UDC 534.12:
629.7.018.4

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-291

はり板結合構造物の振動(III)

塙 武敏・林 洋一・多田保夫
戸田 勧・日下和夫

1972年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既　刊　報　告

TR-264	液体燃料ロケットを用いた衛星打上げ用飛しょう体の初段に関する制御系構成 Flight Control System Design for Launch Vehicle with Liquid Propellant	1972年1月	森　英彦，興石　肇
TR-265	ガスタービン用流体温度検出器 Fluidic Turbine Inlet Gas Temperature Sensor	1972年1月	西尾健二，遠藤征紀 遠藤篤和
TR-266	鈍い頭部を有するロケット胴体の空力特性に関する二，三の考察 Some Considerations on the Aerodynamic Characteristics for a Body of Rocket with Blunt Nose	1972年1月	河本　巌
TR-267	フロントファンの研究 Aerodynamic Design and Test Results of Front Fans	1972年1月	藤井昭一，西脇英夫 五味光男，菅原　昇 武田克己
TR-268T	Aerodynamic Design and Test Results of Front Fans	Jan. 1972	Shoichi FUJII Hideo NISHIWAKI Mitsuo GOMI
TR-269T	Approximation of Linear Operator Semi-groups	Feb. 1972	Tadayasu TAKAHASHI
TR-270	円筒殻の座屈実験 The Experiments on the Buckling of Circular Cylindrical Shells	1972年2月	戸田　勧，日下和夫
TR-271	並列結合はりの振動 On the Vibration of Three-Parallel-Beams	1972年2月	林　洋一，築地恒夫
TR-272	遷音速軸流タービンの研究（第一報） —タービンノズル円環翼列の実験— An Investigation of a Transonic Axial-Flow Turbine (I) —A Cold Air Test of the Annular Turbine Nozzel Cascade—	1972年2月	鳥崎忠雄，能瀬弘幸 森田光男，井上重雄 関根静雄
TR-273	高速軸流タービンの研究（第二報） —1段軸流タービンの研究— An Investigation of a High Speed Axial Flow Turbine (II) —A Investigation of a Single Stage Turbine—	1972年2月	鳥崎忠雄，森田光男 能瀬弘幸，関根静雄 井上重雄
TR-274	軸流圧縮機ディスクの強度 (1 外周付近に多数のピン孔を有するディスク) Investigation of Strength of Axial-Flow Compressor Disc (1 On the Disc with many Pin hole)	1972年2月	松末勝利
TR-275	高度制御試験設備 Height Control Test Equipment for VTOL Aircraft	1972年2月	松木正勝，鳥崎忠雄 西尾健二，遠藤征紀 吉田　晃，中山　晋 岩部柱相，武田克巳 関根静雄，越沼　威
TR-276	フライングテストベッド機体総合実験 —エンジンを除く本体の機能— Overall Grond Experiments on Flying Test Bed for VTOL Aircrfts at National Aerospace Laboratoy	1972年2月	滝沢直人，田辺義一 渋谷昭義，小川敏雄 藤枝郭俊，申斐忠夫 西村博史，小野幸一 後藤芳夫
TR-277	円環状ディフューザの乱流境界層の発達 Development of Turbulent Boundary Layers Along the Curred Walls of an Annular Diffusing Passage	1972年2月	藤井昭一，五味光男 西脇英夫 Theodore H. OKIISHI

はり板結合構造物の振動 (III)*

塙　武敏**・林　洋一**・多田保夫**
戸田　勤**・日下和夫***

On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (III)

By Taketoshi HANAWA, Yoichi HAYASHI, Yasuo TADA,
Susumu TODA and Kazuo KUSAKA

In this paper the authors applied an analytical method, which was used in the previous paper TR-160, by means of the well-known Rayleigh-Ritz's procedure, to the analysis of the natural vibration characteristics of the more realistic plate-beam combination structures. As actual examples, the structures which consisted of the built-up delta-wings and the fuselage were dealt with. General analytical equations were formulated for these.

Numerical examples were done for the cantilevered wings, the built-up delta-wings and the specimens which structurally simulated a free-flight model to investigate the characteristics in supersonic flight.

At the same time, the vibration test of such a stucture was carried out. Comparson of both results showed that there was a good correlation between them.

It can be concluded that this analytical methed is a suitable way for the prediction of such structures' natural vibration characturistics.

高速航空機の基本的な形状の構造物の振動解析に関する一つの近似解法を示し，これに関係した二，三の実例について数値解析と実験とをおこなったものである。

振動解析はエネルギー法によったもので，全体的な変形を仮定した試験関係を用い，この式からひずみおよび運動のエネルギーを計算し，ポテンシャルエネルギーが停留値をとる条件から振動数および振動モードを求めたものである。

振動実験は共振法によったもので，電磁加振器で試験体を加振し，振動数を求め，このとき試験体に砂を散布して共振時の振動モードのノーダルラインを求めて計算値と比較した。

記　号

前回(II)の論文に示した記号と重複するものもあるが今回はそれらも含めて総括した記号を示す。

x, y, z: 直角座標系

a: 胴体と翼の結合部の胴体中心軸での寸法，定数

b: 翼の y 方向の幅の 1/2 (胴体中心軸より y 方向翼端までの長さ，定数)

k: $k=a/b$, 定数

ξ: $\xi=x/a$

η: $\eta=y/b$

α: 翼前縁の角度，定数

β: 翼後縁の角度，定数

w: $w=w(x, y)$, 系の z 方向のたわみ関数

a_{mn}: $w(x, y)=\sum_{m,n} a_{mn} x^m y^n$, 試験関数の $x^m y^n$ の係数，m, n は x^m, y^n の m, n に相当する係数であることを示す。

D: $D=E_c t_c^3/12(1-\nu^2)$, 定数

E_c: 外板材の縦弾性係数，定数

t_c: 外板の板厚，定数

ν: 外板材のポアソン比 (計算では 0.3)

* 昭和47年5月4日　受付
** 機体第二部
*** 角田支所

A_{mn}, A_{rs}: $A_{mn}=a_{mn}a^m b^n$

: $A_{rs}=a_{rs}a^r b^s$

A_{mnrs}: (1.1.1.3)式

M_{pq}: (1·1·1·4)式

$\lambda^2 a^4 k^{-4}$: $\lambda^2 a^4 k^{-4}=\lambda^2 b^4=\omega^2\rho_c t_c b^4/D$

ω: 角振動数

ρ_c: 外板材の密度，定数

V_1: (1.1.1.1)式，翼外板の曲げによるひずみエネルギー

V_2: (1.1.2.1)式，翼外板の面内ひずみエネルギー

$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$: (1.1.1.1)式，外板の平均面内ひずみ

h: $h=h(x, y)$，上外板中立面と下外板中立面との距離，(翼厚$-t_c$) であって，座標 x, y で与えられた関数

h_m: 外板中立面間の最高距離，翼厚最高値$-t_c$，定数

B_{mnrs}: (1.1.2.4)式

e_{pq}: $(h/h_m)^2$ の展開係数，定数 (1·1·2.6)式，

T_1: 外板の曲げ変位による運動のエネルギー

T_2: 外板の面内変位による運動エネルギー

V_3: けたの曲げによるひずみエネルギー

V_{3s}: s 番目のけたの曲げによるひずみエネルギー

E_s: s 番目のけた材の縦弾性係数，定数

I_s: s 番目のけたの断面二次モーメント 座標 x, y またはけたの長手方向座標によって与えられた関数

L_s: s 番目のけたの長手方向最先端迄の長さ定数 (1.1.3.1)式

s: けたの本数，定数または s 番目のけたを示す添字

s: 図 3-1 のけた長手方向座標

S_s: (1.1.3.2)式の S_s で，s 番目のけたの付根位置，定数，図 3-1

p_s: (1.1.3.2)式の p_s で，s 番目のけたの位置によって定まる胴体との傾斜を示す定数

I_{sm}: s 番目のけたの最高断面二次モーメント，$=b_s H_{sm}^3/12$，定数

H_{sm}: s 番目のけたの高さの最高値，定数

A_s, B_s, C_s, J_s: s 番目のけたの各定数 (1.1.3.5)式

γ_s: s 番目のけたの胴体に対する傾斜角，図 3-1，定数

H_s: s 番目のけたの高さで，x, y 座標またはけたの長手方向座標 s の関数，図 2-2

F_{sq}: s 番目のけたについて，$(H_s/H_{sm})^3$ を展開したときの y^q の項の展開係数，定数 (1·1·3·6)式

f_{sq}: F_{sq} を無次元化した係数，定数

I_{spq}: (1·1·3·8)式，s 番目のけたについての積分値

a_s: $a_s=s_s/p_s$ } s 番目のけたの定数

s_s: $s_s=S_s/b$ }

S_{mnrs}: (1.1.3.10)式

U_{spq}: s 番目のけたについての積分値

k_s: s 番目のけたの長さを無次元化した値，定数，図 3-2

T_3: けたの曲げ変位による運動エネルギー

T_{3s}: s 番目のけたの曲げ変位による運動エネルギー

ρ_s: s 番目のけたの密度，定数

A_{sm}: s 番目のけたのけた厚最高部の断面積，定数

A_s: s 番目のけたの断面

h_{sq}: (H_s/H_{sm}) 積の展開係数，(1.1.3.14)式，実数

q_{sq}: h_{sq} の無次元化係数，定数

V_4: けたのねじりによるひずみエネルギー

V_{4s}: s 番目のけたのねじりによるひずみエネルギー

G_s: s 番目けたの剪断弾性係数，定数

$G_s K_s$: s 番目のけたのねじり剛性，定数

$G_s K_{sm}$: s 番目のけたの最高ねじり剛性，定数

D_s, E_s, F_s: (1.1.3.18)式 s 番目のけたの各定数

k_{sq}: s 番目のけたのねじり性剛の展開係数，定数

i_{sq}: k_{sq} の無次元化係数，定数

T_{mnrs}: S_{mnrs} 中の定数 A_s, B_s, C_s を D_s, E_s, F_s に変化したときの式，(1·1·3·10)式

T_4: けたのねじり変位による運動エネルギー

T_{4s}: s 番目のけたのねじり変位による運動エネルギー

φ: けたのねじり角

I_{0s}: s 番目のけたの極慣性モーメント (面積)

