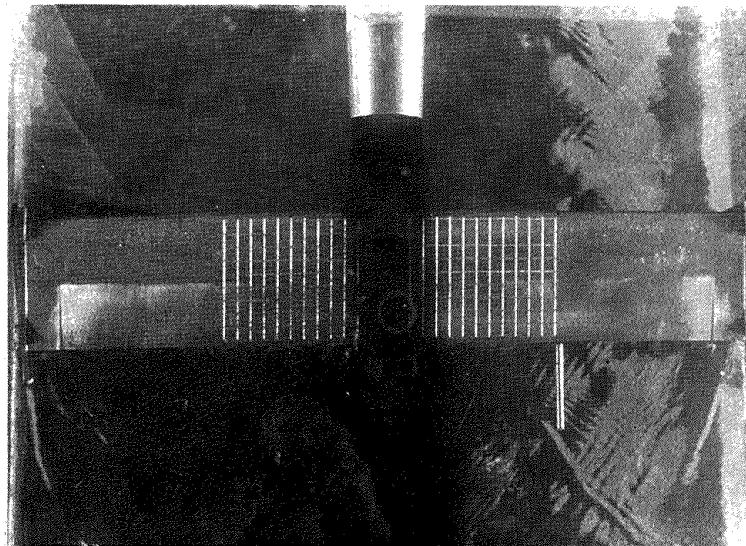


図 D.6 水流境界の変形 ( $\alpha=16.7^\circ$ , 負圧側, 染料混入,  $V_0=0.48 \text{ m/sec}$ )

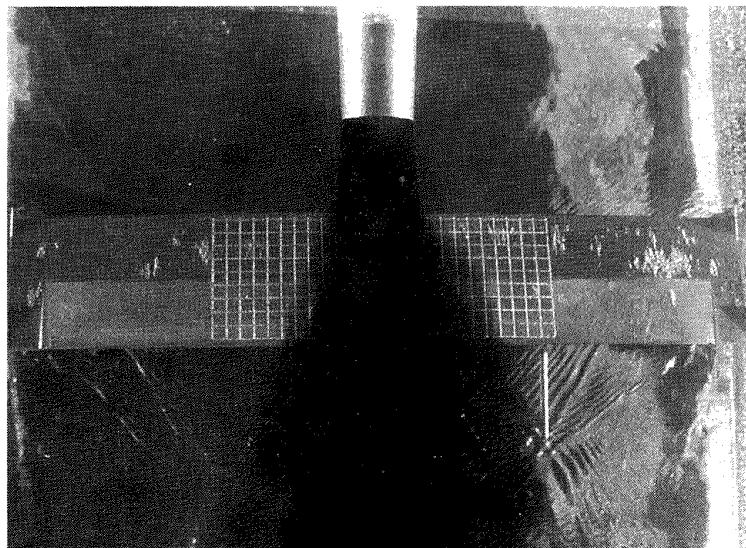


図 D.7 水流境界の変形 ( $\alpha=16.7^\circ$ , 圧力側, 染料混入,  $V_0=0.48 \text{ m/sec}$ )

合が卓越してきて、流れの状態は明確さを著しく欠いてくる。以上の事実からすれば、翼通過後の広範囲な流場のあり方については、我々の得た結果を初期条件とし、Wake 全体の渦系の動力学として別個に解かるべき問題と考えられる。

#### (5) 翼の後縁における水流ジェットの断面

翼と不連続境界の相互干渉による高速流断面の変形を調べるために、翼の後縁直後（後縁より  $0 \sim 1 \text{ mm}$  後方）において流速分布を測定した。この結果を迎角の増加の順に図 D.8, 9, 10 として示す。翼は水槽中に水平に置かれていて、図は後縁の上下位置を  $z=0$  にとり、翼幅方向のジェットの中心位置を  $y=0$  とした断面内の等動圧線を示している。比較のため、図中

にノズル出口の形状を鎖線で示した。高速流断面の後縁附近における変形状態は、本文にすでに詳しく述べたとおりであるただし、実験においては粘性の効果のため、不連続境界を理論におけるように明確に一つの曲面として指摘することは出来ず、粘性効果の影響を含んだ等動圧線群を得る。この線群から見た変形状態は、当然ながら、迎角の増加と共に著しく変形の増加することを示している。測定結果は、特に翼上面負圧側において、図中の一部の曲線に例示したように、等高線にかなりの凹凸を示す。また測定中にもマノメーターにおいて、水柱で  $\pm 5 \text{ mm}$  程度の変動がみられた。またジェット中心軸に対する左右の非対称性もかなり顕著に見られる。図の等動圧線は測定結果の小さ

