

UDC 534.1
624.072.2

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-271

並列結合はりの振動

林 洋一・築地恒夫

1972年2月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- T R-249 一般化 Newton-Raphson 法の計算機容量問題に対する改良最適化アルゴリズム
Modified Optimization Algorithm for Computer Storage Problems in Generalized Newton-Raphson Method 1971年10月 志 甫 徹
- T R-250 はりの大変形解析
Large Deflection of Cantilever Beams 1971年10月 多田保夫, 日下和夫
- T R-251 対称スピニング衛星のニュートン運動による慣性力の場とそのニュートンダンパへの応用
Inertial Force Field Due to Nutational Motion of Spinning Axi-symmetric Satellite and its Application to Nutation Damper 1971年11月 村上 力, 狼 嘉彰
- T R-252T A Study of Subsonic Two-Dimensional Wall-Interference Effects in a Perforated Wind Tunnel with Particular Reference to the NAL 2m×2m Transonic Wind Tunnel Inapplicability of the Conventional Boundary Condition 1972年1月 Masao EBIHARA
- T R-253 圧縮性流れにおける翼型抗力の計算
A Calculation of Profile Drag of Airfoils in Compressible Flow 1971年11月 石田洋治
- T R-254 翼と不連続境界との干渉について
Interference Between Wing and Surface of Velocity Discontinuity 1971年11月 犬丸矩夫
- T R-255 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究
The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field 1971年12月 武内澄夫
松島弘一
- T R-256 リジッドヘリコプタロータのホバリングにおける縦揺れ減衰モーメントについて
On the Aerodynamic Damping Moment in Pitch of a Rigid Helicopter Rotor in Hovering 1971年11月 高沢金吾
- T R-257 周期的な軸力を受ける結合柱の安定
The Dynamic Stability of a Connected Rod under Periodic Longitudinal Force 1972年1月 佐野政明
- T R-258 三次元準最適直接式誘導法
Three Dimensional Suboptimal Explicit Guidance for Space Vehicles 1972年1月 大坪孔治
- T R-259 回転駆動振動検出型レートジャイロの研究
Study on a Rotary-Drive Vibratory-output Rate Gyro 1972年1月 山田 博
- T R-260 気流全温度測定装置の試作
A High Sensitive Total Atmospheric Temperature Measuring Apparatus 1972年1月 西尾健二, 能瀬弘幸
越沼威, 井上重雄
臼井 弘, 大畑敏美
- T R-261 光弾性皮膜法による固体推進薬のひずみ測定
Strain Measurement of Solid Propellant Material with Birefringent Coating 1972年1月 越出慎

並列結合はりの振動*

林 洋一**・築地 恒夫***

On the Vibration of Three-Parallel-Beams

By Yoichi HAYASHI and Tsuneo TSUJI

The vibration analysis of three parallel beams of different rigidities is presented. The analysis is carried out by means of the Rayleigh-Ritz method with three approximated deflection functions. Three power series are used as the deflection function of each beams.

Results of numerical examples reasonably well with those of experiments. There exist lower eigenvalue than that of single beam under free-free condition.

1. 結 言

宇宙ロケットが大型化してくるにしたがって発射時の推力増強が必要になってくる。その解決法にはいろいろな型が考えられ、すでに実際打上げられているが、そのうちの一つにロケット本体と並列に補助ロケットを付加する方法があり、例えばアメリカのタイタンⅢC型のロケットがこれである。この場合ロケットの固有振動数はもはやロケット本体のみの時とは異なった値になってくることは明白である。特に積んである燃料が固体推進であれば問題は少ない方であるが液体燃料である場合にはスロッシング等の問題がさらに加わってきて問題は一層複雑さを増すことになる。そこで筆者等は、ロケットの本体に2個の補助ロケットを並列に付加した場合を想定した模型を考え、この振動解析を行なってみた。ここでは構造物を三本のはりに置かえて、各々の結合部をバネで結合したものについて考えた。解析法は、振動系の全エネルギーをRayleigh-Ritz法による直接解法を用いた。

2. 解 析

はりスプリング系の構造物について図1に示す座標系をとる。三本のはりはそれぞれ曲げ剛性を $(EI)_1$, $(EI)_2$, $(EI)_3$ 断面積を A_1 , A_2 , A_3 密度を ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 として各々のはりの中でははりの全長にわたって一定の値をとるものとする。はりの長さは L_1 および L_2

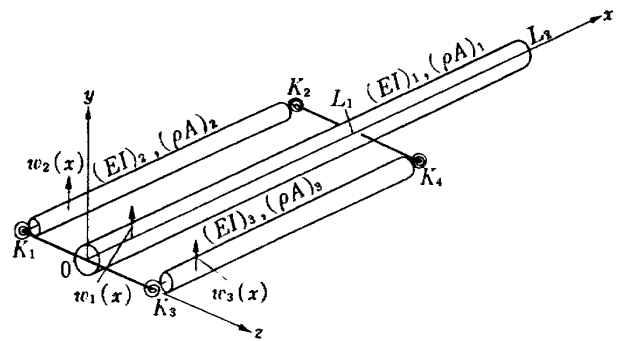


図1 座 標 系

また結合部におけるバネ定数を K_1 , K_2 , K_3 , K_4 とおく。

はりが微小たわみ振動を起こした場合のはりのひずみエネルギー、運動エネルギーは各々次式のようになる。

$$U_T = \frac{(EI)_1}{2} \int_0^{L_2} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{(EI)_2}{2} \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial^2 w_2}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{(EI)_3}{2} \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial^2 w_3}{\partial x^2} \right)^2 dx \quad (1)$$

$$U_{kT} = \frac{(\rho A)_1}{2} \int_0^{L_2} \left(\frac{\partial w_1}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{(\rho A)_2}{2} \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial w_2}{\partial t} \right)^2 dx + \frac{(\rho A)_3}{2} \int_0^{L_1} \left(\frac{\partial w_3}{\partial t} \right)^2 dx \quad (2)$$

ここに

$$\begin{aligned} w_1 &= w_1(x) \sin \omega t \\ w_2 &= w_2(x) \sin \omega t \\ w_3 &= w_3(x) \sin \omega t \end{aligned}$$

とおく。

はりを結合しているバネに貯えられるエネルギーはバネの大きさを単位回転角を生ずるに必要な曲げモーメントの大きさと規定すると、はりの結合部分でおた

* 昭和46年12月14日 受付

** 機体第二部

*** 元機体第二部 長崎大学

がいはりの曲げによって生じた傾斜角の差の二乗に比例するから、

$$U_k = \frac{K_1}{2} \theta_1^2 + \frac{K_2}{2} \theta_2^2 + \frac{K_3}{2} \theta_3^2 + \frac{K_4}{2} \theta_4^2 \quad (3)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= \left[\frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \right]_{x=0} - \left[\frac{\partial w_2(x)}{\partial x} \right]_{x=0} \\ \theta_2 &= \left[\frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \right]_{x=L_1} - \left[\frac{\partial w_2(x)}{\partial x} \right]_{x=L_1} \\ \theta_3 &= \left[\frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \right]_{x=0} - \left[\frac{\partial w_3(x)}{\partial x} \right]_{x=0} \\ \theta_4 &= \left[\frac{\partial w_1(x)}{\partial x} \right]_{x=L_1} - \left[\frac{\partial w_3(x)}{\partial x} \right]_{x=L_1} \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

である。さらに結合点での変位の連続条件

$$\left. \begin{aligned} [w_1(x)]_{x=0} &= [w_2(x)]_{x=0} = [w_3(x)]_{x=0} \\ [w_1(x)]_{x=L_1} &= [w_2(x)]_{x=L_1} = [w_3(x)]_{x=L_1} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

が必要である。

ハミルトンの原理から並列はりの曲げ振動解析に必要な汎関係 Π は

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{(EI)_1}{2} \int_0^{L_1} \left(\frac{d^2 w_1(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{(EI)_2}{2} \int_0^{L_1} \left(\frac{d^2 w_2(x)}{dx^2} \right)^2 dx \\ &+ \frac{(EI)_3}{2} \int_0^{L_1} \left(\frac{d^2 w_3(x)}{dx^2} \right)^2 dx + \frac{K_1}{2} \theta_1^2 + \frac{K_2}{2} \theta_2^2 \\ &+ \frac{K_3}{2} \theta_3^2 + \frac{K_4}{2} \theta_4^2 - \frac{(\rho A)_1}{2} \omega^2 \int_0^{L_1} w_1^2(x) dx \\ &- \frac{(\rho A)_2}{2} \omega^2 \int_0^{L_1} w_2^2(x) dx - \frac{(\rho A)_3}{2} \omega^2 \int_0^{L_1} w_3^2(x) dx \end{aligned} \quad (6)$$

ここに ω は角振動数をあらわす。

全ポテンシャルエネルギー Π を最小にするたわみ関数 $w_1(x)$, $w_2(x)$, $w_3(x)$ を求める問題であるが、拘束条件の扱い方としてはラグランジュの乗数法があり、拘束点に関して十分その実用性も確認されている^{1,2)}がここでは計算の都合上消去法により拘束条件を消去する方法をとる。

はりのたわみ関数として x のべき級数を用いて次式のように三本のはりについて各々たわみを表わす。

$$\left. \begin{aligned} w_1(x) &= \sum a_m x^m \\ w_2(x) &= \sum b_r x^r \\ w_3(x) &= \sum c_i x^i \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

(7)式を(5)式に代入すると、

$$\left. \begin{aligned} a_0 &= b_0 = c_0 \\ \sum a_m L_1^m &= \sum b_r L_1^r = \sum c_i L_1^i \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また(7)式を(4)式に代入すると

$$\left. \begin{aligned} \theta_1 &= a_1 - b_1 \\ \theta_2 &= \sum m a_m L_1^{m-1} - \sum r b_r L_1^{r-1} \\ \theta_3 &= a_1 - c_1 \\ \theta_4 &= \sum m a_m L_1^{m-1} - \sum i c_i L_1^{i-1} \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