I_{0sm}: s 番目のけたの最高極慣性モーメント，定数

I_{0sq}: (I_{0s}/I_{0sm}) の無次元化展開係数，定数

T'_{mnrs}: (1.1.3.22)式
$G_s, \bar{K}_s$: s番目のけたについての定数(1.1.3.23)式
V_5: 小骨の曲げによるひずみエネルギー
V_{5r}: r番目の小骨の曲げによるひずみエネルギー
r: 小骨の本数，定数またはr番目の小骨を示す添字
E_r: r番目の小骨の縦弾性係数，定数
I_r: r番目の小骨の断面二次モーメント，定数
x_{rb}, x_{ra}: r番目の小骨の両端のx座標，定数
$\xi_{rb}, \xi_{ra}, \eta_r$: r番目の小骨の両端の無次元化座標，定数
T_5: 小骨の曲げ変位による運動エネルギー
T_{5r}: r番目の小骨の曲げ変位による運動エネルギー
A_r: r番目の小骨の断面積，定数
V_6: 小骨のねじりによるひずみエネルギー
G_r: r番目の小骨材の剪断弾性係数，定数
G_rK_r: r番目の小骨のねじり剛性，定数
T_6: 小骨のねじり変位による運動エネルギー
ρ_r: r番目の小骨材の密度，定数
I_{0r}: r番目の小骨の極慣性モーメント，定数
M: 胴体の分割数，定数
μ: 胴体の分割位置番号 $\mu=1,\cdots M$
V_7: 胴体の曲げによるひずみエネルギー
ξ_μ: 胴体分割位置無次元化座標，定数
$(E_BI_B)_\mu$: μ番目の分割胴体の曲げ剛性，この区間内定数
$(E_BI_B)_m$: 分割胴体最高曲げ剛性部分の剛性，定数
V_7: 胴体の曲げによるひずみエネルギー
T_7: 胴体の曲げ変位による運動エネルギー
$(mA)_\mu$: μ番目の分割胴体部の単位長さ当りの質量，定数
$(mA)_m$: $(mA)_\mu$の値の最高値，定数
V_8: 胴体のねじりによるひずみエネルギー
$(GK)_\mu$: μ番目空体のねじり剛性，定数
$(GK)_m$: 胴体のねじり剛性最高部分のねじり剛性，定数
T_8: 胴体のねじり変位による運動エネルギー
$(mI_0)_\mu$: μ番目胴体の極慣性モーメント，定数
$(mI_0)_m$: 空体の極性モーメント最高部分の極慣性モーメント，定数
Π: 運動ポテンシャル
M: エンジン質量，定数
d: エンジン直径，定数
l: エンジン長さ，定数
ξ_i, η_i: 無次元化エンジン重心座標，定数
J_{wx}: x軸回りエンジン慣性モーメント，定数
J_{wy}: y軸回りエンジン慣性モーメント，定数
$MI(i)$: エンジンに関係した定数(2.7)式
$MJX(i)$: 〃
$MJY(i)$: 〃

1. 解　　析

解析の方法はTR-160[1]においておこなった方法を構造翼の場合に拡張したもので，今回の場合はエネルギーを計算する項が前回より複雑になるだけで，計算方法としては前回と同じである。

今回は，高速機全体つまり胴体と構造翼との結合した系の振動解析のための一般式を示し，この系の一部分でである，主翼部分の構造の二，三の数値解析例と全体の系の数値解析例を示したい。

数値計算例は，実験をおこなったものについては実測結果と比較し，数値計算の近似を吟味するとともに，この数値解析結果が実験結果と一致しない点について簡単な吟味もおこなったので併記した。

胴体と構造翼を結合したモデルとして図1に示すような構造物を考えた。

胴体は部分的に剛性および質量の一様な段付はりと考え，翼は翼厚がスパン方向に直線的に変厚し，けた，小骨および補強材のない等厚外板とによって構成されているものとした。

座標は翼の中立面をxy面にとり，原点を胴体の中心軸と翼前縁の延長線との交点にとった。

翼の中立面を通るxy平面からのたわみを試験関数とし，

$$w(x,y)=\sum a_{mn}x^my^n \qquad \cdots\cdots(1.1)$$

の形のべき級数で仮定したことはTR-160と同様である。この関数から単純曲げ理論を用いて，胴体の曲げおよびねじり，けたおよび小骨の曲げおよびねじり，また外板の面内引張圧縮と曲げを考え，それぞれのひずみエネルギーおよび運動エネルギーを計算した。

1.1 主翼のエネルギーの計算

図2,3および4に主翼のエネルギー計算に用いる寸法記号を示す。主翼はx軸を対称軸として両翼について計算する。

1.1.1 外板の曲げエネルギー

外板の曲げエネルギーは，板の曲げ変形は中立面の

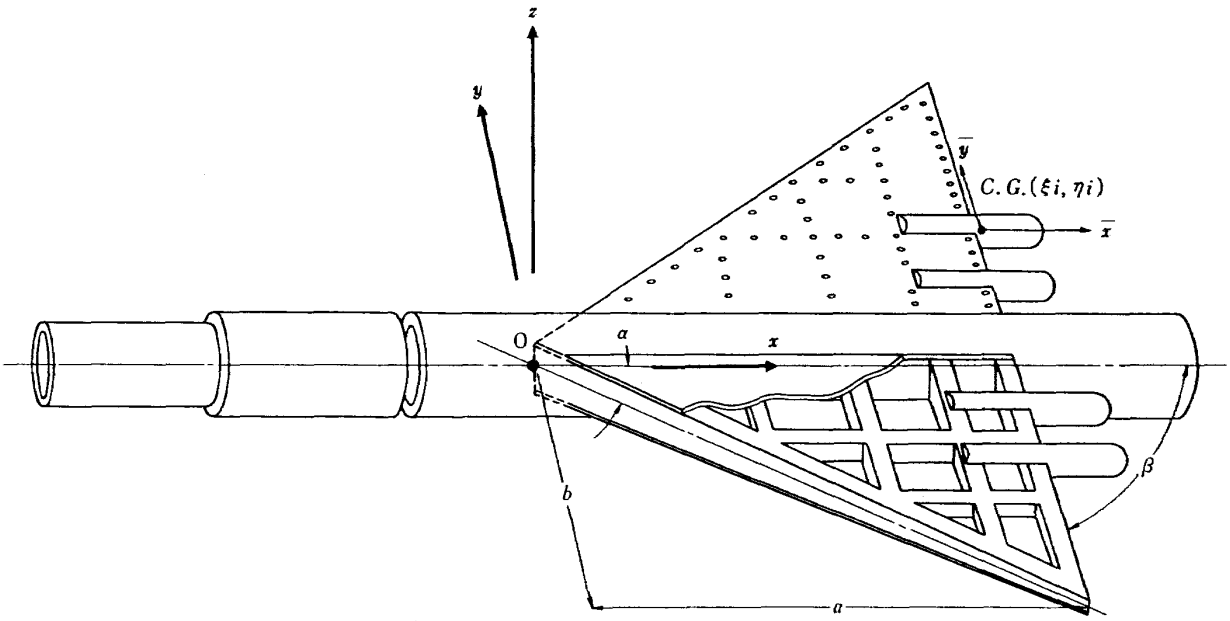


図 1 対象とした構造物の概略図および座標

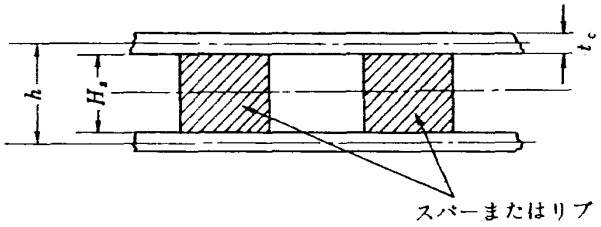


図 2-1

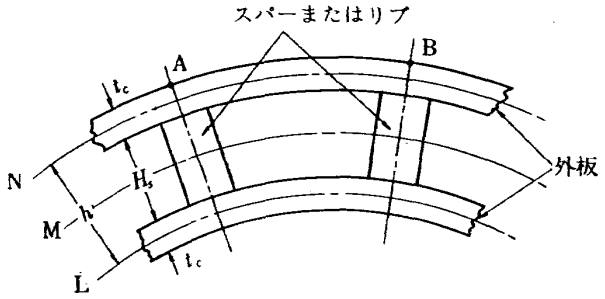


図 2-2

図 2 翼断面の形状寸法図

変形と同じと仮定して計算すると，これは TR-160 と同様に求められて，上下外板 2 枚であるから，曲げによるひずみエネルギーは

$$V_1=2\frac{D}{2}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}A_{mnrs}\,a\cdot b^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.1.1)$$

となる。ここに外板は等厚な外板とした。外板も変厚にする場合には，TR-60[3] に用いた A_{mnrs} を用いる必要がある。また，運動エネルギーは

$$T_1=2\frac{D}{2}\lambda^2a^4k^{-4}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}A'_{mnrs}\,a\cdot b^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.1.2)$$

となる。ここに，

$$A_{mn}=a_{mn}\,a^mb^n,$$

$$D=\frac{E_ct_c^3}{12(1-\nu^2)},$$

$$k=a/b,$$

$$\begin{aligned}A_{mnrs}=&\,m(m-1)\,r(r-1)k^{-4}\cdot M_{m+r-4,\,n+s},\\&+n(n-1)\,s(s-1)\cdot M_{m+r,\,n+s-4},\\&+2\nu\,m(m-1)\,s(s-1)k^{-2}\,M_{m+r-2,\,n+s-2},\\&+2(1-\nu)_{mnrs}\,k^{-2}\,M_{m+r-2,\,n+s-2},\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.1.1.3)$$

$$A'_{mnrs}=M_{m+r,\,n+s},$$

$$\lambda^2a^4k^{-4}=\lambda^2b^4=\omega^2\rho_ct_cb^4/D$$

$$\begin{aligned}M_{p,q}=&\,\{1-(-1)^{n+s+1}\}\\&\times\left\{\sum_{i=0}^{p+1}\frac{p!}{(p+1-i)!\,i!\,(p+q+2-i)}\left(\frac{\cot\beta}{k}\right)^{p+1-i}\right.\\&\left.-\frac{1}{(p+1)(p+q+2)}\left(\frac{\cot\alpha}{k}\right)^{p+1}\right\}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(1.1.1.4)$$

である。$\{1-(-)^{n+s+1}\}$ は両翼が対称にあるために生じた係数である。試験関数の項の種類を任意にとると，$n+s+1$ の値によりこの括弧内が 2 または 0 となる配列に関係して最終的に与えられる振動数方程式は x 軸に対称な振動と逆対称な振動とに分離するが，初めから試験関数を対称な関数と逆対称な関数に分けて計算するときにはこれを 2 とすればよい。片持翼のときは，これを 1 とし，試験関数は片持の付根条件をみたす関数を用いればよい。

1.1.2 主翼外板の面内エネルギー

面内変形による外板のひずみエネルギー V_2 は，外

板の面内変位を，u, v, w，面内ひずみを $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}$ とすると，上下2枚の外板を考えて，

$$V_2=2\frac{E_c t_c}{2(1-\nu^2)}\iint\left(\varepsilon^2{}_x+\varepsilon^2{}_y+2\nu\varepsilon_x\varepsilon_y+\frac{1-\nu}{2}\gamma^2{}_{xy}\right)dxdy \qquad \cdots\cdots(1.1.2.1)$$

となる。(1.1.1.1)式でものべたように，t_c を一様厚としたが変厚になると，この値は積分記号内に入る，以下等厚外板として進める。

ここに，図2-2の幾何学的関係から，

$$\left.\begin{aligned}\varepsilon_x&=\mp\frac{h(x,y)}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ &\text{(下面の外板では＋となる)}\\ \varepsilon_y&=\mp\frac{h(x,y)}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\\ \gamma_{xy}&=\mp 2\frac{h(x,y)}{2}\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.1.2.2)$$

であるから，E_c＝定数として，計算すると，

$$\begin{aligned}V_2&=2\frac{E_c t_c h_m^2}{2(1-b^2)\cdot 4}\iint\left(\frac{h}{h_m}\right)^2\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)^2+2\nu\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}+\frac{4(1-\nu)}{2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2\right\}dxdy\\ &=\frac{2}{8}\frac{E_c t_c h^2{}_m}{(1-\nu^2)}\sum_{\substack{m,\\ n}}\sum_{\substack{r,\\ s}}a_{mn}\,a_{rs}\,B_{mnrs}\cdot k^{m+r+1}\cdot b^{m+n+r+s-2} \qquad \cdots\cdots(1.1.2.3)\end{aligned}$$

