

UDC 539.384.4 :
534.11.015

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-257

周期的な軸力を受ける結合柱の安定

佐 野 政 明

1972年1月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-233 PSD法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点
Studies on PSD Method to Aircraft Structural Design for Atmospheric Turbulence 1971年1月 竹内和之, 山根皓三郎
- TR-234 Green関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算
A Calculation of Temperature Distribution with Applying Green Function to Two-Dimensional Laplace's Equation 1971年1月 西村英明
- TR-235 自動着陸予備実験
(1) 電波高度計の性能試験
Preliminary Experiments for Automatic Landing
(1) On the Performance Test of Radio Altimeters 1971年4月 樋口一雄, 堀川勇壮, 森幹彦, 小川鏡一, 真柳光美, 渡辺一顯, 名越孝行
- TR-236T Small-Strain Deformations Superposed on Finite Deformations of Highly Elastic Incompressible Materials, Part 1—Constitutive Equation 1971年6月 Tastuzo KOGA
- TR-237 自由飛行模型 FFM-10 による縦の動安定特性の飛しょう実験
Free Flight Tests on Longitudinal Dynamics Characteristics of FFM-10 Model 1971年4月 河崎俊夫, 堀武敏, 斉藤秀夫, 高島一明, 河本巖
- TR-238 リフトジェットエンジン JR100H の動特性について
Dynamic Characteristic of Lift Jet Engine JR100H 1971年5月 西尾健二, 遠藤征紀, 杉山七契, 越沼威, 大畑敏美
- TR-239 昇華アブレーションの直接解法
A Direct Calculation of Sublimating Ablation 1971年6月 久保田弘敏
- TR-240T A Method For The Calculation of Lifting Potential Flow Problems —Part 1— Theoretical Basis 1971年7月 Masao EBIHARA
- TR-241 YS-11A-500/600型主翼疲れ試験
(1. セーフライフ試験荷重と試験方式)
Full-Scale Fatigue Test of YS-11A-500/600 Turboprop Transport Wing (1 Safe-Life Fatigue Test Loads and Test Method) 1971年7月 竹内和之, 野原利雄, 朝田洋雄
- TR-242 熱線による三次元平均速度ベクトルとレイノルズ応力の測定
Measurement of Three-Dimensional Mean Velocity Vector and Reynolds Stress By Single Rotatable Hot-Wire 1971年7月 林良生, 中谷輝臣
- TR-243 揚力をもつ物体のまわりのポテンシャル流れの計算法 I その理論的基礎
A Method for the Calculation of Lifting Potential Flow Problems—Part 1— Theoretical Basis 1971年7月 海老原正夫
- TR-244 超音速風洞における動安定微係数の測定
Measurements of Dynamic Stability Derivatives in Supersonic Blowdown Wind Tunnel 1971年7月 高島一明, 榎原盛三, 関根英夫
- TR-245 ヘリコプタ高度・速度線図および臨界決定点の解析的推定法
An Analytical Method to Predict Height-Velocity Diagram Critical Decision Point of Rotorcraft 1971年11月 古茂田真幸

周期的な軸力を受ける結合柱の安定*

佐野 政明*

Dinamic Stability of a Connected Rod Uuder Periodic Longitudinal Force

By Masaaki SANO

If a straight rod is subjected to a periodic longitudinal force which is less than the static buckling values, the rod in general experiences only longitudinal vibration. However, It is known, that for the relationship between the disturbing frdquency and the natural frequency of the transverse vibrations of a rod, the straight rod becomes dynamically unstable and transverse vibrations occur, namely the amplitudes of these vibrations rapidly increase to large values. In this report, the dynamic stability of rods, which are connected by a spring, under periodic longitudinal lording is investigated, and regions of dynamic instability are determined, atong with experimental verification.

The boundaries of the first and the forth unstable regions, and the upper boendary of the second unstable region obtained by tests agree well with the theory.

However, no correlation between them can be found experimentally regarding the third unstable region and the lower boundary of the second unstable region.

The stiffness of the connecting spring does not influence the boundaries of unstable region if the excitation parameter $\mu (=P_t/(P_{cr}-P_o))$ is used to plot these boundaries.

I ま え が き

大型ジェット機では、静的な圧縮力を受けながら、エンジン騒音等の空気力による加振を受ける部分が共振によって、音響疲労破壊を起すことが問題となっており、補強材を含む局所的な外板構造の広範な共振特性を調べる必要が生じている。複雑な実構造の応答解析を行なう前段階として、接合部を有する柱の分割共振（パラメトリック共振）現象についての考察を行なった。

真直な柱に、その柱の座屈荷重よりも小さい周期的に変化する軸力を負荷した場合、通常、柱には縦振動しか発生しない。しかしながら、軸力の振動数 θ と柱の横方向の自由振動数 ω の比が、ある範囲内にあると動的不安定が発生し、真直な柱であるにもかかわらず、柱の横方向の振動が誘起され、しかも、時間と共に横方向の振幅が増大する^{1), 2)}。すなわち、小さな摂

動力をフーリエ級数に展開すると $\sin(n\theta + m\omega)$ と $\cos(n\theta + m\omega)$ (n, m は整数) を含む項が生じ、 $n\theta + m\omega$ なる形の結合振動数を持つ調和成分があらわれる。このような結合振動の一つが振動系の固有振動数に近くなるときは、これに対応する摂動力の調和成分は、加えられた摂動の式中の係数が小さいとしても、振動の特性の上に著しい影響をおよぼす。このように非線型系では、通常の線型系の場合のように $\theta \approx \omega$ のとき共振が発生するばかりでなく、 $n\theta + m\omega \approx \omega$ ならば共振が発生する。

このような共振現象は従来から研究されているが、両端固定という境界条件では扱われていない。そこで本報告では、二本の柱をバネで結合した場合、バネ定数とパラメトリック共振の発生領域の関係について、近似解析を行ない、実験によってその有効性を確かめた。

II 記 号

$(EI)_i$; i 番柱の曲げ剛性

$f_j(t)$; 柱の j 次の振動に対する時間の関数

* 昭和46年12月3日受付

** 機体第二部

- i ; 柱の番号
- j ; 柱の振動モード番号
- K ; 柱を結合するバネのバネ定数
- L ; 柱の全長
- m_i ; i 番柱の単位長さ当りの質量
- $p(t)$; 柱に作用する全軸力 ($=p_0 + p_1 \cos \theta t$)
- p_0 ; 柱に作用する静的な軸力成分
- p_1 ; " 動的な軸力成分
- p_{cr} ; 柱の座屈荷重 ($p_{cr} \geq p_0, p_1$)
- T ; 無次元化時間 ($=\omega_1 t$)
- W_i ; i 番柱の撓み関数
- $W_{ij}(X)$; 軸圧縮力 p_0 が作用したときの i 番柱の j 次の横振動固有関数
- x ; 柱の固定側より軸方向にとった座標
- α ; 柱の結合点を定める定数 ($0 \leq \alpha \leq 1$)
- θ ; 周期軸力の角振動数
- Θ ; $=\theta/\omega_1 (\geq 0)$
- μ ; 加振パラメータ ($=p_1/(p_{cr}-p_0)$)
- ω_j ; 静軸力 p_0 を受ける j 次の固有角振動数

III 解 析

二本の柱をバネで結合し、軸力 $p(t)$ を負荷した場合 (図1 参照) 結合柱の横振動の運動方程式は次式で表示される。

$$(EI)_i \frac{\partial^4 W_i}{\partial x^4} + p(t) \frac{\partial^2 W_i}{\partial x^2} + m_i \frac{\partial^2 W_i}{\partial t^2} = 0 \quad (1)$$