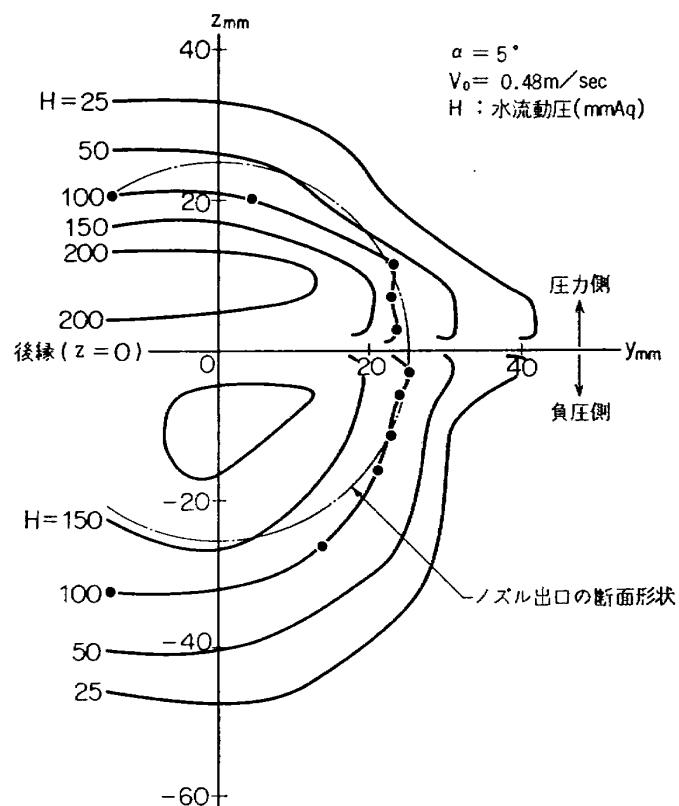


図 D.8 水流断面の動圧分布（後縁直後）

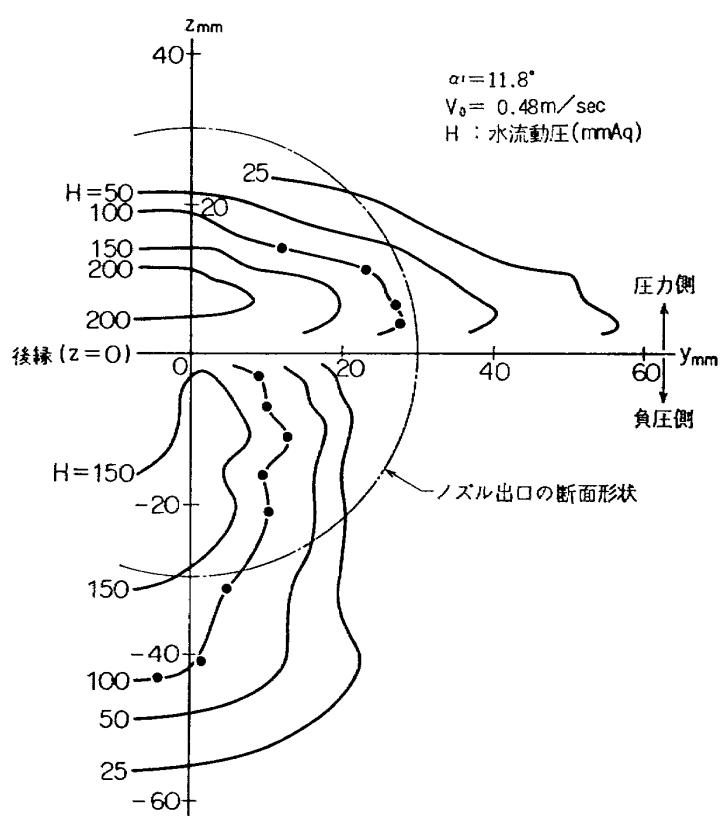


図 D.9 水流断面の動圧分布（後縁直後）

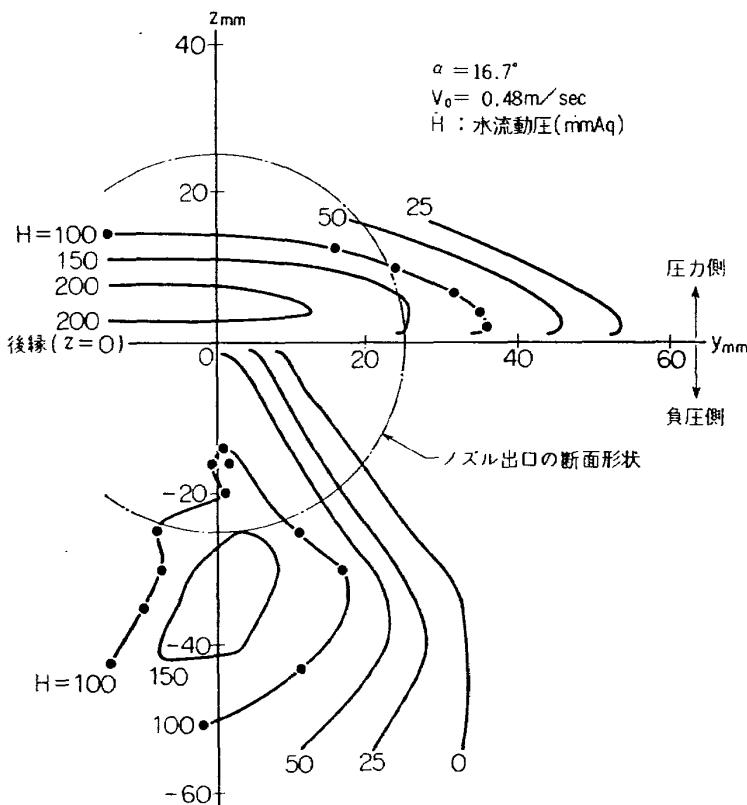


図 D.10 水流断面の動圧分布（後縁直後）

い凹凸をある程度なだらかに修正して示してある。これをもって上下面を通過する流れの変形の全体的な傾向を認めうるであろう。

なお、この等動圧線からは、高低領域の境界を明らかに指摘することが出来ない。実際には大きい速度勾配をもつ厚い層を通して混合と拡散が生じていて、図から上下の変形量の差を直接求めることは出来ない。この実験から変形量を求め、理論と比較する試みは次項の附録 5. でおこなう。

#### 附録 5. 境界の大きい変形量の推定、および実験値との比較

本文における数値計算は、計算上の厳密さを期するために、変形の小さい場合に限られている。しかし、本文でも述べたように STOL 機などの実際の航空機において迎角および速度比 ( $1/\mu$ ) が大きくなると変形が著しく大きくなることは、本文図 26 あるいは附録 4. の実験をまつまでもなく明らかである。したがって、ここで変形が大きくなる場合の変形量を先の計算結果からの外挿として求める方法を示し、さらに此の結果と附録の実験結果とを照合して検討を加える。

##### (1) 大きい変形量の推定

本文で述べたように、翼と不連続境界の交線上において生じる渦度の集中が、扇形領域の形成および境界の変形に対応している。ここに集中する渦度の強さは、附録 1. で述べたように Reduced System において  $x$  軸上後方へ放出される半無限渦系の強さ  $\Gamma_s$  (図 A.2 および A.8 式における  $2\pi A$ ) で代表することが出来る。

$$\Gamma_s = 2\Gamma_0 \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \quad (\text{E.1})$$