ここに，

$$\begin{aligned}B_{mnrs}=&\,m(m-1)\,r(r-1)k^{-4}\sum_{p,q}e_{pq}\,M_{m+r-4+p,\,n+s+q},\\ &+n(n-1)\,s(s-1)\sum_{p,q}e_{pq}M_{m+r+p,\,n+s+q-4},\\ &+2\nu\,m(m-1)\,s(s-1)k^{-2}\sum_{p,q}e_{pq}M_{m+r+p-2,\,n+s+q-2},\\ &+2(1-\nu)mnrs\,k^{-2}\sum_{p,q}e_{pq}\,M_{m+r-2+p,\,n+s+q-2}, \qquad \cdots\cdots(1.1.2.4)\end{aligned}$$

となる。ここに e_{pq} は，翼厚が変厚のため，h は一般には x, y の関数 $h(x, y)$ として与えられるため，$(h/h_m)^2$ の展開係数の値として与えられるものである。つまり，

$$h^2=\sum_{p,q}h_{pq}a^p b^q\left(\frac{x}{a}\right)^p\left(\frac{y}{b}\right)^q \qquad \cdots\cdots(1.1.2.5)$$

として，h の最高値を h_m とし，この h_m との比の2乗を

$$\begin{aligned}\left(\frac{h}{h_m}\right)^2&=\frac{\sum_{p,q}h_{pq}\,a^p b^q\left(\frac{x}{a}\right)^p\left(\frac{y}{b}\right)^q}{h_m^2}\\ &=\sum_{p,q}e_{pq}\left(\frac{x}{a}\right)^p\left(\frac{y}{b}\right)^q \qquad \cdots\cdots(1.1.2.6)\end{aligned}$$

としたときの e_{pq} の値を示すものとする。

この式を整理すると，

$$V_2=2\frac{D}{2}\frac{E_c t_c h_m^2}{4(1-\nu^2)D}\sum_{\substack{m,\\ n}}\sum_{\substack{r,\\ s}}A_{mn}\,A_{rs}\,B_{mnrs}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.2.7)$$

となる。

また運動のエネルギーは，

$$T_2=2\frac{\omega^2\rho_c t_c}{2}\iint\{u^2+v^2\}\,dxdy \qquad \cdots\cdots(1.1.2.8)$$

より，

$$u=\mp\frac{h}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right),$$

$$v=\mp\frac{h}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)$$

を用いて，

$$T_2=2\frac{D}{2}\frac{h_m^2}{4a^2}\lambda^2 a^4 k^{-4}\sum_{\substack{m,\\ n}}\sum_{\substack{r,\\ s}}A_{mn}\,A_{rs}\,B'_{mnrs}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.2.9)$$

となる。

ここに，

$$\begin{aligned}B'_{mnrs}=&\,m\cdot r\sum_{p,q}e_{pq}\,M_{m+r+p-2,\,n+s+q}\\ &+n\cdot s\sum_{p,q}e_{pq}\,M_{m+r+p,\,n+s+q-2} \qquad \cdots\cdots(1.1.2.10)\end{aligned}$$

である。

1.1.3 けたのエネルギー

つぎにけたのエネルギーを求める。図3にs番目のけたの座標を示した。ここでは一般に胴体軸に傾斜するけたを用いたが，胴体軸に直角なけたの場合はこの特殊な場合である。

けたの曲げによるひずみエネルギーを V_3 とする。

けたの曲げ剛性を $E_s I_s$ とすると，まずけたの方向に線積分をすると，けたはスパン方向翼端まで図3-1のように達している場合には，

$$V_{3s}=\frac{E_s}{2}\int_0^{s=L_s}I_s\left(\frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right)^2 \qquad \cdots\cdots(1.1.3.1)$$

となる。いまけたの方程式を用いて，y 方向積分に変換すると，けたの方程式は，図3に示したように，

$$x=S_s+p_s y \qquad \cdots\cdots(1.1.3.2)$$

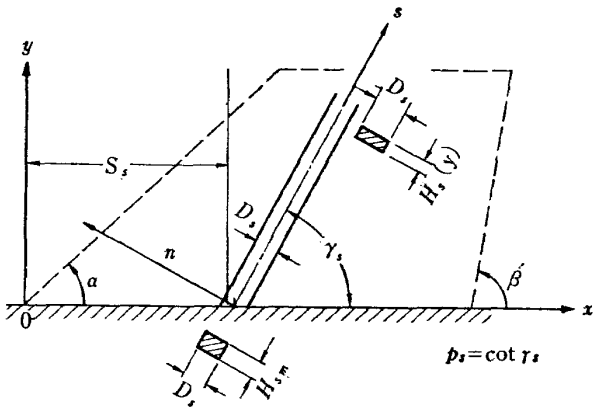


図 3-1

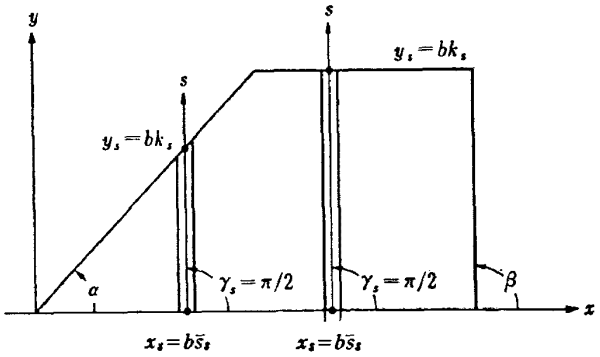


図 3-2

図 3 スパーの位置寸法

であるから，V_3 は変換されて，

$$V_{3s}=\frac{E_s I_{sm}}{2}J_s\int_0^b\left(\frac{H_s}{H_{sm}}\right)^3\left\{\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\cos^2\gamma_s+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)\cos\gamma_s\sin\gamma_s+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right)\sin^2\gamma_s\right\}^2 dy \quad \cdots\cdots(1.1.3.3)$$

となる。ここにけたは高さが変化する一定幅の矩形断面形状のはりと仮定し，

$$I_s=I_{sm}\left(\frac{H_s}{H_{sm}}\right)^3,\quad I_{sm}=b_s H_{sm}^3/12$$

とする。

この式を用いて V_3 を整理すると，

$$\begin{aligned}V_{3s}=\frac{E_s I_{sm}J_s}{2}\int_0^b\left(\frac{H_s}{H_{sm}}\right)^3\sum\sum a_{mn}a_{rs}&\times(S_s+p_s y)^{m+r-4}\cdot y^{n+s-4}\\&\times\{m(m-1)r(r-1)y^4A_s^2\\&+m(m-1)s(s-1)(S_s+p_s y)^2\cdot y^2A_sC_s\\&+m(m-1)rs(S_s+p_s y)\cdot y^3A_sB_s\\&+n(n-1)r(r-1)(S_s+p_s y)^2\cdot y^2A_sC_s\\&+n(n-1)s(s-1)(S_s+p_s y)^4C_s^2\\&+n(n-1)rs(S_s+p_s y)^3\cdot y\cdot B_sC_s\\&+m\cdot n\cdot r(r-1)(S_s+p_s y)\cdot y^3\cdot A_sB_s\\&+m\cdot n\cdot s(s-1)(S_s+p_s y)^3\cdot y\cdot B_sC_s\\&+m\cdot n\cdot r\cdot s(S_s+p_s y)^2\cdot y^2\cdot B_s^2\}dy\end{aligned} \quad \cdots\cdots(1.1.3.4)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned}A_s&=\cos^2\gamma_s\\B_s&=2\sin\gamma_s\cdot\cos\gamma_s\\C_s&=\sin^2\gamma_s\\J_s&=\left(\frac{1}{\sin\gamma_s}\right)\end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(1.1.3.5)$$

である。

いま，けたの変厚定数，$(H_s/H_{sm})^3$ が次の式で支えられたとすると，

$$\begin{aligned}(H_s/H_{sm})^3&=\frac{1}{H_{sm}^3}\sum_q H_{sq}b^q\left(\frac{y}{b}\right)^q\\&=\sum_q F_{sq}y^q=\sum_q f_{sq}\eta^q\end{aligned} \quad \cdots\cdots(1.1.3.6)$$

$$\begin{aligned}V_{3s}=\frac{E_s I_{sm}J_s}{2}\int_0^b\sum_{m,n}\sum_{r,s}a_{mn}a_{rs}\sum F_{sq}y^q&\times\{A_sm(m-1)r(r-1)(S_s+p_s y)^{m+r-4}y^{n+s}\\&+A_sC_sm(m-1)s(s-1)(S_s+p_s y)^{m+r-2}y^{n+s-2}\\&+A_sB_sm(m-1)rs(S_s+p_s y)^{m+r-3}\cdot y^{n+s-1}\\&+A_sC_sn(n-1)r(r-1)(S_s+p_s y)^{m+r-2}\cdot y^{n+s-2}\\&+C_s^2n(n-1)s(s-1)(S_s+p_s y)^{m+r}\cdot y^{n+s-4}\\&+B_sC_sn(n-1)rs(S_s+p_s y)^{(m+r-1)}\cdot y^{n+s-3}\\&+A_sB_s m\cdot n\cdot r(r-1)(S_s+p_s y)^{m+r-3}\cdot y^{n+s-1}\\&+B_sC_s m\cdot n\cdot s(s-1)(S_s+p_s y)^{m+r-1}\cdot y^{n+s-3}\\&+B_s^2m\cdot n\cdot r\cdot s(S_s+p_s y)^{m+r-2}\cdot y^{n+s-2}\}dy\end{aligned} \quad \cdots\cdots(1.1.3.7)$$

ここに，

$$\begin{aligned}I_{spq}&=\int_0^b(S_s+p_s y)^p y^q dy\\&=b^{p+q+1}p_s^p\sum_{r=0}^{p}\frac{{}_pC_r}{q+r+1}a_s^{p-r}=b^{p+q+1}U_{spq}\end{aligned} \quad \cdots\cdots(1.1.3.8)$$

$$a_s=s_s/p_s,\quad s_s=S_s/b$$

を用いて整理すると，けたの本数を s 本とすると，

$$V_3=\frac{D}{2}\sum_s\frac{E_s I_{sm}J_s}{Da}\sum_{m,n}\sum_{r,s}A_{mn}A_{rs}S_{mnrs}k^{-(m+r)}\cdot a\cdot b^{-3} \quad \cdots\cdots(1.1.3.9)$$

となる。

ここに，

$$S_{mnrs}=A_s^2 m(m-1)r(r-1)\sum_q f_{sq}U_{s,\,m+r-4,\,n+s+q},$$
$$+A_sB_s\{mrs(m-1)+mnr(r-1)\}\sum_q f_{sq}U_{s,\,m+r-3,\,n+s+q-1},$$
$$+A_sC_s\{m(m-1)s(s-1)+n(n-1)r(r-1)\}\sum_q f_{sq}U_{s,\,m+r-2,\,n+s+q-2},$$
$$+B_s^2 mnrs\sum_q f_{sq}U_{s,\,m+r-2,\,n+s+q-2},$$
$$+B_sC_s\{nrs(n-1)+mns(s-1)\}\sum_q f_{sq}U_{s,\,m+r-1,\,n+s+q-3},$$
$$+C_s^2 n(n-1)s(s-1)\sum f_{sq}U_{s,\,m+r,\,n+s+q-4} \qquad \cdots\cdots(1.1.3.10)$$