$(i=1, 2)$

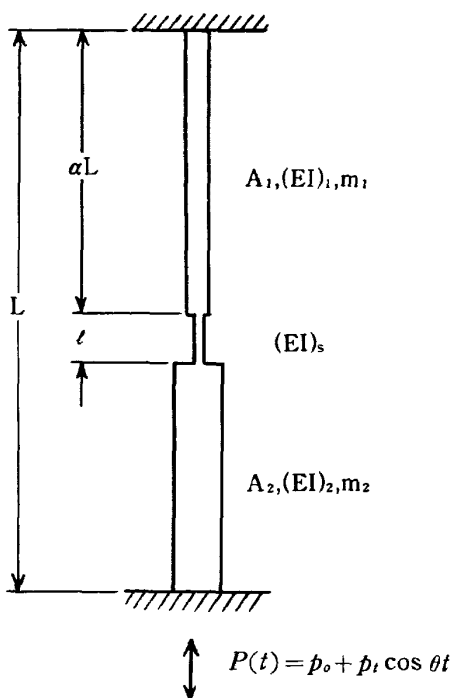


図 1

境界条件として、両端固定の場合を考えると、固定端では

$$\begin{aligned} x=0 & ; W_1=0, \quad \frac{\partial W_1}{\partial x}=0 \\ x=L & ; W_2=0, \quad \frac{\partial W_2}{\partial x}=0 \end{aligned}$$

結合点では

$$\begin{aligned} x=\alpha L & ; W_1=W_2, \quad (EI)_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = (EI)_2 \frac{\partial^2 W_2}{\partial x^2} \\ & (EI)_1 \frac{\partial^2 W_1}{\partial x^2} = K \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) \\ & (EI)_1 \frac{\partial^3 W_1}{\partial x^3} - (EI)_2 \frac{\partial^3 W_2}{\partial x^3} \\ & = p(t) \left(\frac{\partial W_2}{\partial x} - \frac{\partial W_1}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

となる。(1) 式は、両端がピン固定の条件の下で近似解が出されているが、その他の場合については、解かれていない。そこで (1) 式を (2) 式の境界条件で解くにあたって、ガレルキン法による近似解を求めた。

(1) 式中の柱の撓み関数 W_i を次の如く仮定する。

$$W_i = \sum_{j=1}^{\infty} f_j(t) \cdot W_{ij}(x) \quad (3)$$

$(i=1, 2)$

ここに $W_{ij}(x)$ は、静軸圧縮力 p_0 が作用したときの結合柱の横振動の固有関数で

$$\begin{aligned} W_{ij}(x) = L \sum_{j=1}^{\infty} & (a_{ij} \sin \gamma_{ij} x + b_{ij} \cos \gamma_{ij} x \\ & + c_{ij} \sinh \delta_{ij} x + d_{ij} \cosh \delta_{ij} x) \end{aligned} \quad (4)$$

$(i=1, 2)$

ただし

$$\begin{aligned} \gamma_{ij} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[\frac{p_0}{(EI)_i} + \left\{ \left(\frac{p_0}{(EI)_i} \right)^2 + 4 \frac{m_i \omega_i^2}{(EI)_i} \right\}^{1/2} \right]} \\ \delta_{ij} &= \sqrt{\frac{1}{2} \left[-\frac{p_0}{(EI)_i} + \left\{ \left(\frac{p_0}{(EI)_i} \right)^2 + 4 \frac{m_i \omega_i^2}{(EI)_i} \right\}^{1/2} \right]} \end{aligned} \quad (5)$$

$(i=1, 2)$

と表示される。(4) 式中の $a_{ij}, b_{ij}, c_{ij}, d_{ij}$ は (1) 式を $p(t) = p_0$ と置いた式を (2) 式で示される境界条件で解くことによって求めることができる。すなわち $W_{ij}(x)$ は静軸圧縮力 p_0 を受ける梁の横振動を解析することによって、決定される。一方 (1)~(3) で時間に関係しない項のみを考えると、バネで結合された柱の静荷重による座屈の解析が出来、バネ定数 K と結合柱の座屈固有値 k_p の関係は図2 のようになる。

$W_{ik}(x)$ ($k=1, 2, \dots$) を基底関数として、(3) 式を用いてガレルキン法を適用すれば

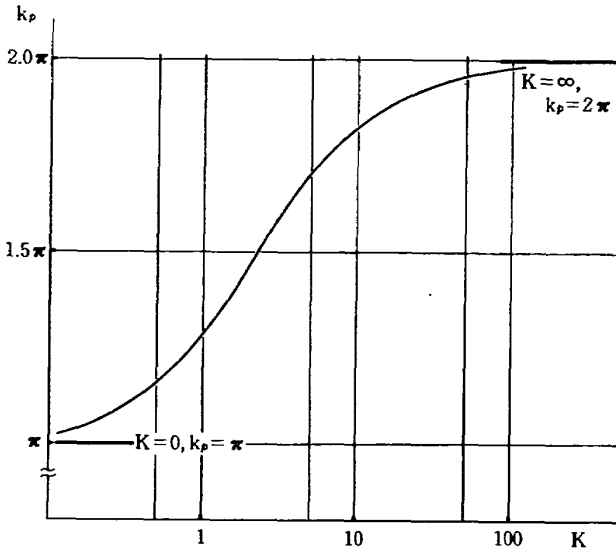


図2 バネ定数Kと座屈の固有値の関係

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[\int_0^{aL} \left\{ (EI)_1 \frac{d^4 W_{1j}(x)}{dx^4} W_{1k}(x) f_j(t) + p(t) \frac{d^2 W_{1j}(x)}{dx^2} W_{1k}(x) f_j(x) + m_1 \frac{d^2 f_j(t)}{dt^2} W_{1j}(x) \cdot W_{1k}(x) \right\} dx + \int_{aL}^L \left\{ (EI)_2 \frac{d^2 W_{2j}(x)}{dx^2} W_{2k}(x) f_j(t) + p(t) \frac{d^2 W_{2j}(x)}{dx^2} W_{2k}(x) \cdot f_j(x) + m_2 \frac{d^2 f_j(t)}{dt^2} W_{2j}(x) W_{2k}(x) \right\} dx - p \left(\frac{dW_{1j}(x)}{dx} - \frac{dW_{2j}(x)}{dx} \right)_{x=aL} f_j(t) \cdot \cos \theta t \right] = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (6)$$

となる。ここで

$$\sum_{j=1}^{\infty} L^2 \int_0^{aL} \frac{d^4 W_{1j}(x)}{dx^4} W_{1k}(x) dx = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{\infty} H_{1jk}$$

$$\sum_{j=1}^{\infty} L^2 \int_{aL}^L \frac{d^4 W_{2j}(x)}{dx^4} W_{2k}(x) dx = \frac{1}{L} \sum_{j=1}^{\infty} H_{2jk}$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} L^2 \int_0^{aL} \frac{d^2 W_{1j}(x)}{dx^2} W_{1k}(x) dx &= L \sum_{j=1}^{\infty} I_{1jk} \\ \sum_{j=1}^{\infty} L^2 \int_{aL}^L \frac{d^2 W_{2j}(x)}{dx^2} W_{2k}(x) dx &= L \sum_{j=1}^{\infty} I_{2jk} \\ \sum_{j=1}^{\infty} L^2 \int_0^{aL} W_{1j}(x) \cdot W_{1k}(x) dx &= L^3 \sum_{j=1}^{\infty} J_{1jk} \\ \sum_{j=1}^{\infty} L^2 \int_{aL}^L W_{2j}(x) \cdot W_{2k}(x) dx &= L^3 \sum_{j=1}^{\infty} J_{2jk} \\ \sum_{j=1}^{\infty} L^2 \frac{dW_{1j}(x)}{dx} W_{1k}(x) \Big|_{x=aL} &= L \sum_{j=1}^{\infty} K_{1jk} \\ \sum_{j=1}^{\infty} L^2 \frac{dW_{2j}(x)}{dx} W_{2k}(x) \Big|_{x=aL} &= L \sum_{j=1}^{\infty} K_{2jk} \end{aligned} \right\} (7)$$

$$(k=1, 2, 3, \dots)$$

$$\frac{p_{cr} L^2}{(EI)_1} = k_p^2, \quad \frac{m_1 L^4}{(EI)_1} \omega_1^2 = k_{\omega_1}^2, \quad T = \omega_1 t$$