ただし  $\Gamma_0$  は Reduced System における二次元翼の揚力線の強さである。したがって

$$\Gamma_0 = \frac{1}{2} V_\infty C_{Lc} \quad (\text{E.2})$$

二次元翼の揚力係数、 $C_L = 2\pi\alpha$  を入れて E.1, E.2 式より

$$\Gamma_s = 2\pi V_\infty c \alpha \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \quad (\text{E.3})$$

ここで境界の変形量  $\delta$  を翼弦長で無次元化した ( $\delta/c$ ) は無次元化した  $y$  方向速度成分 ( $v/V_\infty$ ) に主として依存し、さらに  $v$  の値は最も単純化したモデル (例えば図 A.2) について考えるとき  $\Gamma_s$  によって誘起されるから、結局翼面近くの変形量は無次元定数  $K$

を介して次式で表わすことが出来るであろう。

$$(\delta/c) \doteq K\alpha \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right) \quad (\text{E.4})$$

ここで本文中の計算結果(図26)を用いて上式(E.4)の適合性を確かめることが出来る。図26のなかで $\alpha$ による変形量 $\Delta y$ の変化はきわめて直線的であるから、この図から上式の $K$ を求めるとき $K=7.78(1/\text{rad})$ 。この $K$ を用いて $\Delta y$ の $\mu^2$ による変化を(E.4)式から求めるとともに、図26のうち、 $\mu^2$ による変化量の結果を対照させると、図E.1のように良好な一致がみられる。したがって変形の小さい場合の精密

な計算結果から上述の外挿法による大きい変形の推定が可能である。

## (2) 大きい変形量についての理論と実験の比較

本文で述べたように、精度の高い計算による微小な変形量を直接実験で確かめることは実験条件から考えて困難である。したがってここで外挿による大きい変形量を求め、これを実験値と比較することを試みる。