となる。結局求める汎関数は次式のような形になる。

$$\begin{aligned} \Pi &= \frac{(EI)_1}{2} \sum_{m=2} \sum_{n=2} \frac{m(m-1)n(n-1)}{m+n-3} a_m a_n L_1^{m+n-3} \\ &+ \frac{(EI)_2}{2} \sum_{r=2} \sum_{s=2} \frac{r(r-1)s(s-1)}{r+s-3} b_r b_s L_1^{r+s-3} \\ &+ \frac{(EI)_3}{2} \sum_{i=2} \sum_{j=2} \frac{i(i-1)j(j-1)}{i+j-3} c_i c_j L_1^{i+j-3} \\ &+ \frac{K_1}{2} (a_1 - b_1)^2 \\ &+ \frac{K_2}{2} \left(\sum_{m=1} m a_m L_1^{m-1} - \sum_{r=1} r b_r L_1^{r-1} \right)^2 \\ &+ \frac{K_3}{2} (a_1 - c_1)^2 \\ &+ \frac{K_4}{2} \left(\sum_{m=1} m a_m L_1^{m-1} - \sum_{i=1} i c_i L_1^{i-1} \right)^2 \\ &- \frac{(\rho A)_1}{2} \omega^2 \sum_{m=0} \sum_{n=0} \frac{1}{m+n+1} a_m a_n L_1^{m+n+1} \\ &- \frac{(\rho A)_2}{2} \omega^2 \sum_{r=0} \sum_{s=0} \frac{1}{r+s+1} b_r b_s L_1^{r+s+1} \\ &- \frac{(\rho A)_3}{2} \omega^2 \sum_{i=0} \sum_{j=0} \frac{1}{i+j+1} c_i c_j L_1^{i+j+1} \end{aligned} \quad (10)$$

Π の a_m , b_r , c_i に関する停留値を求めるには拘束条件(8)を考慮して(10)式を微分する必要がある。すなわち、

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_0} &= \frac{\partial \Pi}{\partial a_0} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_0} \frac{\partial b_0}{\partial a_0} + \frac{\partial \Pi}{\partial c_0} \frac{\partial c_0}{\partial a_0} \\ &+ \frac{\partial \Pi}{\partial b_1} \frac{\partial b_1}{\partial a_0} + \frac{\partial \Pi}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial a_0} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} &= \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_1} \frac{\partial b_1}{\partial a_1} + \frac{\partial \Pi}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial a_1} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} &= \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_1} \frac{\partial b_1}{\partial a_m} + \frac{\partial \Pi}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial a_m} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial b_r} &= \frac{\partial \Pi}{\partial b_r} + \frac{\partial \Pi}{\partial b_1} \frac{\partial b_1}{\partial b_r} = 0 \\ \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} &= \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial c_1} \frac{\partial c_1}{\partial c_i} = 0 \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

結局

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_0} &= 0; \\ -\lambda^2 (Z+P+Q) a_0 L_1^{-3} & \quad (n=0) \\ -\lambda^2 (Z^2+P+Q) a_1 L_1^{-2} & \quad (n=1) \\ -\lambda^2 \sum_{m=2} \left(\frac{Z^{m+1}}{m+1} + \frac{P+Q}{2} \right) a_n L_1^{m-3} & \quad (n=2, 3, \dots) \\ -\lambda^2 P \sum_{s=2} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{2} \right) b_s L_1^{s-3} & \quad (s=2, 3, \dots) \\ -\lambda^2 Q \sum_{j=2} \left(\frac{1}{j+1} - \frac{1}{2} \right) c_j L_1^{j-3} & = 0 \quad (j=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (12)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_1} &= 0; \\ -\lambda^2 \frac{1}{2} (Z^2+P+Q) a_0 L_1^{-3} & \quad (n=0) \\ -\lambda^2 \frac{1}{3} (Z^3+P+Q) a_1 L_1^{-2} & \quad (n=1) \\ -\lambda^2 \sum_{m=2} \left(\frac{Z^{m+2}}{m+2} + \frac{P+Q}{3} \right) a_n L_1^{m-3} & \quad (s=2, 3, \dots) \\ -\lambda^2 P \sum_{s=2} \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \right) b_s L_1^{s-3} & \quad (s=2, 3, \dots) \\ -\lambda^2 Q \sum_{j=2} \left(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{3} \right) c_j L_1^{j-3} & = 0 \quad (j=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (13)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial a_m} &= 0; \\ -\lambda^2 \left(\frac{Z^{m+1}}{m+1} + \frac{P+Q}{2} \right) a_0 L_1^{m-3} & \quad (n=0) \\ -\lambda^2 \left(\frac{Z^{m+2}}{m+2} + \frac{P+Q}{3} \right) a_1 L_1^{m-2} & \quad (n=1) \\ + \sum_{n=2} \left[\frac{m(m-1)n(n-1)}{m+n-3} Z^{m+n-3} \right. \\ & \quad \left. + T\{(1-m)(1-n)(\alpha+\gamma)-1+\beta\} \right. \\ & \quad \left. - \lambda^2 \left(\frac{Z^{m+n+1}}{m+n+1} + \frac{P+Q}{3} \right) \right] a_n L_1^{m+n-3} \\ & \quad (n=2, 3, \dots) \\ + \sum_{s=2} \left[T\{\alpha(m-1)(1-s)-1\} \right. \\ & \quad \left. - \lambda^2 P \left(\frac{1}{s+2} - \frac{1}{3} \right) \right] b_s L_1^{m+s-3} \quad (s=2, 3, \dots) \\ + \sum_{j=2} \left[T\{\gamma(m-1)(1-j)-\beta\} \right. \\ & \quad \left. - \lambda^2 Q \left(\frac{1}{j+2} - \frac{1}{3} \right) \right] c_j L_1^{m+j-3} = 0 \quad (j=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial b_r} &= 0; \\ -\lambda^2 P \left(\frac{1}{r+1} - \frac{1}{2} \right) a_0 L_1^{r-3} & \quad (n=0) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} -\lambda^2 P \left(\frac{1}{r+2} - \frac{1}{3} \right) a_1 L_1^{r-2} & \quad (n=1) \\ - \sum_{n=2} \left[T\{\alpha(1-r)(1-n)+1\} \right. \\ & \quad \left. - \lambda^2 P \left(\frac{1}{r+2} - \frac{1}{3} \right) \right] a_n L_1^{m+r-3} \quad (n=2, 3, \dots) \\ + X \sum_{s=2} \left[\frac{r(r-1)s(s-1)}{r+s-3} \right. \\ & \quad \left. + T\{a(1-r)(1-s)+1\} \right] b_s L_1^{r+s-3} \\ - \lambda^2 P \sum_{s=2} \left(\frac{1}{r+s+1} - \frac{1}{s+2} - \frac{1}{r+2} + \frac{1}{3} \right) \\ & \quad \times b_s L_1^{r+s-3} = 0 \quad (s=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (15)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Pi}{\partial c_i} &= 0; \\ -\lambda^2 Q \left(\frac{1}{i+1} - \frac{1}{2} \right) a_0 L_1^{i-3} & \quad (n=0) \\ -\lambda^2 Q \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{3} \right) a_1 L_1^{i-2} & \quad (n=1) \\ - \sum_{n=2} \left[T\{\gamma(1-i)(1-n)+\beta\} \right. \\ & \quad \left. - \lambda^2 Q \left(\frac{1}{i+2} - \frac{1}{3} \right) \right] a_n L_1^{n+i-3} \quad (n=2, 3, \dots) \\ + Y \sum_{j=2} \left[\frac{i(i-1)j(j-1)}{i+j-3} \right. \\ & \quad \left. + T\{\gamma(1-i)(1-j)+\beta\} \right] c_j L_1^{i+j-3} \\ - \lambda^2 Q \sum_{j=2} \left(\frac{1}{i+j+1} - \frac{1}{i+2} - \frac{1}{j+2} + \frac{1}{3} \right) \\ & \quad \times c_j L_1^{i+j-3} = 0 \quad (j=2, 3, \dots) \end{aligned} \quad (16)$$

ここに

$$\begin{aligned} \frac{(EI)_2}{(EI)_1} &= X, & \frac{(EI)_3}{(EI)_1} &= Y, & \frac{L_2}{L_1} &= Z \\ \frac{K_2}{K_1} &= \alpha, & \frac{K_3}{K_1} &= \beta, & \frac{K_4}{K_1} &= \gamma \\ \frac{(\rho A)_2}{(\rho A)_1} &= P, & \frac{(\rho A)_3}{(\rho A)_1} &= Q, & \frac{K_1 L_1}{(EI)_1} &= T \\ \frac{(\rho A)_1 \omega^2 L_1^4}{(EI)_1} &= \lambda^2 \end{aligned} \quad (17)$$

ω ; 角振動数, λ ; 固有値

である。

(12)~(16)式より曲げ振動に関する振動方程式が得られ、未知数 a_n, b_s, c_j よりなる行列式の値が零となる条件より、(17)式で表わされるパラメータ $X, Y, Z, \alpha, \beta, \gamma, P, Q, T$ の値を与えることによって各種の並列結合はりの曲げ振動解析が出来る。

3. 解析例

たわみの試験関数を x のべき級数で表わした(7)式では理論上項数は無限大までとることが出来、項数が増加するにしたがって次第に厳密解に近づくことになる。ここでは計算の都合上有限項で打切ることにして次に示す関数で近似した。

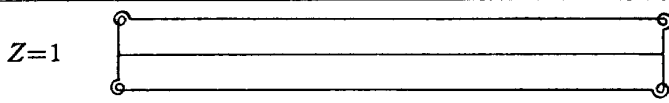
$$\left. \begin{aligned} m, n=0\sim 3, \quad r, s, i, j=0\sim 4 \\ w_1(x) &= a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 \\ w_2(x) &= b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 + b_4x^4 \\ w_3(x) &= c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + c_4x^4 \end{aligned} \right\} (18)$$