と置くと式は次の様になる。

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left[k_{\omega_1}^2 (J_{1jk} + \frac{m_2}{m_1} J_{2jk}) \frac{d^2 f_j(T)}{dT^2} + \left\{ H_{1jk} + \frac{(EI)_2}{(EI)_1} H_{2jk} + k_p^2 \frac{p_0}{p_{cr}} (I_{1jk} + I_{2jk}) + k_p^2 \frac{p_t}{p_{cr}} (I_{1jk} + I_{2jk} - K_{1jk} + K_{2jk}) \cos \theta T \right\} f_j(T) \right] = 0 \quad (k=1, 2, 3, \dots) \quad (8)$$

(8)式をマトリックス表示すれば

$$k_{\omega_1}^2 \mathbf{P} \frac{d^2 \mathbf{f}(T)}{dT^2} + (\mathbf{\Phi} + \mathbf{\Phi} \cos \theta T) \mathbf{f}(T) = 0 \quad (9)$$

ただし

$$\mathbf{P} = \begin{vmatrix} J_{111} + \frac{m_2}{m_1} J_{211} & J_{121} + \frac{m_2}{m_1} J_{221} & J_{131} + \frac{m_2}{m_1} J_{231} \cdots \\ J_{112} + \frac{m_2}{m_1} J_{212} & J_{122} + \frac{m_2}{m_1} J_{222} & J_{132} + \frac{m_2}{m_1} J_{232} \cdots \\ J_{113} + \frac{m_2}{m_1} J_{213} & J_{123} + \frac{m_2}{m_1} J_{223} & J_{133} + \frac{m_2}{m_1} J_{233} \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$\mathbf{\Phi} = \begin{vmatrix} H_{111} + \frac{(EI)_2}{(EI)_1} H_{211} + k_p^2 \frac{p_0}{p_{cr}} (I_{111} + I_{211}) & H_{121} + \frac{(EI)_2}{(EI)_1} H_{221} + k_p^2 \frac{p_0}{p_{cr}} (I_{121} + I_{221}) \cdots \\ H_{112} + \frac{(EI)_2}{(EI)_1} H_{212} + k_p^2 \frac{p_0}{p_{cr}} (I_{112} + I_{212}) & H_{122} + \frac{(EI)_2}{(EI)_1} H_{222} + k_p^2 \frac{p_0}{p_{cr}} (I_{122} + I_{222}) \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix} \quad (10)$$

$$\Psi = \begin{vmatrix} k_p^2 \frac{\dot{p}_t}{\dot{p}_{cr}} (I_{111} + I_{211} - K_{111} + K_{211}) & k_p^2 \frac{\dot{p}_t}{\dot{p}_{cr}} (I_{121} + I_{221} - K_{121} + K_{221}) \cdots \cdots \\ k_p^2 \frac{\dot{p}_t}{\dot{p}_{cr}} (I_{112} + I_{212} - K_{112} + K_{212}) & k_p^2 \frac{\dot{p}_t}{\dot{p}_{cr}} (I_{122} + I_{222} - K_{122} + K_{222}) \cdots \cdots \\ \vdots & \vdots \end{vmatrix}$$

$$f(T) = \begin{Bmatrix} f_1(T) \\ f_2(T) \\ f_3(T) \\ \vdots \end{Bmatrix}$$

となり Mathieu の微分方程式を得る。(9)式に柱の各部寸法, 材質, バネ定数を与えるならば, 関数 $f(T)$ が時間と共に増加する領域は $\frac{\dot{p}_o}{\dot{p}_{cr}}, \frac{\dot{p}_t}{\dot{p}_{cr}} \sim \theta$ をパラメータとして決定される。加振パラメータとして

$$\mu = \frac{\dot{p}_t}{\dot{p}_{cr} - \dot{p}_o} \quad (11)$$

なる無次元量を定義すると, パラメトリック共振の発生する不安定領域は $\mu \sim \theta$ の面上である領域を形成するが, 安定, 不安定の境界では, $f(T)$ は, 周期 $2\pi/\theta$, または, $4\pi/\theta$ を持つ周期関数となり, 同周期を有する解で囲まれた領域が不安定領域である²⁾。先ず, 周期 $4\pi/\theta$ を有する解として, 次の関数を仮定する。

$$f(T) = \sum_{n=1, 3, 5, \dots} (a_n \cos \frac{n\theta}{2} T + b_n \sin \frac{n\theta}{2} T) \quad (12)$$

(12)式を(9)式に代入して, $\sin \frac{n\theta}{2} T, \cos \frac{n\theta}{2} T$ ($n=1, 3, 5, \dots$)の係数を比較すると

$$\left. \begin{aligned} (\Phi + \Psi - k_{\omega 1}^2 P \frac{\theta^2}{4}) a_1 + \frac{1}{2} \Psi a_3 &= 0 \quad (n=1) \\ \frac{1}{2} \Psi a_{n-2} + (\Psi - k_{\omega 1}^2 P \frac{n^2}{4} \theta^2) a_n + \frac{1}{2} \Psi a_{n+2} &= 0, \quad (n=3, 5, 7, \dots) \end{aligned} \right\} (13)$$

および

$$\left. \begin{aligned} (\Phi - \frac{1}{2} \Psi - k_{\omega 1}^2 P \frac{\theta^2}{4}) b_1 + \frac{1}{2} \Psi b_3 &= 0 \quad (n=1) \\ \frac{1}{2} \Psi b_{n-2} + (\Phi - k_{\omega 1}^2 P \frac{n^2}{4} \theta^2) b_n + \frac{1}{2} \Psi b_{n+2} &= 0, \quad (n=3, 5, 7, \dots) \end{aligned} \right\} (14)$$

なる, 未知係数 a_n, b_n に対する無限元連立方程式を得る。(13) および(14) 式の零でない解の存在条件より, 与えられた荷重条件に対して, 奇数次の不安定領域の上, 下限境界は

$$\begin{vmatrix} \Phi - \frac{1}{2} \Psi - k_{\omega 1}^2 P \frac{\theta^2}{4} & \frac{1}{2} \Psi & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} \Psi & \Phi - k_{\omega 1}^2 P \frac{9}{4} \theta^2 & \frac{1}{2} \Psi & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} \Psi & \Phi - k_{\omega 1}^2 P \frac{25}{4} \theta^2 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (15)$$

を満足する θ によって示される。同様にして, $2\pi/\theta$ の周期を有する解として, 次の関数を仮定する。

$$f(T) = a_0 + \sum_{n=2, 4, 6, \dots} (a_n \cos \frac{n\theta}{2} T + b_n \sin \frac{n\theta}{2} T) \quad (16)$$

(16)式を(9)式に代入して, $\sin \frac{n\theta}{2} T, \cos \frac{n\theta}{2} T$ の係数を比較すると,

$$\left. \begin{aligned} \Phi a_0 + \frac{1}{2} \Psi a_2 &= 0 \quad (n=0) \\ \Phi a_0 + (\Phi - k_{\omega 1}^2 P \theta^2) a_2 + \frac{1}{2} \Psi a_4 &= 0 \quad (n=2) \\ \frac{1}{2} \Psi a_{n-2} + (\Phi - k_{\omega 1}^2 P \frac{n^2}{4} \theta^2) a_n + \frac{1}{2} \Psi a_{n+2} &= 0, \quad (n=4, 6, 8, \dots) \end{aligned} \right\} (17)$$

および

$$\left. \begin{aligned} (\Phi - k_{\omega 1}^2 P \theta^2) b_2 + \frac{1}{2} \Psi b_4 &= 0, \quad (n=2) \\ \frac{1}{2} \Psi b_{n-2} + (\Phi - k_{\omega 1}^2 P \frac{n^2}{4} \theta^2) b_n + \frac{1}{2} \Psi b_{n+2} &= 0, \quad (n=4, 6, 8, \dots) \end{aligned} \right\} (18)$$