両翼の場合には,

$$U_{spq}=\{1-(-1)^{(n+s+1)}\}p_s^p\sum_{r=0}^{p}\frac{{}_pC_r}{q+r+1}a_s^{p-r} \qquad \cdots\cdots(1.1.3.11)$$

で，片翼の場合には $\{1-(-1)^{n+s+1}\}=1$ とする。

U_{spq} の計算では，γ_s が 90° の場合には a_s は無限大となるから，このときは別のサブルーチンを用いた。

このときに用いる計算式は，S_{mnrs} において，

$A_s=0$, $B_s=0$, $C_s=1$.

$$U_{m+r,\,n+s+q-4}=\frac{2\bar{s}_s^{m+r}k_s^{n+s+q-3}}{n+s+q-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.3.12)$$

$\bar{s}_s=x_s/b$, $k_s=y_s/b$ で y_s は翼端に達していない場合も含めるものとする(図 3-2)。

また運動のエネルギーは,

$$T_{3s}=\frac{\omega^2\rho_s}{2}\int_0^{S=L_s}A_s w^2\,ds$$
$$=\frac{\omega^2\rho_s A_{sm}}{2}\int_0^{S=L_s}\left(\frac{H_s}{H_{sm}}\right)w^2\,ds \qquad \cdots\cdots(1.1.3.13)$$

となる。ここに A_s はけた断面積，A_{sm} は最高けた厚部のけたの断面積，けたの幅は一定とする。断面積は高さに比例するから,

$$\left(\frac{H_s}{H_{sm}}\right)=\sum_q h_{sq}y^q=\sum_q g_{sq}\eta^q \qquad \cdots\cdots(1.1.3.14)$$

として，T_3 を整理すると,

$$T_3=\frac{D}{2}\lambda^2a^4k^{-4}\sum_s\frac{\rho_sA_{sm}}{\rho_cf_ca}J_s\sum\sum A_{mn}$$
$$\times A_{rs}\sum_q g_{sq}U_{s,\,m+r,\,n+s+q}\,k^{-(m+r)}\cdot a\cdot b^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.3.15)$$

となる。

$\gamma_s=\pi/2$ のときは,

$$U_{sp,\,q}=2\frac{\bar{s}_s^p k_s^{q+1}}{q+1}$$

けたのねじりエネルギーはひずみエネルギを V_4 とすると,

$$V_{4s}=\frac{G_s}{2}\int_0^{S=L_s}K_s\left(\frac{\partial\varphi}{\partial s}\right)ds$$
$$=\frac{G_sK_{sm}}{2}\int_0^{S=L_s}\left(\frac{K_s}{K_{sm}}\right)(\partial^2w/\partial n\cdot\partial s)^2\,ds \qquad \cdots\cdots(1.1.3.16)$$

となる。y 方向積分に変換すると,

$$V_{4s}=\frac{G_sK_{sm}J_s}{2}\int_0^b\left(\frac{K_s}{K_{sm}}\right)$$
$$\times\left\{D_s\left(\frac{\partial^2w}{\partial x^2}\right)+E_s\left(\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)+F_s\left(\frac{\partial^2w}{\partial y^2}\right)\right\}^2dy \qquad \cdots\cdots(1.1.3.17)$$

ここに,

$$\left.\begin{aligned}D_s&=-\sin\gamma_s\cos\gamma_s\\E_s&=-\sin^2\gamma_s+\cos^2\gamma_s\\F_s&=\sin\gamma_s\cos\gamma_s\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.1.3.18)$$

であるので，V_3 で用いた S_{mnrs} が用いられ，S_{mnrs} の A_s, B_s, C_s を上式の D_s, E_s, F_s に置換し,

$$(K_s/K_{sm})=\sum_q k_{sq}y^q=\sum_q i_{sq}\eta^q$$

を用い，S_{mnrs} を T_{mnrs} とすれば,

$$V_4=\frac{D}{2}\sum_s\frac{G_sK_{sm}}{Da}J_s\sum_{m,n}\sum_{r,s}A_{mn}A_{rs}T_{mnrs}\cdot ab^{-3}$$
$$\times k^{-(m+r)} \qquad (1.1.3.19)$$

となる。

この場合にも $\gamma_s=90°$ のときには曲げの場合と同じように，$\sin\gamma_s=1$, $J_s=1$, $p_s=0$ で,

$D_s=0$, $E_s=-1$, $F_s=0$ となるので，別のサブルーチン,

$$U_{spq}=2\frac{\bar{s}_s^p k_s^{q+1}}{q+1}$$

を用いる。

同様に運動のエネルギーは，T_4 とすると,

$$T_{4s}=\frac{\omega^2\rho_s}{2}\int_0^{S=L_s}I_{0s}\varphi^2\,ds$$
$$=\frac{\omega^2\rho_sI_{0sm}}{2}\int_0^{S=L_s}\left(\frac{I_{0s}}{I_{0sm}}\right)\varphi^2ds \qquad \cdots(1.1.3.20)$$

$$(I_{0s}/I_{0sm})=\sum_q I_{0sq}\eta^q$$

より,

$$T_4=\frac{D}{2}\lambda^2a^4k^{-4}\sum_{s}\frac{\rho_s I_{0sm}J_s}{a\rho_c t_c b^2}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}T'_{mnrs}$$

$$\times k^{-(m+r)}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.3.21)$$

ここに，

$$T'_{mnrs}=m\cdot r\cdot G_s^2\sum_q I_{0sq}\cdot U_{s,\,m+r-2,\,n+s+q},$$

$$+n\cdot s\cdot \bar{K}_s^2\sum_q I_{0sq}U_{s,\,m+r,\,n+s+q-2},$$

$$+(ms+nr)G_s\bar{K}_s\sum_q I_{0sq}\cdot U_{s,\,m+r-1,\,n+s+q-1}$$

$$\cdots\cdots(1.1.3.22)$$

$$\left.\begin{aligned}G_s&=-\sin\gamma_s,\\ \bar{K}_s&=\cos\gamma_s\end{aligned}\right\} \qquad \cdots\cdots(1.1.3.23)$$

である。

$\gamma_s=90°$ のときは，$G_s=-1$，$\bar{K}_s=0$ で

$$U_{spq}=2\frac{\bar{s}_s{}^p k^{q+1}}{q+1},$$

である。

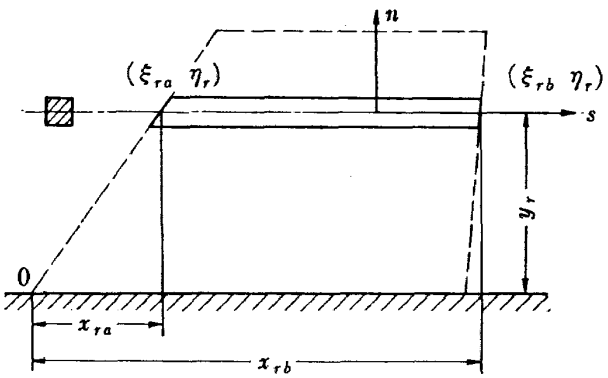


図 4 小骨の位置寸法

1.1.4 小骨のエネルギーの計算

小骨の曲げに関するエネルギーを求める。小骨は x 軸に平行な位置におかれたものと考え，コード方向には翼厚一定とした場合に限定する。ただ，小骨はスパン方向の翼厚によって変るから小骨のある位置によって各小骨の寸法はことなる。

図 4 に小骨の座標寸法を示す。

まず，ひずみエネルギー V_5 は

$$V_{5r}=2\frac{E_rI_r}{2}\int_{x_{ra}}^{x_{rb}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2dx \qquad \cdots\cdots(1.1.4.1)$$

より

$$V_5=2\frac{D}{2}\sum_r\frac{E_rI_rb^3}{a^4D}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}\frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-3}(\xi_{rb}{}^{m+r-3}-\xi_{ra}{}^{m+r-3})\eta_r{}^{n+s}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.4.2)$$

運動エネルギー T_5 は，

$$T_{5r}=2\sum_r\frac{\omega^2\rho_rA_r}{2}\int_{x_{ra}}^{x_{rb}}w^2dx \qquad \cdots\cdots(1.1.4.3)$$

より，

$$T_5=2\frac{D}{2}\lambda^2a^4k^{-4}\sum_r\frac{\rho_rA_r}{\rho_ct_cb}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}\frac{1}{m+r+1}(\xi_{rb}{}^{m+r+1}-\xi_{ra}{}^{m+r+1})\eta_r{}^{n+s}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.4.4)$$

となる。

ねじりに関するひずみエネルギー V_6 は，

$$V_{6r}=\sum_r\frac{G_rK_r}{2}\int_{x_{ra}}^{x_{rb}}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x\partial y}\right)^2dx \qquad \cdots\cdots(1.1.4.5)$$

より，

$$V_6=\frac{2D}{2}\sum_r\frac{G_rK_rb}{Da^2}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}\frac{mnrs}{m+r-1}(\xi_{rb}{}^{m+r-1}-\xi_{ra}{}^{m+r-1})\eta_r{}^{n+s-2}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.4.6)$$

また運動のエネルギー T_6 は，

$$T_6=\sum_r\frac{\omega^2\rho_rI_{0r}}{2}\int_{x_{ra}}^{x_{rb}}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2dx \qquad \cdots\cdots(1.1.4.7)$$

より，

$$T_6=2\frac{D}{2}\lambda^2a^4k^{-4}\sum_r\frac{\rho_rI_{0r}}{\rho_ct_cb^3}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}\frac{ns}{m+r+1}(\xi_{rb}{}^{m+r+1}-\xi_{rb}{}^{m+r+1})\eta_r{}^{n+s-2}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.4.8)$$