また(17)式に示した9つのパラメータが振動数方程式の中に入ってくるがここでは三本のはりが共に曲げ剛性、断面積および密度が等しいものとしてすなわち $X=1, Y=1, \alpha=1, \beta=1, \gamma=1, P=1, Q=1$ と固定しておきバネ定数を含んだパラメータ T が並列結合はりの振動に与える影響について吟味した。なお3本のはりの長さの比を表わすパラメータ Z について

は、 $Z=1$ (三本共同長さ) と $Z=2$ (真中のはりが両側のはりの2倍の長さ) の場合について解析を行った。

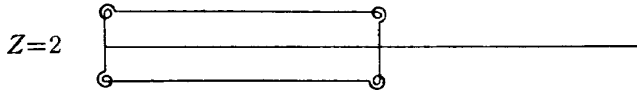
以上のように定めたパラメータの値を(12)~(16)式へ代入して振動数方程式を解くと固有値と固有モードが求まる。 T の種々な値に対する解析結果を表1,2に示す。またグラフに示したのが図2(a),(b)である。図中に黒丸印で実験結果も記入しておいた。 T の値が0~20までの所を拡大して描いたのが図3(a),(b)である。図中破線で結んであるのは同一モードが T の値の変化に伴って破線のように移行していくことを示したものであり従って固有値の順序も入れ替っていくこともわかる。これは三本のはりが同時にあたかも一本のはりのごとき運動をするので結合しているバネの強さに関係のある T の値にほとんど影響されていないことを表わしている。したがって T の値を変化させていっても固有値は変化せずほぼ一定の値を保って現われてくるのである。

表 1

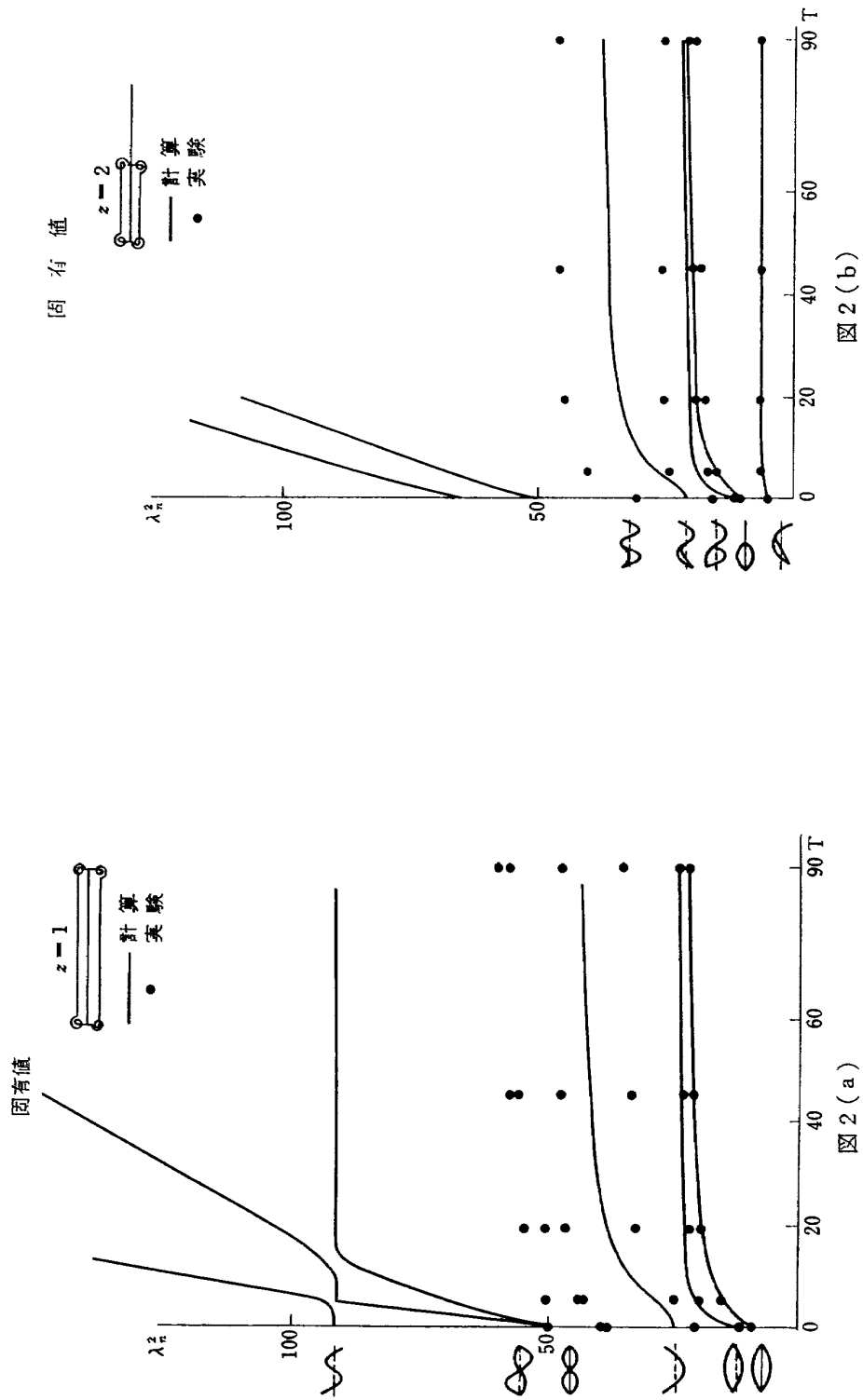


次	数	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次	6 次
T	0	9.87	10.54	23.96	50.19	50.19	91.65
	1	11.55	15.64	24.49	54.22	61.48	91.65
	3	13.77	19.98	26.42	61.48	79.38	91.65
	5	15.20	21.28	28.89	67.97	91.66	93.91
	7	16.21	21.74	31.03	73.89	91.65	106.48
	10	17.29	22.04	33.46	81.97	91.65	122.96
	20	19.17	22.32	37.85	91.65	104.49	166.49
	100	21.60	22.51	43.62	91.65	210.99	358.48

表 2



次	数	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次	6 次
T	0	4.99	9.89	13.06	20.70	50.20	64.92
	1	6.78	11.55	16.15	21.72	54.22	69.74
	3	6.15	13.77	18.78	24.32	61.48	78.55
	5	6.27	15.20	19.64	26.72	69.97	86.50
	7	6.33	16.19	20.05	28.56	73.89	93.80
	10	6.38	17.29	20.27	30.54	81.97	103.81
	20	6.44	19.17	20.84	34.00	104.49	131.85
	100	6.48	21.09	21.36	38.51	210.99	265.19