(17)式より, 与えられた荷重条件に対する偶数次の不安定領域の下限境界は,

$$\begin{vmatrix} \Phi & \frac{1}{2} \Psi & 0 & 0 & \cdots \\ \Psi & \Phi - k_{\omega 1}^2 P \theta^2 & \frac{1}{2} \Psi & 0 & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} \Psi & \Phi - 4 k_{\omega 1}^2 P \theta^2 & \frac{1}{2} \Psi & \cdots \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \Psi & \Phi - 9 k_{\omega 1}^2 P \theta^2 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (19)$$

上限境界は

$$\begin{vmatrix} \Phi - k_{\omega 1}^2 P \theta^2 & \frac{1}{2} \Psi & 0 & \cdots \\ \frac{1}{2} \Psi & \Phi - 4 k_{\omega 1}^2 P \theta^2 & \frac{1}{2} \Psi & \cdots \\ 0 & \frac{1}{2} \Psi & \Phi - 9 k_{\omega 1}^2 P \theta^2 \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{vmatrix} = 0 \quad (20)$$

を各々満たす θ によって示される。(15), (19), (20) 式によって, 種々の負荷状態に対して, パラメトリック共振の発生する全領域が決定される。

表 1 数値計算近似の比較 ($K=\infty$ の場合)

上限 μ	1次振動モード		1, 3次振動モード		下限 μ	1次振動モード		1, 3次振動モード	
	二項	三項	二項	三項		二項	三項	二項	三項
0.00	2.000	2.000	2.000	2.000	0.00	2.000	2.000	2.000	2.000
0.25	2.1188	2.1187	2.1179	2.1179	0.25	1.8775	1.8772	1.8765	1.8765
0.50	2.2336	2.2335	2.2301	2.2301	0.50	1.7530	1.7526	1.7488	1.7488
0.75	2.3442	2.3442	2.3368	2.3368	0.75	1.6297	1.6291	1.6200	1.6200
1.00	2.4509	2.4509	2.4383	2.4383	1.00	1.5139	1.5139	1.4973	1.4973

数値計算を行なうにあたって、(4)式で示される結合柱の横振動の固有関数 $W_{ij}(x)$ と、(12)、(16)式で仮定された時間の関数 $f(T)$ の近似度が問題となる。そこで、 $(EI)_1=(EI)_2$, $m_1=m_2$, $\alpha=0.5$, $K=\infty$ の場合について、 $W_{ij}(x)$ を一次の振動モード ($j=1$) のみで、および一、三次の振動モード ($j=1, 3$) で近似した場合について、また $f(T)$ も二項 ((12)式では $n=1, 3, 5$, (16)式では $n=2, 4$), および三項 ((12)式では $n=1, 3, 5$, (16)式では $n=2, 4, 6$) で近似した場合について、各々の不安定領域を計算し、表1に比較を示す。表1からも解るとおり、加振パラメータ μ を用いて各々の計算結果について比較を行なうと、高次の振動モードが不安定領域におよぼす影響は小さく、また、四次程度までの不安定領域の計算を行なうには、 $f(T)$ も二項程度の近似で十分であると思われる。この様な傾向はバネ定数 K を 4.50, 10.67, 20.48 と変化させても変わらない。そこで、実験値との比較を行なうにあたって、計算値は一次の横振動の固有関数のみを用い、奇数次の不安定領域 ((13), (14)式で表わされる) では $n=1, 3$, 偶数次の不安定領域 ((19), (20)式で表わされる) では $n=2, 4$ とした式より求めた。

IV 実 験

1) 実験装置および供試体

実験はあらかじめ設定した加振力を共振時にも保つように、ロードセルからのフィードバックをかけた100kg電磁加振器を用いて、両端を固定した結合柱に正弦波軸力を負荷し、加振側に取り付けられた固定用治具によって、静軸力を負荷した。結合柱の中央付近に糊付けした歪ゲージの出力および結合柱の固定側に付けられたロードセルの出力をそれぞれ電磁オシログラフに記録し、結合柱の横振動数、歪、および、軸荷

重の絶対値も振動数を求めた。実験装置の概略および写真を図3に、今回使用した供試体の各部寸法を図4にそれぞれ示す。

供試体の材料は、機械加工による残留歪を小さくして、柱の初期撓みをおさえる目的からアルミニウム合金を用いた。図4にも示されるように、供試体は一本の柱の中央 ($\alpha=0.5$) を10mmの長さにわたって、細くした段付柱を結合柱とみなし、その時のバネ定数を

$$K = \frac{(EI)_s}{(EI)_1} \cdot \frac{L}{l} \quad (21)$$

として計算した。したがって、 $K=0$ はピン結合に、 $K=\infty$ は剛結合にそれぞれ相当する。今回の実験にもちいた結合柱は、 $(EI)_1=(EI)_2$, $m_1=m_2$, $A_1=A_2$, $\alpha=0.5$ とし、結合バネ定数を、4.50, 10.67, 20.48, ∞ の四種類とした。

2) 実験結果および考察

結合柱の静座屈荷重に比べて、かなり小さい値の正弦波荷重 ($p_l=0.1p_{cr} \sim 0.4p_{cr}$) を負荷して、柱の振幅と軸荷重の振動数の関係をみると、図5に示される如く、軸荷重のある振動数区間にわたって、振幅が大きくなる。図6には時間と共に振幅が増加する様子を示しておく。図6のように振幅が増加する区間をパラメトリックな共振の発生区間として、四種類の結合柱について不安定領域を求め、加振パラメータ μ と θ を用いて整理したものが図7~図10である。図中に斜線を施した部分が理論的不安定領域であり、黒丸点の実験値である。第一次の不安定境界を示す実験点は $0.1 \leq \mu \leq 0.6$ の範囲で、理論境界と良く一致しているが、 $\mu \leq 0.1$ になると、理論境界より内側に入り、さらに $\mu \leq 0.05$ になると不安定現象は発生しなくなる。これは主として、供試体および取付部分の減衰の影響を強く受けるためと思われる。