である。

ここに，$\xi_{rb}=x_{rb}/a$，$\xi_{ra}=x_{ra}/a$，$\eta_r=y_r/b$ である。

1.1.5 翼のエネルギー

翼のエネルギーを整理する。対称な両翼とすると，

$$V_1=2\frac{D}{2}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}A_{mnrs}a\cdot b^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.5.1)$$

$$V_2=2\frac{D}{2}\frac{E_c t_c h_m^2}{4(1-\nu^2)}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}B_{mnrs}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.5.2)$$

$$V_3=\frac{D}{2}\sum_{s}\frac{E_s I_{sm} J_s}{Da}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}S_{mnrs}\cdot k^{-(m+r)}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.5.3)$$

$$V_4=\frac{D}{2}\sum_{s}\frac{G_s K_{sm} J_s}{Da}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}T_{mnrs}\cdot k^{-(m+r)}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.5.4)$$

$$V_5=\frac{D}{2}\sum_{r}\frac{E_r I_r b^3}{Da^4}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}\frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-3}(\xi_{rb}{}^{m+r-3}-\xi_{ra}{}^{m+r-3})\eta_r{}^{n+s}\cdot ab^{-3}\times 2 \qquad \cdots\cdots(1.1.5.5)$$

$$V_6=\frac{D}{2}\sum_{r}\frac{G_r K_r b}{Da^2}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}\frac{mnrs}{m+r-1}(\xi_{rb}{}^{m+r-1}-\xi_{ra}{}^{m+r-1})\eta_r{}^{n+s-2}\cdot ab^{-3}\times 2 \qquad \cdots\cdots(1.1.5.6)$$

$$T_1=2\frac{D}{2}\lambda^2 a^4 k^{-4}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}A'_{mnrs}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.5.7)$$

$$T_2=2\frac{D}{2}\lambda^2 a^4 k^{-4}\frac{h_m^2}{4a^2}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}B'_{mnrs}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.5.8)$$

$$T_3=\frac{D}{2}\lambda^2 a^4 k^{-4}\sum_{s}\frac{\rho_s A_{sm} J_s}{\rho_c t_c a}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}\sum g_{sq}U_{s,\,m+r,\,n+s+q}\cdot k^{-(m+r)}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.5.9)$$

$$T_4=\frac{D}{2}\lambda^2 a_4 k^{-5}\sum_{s}\frac{\rho_s I_{0sm} J_s}{\rho_c t_c b^2 a}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}T'_{mnrs}\cdot k^{-(m+r)}\cdot ab^{-3} \qquad \cdots\cdots(1.1.5.10)$$

$$T_5=\frac{D}{2}\lambda^2 a^4 k^{-4}\sum_{r}\frac{\rho_r A_r}{\rho_c t_c b}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{n,\\s}}A_{mn}A_{rs}\frac{1}{m+r+1}(\xi_{rb}{}^{m+r+1}-\xi_{ra}{}^{m+r+1})\eta_r{}^{n+s}\cdot ab^{-3}\times 2 \qquad \cdots\cdots(1.1.5.11)$$

$$T_6=\frac{D}{2}\lambda^2 a^4 k^{-4}\sum_{r}\frac{\rho_r I_{0r}}{\rho_c t_c b^3}\sum_{\substack{m,\\n}}\sum_{\substack{r,\\s}}A_{mn}A_{rs}\frac{ns}{m+r+1}(\xi_{rb}{}^{m+r+1}-\xi_{ra}{}^{m+r+1})\eta_r{}^{n+s-2}\cdot ab^{-3}\times 2 \qquad \cdots\cdots(1.1.5.12)$$

となる。

ここに，V_1, V_2, T_1, T_2 の係数の2は外板が上下2枚あるための係数で，これらの値が両翼対称にあるための係数は，$A_{mnrs}, B_{mnrs}, A'_{mnrs}, B'_{mnrs}$ の中にある $U_{s,p,q}$ の係数および $M_{p,q}$ の係数によって与えられる。

V_3, V_4, T_3, T_4 が両翼対称のための係数は $U_{s,p,q}$ の係数に含まれるものとする。

V_5, V_6, T_5, T_6 の両翼対称の係数は式後尾の ×2 によって示した。

つぎに胴体のエネルギーを求める。

1.2 胴体のエネルギーの計算

1.2.1 胴体の曲げエネルギーの計算

曲げによるひずみエネルギーを，図5に示した座標で考える。胴体は段付の一様はりと考えて，M 区間を考え，左側より段付はりの区間の座標の添字を，

$\mu=1,\cdots\cdots,M$ とする。

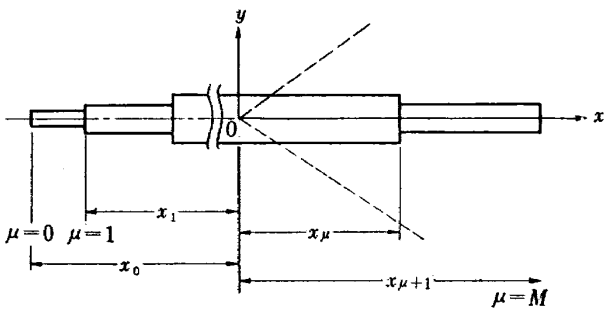


図5 胴体寸法

曲げによるひずみエネルギーは，

$$V_7=\sum_{\mu=1}^{M}\frac{1}{2}\int_{a\xi_{\mu-1}}^{a\xi_\mu}(E_B I_B)_\mu\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx$$

$$=\sum_{\mu=1}^{M}\frac{(E_B I_B)_m}{2}\int_{a\xi_{\mu-1}}^{a\xi_\mu}\frac{(E_B I_B)_\mu}{(E_B I_B)_m}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)^2 dx \qquad \cdots\cdots(1.2.1.1)$$

ここに，$(E_BI_B)_m$ は最高曲げ剛性部分の剛性で，$(E_BI_B)_\mu$ はある区間の曲げ剛性とする。

この式を整理すると，

$$V_7=\frac{D}{2}\frac{(E_BI_B)_m b^3}{Da}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{(E_BI_B)_\mu}{(B_BI_B)_m}\sum_{m,}\sum_{r,}A_{m0}A_{r0}\frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-3}(\xi_\mu{}^{m+r-3}-\xi_{\mu-1}{}^{m+r-3})\cdot ab^{-3} \quad \cdots\cdots(1.2.1.2)$$

となる。ここに，

$\xi_\mu=x_\mu/a$ で，A_{m0}, A_{r0} の添字 0 は，$\sum a_{mn}x^m y^n$ の関数で $y=0$ の値のところを用いるために残る $n=0$ の項の係数である。

曲げによる運動のエネルギーは，

$$T_7=\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\omega^2}{2}\int_{a\xi_{\mu-1}}^{a\xi_\mu}(mA)_\mu w^2\,dx$$
$$=\frac{\omega^2(mA)_m}{2}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{(mA)_\mu}{(mA)_m}\int_{a\xi_{\mu-1}}^{a\xi_\mu}w^2\,dx \quad \cdots\cdots(1.2.1.3)$$

ここに，$(mA)_m$ は最高値を示す。

整理して，

$$T_7=\frac{D}{2}\lambda^2a^4k^{-4}\frac{(mA)_m}{\rho_c t_c b}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{(mA)_\mu}{(mA)_m}\sum_{m,}\sum_{r,}A_{m0}A_{r0}\frac{(\xi_\mu{}^{m+r+1}-\xi_{\mu-1}{}^{m+r+1})}{m+r+1}\cdot ab^{-3} \quad \cdots\cdots(1.2.1.4)$$

となる。

1.2.2 胴体のねじりエネルギーの計算

この場合も 1.2.1 の曲げと同様に，ひずみエネルギーは，

$$V_8=\sum_{\mu=1}^{M}\frac{1}{2}\int_{a\xi_{\mu-1}}^{a\xi_\mu}(GK)_\mu(\partial^2w/\partial x\partial y)^2\,dx$$
$$=(GK)_m\sum_{\mu=1}^{M}\frac{(GK)_\mu}{(GK)_m}\int_{a\xi_{\mu-1}}^{a\xi_\mu}\left(\frac{\partial^2w}{\partial x\partial y}\right)^2dx \quad \cdots\cdots(1.2.1.5)$$

となる。

整理して，

$$V_8=\frac{D}{2}\frac{(GK)_m b}{a^2D}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{(GK)_\mu}{(GK)_m}\sum_{m}\sum_{r}A_{m1}A_{r1}\frac{mr}{m+r-1}(\xi_\mu{}^{m+r-1}-\xi_{\mu-1}{}^{m+r-1})\cdot ab^{-3} \quad \cdots\cdots(1.2.1.6)$$

となる。

運動のエネルギーも同様に，

$$T_8=\sum_{\mu=1}^{M}\frac{\omega^2}{2}\int_{a\xi_{\mu-1}}^{a\xi_\mu}(mI_0)_\mu\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2dx \quad \cdots\cdots(1.2.1.7)$$

より，

$$T_8=\frac{D}{2}\lambda^2a^4k^{-4}\frac{(mI_0)_m}{\rho_c t_c b^3}\sum_{\mu=1}^{M}\frac{(mI_0)_\mu}{(mI_0)_m}\sum_{m}\sum_{r}A_{m1}A_{r1}\frac{(\xi_\mu{}^{m+r+1}-\xi_{\mu-1}{}^{m+r+1})}{m+r+1}\cdot ab^{-3} \quad \cdots\cdots(1.2.1.8)$$

となる。ここに，A_{m1}, A_{r1} は $\sum a_{mn}x^m y^n$ の y の指数 $n=1$ の項のみが残ることを示す。

1.3 振動数方程式の誘導

以上により各エネルギーが求められたので振動数方程式を求めることは容易である。

系のポテンシャルエネルギーを Π とすると，

$$\Pi=V_1+V_2+V_3+V_4+V_5+V_6+V_7+V_8$$
$$-(T_1+T_2+T_3+T_4+T_5+T_6+T_7+T_8) \quad \cdots\cdots(1.3.1)$$

が停留値をとる条件から，振動数方程式が求められる。

このとき，A_{mn} で微分する場合に，B_{mnrs} の項の中の m, n, r, s によって作られる係数は少し変形して，B_{mnrs} とはことなった Q_0 (1.3.7 式) のような形になる。

$$\Pi=U-T \quad \cdots\cdots(1.3.2)$$

$$\Pi'=2b^3a^{-1}D^{-1}\Pi \quad \cdots\cdots(1.3.3)$$

として，$\frac{1}{2}\partial\Pi'/\partial A_{mn}$ を求めると次の式となる。

$$\frac{1}{2}\partial\Pi'/\partial A_{mn}$$
$$=P_0Q_0+\sum_{s}P_3Q_3+\sum_{s}P_4Q_4+\sum_{r}P_5Q_5+\sum_{r}P_6Q_6$$
$$+\sum_{\mu}P_7Q_7+\sum_{\mu}P_8Q_8$$
$$-X^2(R_1S_1+R_2S_2+\sum_{s}R_3S_3+\sum_{s}R_4S_4+\sum_{r}R_5S_5$$
$$+\sum_{r}R_6S_6+\sum_{\mu}R_7S_7+\sum_{\mu}R_8S_8) \quad \cdots\cdots(1.3.4)$$