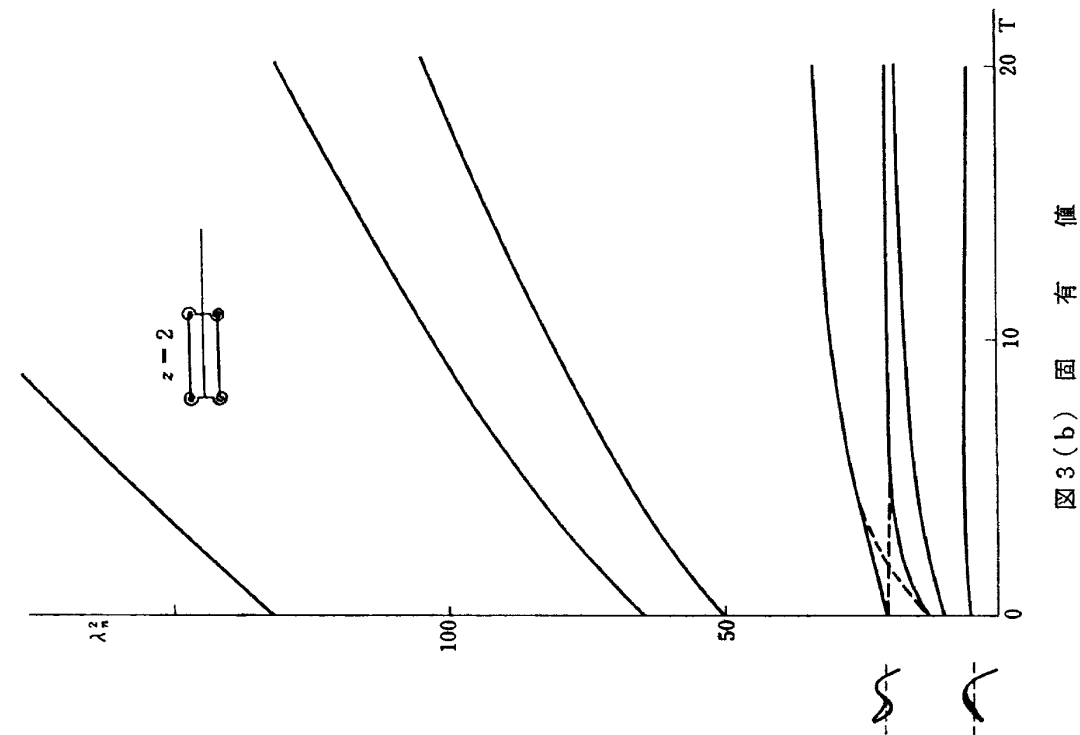


図3(b)固有値

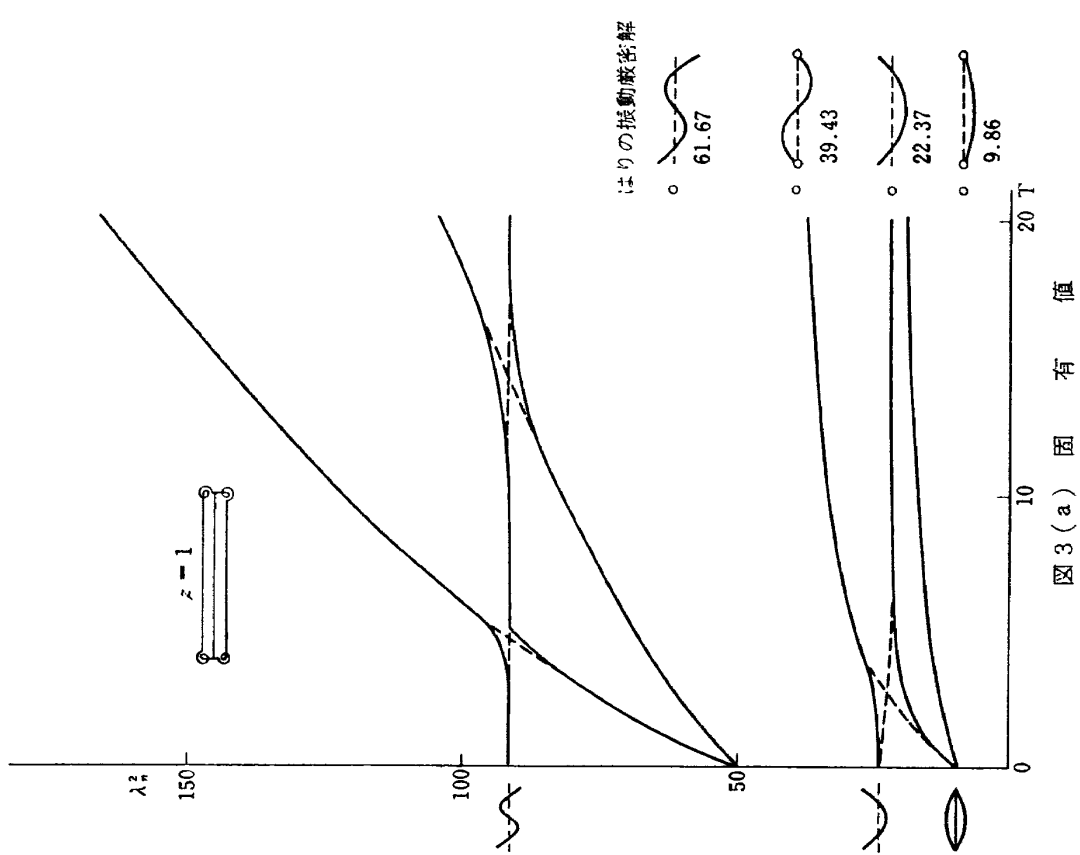


図3(a)固有値

4. 実験結果および計算値との比較

試験片は断面が 30 mm×5 mm, 長さ 900 mm と 450 mm の二種類の長さのアルミ合金 17S 材の矩形断面はりを, 板バネ (17S材) は幅 30 mm で板厚を h , 1 mm~5 mm まで 1 mm おきに 5 段階に変えておこなった。試験片は図 4 に示すように 2 本の張られたゴム

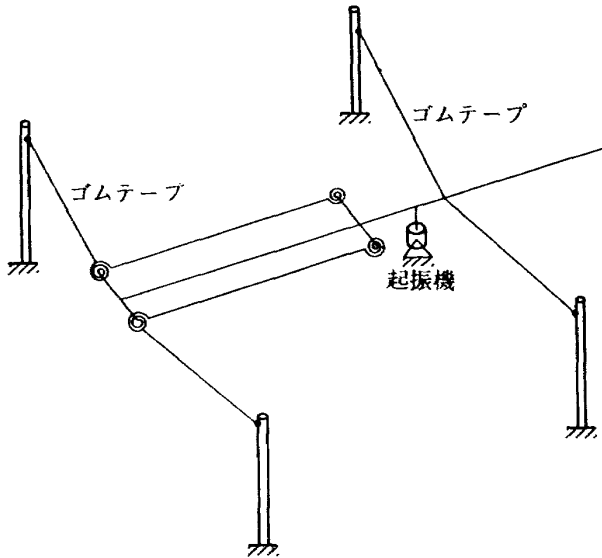


図 4 試験片セット状況

テープの上に乗せて, 両端自由の境界条件を近似した。板の曲げ弾性常数を一端固定したはりの自由端に作用する曲げモーメントと, その点でのはりの傾斜角との比で表わすことにすると, 板バネの曲げ剛性を $(EI)_s$, 長さを l_s として, 曲げ弾性常数は,

$$K = \frac{(EI)_s}{l_s} \quad (19)$$

で表わされる。したがって(13)式で表わされるパラメータ T の値は,

$$T = \frac{(EI)_s L_1}{(EI)_1 l_s} \quad (20)$$

で表わされる値になる。(20)式から定まってくる値の計算結果と実験結果を表 3, 4 に示す。

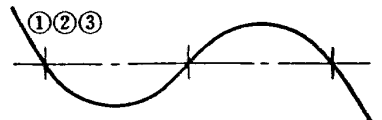
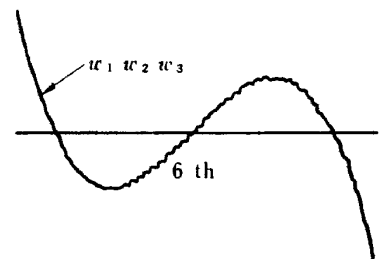
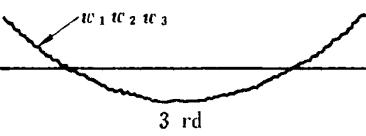
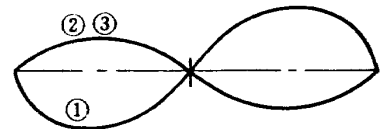
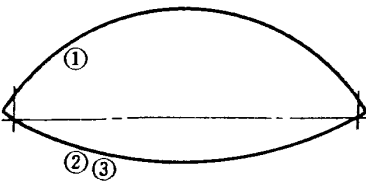
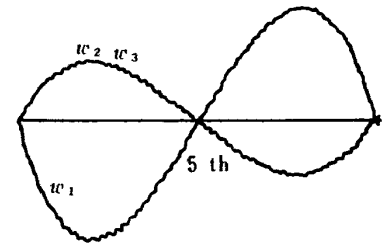
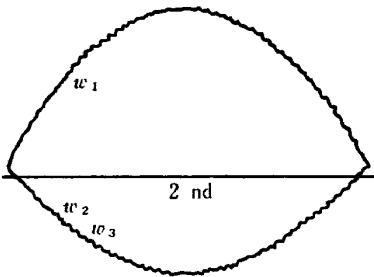
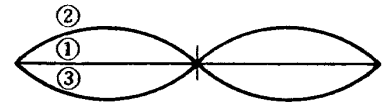
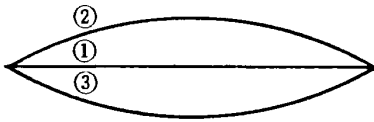
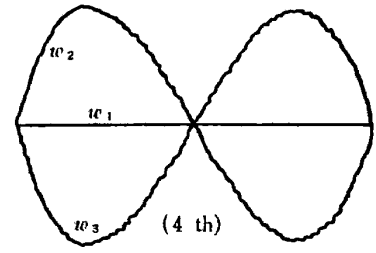
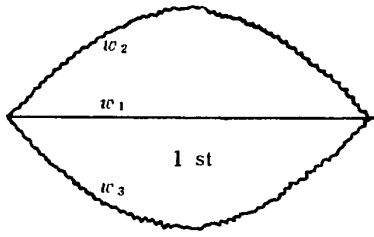
実験結果は図 2 に●印でプロットしたものであり固有値の 2 次ぐらいまでは比較的良く計算結果と一致しているといえる。たわみの試験関数の項数を増せば解の精度が上がる事が知られている⁸⁾ので, 項数を増すことで近似を上げるようにすればさらに高い次数まで良い値が求まるであろうが, ここではこの程度の比較的簡単な計算でも低い次数のところの良い結果が得られることを示すことにとどめておいた。最後に実験で

表 3

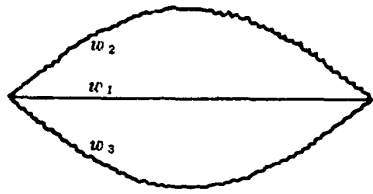
Z=1						
次	数	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次
T	0	8.75 (9.87)	11.03(10.54)	18.91(23.96)	36.96(50.19)	38.83 (50.19)
	0.64	13.83(11.01)	24.32(14.18)	37.36(24.27)	41.03(52.80)	45.83 (57.66)
	5.76	16.24(15.63)	24.66(21.50)	43.44(29.76)	44.11(70.28)	50.12 (91.66)
	19.44	20.05(19.09)	25.73(22.31)	46.11(37.68)	49.45(91.65)	53.46(103.37)
	46.08	18.38(20.75)	24.86(22.45)	45.44(41.62)	50.12(91.65)	55.13(147.90)
	90.00	18.71(21.51)	24.06(22.51)	44.44(43.43)	54.80(91.65)	56.80(200.80)

表 4

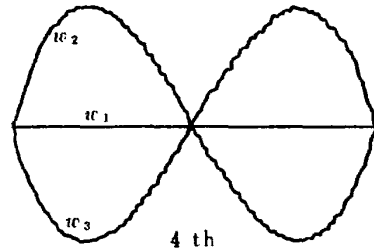
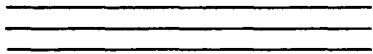
Z=2						
次	数	1 次	2 次	3 次	4 次	5 次
T	0	4.03 (4.29)	9.92 (9.89)	11.38(11.37)	14.64(16.53)	23.64 (39.61)
	0.64	4.34 (5.62)	11.03(11.02)	16.04(15.23)	25.73(21.34)	35.92 (52.81)
	5.76	5.18 (6.30)	14.70(15.61)	27.23(18.32)	30.07(27.48)	42.60 (70.28)
	19.44	5.60 (6.44)	16.20(19.13)	18.88(20.82)	27.73(33.88)	30.91(103.37)
	46.48	5.68 (6.50)	17.04(20.76)	19.21(21.13)	28.23(36.91)	31.74(147.90)
	90.00	5.85 (6.51)	17.21(21.28)	19.71(21.30)	28.57(38.31)	31.74(200.80)