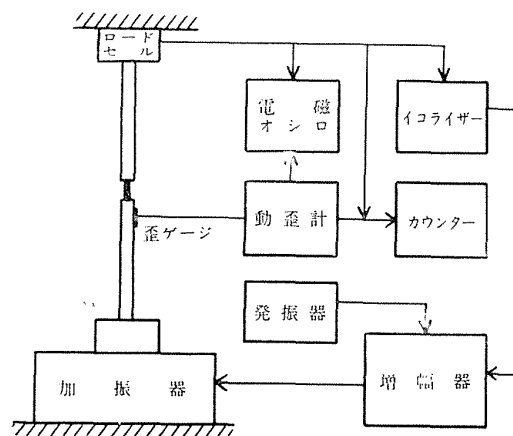


図 3-a 実験装置概略

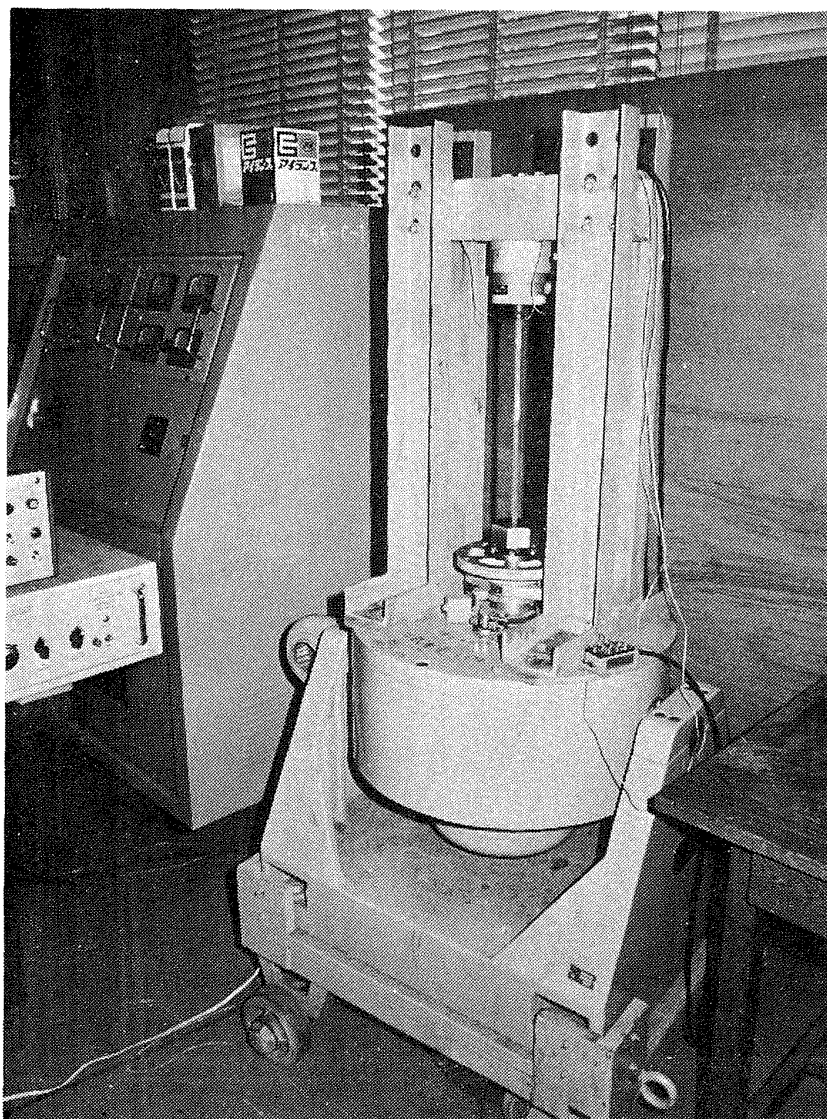


図 3-b 実験装置

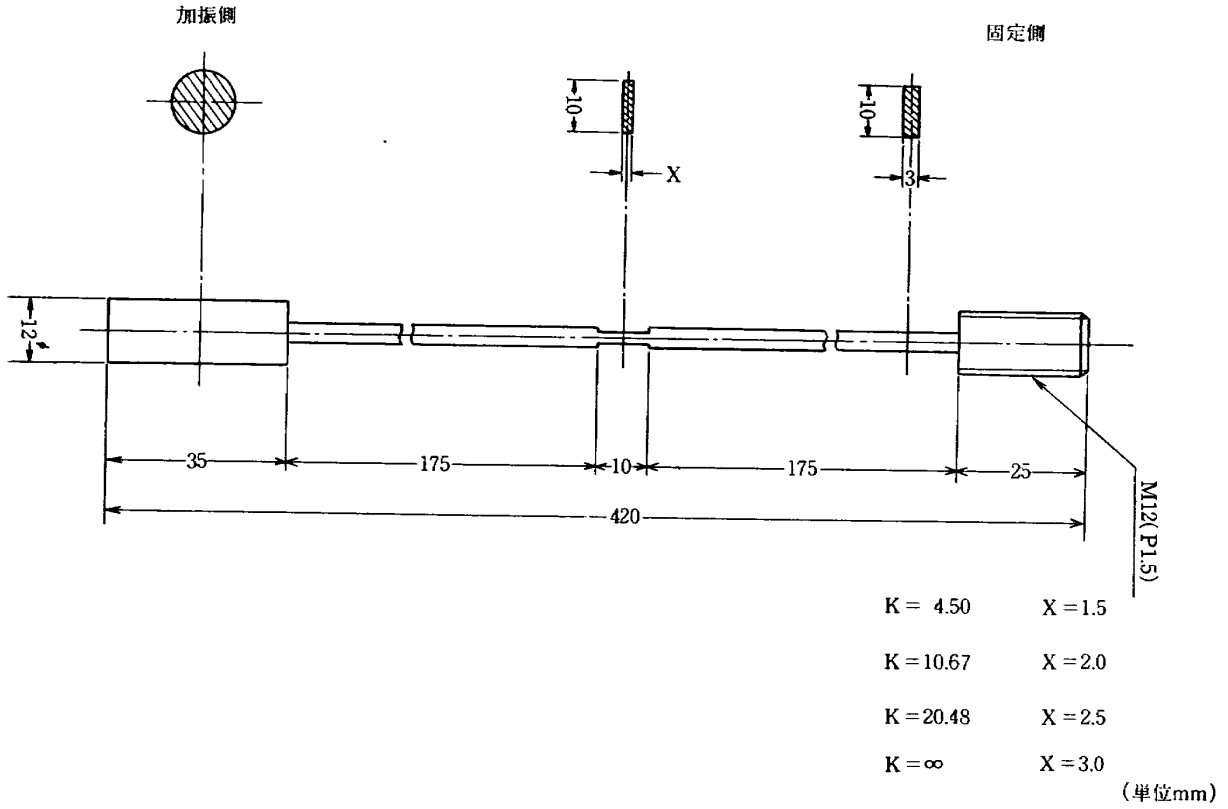


図4 供試体各部寸法

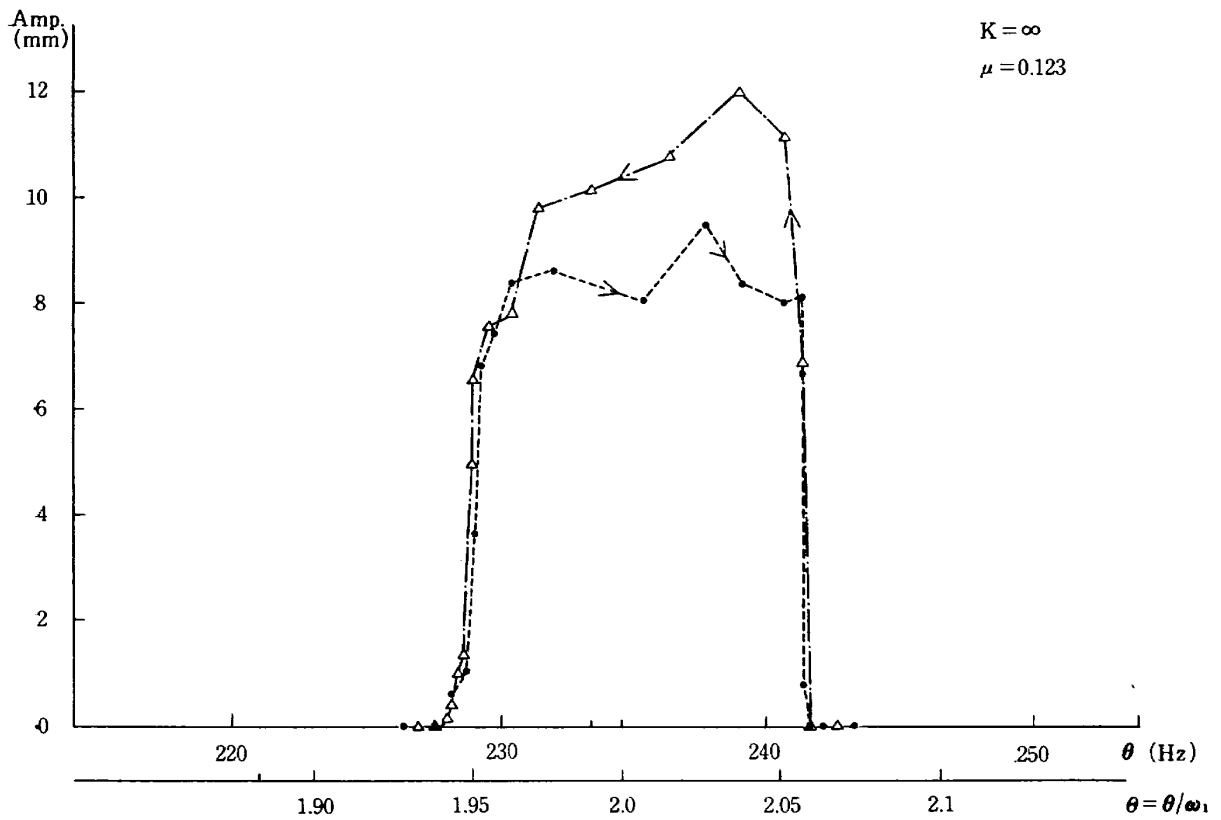


図5 軸力の振動数と振幅の関係

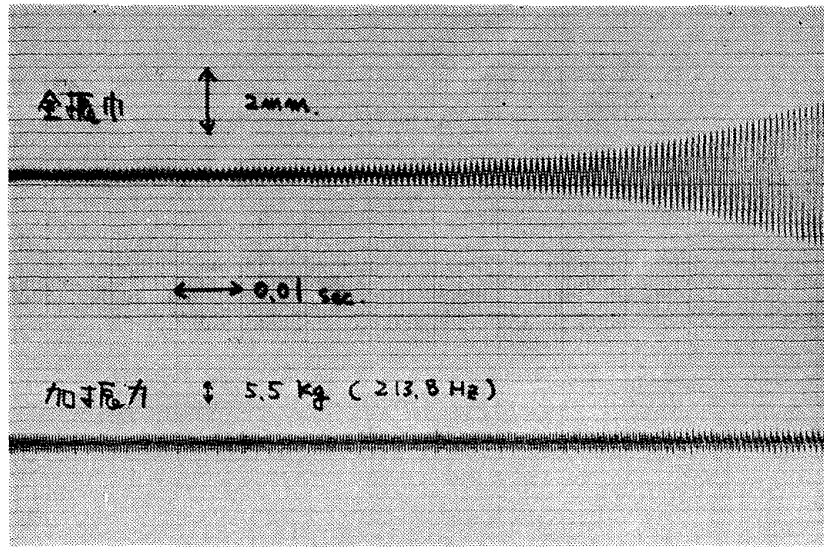


図 6

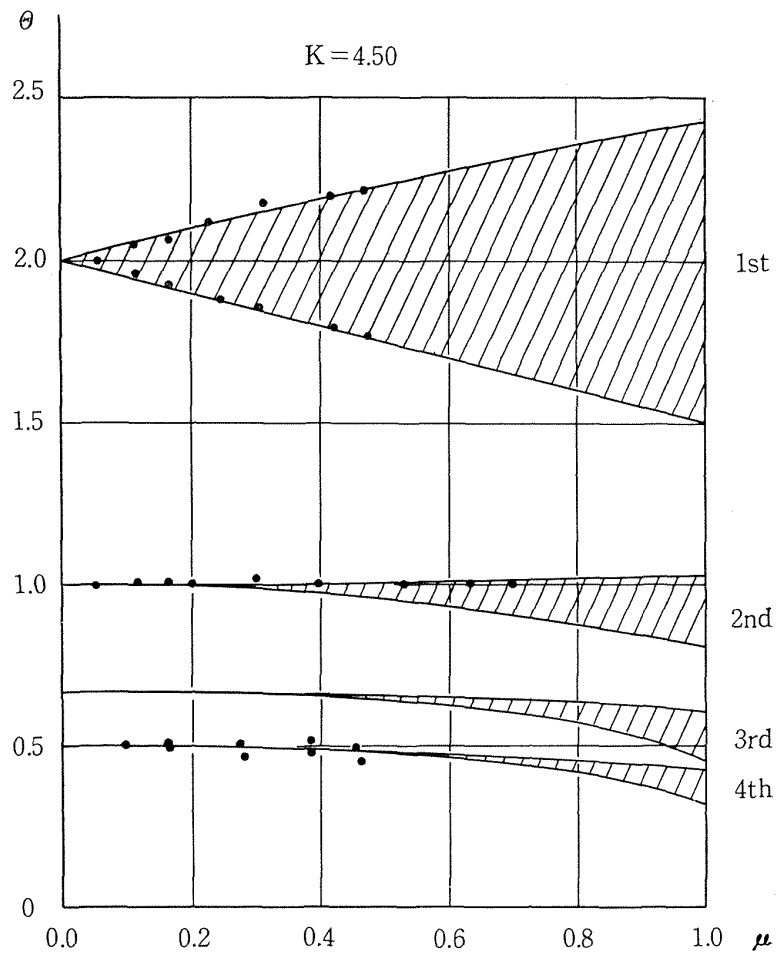


図 7

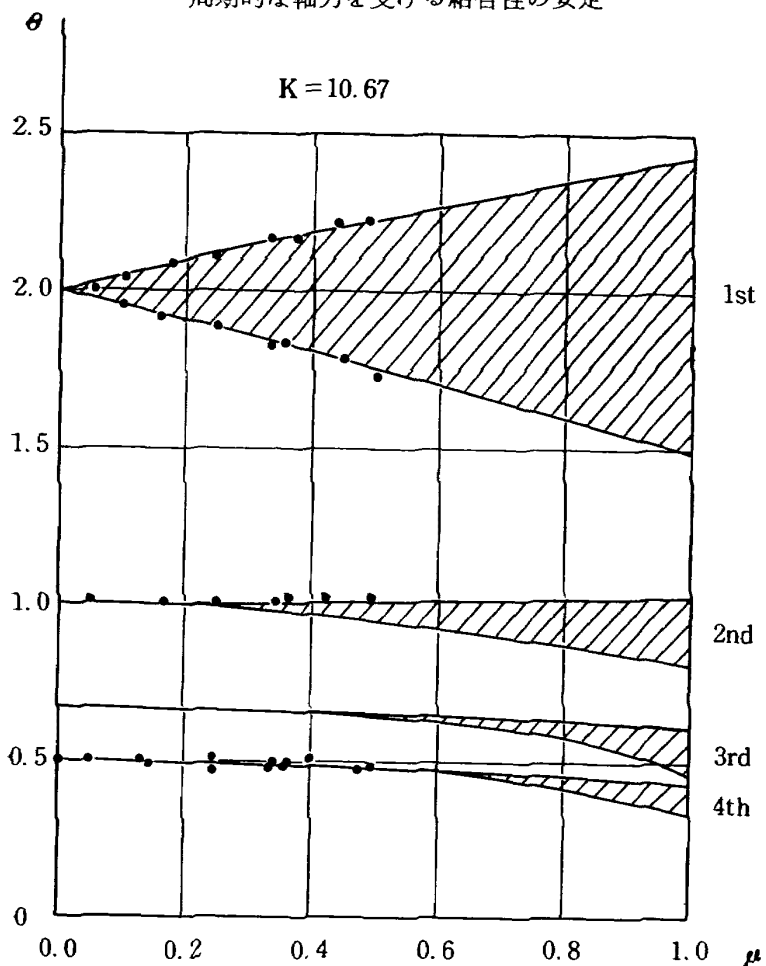


図 8

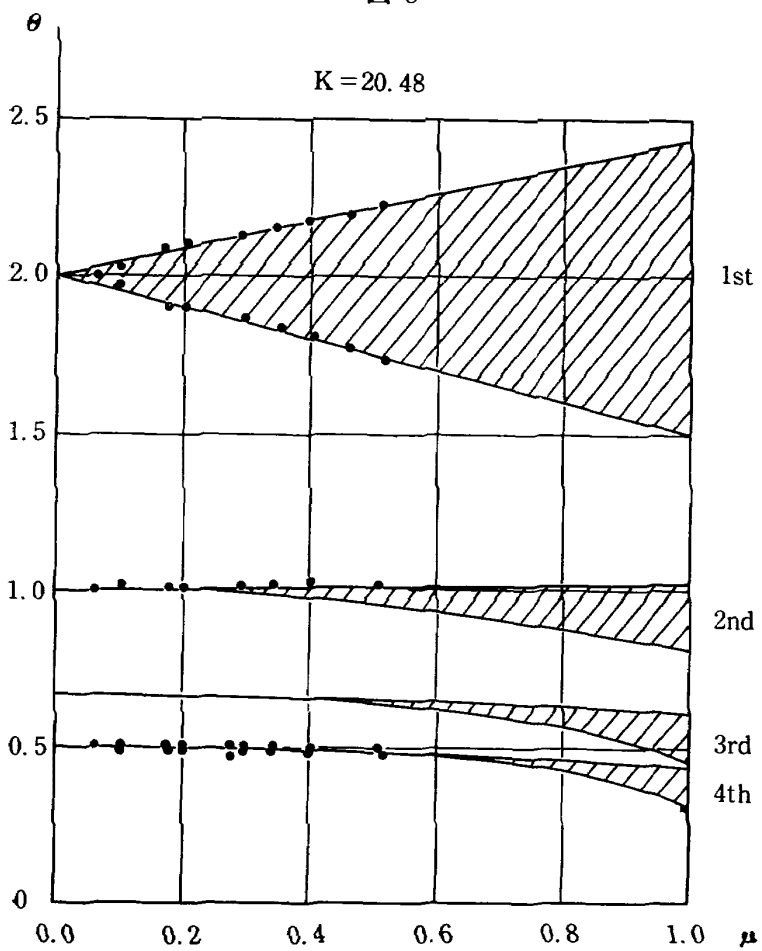


図 9

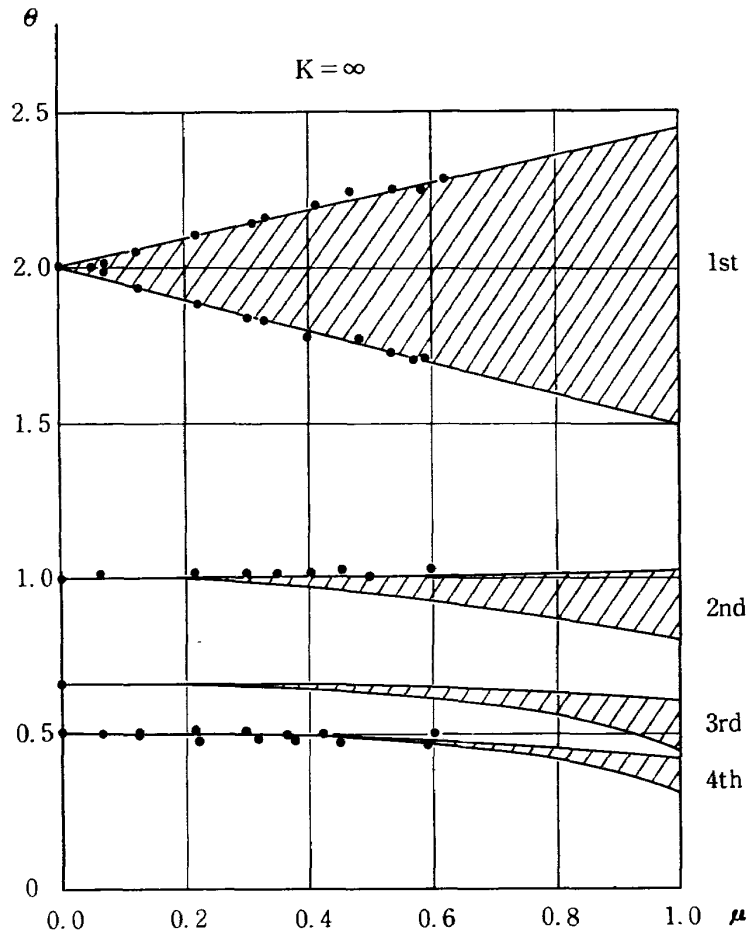


図 10

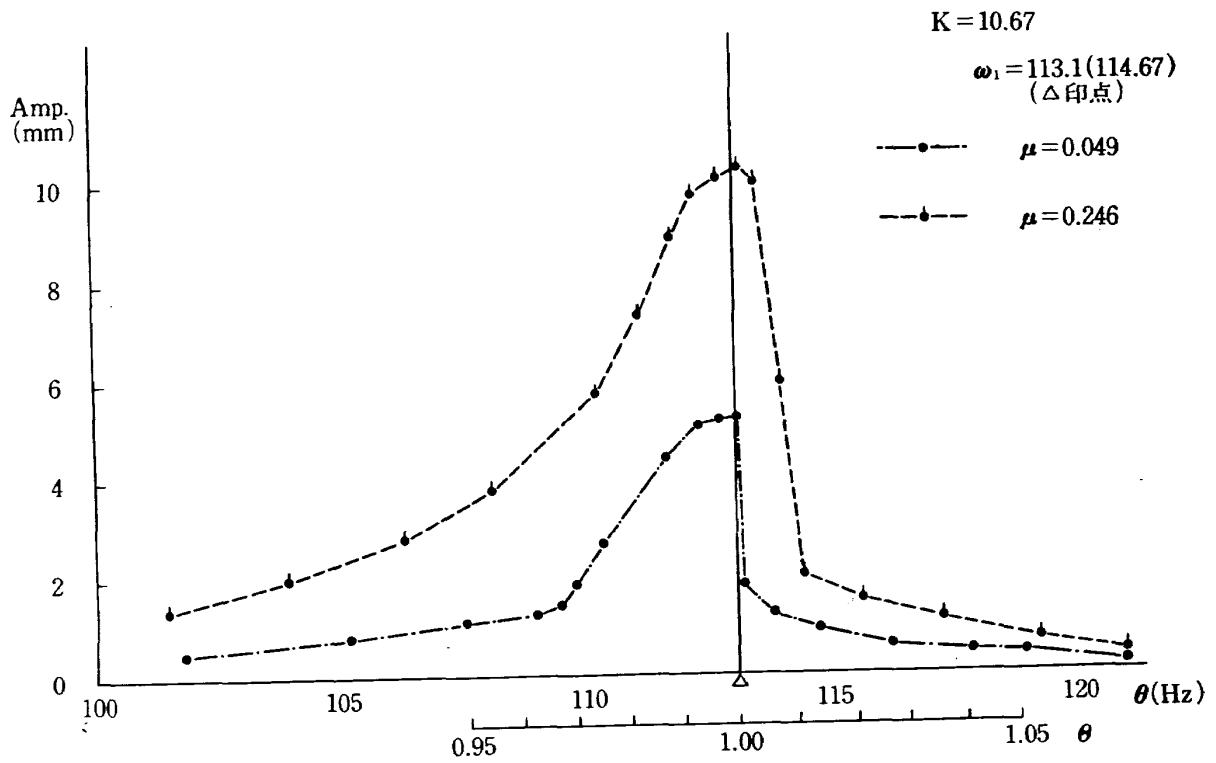


図 11 軸力の振動数と振幅の関係

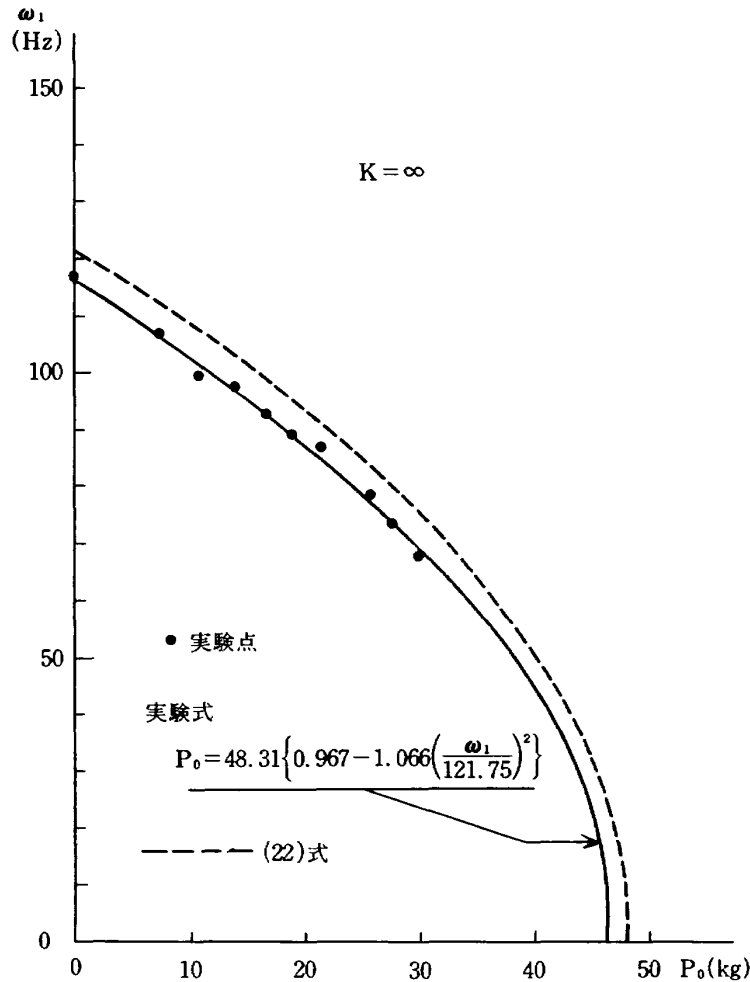


図 12 静軸力 p_0 と固有振動数 ω_1 の関係

第二次の不安定境界を示す実験値は、上限境界のみしか明確にすることは出来なかった。 $\theta \approx 1$ 近傍における軸荷重の振動数と、結合柱の横振動の振幅の関係は図11の如くに、 $\theta = 1$ を境として様相が異なり、 $\theta < 1$ の場合は、通常の梁の共振と異ならず、明確にパラメトリック共振の発生点を確認し難い。一方、 $\theta > 1$ の場合は、通常の梁の共振とは異なる振幅変化をしており、急激な振幅変化を起す点をもって、パラメトリック共振の発生点としたが、さらに検討を要する。第三次の不安定領域の上、下限を実験的に明らかにすることは出来なかった。 $\theta \approx \frac{2}{3}$ となる境界を実験的に明確にするためには、真直な供試体、偏心のない軸荷重の負荷と、その制御を行なう必要がある。

第四次の不安定境界を示す実験値は、おおむね、理論値と一致している。

以上の実験は、ほとんど $\mu \leq 0.6$ の範囲で行なったが、これは、 $\mu \leq 0.6$ とすると、結合柱の撓みが増大して、パラメトリックな共振が発生しなくなる理由によ

る。