ここに,

$$\left.\begin{aligned}
X^2&=\lambda^2a^4k^{-4}=\lambda^2b^4=\omega^2\rho_ct_cb^4/D\\
P_0&=2\cdot3h_m^2/t_c^2{}^*\\
P_2&=E_ct_ch_m^2/2(1-\nu^2)D\\
P_3&=E_sI_{sm}J_s/Da\\
P_4&=G_sK_{sm}J_s/Da\\
P_5&=2E_rI_rb^3/Da^4\\
P_6&=2G_rK_rb/Da^2\\
P_7&=(EI)_\mu b^3/Da^4\\
P_8&=(GK)_\mu b^3/Da^2b^2
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.3.5)$$

$$\left.\begin{aligned}
R_1&=2\\
R_2&=h_m^2/2a^2\\
R_3&=\rho_cA_{sm}J_s/\rho_ct_ca\\
R_4&=\rho_cI_{0sm}J_s/a\rho_ct_cb^2\\
R_5&=2\rho_rA_r/\rho_ct_cb\\
R_6&=2\rho_rI_{0r}/\rho_ct_cb^3\\
R_7&=(mA)_\mu/\rho_ct_cb\\
R_8&=(mI_0)_\mu/\rho_ct_cb^3
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.3.6)$$

$$\left.\begin{aligned}
Q_0=&\sum_{r,s}A_{rs}\Big[m(m-1)r(1-1)k^{-4}\sum_{p,q}E_{pq}M_{m+r+p-4,\,n+p+s+q}\\
&+n(n-1)s(s-1)\sum_{p,q}E_{pq}M_{m+r+p,\,n+s+q-4}\\
&+\nu\{m(m-1)s(s-1)+n(n-1)r(r-1)\}k^{-2}\sum_{p,q}E_{pq}M_{m+r+p-2,\,n+s+q-2}\\
&+2(1-\nu)mnrs\cdot k^{-2}\sum E_{pq}M_{m+r+p-2,\,n+s+q-2}\Big]^*\\
Q_3=&\sum_{r,s}A_{rs}S_{mnrs}\cdot k^{-(m+r)}\\
Q_4=&\sum_{r,s}A_{rs}T_{mnrs}\cdot k^{-(m+r)}\\
Q_5=&\sum_{r,s}A_{rs}\frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-3}(\xi_{rb}{}^{m+r-3}-\xi_{ra}{}^{m+r-3})\eta_r{}^{n+s}\\
Q_6=&\sum_{r,s}A_{rs}\frac{mnrs}{m+r-1}(\xi_{rb}{}^{m+r-1}-\xi_{ra}{}^{m+r-1})\eta_r{}^{n+s-2}\\
Q_7=&\sum_{r}A_{r0}\frac{m(m-1)r(r-1)}{m+r-1}(\xi_\mu{}^{m+r-3}-\xi_{\mu-1}{}^{m+r-3})\\
Q_8=&\sum_{r}A_{r1}\frac{mr}{m+r-1}(\xi_\mu{}^{m+r-1}-\xi_{\mu-1}{}^{m+r-1})
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(1.3.7)$$

$$\left.\begin{aligned}
S_1&=\sum_{r,s}A_{rs}A'_{mnrs}\\
S_2&=\sum_{r,s}A_{rs}B'_{mnrs}\\
S_3&=\sum_{r,s}A_{rs}\sum g_{sq}U_{m+r,\,n+s+q}\cdot k^{-(m+r)}\\
S_4&=\sum_{r,s}A_{rs}T'_{mnr}\cdot k^{-(m+r)}\\
S_5&=\sum_{r,s}A_{rs}\frac{1}{m+r+1}(\xi_{rb}{}^{m+r+1}-\xi_{ra}{}^{m+r+1})\eta_r{}^{n+s}\\
S_6&=\sum_{r,s}A_{rs}\frac{ns}{m+r+1}(\xi_{rb}{}^{m+r+1}-\xi_{ra}{}^{m+r+1})\eta_r{}^{n+s-2}\\
S_7&=\sum_{r}A_{r0}\frac{1}{m+r+1}(\xi_{rb}{}^{m+r+1}-\xi_{ra}{}^{m+r+1})\\
S_8&=\sum_{r}A_{r1}\frac{1}{m+r+1}(\xi_{rb}{}^{m+r+1}-\xi_{ra}{}^{m+r+1})
\end{aligned}\right\}$$

$$\cdots\cdots(1.3.8)$$

ここに*をつけた部分は，外板の曲げおよび面内変位によるエネルギーの項を統一したものである。

(1.1.1.3) 式の A_{mnrs} : (1.1.2.4) 式の B_{mnrs} とは同じ型の式で e_{pq} の値と合わせることができる。外板の曲げと引張りによる剛性は

$$D_T=\frac{E_ct_c^3}{12(1-\nu^2)}+\frac{E_ct_c}{(1-\nu^2)}\left(\frac{h_m}{2}\right)^2\cdots\cdots(1.3.9)$$

と考えられるから(*1)，この考えを利用して整理すると，D として $E_ct_c^3/12(1-\nu^2)$ を用いているので，定数は $\rho_0=3h_m^2/t_c^2$ となり，内部の e_{pq} の項が，B_{mnrs} の値だけでなく，$t_c^2/3h_m^2$ が追加された型となるので，これを E_{pq} と置いた。

つまり，スパン方向のみに直線的にテーパーしている場合には，

$$\begin{aligned}
\left(\frac{h}{h_m}\right)^2&=\left\{1-\left(1-\frac{h_t}{h_m}\right)\eta\right\}^2\\
&=-2\left(1-\frac{h_t}{h_m}\right)\eta+\left(1-\frac{h_t}{h_m}\right)^2\eta^2
\end{aligned}$$

$$\cdots\cdots(1.3.10)$$

(*1) この部分の変形に関しては Dr. T.C. Soong (The Boeing Company) の助言があった。

で，e_{pq}'は

$$1,\ -2\left(1-\frac{h_t}{h_m}\right),\ \left(1-\frac{h}{h_m}\right)$$

を表わすが，E_{pq}は

$$\left(\frac{t_c^2}{3h_m^2}+1\right),\ -2\left(1-\frac{h_t}{h_m}\right),\ \left(1-\frac{h_t}{h_m}\right)^2$$

のように $t_c/3h_m^2$ の項が追加されたものを表わすものとする。

また，等厚翼の場合には D_T の2項を比較することによって，曲げと面内変位のエネルギー量を比較することができて，曲げの影響が面内変位のエネルギーに比してどの程度あるか前もって推定することができる。等厚でない場合にもこの式で考えれば大略の比較ができよう。

等厚翼の場合の例としてのちに示す表3,4の値は，ある1つの項の試験関数の場合と二つの項を組み合わせた項について計算した例を示したものである。

いま，(1.3.9) 式において，試験片の実寸を代入して計算すると，

$$\frac{E_c t_c}{1-\nu^2}\left(\frac{h_m}{2}\right)^2\Big/\frac{Et_c^3}{12(1-\nu^2)}=3h_m^2/t_c^2 \qquad \cdots\cdots(1.3.11)$$

となるから，この比の値は，

等厚片持構造翼（計算例 A), a) の場合）は 675，等厚自由辺三角構造翼（計算例 A), b) の場合）は 768 となる。このため板の曲げエネルギーは無視しても十分であることが予想される。これらの数値はのちにしめす表4の数値と対応している。表4によると，項によっては多少相異があるが，ひずみエネルギーは，主として板の面内ひずみとけたまたは小骨の曲げひずみによるものであることがわかる。

運動エネルギーは板の曲げとけたまたは小骨の曲げによるもののようである。

(1.3.4) 式から振動数方程式が求められることは省略する。

以上は構造も比較的単純な形状の場合について誘導した式であるが，実際の構造では，このような単純な形状であることは少ない。例えば胴体の構造は一様剛性の段付はりではない。このとき胴体の定数を多項式で近似すれば，翼の場合と同様に解析することは容易である。また逆に，実機構造のけたなどにおいては，上記したように一様にテーパーするけたではない。実機のデルタ翼のけたをみると，エンジン周りのけたおよび引込み脚周辺のけたがほかの部分とことなり，剛性の高い構造になっており，これらの部分を胴体に結合する部分のけたは外翼および前縁翼と比較してかなりことなった寸法になっている。

われわれの誘導した式を，これらの形状のけたの翼に適用するためには，けたのエネルギーを積分する場合に簡単に翼形状の全域で積分するわけにはいかないで，部分的に剛性などのことなった積分をおこなう必要があろう。

また，実機ではエンジンの重量がかなり大きな割合をしめる。これは慣性項として考慮することにして，翼たわみ方向の移動，x 軸および y 軸回りの回転エネルギーを，仮定した試験関数から求めることは容易である。

また，この計算では，補強材によって補強された外板の場合はおこなっていない。外板のエネルギーを計算する場合，補強された外板では，異方性板として計算する方法が便利であろう。このときには，A_{mnrs}, B_{mnrs} などが方向によってことなる剛性定数などを用いた式となろう。これらの式の誘導は現在おこなっていないが，同様に誘導することができよう。またこのことは，外板にかぎらず，翼全体の場合にも同様に考えられることで，翼のけた，および小骨の密に入った構造の場合には，けたや小骨を一本ずつ計算することははんざつで構造的に誤差も多く，翼自体を等価な異方性変厚板として計算する方が便法であろう。

以上のようにして，このような構造物の大略の振動数と振動モードが解析できる。また，この程度の近似式を用いて，より複雑な構造物の振動を解析することも，定数の算定をうまくおこなえば，当然のことながら可能であろう。

ここで解析した系は，尾翼部については単に運動エネルギーの項のみを考慮し，振動系と考えなかった。そして試験関数も最終的には一種類の試験関数を用いる場合であった。

TR-159[2] の T 型結合板の例は，二つの試験関数を用いた例であるが，このように系が組み合わさった結合構造物を解析するような場合には，水平翼および構造翼とにそれぞれ別の試験関数を仮定することが必要となる。

また，胴体と主翼と結合した系に比較的大きなT型構造尾部などが結合している系の場合には，T型結合板でおこなったように，部分系の生の試験関数を用い，これらの試験関数間の結合の条件を用いて解く方法は，最終的に解くべき振動数方程式の次数が高くなるとともに，不必要に高次な各部の系の振動まで含めることになり不経済である。この解法による場合には一

考を要する点である。

以上胴体と主翼の結合系の解析式についてのべたが，以下これらの数値計算例および実測値についてのべる。

2. 実験および数値計算

1.で示した解析の実例として，桁および小骨のある片持等厚構造翼，周辺自由対称等厚構造翼および胴体と変厚構造翼の結合構造物の数値解析と実測とを示す。

A) 等厚構造翼

a) 片持等厚構造翼の振動

ここで解析をおこなった片持等厚構造翼は図6に示すような等厚の台形の構造翼で板厚15 mmのジュラルミン材から，必要な片側外板とけたおよび少骨とをけづり出した片側一体構造のほかの側に外板をリベット止めしたものである。

片持固定の部分も図6に示すように片側外板およびけたと一体構造であって，この固定部分を試験機の圧縮力を利用して固定したものである。

解析は等厚翼であるが，一般式の翼部分を用いることができる。片持翼であるので，試験関数は片持の条件を満たす次のような関数をとればよい。

$$
\begin{aligned}
w(x,y)=&a_{02}y^2+a_{03}y^3+a_{04}y^4+a_{05}y^5+a_{06}y^6\\
&+a_{07}y^7+a_{12}xy^2+a_{13}xy^3+a_{14}xy^4\\
&+a_{15}xy^5+a_{16}xy^6+a_{22}x^2y^2+a_{23}x^2y^3\\
&+a_{24}x^2y^4+a_{25}x^2y^5+a_{32}x^3y^2+a_{33}x^3y^3\\
&+a_{42}x^4y^2+a_{43}x^4y^3+a_{52}x^5y^2+\cdots\cdots
\end{aligned}
\qquad\cdots\cdots(2.1)
$$

実験は，けたまたは小骨に加振機をとりつけて共振法によっておこない，固有振動数および共振しているときに翼表面に砂を散布して振動のノーダルラインを求めたことはTR-30[4]と同様である。

計算結果と実験結果を図7に示す。今回は計算の仮定を吟味するため特に次のような測定をおこなった。

一般式を誘導するときに，先にものべたように，外板の面内変位は，単純な曲げ理論にもとづいて，中立面の変位（たわみ）から，けたのある部分の外板もけたのない部分の外板も，同じように求められると仮定