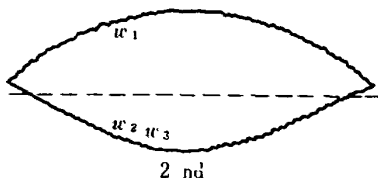
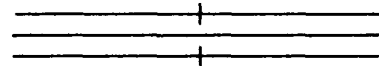
$T = 0 \quad z = 1$
 5



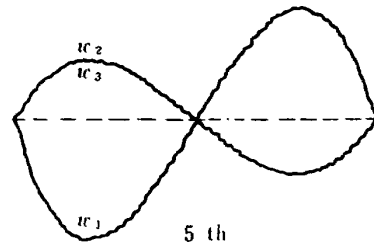
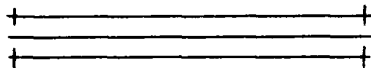
1st



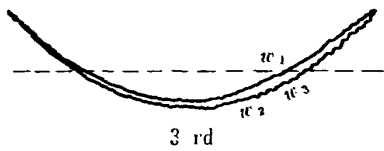
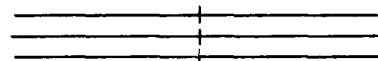
4th



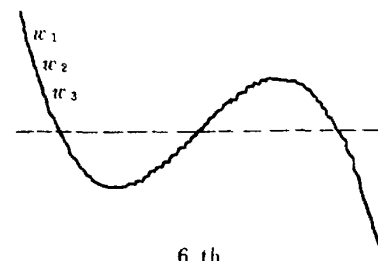
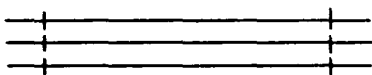
2nd



5th



3rd

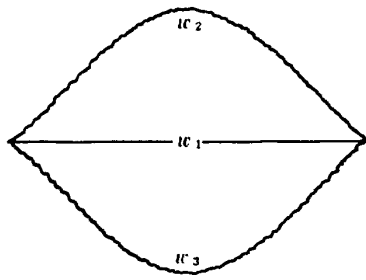


6th

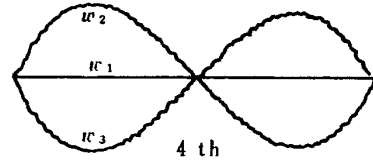


$T = 0.64 \quad z = 1$

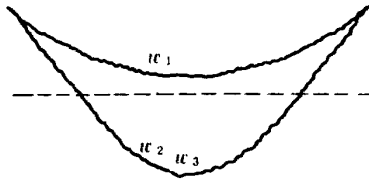
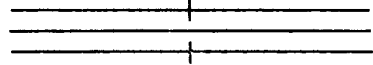
図 6



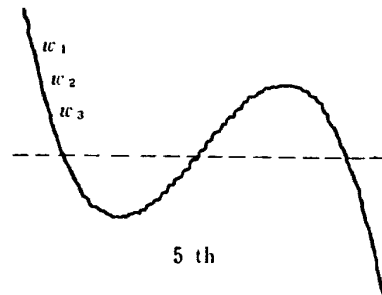
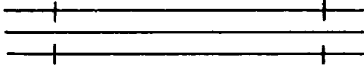
1 st



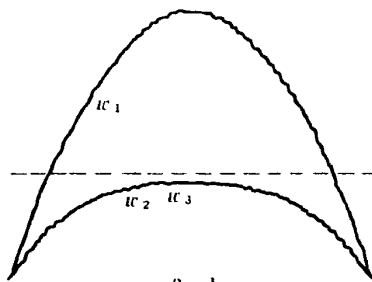
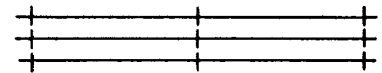
4 th



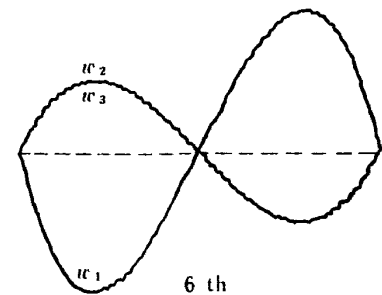
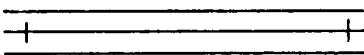
2 nd



5 th



3 rd

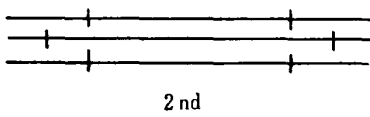
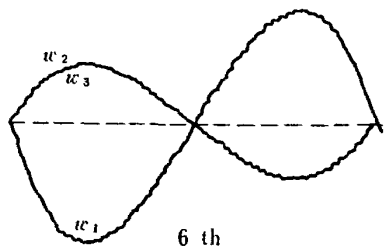
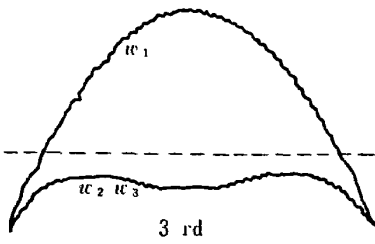
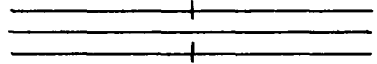
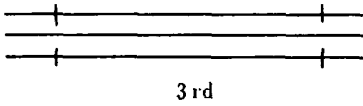
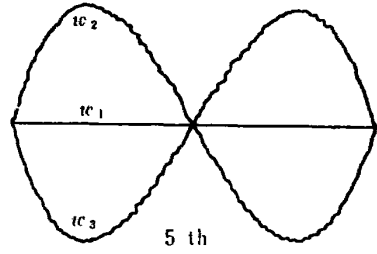
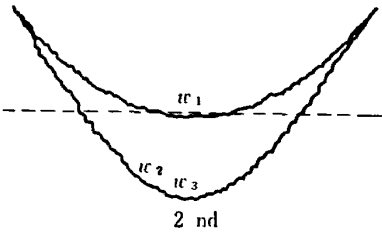
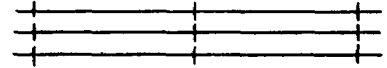
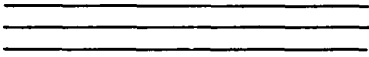
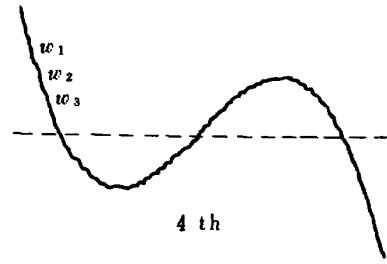
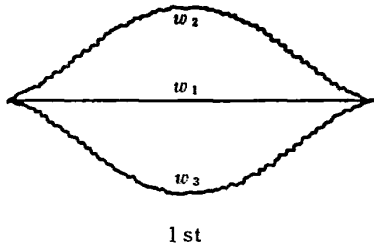


6 th



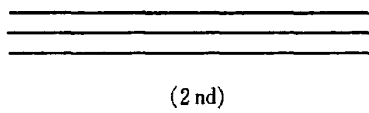
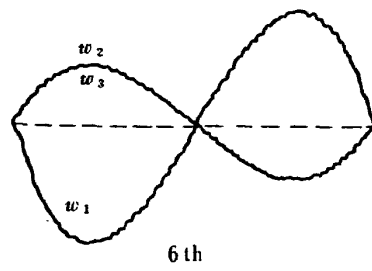
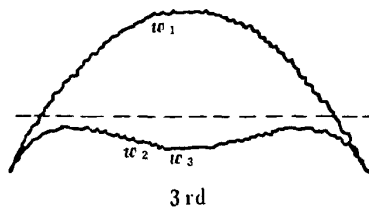
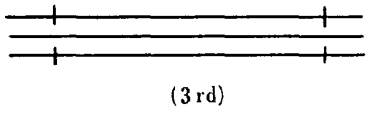
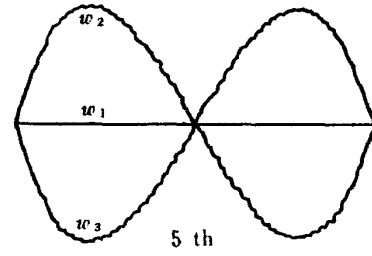
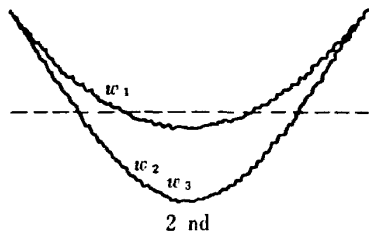
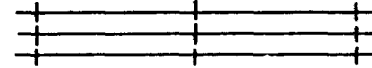
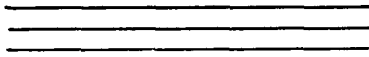
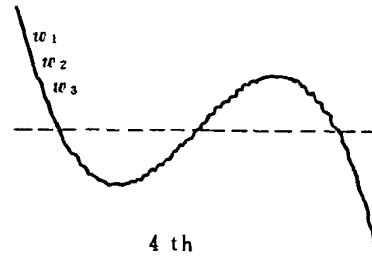
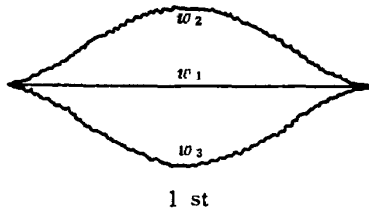
$T = 5.76 \quad z = 1$