実験値を整理するにあたって、結合柱の座屈荷重 p_{cr} と、静軸力 p_0 を受けた時の結合柱の一次の固有振動 ω_1 数を正確に求める必要がある。そこで静軸力 $p_0 = 0$ の場合の結合柱の固有振動数を ω_f とすると、 $0 \leq p_0 \leq p_{cr}$ 範囲内で

$$\omega_1 = \omega_f \left(1 - \frac{p_0}{p_{cr}} \right)^{1/2} \tag{22}$$

なる関係があることから、 p_0 と ω_1 の関係を実験的に求め、最小自乗法によって、結合バネ定数の異なる結合柱の座屈荷重をそれぞれ外捜した。図12に $K = \infty$ の場合を一例として、 ω_1 と p_0 の関係を示す。表2は以上の方法によって求めた、實際上と計算上の、座屈荷重および、一次の固有振動数の比較である。

次に結合バネ定数 K が、どの様に不安定領域に影響をおよぼすかを、第一次の不安定領域について比較したものが表3である。この表からも解るとおり、加振パラメータ μ を用いると、不安定領域はバネ定数 K の

表 2 結合柱の特性

バネ定数	座屈荷重 (kg)		固有振動数 (Hz)	
	実測値	計算値	実測値	計算値
$K = 4.50$	30.2	33.48	106.9	107.95
10.67	37.4	40.55	113.1	114.67
20.48	39.6	44.02	116.6	117.82
∞	46.7	48.31	117.3	121.75

表 3 種々のバネ定数に対する第一次不安定境界の比較

バネ定数	下 限				上 限			
	4.50	10.67	20.48	∞	4.50	10.67	20.48	∞
$\eta = 0.0$	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000	2.0000
0.2	1.9035	1.9023	1.9018	1.9014	2.0923	2.0939	2.0946	2.0953
0.4	1.8031	1.8013	1.8005	1.7999	2.1805	2.1841	2.1856	2.1872
0.6	1.6998	1.6980	1.6973	1.6968	2.2646	2.2705	2.2731	2.2756
0.8	1.5956	1.5946	1.5944	1.5945	2.3450	2.3534	2.3571	2.3608
1.0	1.4945	1.4954	1.4961	1.4971	2.4217	2.4329	2.4378	2.4427

影響をほとんど受けない。この傾向は高次の不安定領域についても同様である。

V 結 び