### a) 文献3および18の実験結果との比較

翼の後縁( $z/c=\pm 0.1$ )における境界の変形による偏差( $\Delta y/c$ )を、本文図20から求めた $K(\doteq 0.076 \text{ 1/degree})$ から $\mu$ をパラメタとして求めれば図E.2を得る。図には、 $\alpha$ と対応させて2次元翼の揚力係数 $C_{l0}$ を併せて示した。ここで文献3および18の実験条件を入れると図示の位置となり、平面境界における変形量の推定値は、図中No.の順に0.075, 0.27, 0.11となる。一方、実験値から取て、或る幅をもって対応する値を求めるとき、No.1, 2において0.1~0.5, No.3において0.1~0.25の程度となる。ただし、実験値は、翼より後方のWakeでの結果であり、さらに、境界が平面ではなく、円筒境界であるから上述の数値的比較は直接的意味をもたない。ここで考慮すべきことは、Wake中の上記の測定値につぎのような各種の効果が影響していると見られることであ

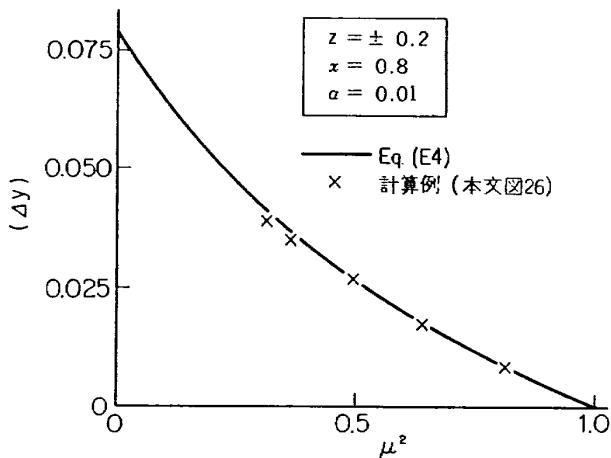


図 E.1 外挿の結果と計算例の比較

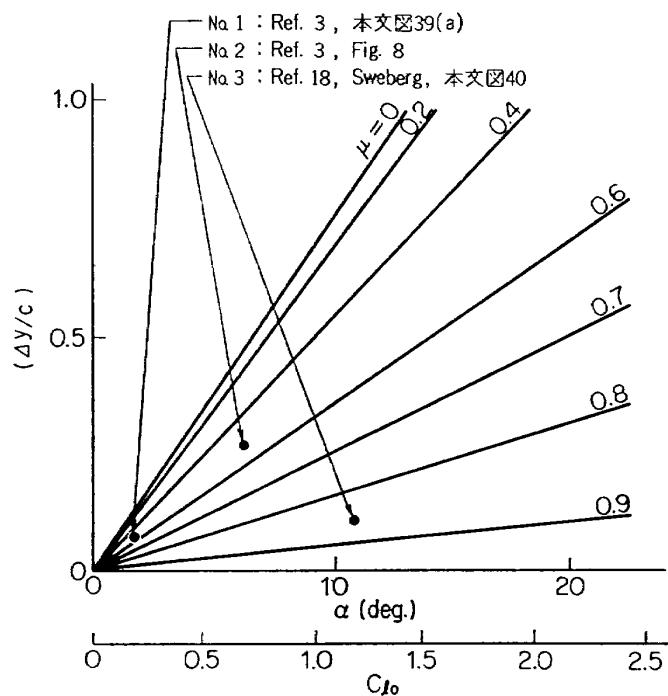


図 E.2 外挿による平面境界の変形 ( $z/c=\pm 0.1$ )  
[文献3, 18の実験条件において $\mu, \alpha$ できる位置]