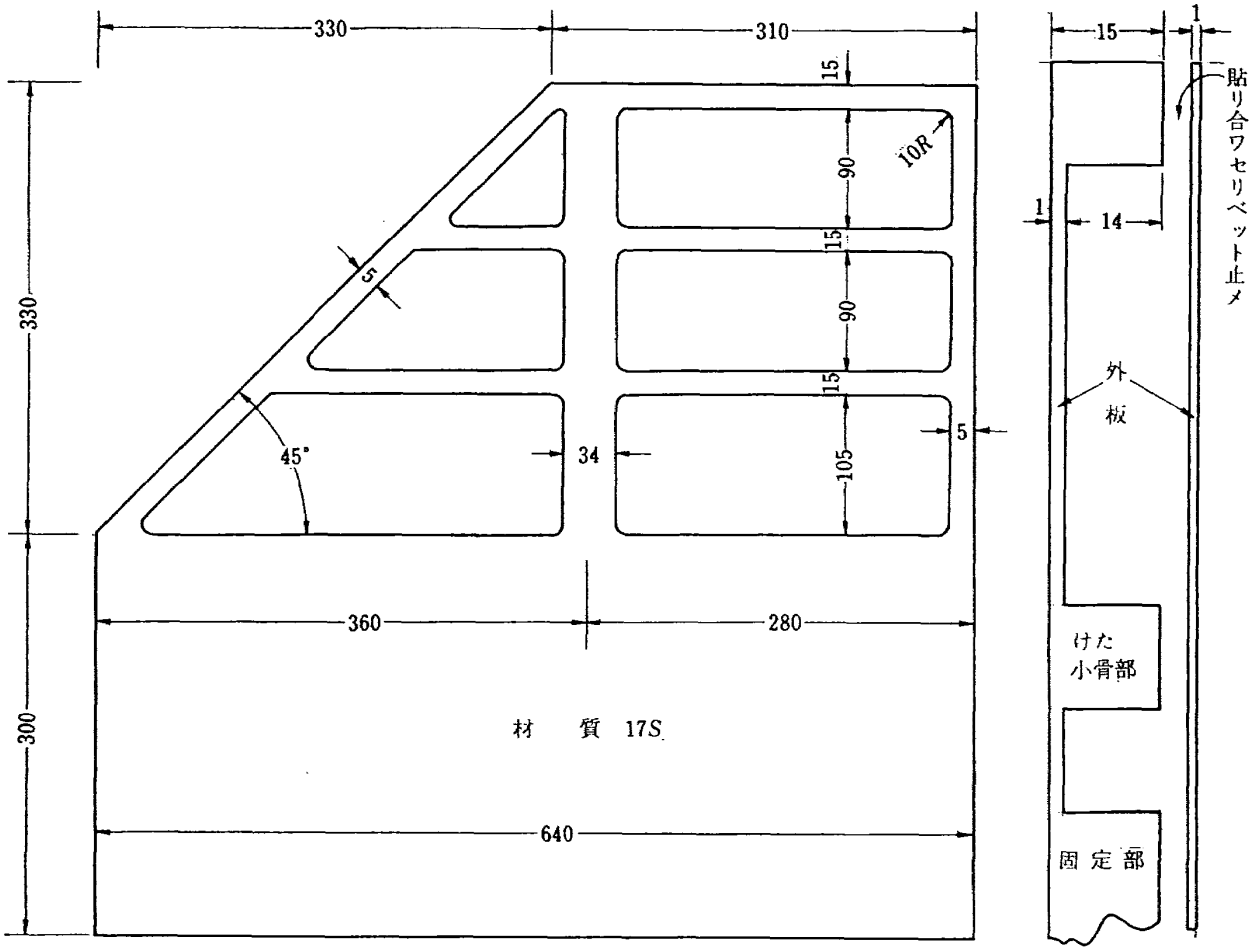
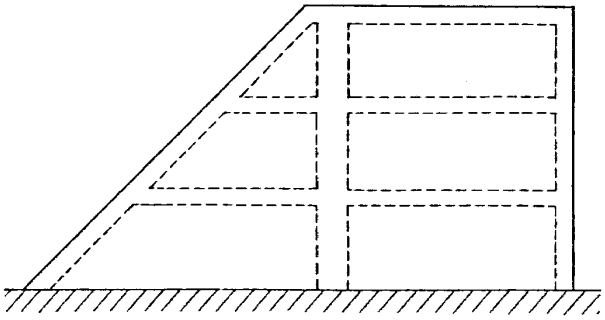


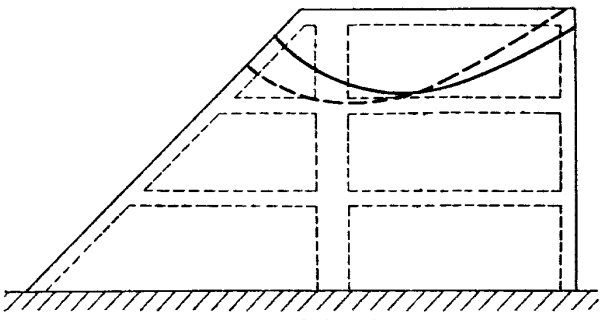
図 6　等厚片持構造翼の形状寸法（単位 mm）



1st mode

10 項近似	$\lambda a^2=240.408$	$f=144.65$ c/s
A02	1.000000	
03	−7.270049	
04	0.892866	
05	−0.605866	
12	−75.28656	
13	49.20442	
14	−3.708883	
22	45.52556	
23	−22.17958	
32	−7.554408	
20 項近似	$\lambda a^2=221.555$	$f=131.3$ c/s
実測値		$f=128$ c/s

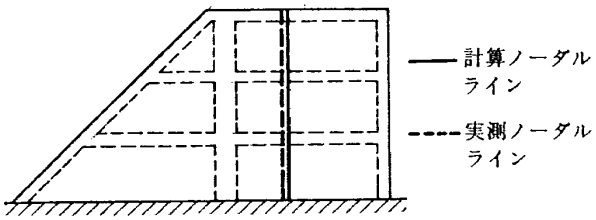
図 7·1 等厚片持構造翼の振動数と振動モード (1 次)



3rd mode

10 項近似	$\lambda a^2=1327.03$	$f=798.4$ c/s
A02	1.000000	
03	−0.746396	
04	0.0047604	
05	0.0238109	
12	−1.913478	
13	0.3817614	
14	0.5576002	
22	1.651567	
23	−1.087748	
32	0.1199974	
20 項近似	$\lambda a^2=1054.5$	$f=624.99$ c/s
実測値		$f=480$ c/s

図 7·3 等厚片持構造翼の振動数と振動モード (3 次)



2nd mode

10 項近似	$\lambda a^2=518.939$	$f=312.2$ c/s
A03	1.000000	
03	−1.467522	
04	0.7075947	
05	0.1363875	
12	5.025248	
13	−0.1718177	
14	−1.643700	
22	−11.31882	
23	4.044864	
32	2.958914	
20 項近似	$\lambda a^2=469.70$	$f=278.4$ c/s
実測値		$f=268$ c/s

図 7·2 等厚片持構造翼の振動数と振動モード (2 次)

している。この幾何学的な仮定を許したとしても，けたおよび小骨が密に入っている構造でない場合には，それらの間隔の寸法によっては，けた部の外板とけたのない部分の外板とでは，仮定のような単純な曲げ理論から求めるエネルギーと実際の場合とはことなることが考えられる。

上記のような点を吟味するために，この試験片の振動実験および静たわみ実験をおこない外板の付根 (x 軸)近辺での y 方向ひずみおよび z 方向のたわみを測定した。

振動ひずみの測定 振動ひずみを測定したときの測定ゲージの位置を図 8 に示す。測定は振動実験で共振状態になっているとき，図 8 のⒶ点の振幅がある値を保つように加振力を調整し，このときのは根部のひずみを動歪計によって測定した。

さて，以上のようにして求められたひずみの値を表 1 に示す。共振振動数は第一固有振動の場合である。振動計算によって求められた振動モードで，Ⓐ点の振幅を ±0.5 mm に規定したときの実際の寸法の y 方向のひずみが計算で求められる。この値と実測値ひずみと比較したものが図 9 である。

図 9 に示した振動時のひずみの実測値は測定回数によって多少変動があるので正確な値というわけではないが，次のような傾向があると判定してよい。

(1) 一体構造側外板のひずみはけた部と外板のみの部分とでその変動がはげしい。リベット止め側でも同様であるが，多少緩和されているのではないかと思われた。

(2) 計算モードから算定したひずみは図 9 の一点

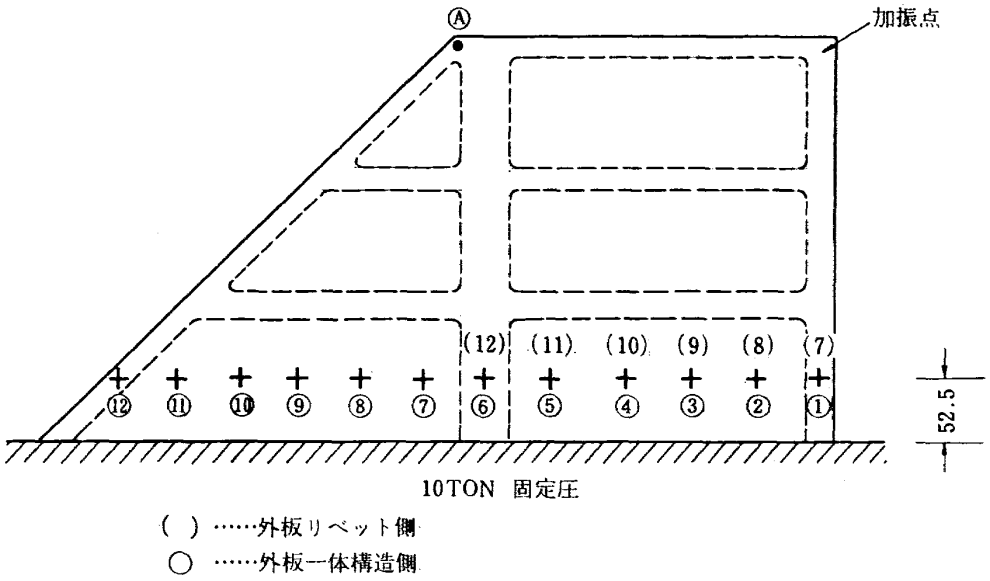


図 8　等厚片持構造翼のひずみ測定位置

表 1　等厚片持構造翼のひずみ量

ゲージ No.	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩	⑪	⑫
ひずみ (μ)	137.5	122.5	75	76.2	116.7	123.8						
	125.8	84.7	55.9	59.7	82.3	92.8	66.7	62.2	51.0	33.9	39.1	21.4
ゲージ No.	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)						
ひずみ (μ)	90.8	115	90.0	85.4	100.0	136.4						