加振力の振動数のみの関係によって生ずる共振現象ではなく、荷重加振力をもパラメータとする共振現象の一例として、二本の柱をバネで結合した供試体に、静および正弦波軸力を負荷した場合の、柱の振動安定とバネ定数の関係について近似的な解析を行ない、実験的に解析結果の裏付けを行なった。その結果として、

2) 第一次、第四次および、第二次不安定領域の上限境界を実験的に明確にすることが出来、理論値とも一致した。しかし、第二次不安定領域の下限境界および、第三次不安定境界は実験によって確かめられなかった。

2) 加振パラメータ μ を用いて、不安定領域の整理を行なうことによって、結合バネの強さの影響はほと

んど無視出来る。

3) 高次の振動モードが不安定領域におよぼす影響は微小であり、第一～第四次位までの不安定領域を求めるには、一次の横振動の固有関数を用いる程度の近似度で実用的には十分である。

本報告をまとめるにあたり、長崎大学築地恒夫助教授には終始御指導を戴いた。また供試体の作製には工務課の原島技官にお世話になった。深く謝意を表する次第であります。

参 照 文 献

- 1) 内田郁雄, 妹澤克惟; 縦の振動的力を受ける柱の力学的安定, 航空研究所報告 第百九十三号 (昭和15年)
- 2) V. V. Bolotin; The Dynamic Stability of elastic Systems. (1964) HOLDEN-DAY, INC.

- TR-246 梁の大変形問題の解析について
On Analysis of Large Deformation Problems
of Beam 1971年11月 泉 日出夫
- TR-247 任意物体のまわりの自由流線理論
On the theory of Free Streamlines Past an
Arbitrary Shape 1971年9月 高橋 倅
- TR-248 亜音速流中における二次元翼上の圧力分布の、粘
性効果を考慮に入れた計算法のプログラム
A Description of the Ideas Underlying a
Computer Programme for Predicting the
Aerofoil Pressure Distributions in Subcri-
tical Viscous Flow 1971年11月 海老原正夫, 石田洋治
小此木時雄
- TR-249 一般化 Newton-Raphson 法の計算機容量問題に
対する改良最適化アルゴリズム
Modified Optimization Algorithm for Com-
puter Storage Problems in Generalized
Newton-Raphson Method 1971年10月 志甫 徹