☒ 7

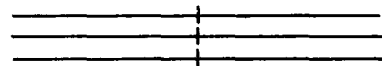
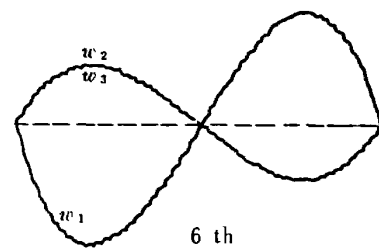
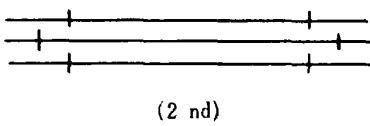
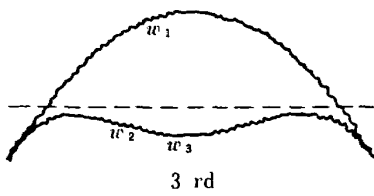
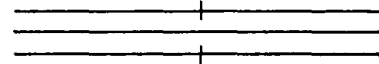
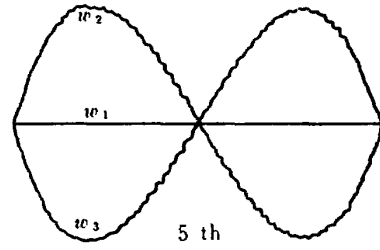
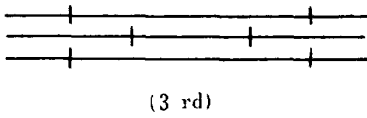
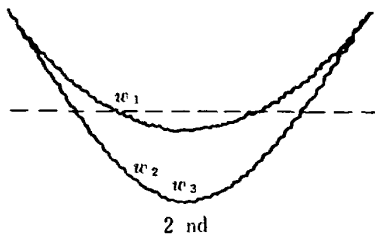
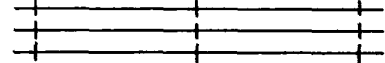
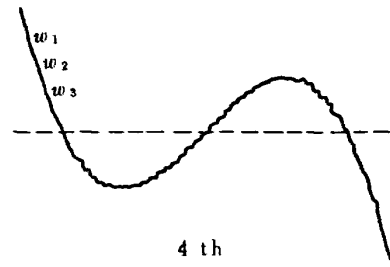
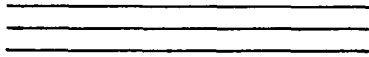
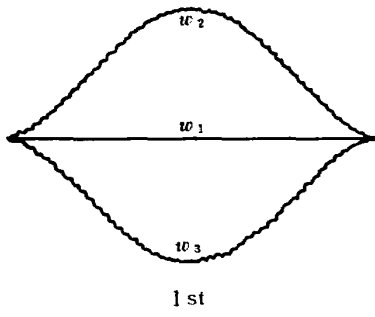


$T = 19.44 \quad z = 1$

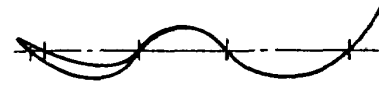
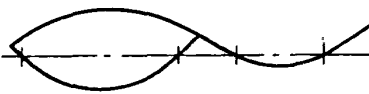
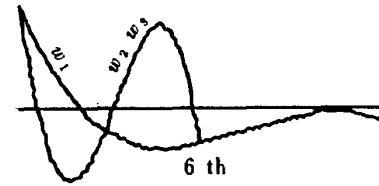
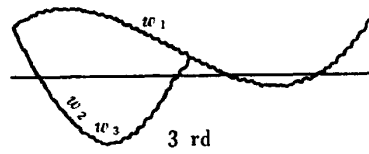
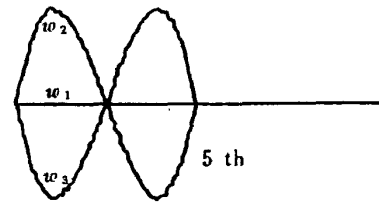
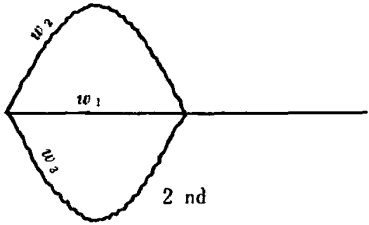
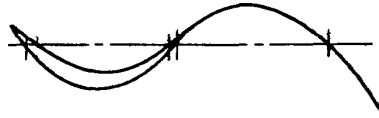
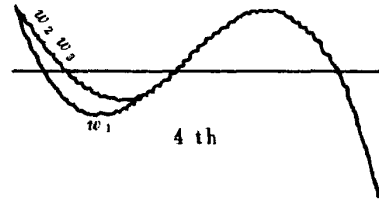
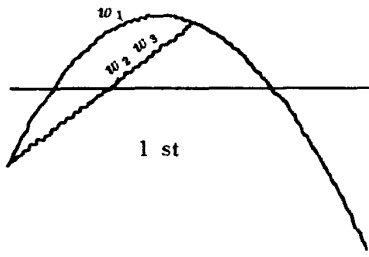
図 8