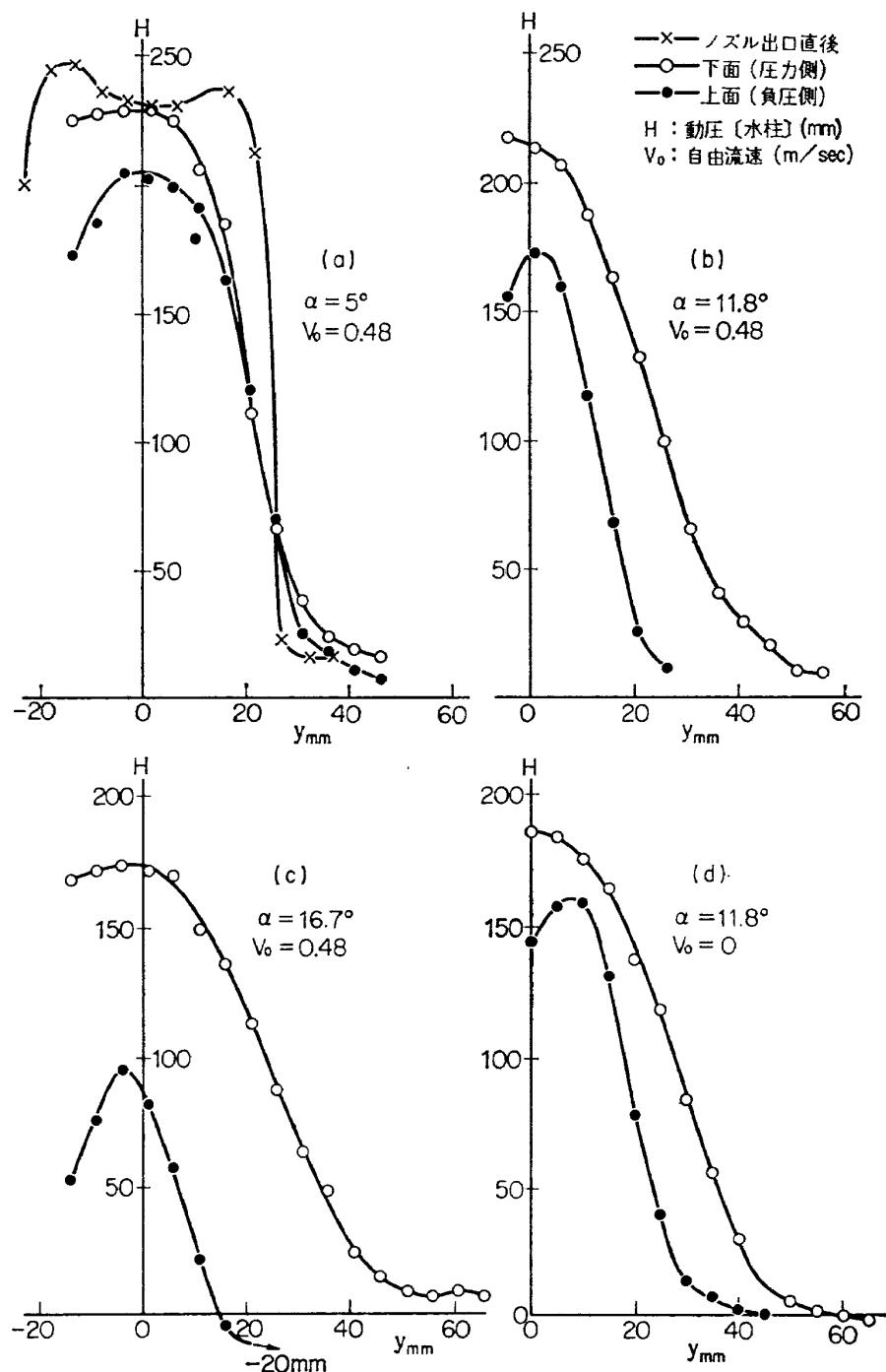


図 E.3 断面動圧分布 (附録 4), ( $z/c \parallel \pm 0.1$ , 後縁直後)  
[注: 付録 4 の実測値をそのまま示したものである]

る。まず、附録 4. の結果から明らかなように、翼の後縁を過ぎた後も、変形量が増大してゆく傾向が或程度見られることである。つぎに、円筒境界であることは、高速領域に接する翼面部分のアスペクト比を介して、実際の変形を平面境界より減少させるであろうと推定される（これについては次項 (b) で更に検討する）。以上の相反する 2 つの傾向に加えて、プロペラの旋回流の効果および粘性の効果が加わる。また、Wake 中に放出される渦系相互の影響が大きい効果を与える。したがって、この項での比較対照の結果として述べ得ることは、上記 2 種の数値の間に著しい矛盾と隔離が存在しないという事であろう。かくて、より直接的比較を、附録 4. の結果を用いて次項でおこなう。

#### b) 附録 4. の実験結果を用いた比較

前項の議論からみて、実験値として干渉による変形量の直接の指標となり得るものは、現在のところ附録 4. の水槽実験における後縁直後の測定結果以外にない。このために、まず、附録 4. の結果から、本文の数値計算に対応させて ( $z/c = \pm 0.1$ ) の位置での無次元変形量 ( $\Delta y/c$ ) を求める。しかしながら実験結果は速度の拡散を伴っているから、明確な境界をもたない。図 E.3 に ( $z/c = \pm 0.1$ ) における動圧分布の測定値を示す。図中 (a) にノズル出口直後の動圧分布を併せて示した。ノズル出口では、管径を配管の途中で絞った効果が少し残っていて、中心部の速度がわずかに低い。このようなジェットが翼面を通過し、後