- TR-250 はりの大変形解析
Large Deflection of Cantilever Beams 1971年10月 多田保夫, 日下和夫
- TR-251 対称スピニング衛星のニュートン運動による慣
性力の場とそのニュートンダンパへの応用
Inertial Force Field Due to Nutational Motion
of Spinning Axi-symmetric Satellite and
Its Application to Nutation Damper 1971年11月 村上 力, 狼 嘉彰
- TR-252T A Study of Subsonic Two-Dimensional
Wall Interference Effects in a Perforated
Wind Tunnel with Particular Reference
of the NAL 2m×2m Transonic Wind Tunnel
Inapplicability of the Conventional Bound-
ary Condition 1972年1月 Masao EBIHARA
- TR-253 圧縮性流れにおける翼型抗力の計算
A Calculation of Profile Drag of Airfoils in
Compressible Flow 1971年11月 石田洋治
- TR-254 翼と不連続境界との干渉について
Interference Between Wing and Surface of
Velocity Discontinuity 1971年11月 大丸矩夫
- TR-255 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関す
る研究
The Study on the Motion of a Artificial
Satellite in the Earth's Gravitational
Field 1971年12月 武内澄夫, 松島弘一
- TR-256 リジッドヘリコプタロータのホバリングにおける
縦揺れ減衰モーメントについて
On the Aerodynamic Damping Moment in
Pitch of a Rigid Helicopter Rotor inHo-
vering 1971年11月 高沢金吾

航空宇宙技術研究所報告257号

昭和47年1月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(代表) 182

印刷所 第一印刷株式会社
東京都新宿区富久町58