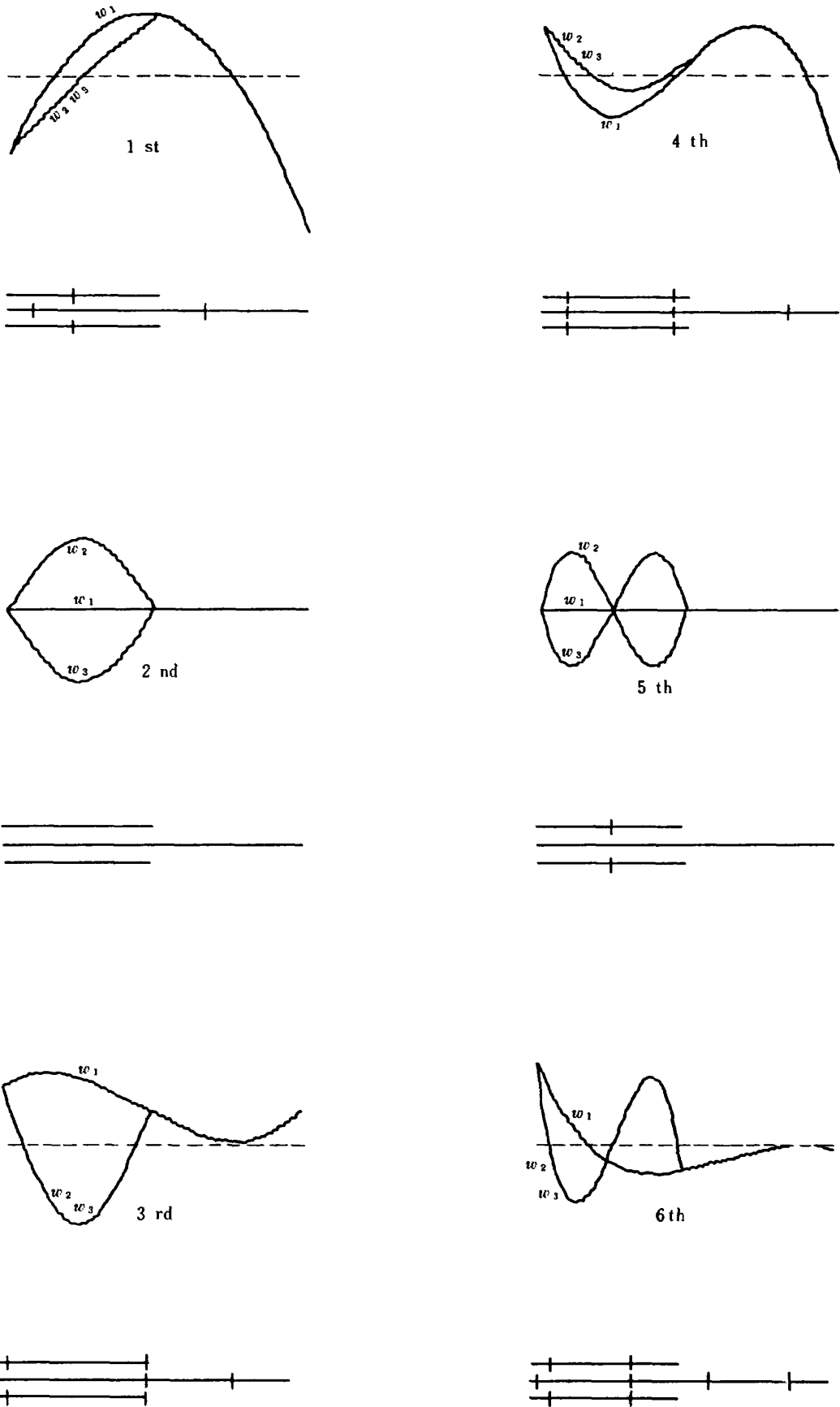
$T = 46.08 \quad z = 1$
 ☒ 9



$T = 90 \quad z = 1$
 10

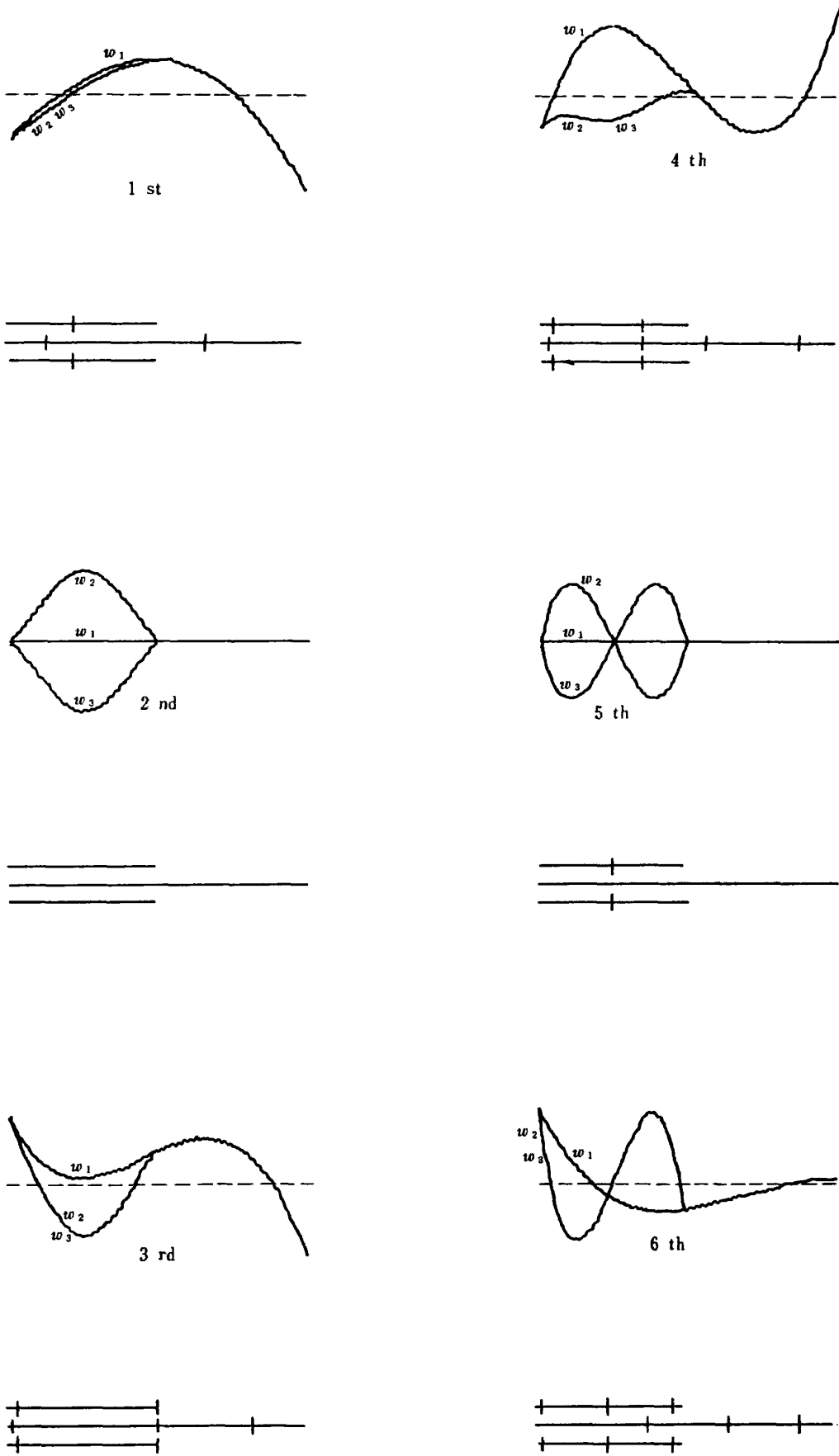


T = 0 z = 2

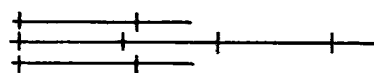
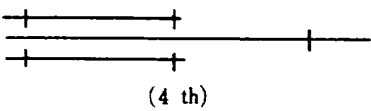
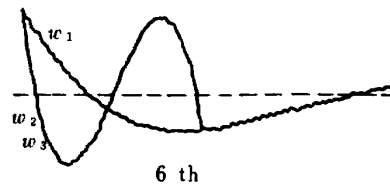
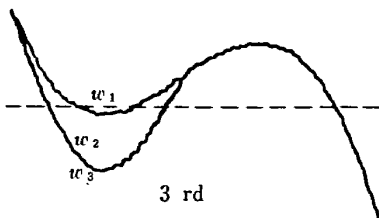
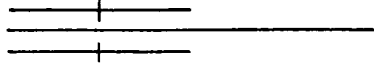
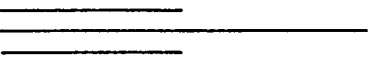
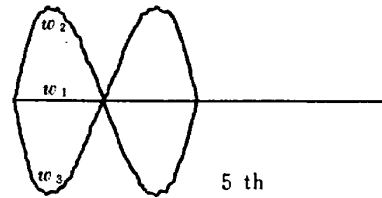
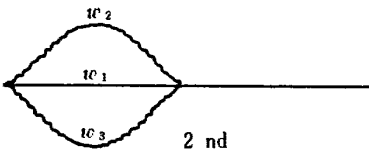
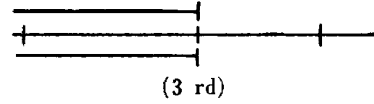
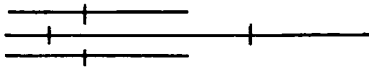
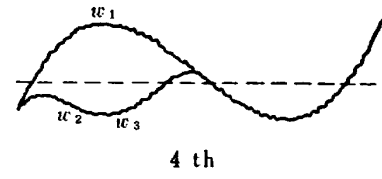
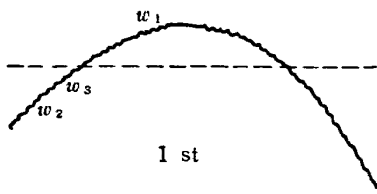


$T = 0.64 \quad z = 2$

図 12

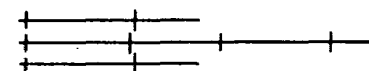
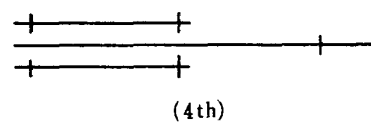
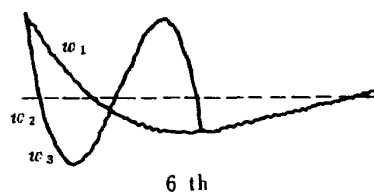
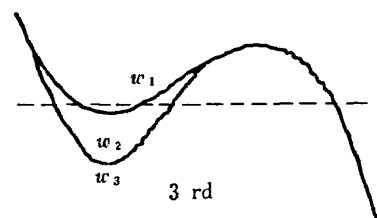
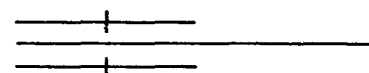
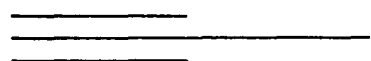
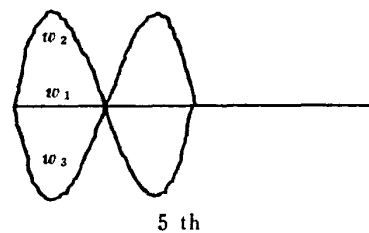
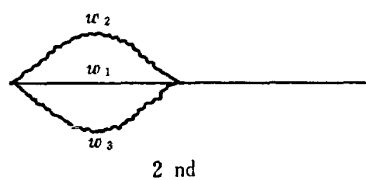
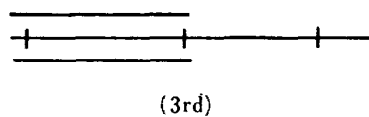
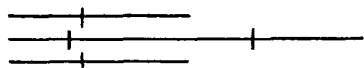
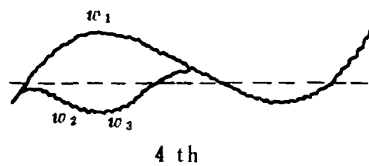
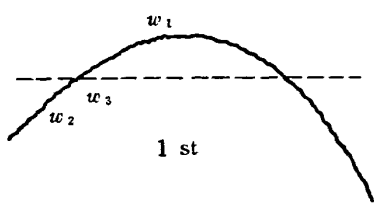


$T = 5.76 \quad z = 2$
 図 13



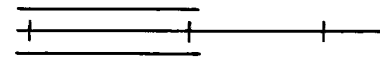
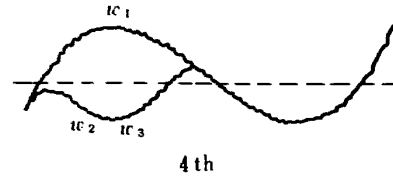
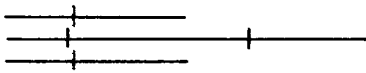
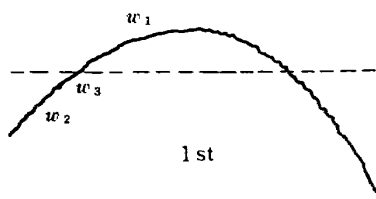
$T = 19.44 \quad z = 2$

図 14

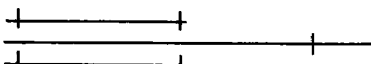
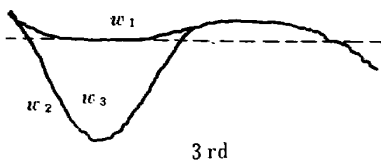
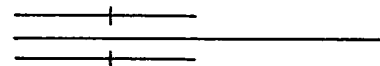
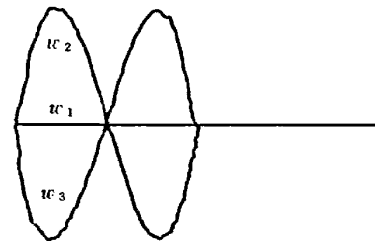
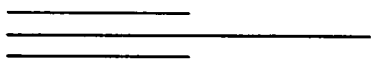
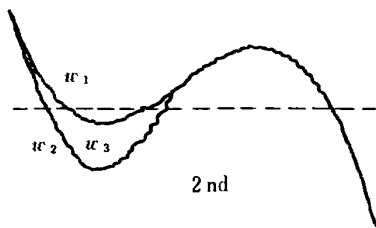


$T = 46.08 \text{ s} = 2$

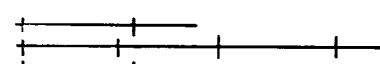
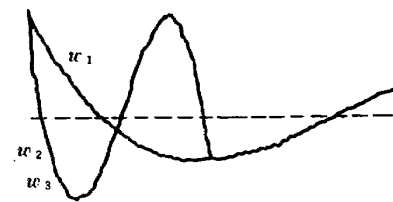
図 15