縁直後では図のように翼の迎角に応じた  $y$  方向速度および動圧の勾配を示す。これ等の曲線から粘性のない場合のジェットの境界を求めるることは本来困難なことであるが、上述の変形量を概数値として求めるために、次の方法をとる。まず、ジェットの運動量の拡散を考えて、その勾配の最も急な位置として動圧分布の peak に対する半値幅をとって求め、一つの境界の目安とする。つぎに、速度の分布曲線について同様の半値幅をとり、したがって粘性応力の最も大きい位置をもう一つの境界の目安とする。各迎角において、各々想定した境界の上下面での偏差を境界の変形量として求め、(E.4) 式の右辺  $\alpha \left( \frac{1-\mu^2}{1+\mu^2} \right)$  を横軸にして図示すれば図 E.4 を得る、さらに、図 E.3 の分布からわかるように翼の上面を通過した流れの peak の位置は、本来のジェット中心から ( $y=0$ ) 左右へずれていて、流れの非対称性が見られる。これは実験条件の不齊一さから生じていると考えられる。この peak の位置を上面下面で一致するように修正したうえで変形量を求めた結果を併せて図 E.4 に示す。迎角の増加とともに変形量が増加していることが明瞭である。迎角の小さいとき、例えば  $\alpha=5^\circ$  においては図 E.3 (a) に見られるように、上下面での境界の偏差が明らかにはあらわれていない。一方では図 D.8 を参照して明らかなように上下面でのジェット断面の変形の傾向から何等かの偏差が観測されるべきである。図 E.3 (a) に見られるように下面を通過した流

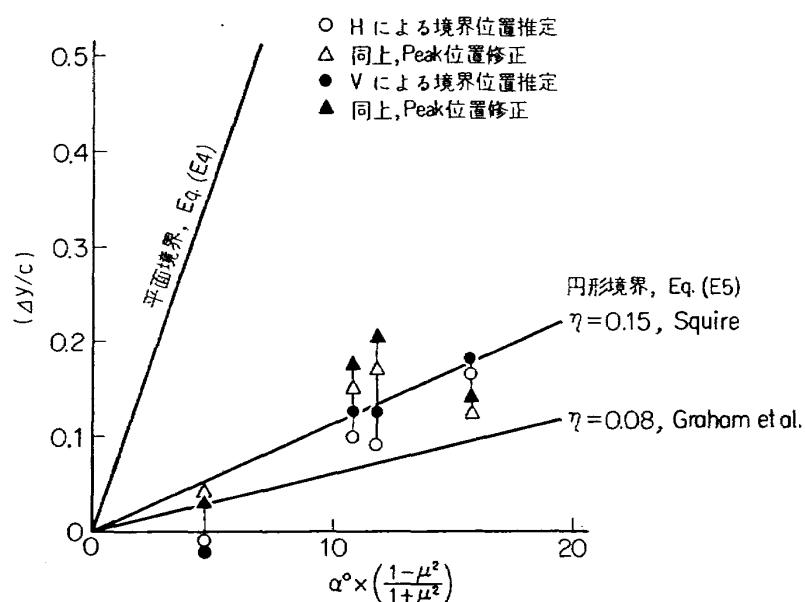


図 E.4 変形量についての理論と実験 ( $z/c = \pm 0.1$ , 後縁直後)

れは未だジェットの中心部の CORE を残しており、かつ、上述の非対称性が明らかに見られる。このように、小さい変形量を粘性流のなかで精度をあげて求めることは相当困難であるとみられる。以上のようにして求めた図 E.4 の変形の概数値に対し、つぎに理論からの推定値を求める。

理論からの推定は、まず本文の計算結果図 20 (b) を用いて、後縁、 $z/c = \pm 0.1$  における変形量から、(E.4) 式の比例定数  $K$  を求める。この結果を平面境界に対する値として、図 E.4 に併せて示す。測定値と比較するときわめて大きい値となる。これは測定が円筒境界でおこなわれていためである。したがって、実験と比較するために、この外挿による推算値にさらに境界相互の干渉効果を入れなくてはならない。一般に高速流が部分的に翼面をおおう場合、この高速流におおわれた翼面部分のアスペクト比  $A_s$  が小さくなると、この部分の揚力増加が、Strip Theory に比して著しく減じることが認められている（例えば文献 9, 10, 6）。この事実は、(E.4) 式を導くときの Reduced System における揚力線モデルにおいて、Reduced されるべき高速領域での動圧が、境界相互の干渉のために見かけ上減少したものとして取扱い得ることを示す。この減少の程度を  $\eta$  であらわせば、 $\eta$  は円形境界における  $A_s$  の部分の揚力増加  $\Delta L$  と、Strip Theory から得られるこの部分の揚力増加  $\Delta L_0$  の比として求めることが出来て、 $A_s$  および  $\mu$  の函数となる。 $\eta$  を用いて、円形境界の場合の変形量  $(\delta/c)_{cyl.}$  は平面境界の変形量  $(\delta/c)_{flat.}$  に対し次式で推定される。

$$\begin{aligned} (\delta/c)_{cyl.} &= \eta(\delta/c)_{flat.} \\ &= \eta K \alpha \left( \frac{1 - \mu^2}{1 + \mu^2} \right) \quad (E.5) \end{aligned}$$

さてここで  $\eta$  の値についてこれまでの諸報告の結果を調べてみる。まず、Squire (文献 6, Fig. 5 および Fig. 6) によれば、附録 4. の実験と同じ  $A_s = 0.5$  の場合、 $\mu = 0$  において  $\eta \approx 0.12$ 、 $\mu = 0.5$  において  $\eta \approx 0.18$  である。実験における  $\mu$  の値は  $\mu \approx 0.21$  であるから、上の結果からすれば  $\eta \approx 0.14 \sim 0.15$  の程度となる。この値を用いた推定を図 E.4 に示す。つぎに Slender Body 理論を援用した Graham 他の計算式を用いると（文献 9, 文献 10, Fig. 8）同様の条件において  $\eta \approx 0.08$  となる。これを同様に図 E.4 に比較して示す。また Ribner & Ellis (文献 10) によれば  $A_s$  の小さいとき、Graham 他の結果に近く、かつ幾分低めの値を与えるようである。この様に、 $\eta$

の値そのものについても未だ明確な結果の一一致は得られていない。また、これ等の理論が殆ど本質的な揚力線理論であることは本文で述べた通りである。にも拘らず図 E.4 に見られるように、上述の理論からの粗い推定は、概数値として実験値に近い値と傾向を示している。

以上の結果から、先に述べた外挿による大きい変形量の推定が粘性の効果を超えて、概数的に大過のない値を与えるものと期待しうる。

## 附録 6. Wake Sheet の変形とその影響

本文の計算は翼面から放出される Wake Sheet が  $xy$  面内に固定されて、変形しないものと仮定して遂行されている。一方で不連続境界（高低速域の境界）については境界条件を充すべく精密な計算がおこなわれているから、これら相互の関連において、Wake Sheet の変形とその影響についても検討を加えておく必要が認められる。これについて以下に述べる。

まず、二次元翼の速度分布から翼の後縁に続く  $x$  軸上の速度分布を求めて、折線近似により Wake Sheet の位置変化を計算すれば、図 F.1 に示すように、翼の迎角に応じて主流方向に湾曲する近似的流線を得る。 $x = 1.2, 1.6, 2.0$  の各位置でこの流線の位置を本文計算例 3 の場合 ( $\alpha = 0.01$ ) に求めると図 F.3 の破線で示す位置に来る。この移動量 ( $xy$  面からの) は計算小領域の幅 0.4 に比し極めて小さい。

つぎに本文計算例 3, ( $M+N$ ) の計算結果から得た解としてのダブルエット分布をもとにして、翼の後縁以後の  $xy$  面上での附加的誘起速度 ( $z$  方向)  $w_a$  を求める。この場合、計算小領域は本文と同じ大きさにとり、計算例 3 に設定された翼面に続き、図 F.2 に示すように 3 列 30 ケの小領域を設け、その中央に 30 点の代表点をとる。

かくて得られた  $w_a$  分布による Wake Sheet の変

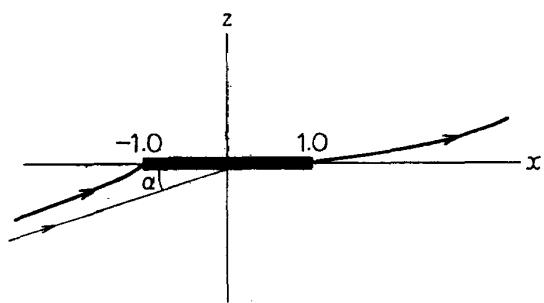


図 F.1

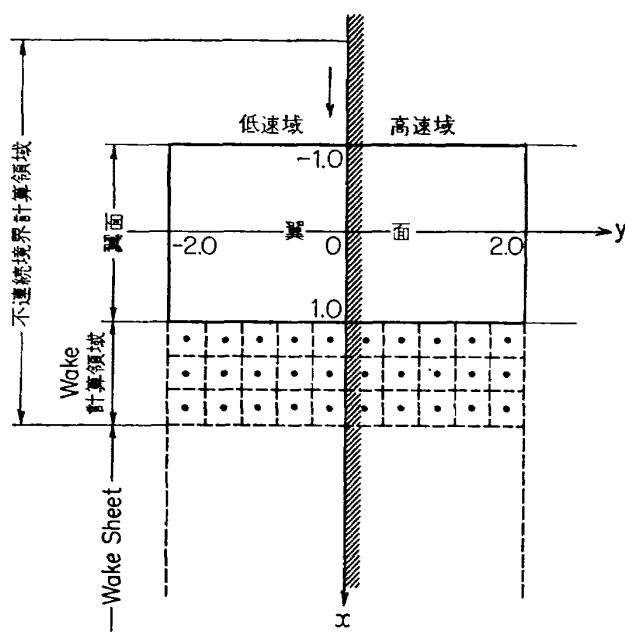


図 F.2

位量を、先に求めた二次元 Wake Doublet Sheet の変位に重ね合わせると、結果として、変形した Wake Sheet の近似的な位置形状が求まる。この計算結果を図 F.3 に示す。図に見られるように翼面上に存在する扇形領域に統く、 $y=0$  の附近に集中した渦度の作用により、Wake Sheet は左右逆方向に捲上る