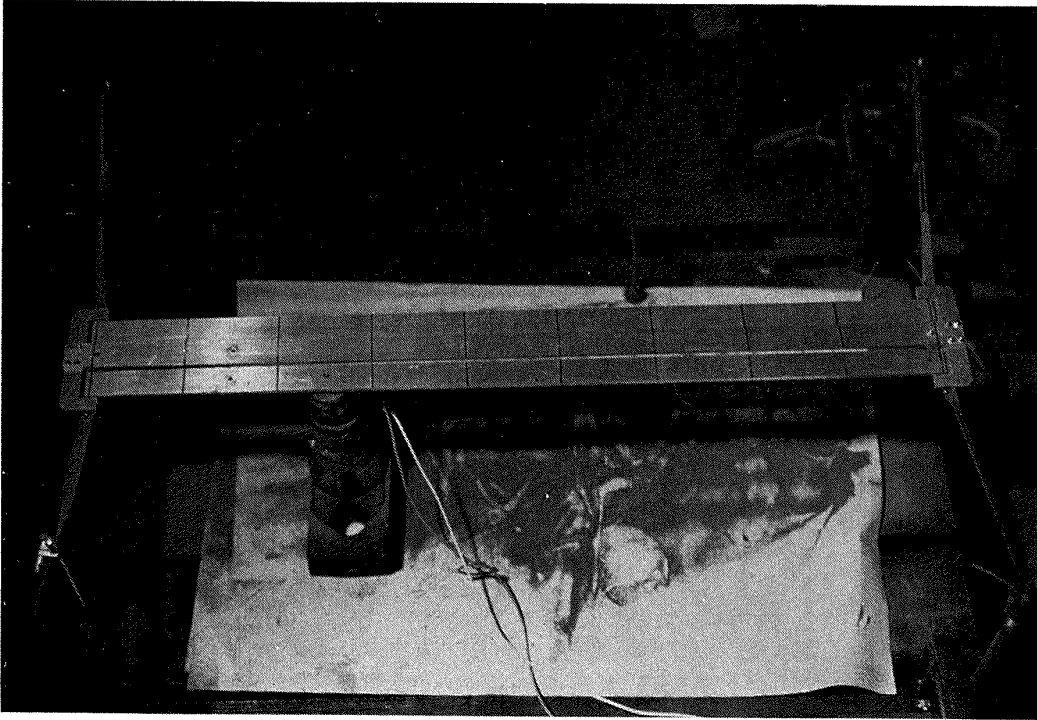
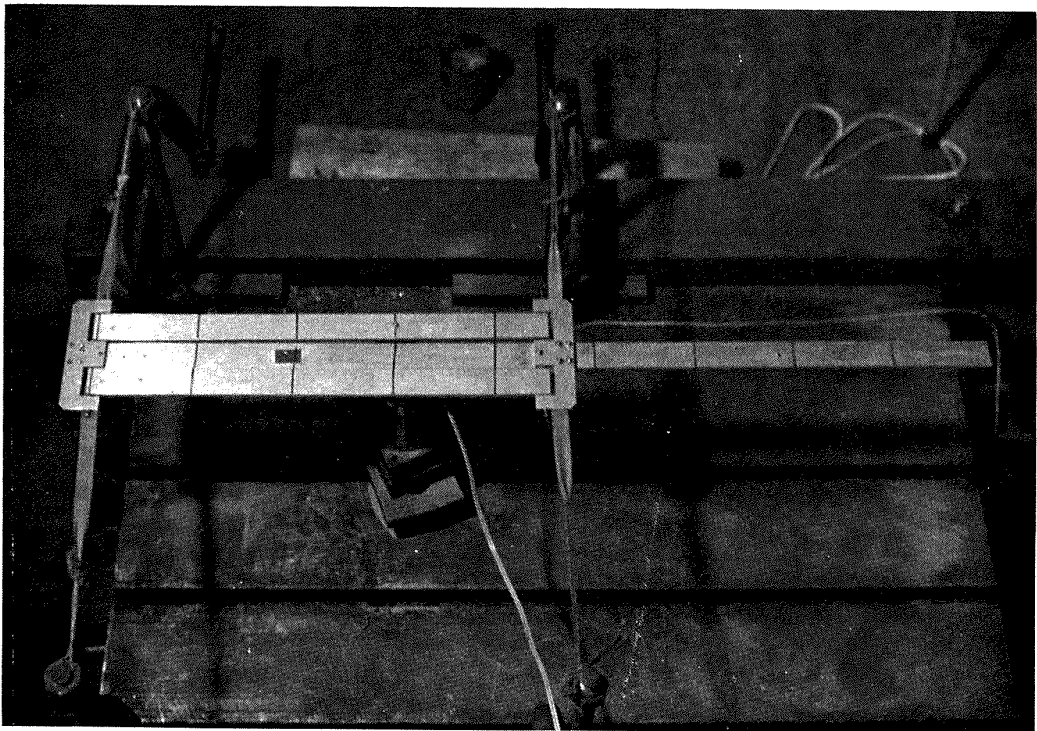
(3 rd)



(4 th)



$T = 90 z = 2$

写真 1 $Z=1$ 写真 2 $Z=2$

用いた板バネについて(20)式から T の値を求めそれぞれの T の値に対する固有モードを X - Y プロッタで描かせたのが図 5~16 に示してある。なお、実験より測定した節の位置を解析結果と比較のために同図の下に | 印で示してある。図 10 第一次モードからわかるように T の値に関係するバネ弾性常数が大きくなると両側のはりは真中のはりに対して結合部で両端固定の条件に近いモードで運動するようになる様子

が現われてくるのがわかる。

5. 結 論

弾性的に結合された並列結合はりの曲げ振動解析法を示したが結論として、

- 1) 低次の振動解析には、たわみの試験関数としてべき級数を用い、しかも最初の数項で十分な精度の結果が得られる。

- 2) 結合しているバネの弾性常数が比較的小さな場合、曲げ振動の固有値は結合が剛な並列結合はりの固有値に比して低下する度合が激しい。
- 3) 並列結合はりの振動では、両端自由な単純はりの振動よりもさらに低いところに固有値と固有モードが存在する。(5図1次, 2次)また単純はりの最低次数よりも上の方にも全く新しい別の固有値と固有モードが存在する(5図5次4次)。
- 4) T の値が零から増加していくと途中からモードが入れ替って出てくる。
- 5) $Z=1$ のケースでは単純はりと同じモードの固有値は T の値の変化に無関係に一定の値で出てくる。また $Z=2$ のケースについてもほぼ同様なことがいえる。
- 6) T の値が大きくなると結合部において両側のはりが真中のはりに対して固定端に近い状態で挙動するようになることがわかる。(図10第1モード参照)

ここでは三本の単純はりが板バネで結合されておりその振動だけについて取扱ったものであるが、実際のロケットや各種構造物に含まれるこの形の要素は剛性

も質量も変化している場合が多いので、三本のはり各々について、はりの内で剛性および質量が変化している並列結合はりについての振動解析を考慮中である。

最後に、本研究にあたって終始ご指導くださった構造研究室長の埴武敏技官に感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) 埴武敏, 越出慎一, 泉日出夫: 「点支持束縛のある板の振動解析」第6回構造強度に関する講演会講演集(昭和39年)
- 2) 埴武敏, 泉日出夫, 多田保夫, 越出慎一: 「点束縛のある板の振動解析」第43期機械学会全国大会前刷集(昭和40年)
- 3) 川井忠彦, 埴武敏, 越出慎一, 戸川隼人, 落合薫: 「変分法による平板翼の撓み振動解における自然境界条件の数値的吟味(片持平板翼の場合)」航技研報告 TR-66
- 4) 築地恒夫, 林洋一: 「結合梁の振動について」航技研報告 TM-103
- 5) 林 毅, 村外志夫: 「変分法」コロナ社
- 6) 高橋利衛: 「機械振動とその防止」オーム文庫
- 7) 林洋一, 築地恒夫: 「並列ビームの振動」第44期機械学会全国大会前刷集(昭和41年)

- | | | | |
|---------|--|-----------|---|
| TR-262 | 異径二円筒殻をコーンで連結した軸対称殻
の有限要素法構造解析
A Structural Analysis of Cylinder-Cone-
Cylinder Shells by F. E. M. | 1972年1月 | 小河昭紀 |
| TR-263 | 多孔壁風洞における亜音速二次元風洞壁干
渉効果の研究と航空宇宙技術研究所 2 m
×2 m 遷音速風洞へのその適用
A Study of Subsonic, Two-Dimensional
Wall-Interference Effects in a Perforated
Wind Tunnel with Particular Reference
to the NAL 2 m×2 m Transonic Wind
Tunnel | 1972年1月 | 海老原正夫 |
| TR-264 | 液体燃料ロケットを用いた衛星打上げ用飛
しょう体の初段に関する制御系構成
Flight Control System Design for Launch
Vehicle with Liquid Propellant | 1972年1月 | 森 英彦, 興石 肇 |
| TR-265 | ガスタービン用流体温度検出器
Fluidic Turbine Inlet Gas Temperature
Sensor | 1972年1月 | 西尾健二, 遠藤征紀
遠藤篤和 |
| TR-266 | 鈍い頭部を有するロケット胴体の空力特性
に関する二, 三の考察
Some Consideration on the Aerodynamic
Characteristics for a Body of Rocket
with Blunt Nose | 1972年1月 | 河本 徹 |
| TR-267 | フロントファンの研究
Aerodynamic Design and Test Result of
Front Fans | 1972年1月 | 藤井昭一, 西脇英夫
五味光男, 菅原 昇
武田克己 |
| TR-268T | Aerodynamic Design and Test Results of
Front Fans | Jan. 1972 | Shoichi FUJII
Hideo NISHIWAKI
Mitsuo GOMI |
| TR-269T | Approximation of Linear Operator Semi-
groups | Feb. 1972 | Tadayasu TAKAHASHI |
| TR-270 | 円筒殻の座屈実験
The Experiments on the Buckling of
Circular Cylindrical Shells | 1972年2月 | 戸田 勸, 日下和夫 |

航空宇宙技術研究所報告 271 号

昭和 47 年 2 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(代表)☎182

印刷所 有限会社啓文堂松本印刷
東京都文京区水道 2-7-5