が、その捲上りの量は翼から後方へゆく程、当然ながら大きくなる。ただし、少くとも  $x=2.0$  (これは、高低速不連続境界の計算設定域の最後部と等しい位置である) の附近では、変位量  $\Delta z < 0.01$  であって、設定された計算小領域の辺長 0.4 に比しても 2.5% 以下と小さい。またこれを図 20 に示す境界の変形量 ( $z=\pm 0.2$ において  $\Delta y \approx 0.05$ ) に比べてもまだ 20% 以下である。二次元 Sheet からの捲上り分だけを考えればさらに小さく 10% 以下になる。また、翼の後縁に近づく程この比はさらに小さくなる。

つぎに念のために、Wake の位置を図 F.3 に示す位置に変形させた場合と然らざる場合の、不連続境界面における  $y$  方向誘起速度を求めるとき (計算小領域の大きさと変移量の大きさを比べてみれば当然予想されるが) 計算領域の最後方においても完全に無視し得る程小さい。

以上により、本文の計算において、Wake Sheet を  $xy$  面内に固定した効果は、翼の周辺の設定領域内の諸量に関する限り問題とする必要がない。また、翼を通過した後のこの様な非一様流の発達のあり方については、これまで述べたように複雑な渦系を含む流場の力学として解かれるべき今後の重要な問題と考えられる。

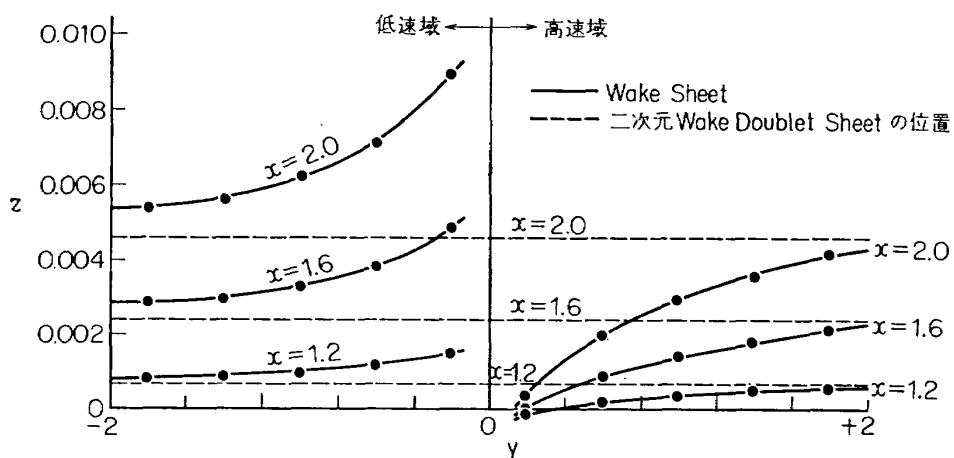


図 F.3 Wake Sheet の変形 (本文計算例 3. 参照)

TR-249	一般化 Newton-Raphson 法の計算機容量問題に対する改良最適化アルゴリズム Modified Optimization Algorithm for Computer Storage Problems in Generalized Newton-Raphson Method	1971年10月 志甫 徹
TR-250	はりの大変形解析 Large Deflection of Cantilever Beams	1971年10月 多田保夫, 日下和夫
TR-251	対称スピン衛星のニューテーション運動による慣性力の場とそのニューテーションダンパーへの応用 Inertial Force Field Due to Nutational Motion of Spinning Axi-Symmetric Sattellite and Its Application to Nutation Damper	1971年11月 村上 力, 狼 嘉彰
TR-252T	A Study of Subsonic Two-Dimensional Wall-Interference Effects in a Perforated Wind Tunnel with Particular Reference to the NAL 2m×2m Transonic Wind Tunnel Inapplicability of the Conventional Boundary Condition	1971年12月 Masao EBIHARA
TR-253	圧縮性流れにおける翼型抗力の計算 A Calculation of Profile Drag of Airfoils in Compressible Flow	1971年11月 石田洋治

## 航空宇宙技術研究所報告254号

昭和46年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武藏野三鷹(0422)47-5911(大代表) 182

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川 2~27~12