Ⓐ 点振幅 ±0.5 mm

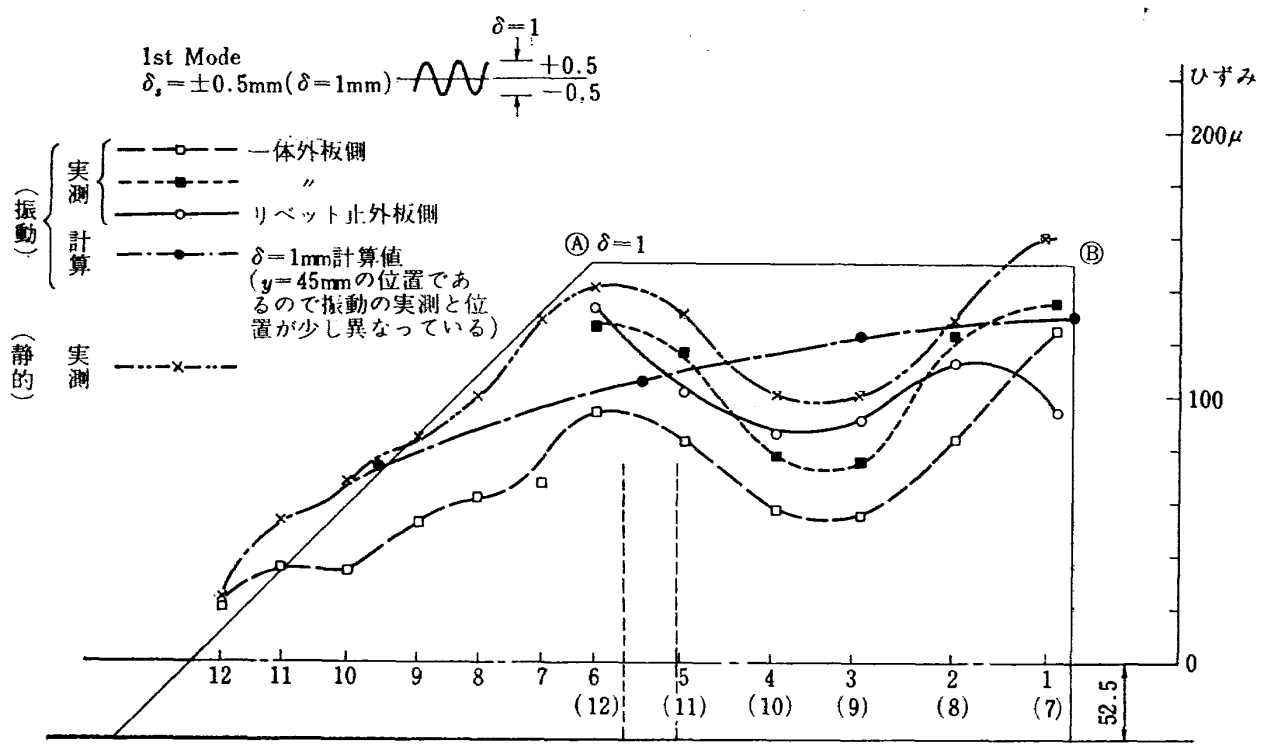


図 9　等厚片持構造翼のみずみ分布

の鎖線のように，けた部と外板部とのひずみ量が変動することなく，x 軸方向にゆるやかに変化して分布しているが，実測では，この変動がはげしい。

静ひずみおよびたわみの測定

静ひずみおよびたわみの測定は第一モードの振動・の Ⓐ, Ⓑ点の変位を測定し，静的に荷重をかけ，Ⓐ, Ⓑ点の変位が，振動時の変位になるようにした場合のひずみを測定したもので，図 9 に測定結果を示した。1) 静荷重試験のときのひずみ分布は振動の第一モードのひずみ分布とよく一致している。2) たわみの様子は，図 10·2, 10·3 のように外板のみの部分とけたのある部分とでことなる。

図 7 の振動数の計算値および実測値を比較してみると，計算値が 3 次の振動になると大幅に実測値とずれてくる。理論的に，高次の振動はより高めにでて来るものであるが，のちに示す三辺自由な三角翼の振動の場合と比較して，あまりにその差が大きいと考えられる。もっとも，のちにのべる三辺自由な三角翼の場合は，けたおよび小骨の数も多いので，図 7 の片持翼の場合のような，外板部とけた部との応力分布の乱れの影響は少ないであろう。

とりあえず，この片持翼の場合のエネルギー計算に細工をして，よりよい近似値を得るための一つのこころみをおこなったので，以下このことについてのべる。

エネルギーを計算する場合，外板とけたとは仮定した中立面のたわみから同じように計算したものを，変形し，外板部の面内ひずみを計算する場合，"有効幅"の考へを用い，外板部のひずみは，この中立面から算定した値の何割かになると考える。つまり今までの計算では，上下 2 枚の外板を，そのまま考えて，(1.1.2.1) 式の第 1 係数を 2 として計算したが，この値が α に減少した値であると考へた。

このとき，有効幅の考えをそのまま用いて寸法的にこの値を推定すればより定量的になると思うが，ここでは先にのべた振動および静的たわみの実験で，外板のひずみ分布を測定してあるので，この分布の割合から推定した値を用いることにした。

静的または振動の第一次振動モードの付根部の分布を用いる。一般に高次の振動の場合には，y 方向にも変化するから，この一次の振動モードの分布あるいは静的なひずみ分布を 2 次または 3 次の場合まで適用することは無理であるが，少なくとも一次の振動には適用できるであろう，

図 11 の ABCDE は付根近傍のひずみ分布図である。この ABCDEFGA の面積と ACEFGA の面積と比をとると約 0.84 となる，故に $\alpha=2$ の代りに，$\alpha=0.84\times2=1.68$ として，どの程度振動数が変化するかを推定した計算をおこなったものが，図 12 である。勿論この場合運動エネルギーの項を考慮すべきであろうが，のちに示す図 13·3 からもわかるように，ひずみ

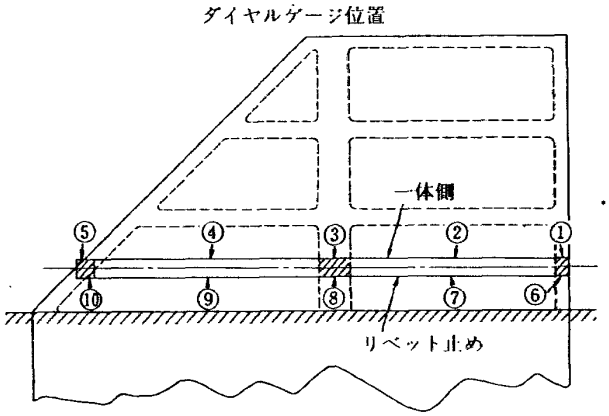


図 10·1 静たわみ試験結果

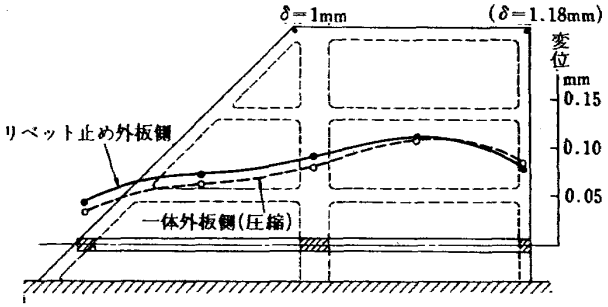


図 10·2

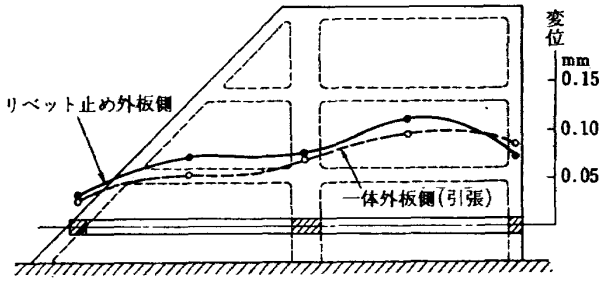


図 10·3

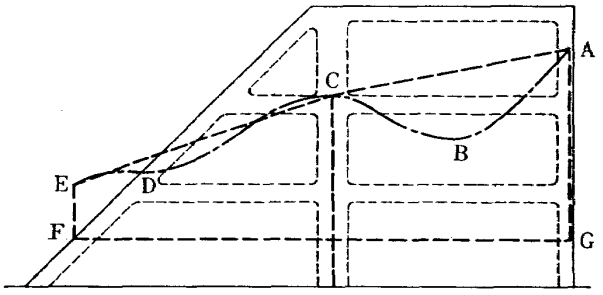


図 11 仮定したみずみ分布図

エネルギーの面内変位によるエネルギーは，ひずみエネルギーの大部分の割合をしめるが運動のエネルギーの面内のエネルギーは省略できる程少ないので，ここではひずみエネルギーの項のみを減少させることにした。

図12によると，$\alpha=1.68$ の値を矢印で示した。第一モードと第二モードは，この補正によって，ほぼ実験値に近づくが，第三モードは，この補正によっては，先にものべたように，改良されない。

第二モードの振動も改良されたかにみえるが，これは，y 方向と x 方向の歪エネルギ分布減少の割合が似ているためであろうか。3次モードについては，若し，x, y 方向の分布を考慮した減少割合を考へたとしても図12のグラフからみると，外板の割合として，1以下，つまり，外板は片面以下の働らきしかしていないということなる。

そのほか実験振動数が計算値と合わない理由として，計算の近似が悪いこと，付根固定圧の問題や，剪断変形，回転エネルギーなど，種々な問題もあろうと思うが，ここでは上記の吟味にとどめた。

b)　全辺自由の対称な等厚構造翼の振動

ここで解析した構造翼は図13·1に示すような等厚の三角形をした構造翼である。

その構造の概略は肉厚 15 mm のアルミ合金板から必要な桁，小骨を残してくり抜き障子のさんのようにしたものに，板厚 1 mm のジュラルミン板を上下面から当ててリベットで止めたものである。

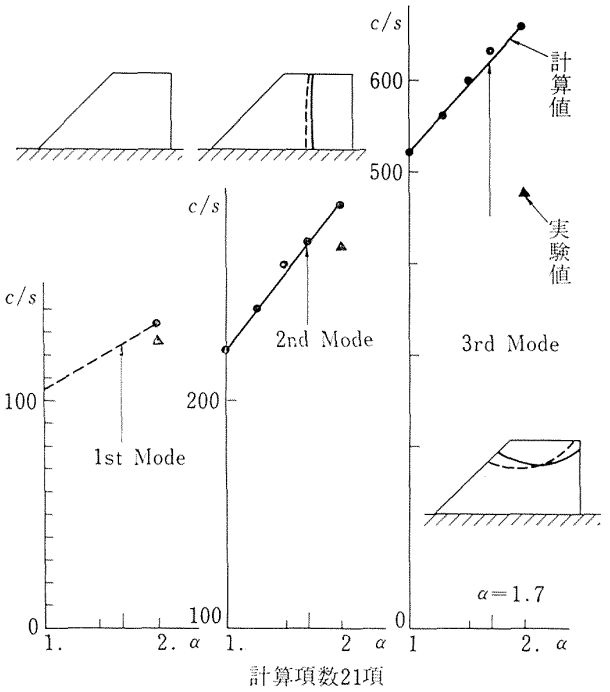


図 12　等厚片持構造翼の振動数

解析は等厚翼であるが，一般式の翼部分を用いることができる。

ここで用いた構造翼は周辺自由で，x 軸に関して対称な形状をしているので，解析に使う試験関数は，計算を能率よく行なうために，対称振動に対しては，

$$w=a_{00}+a_{10}x+a_{20}x^2+a_{30}x^3+a_{40}x^4+a_{50}x^5+a_{60}x^6 +a_{02}y^2+a_{12}xy^2+a_{22}x^2y^2+a_{32}x^3y^2 +a_{04}y^4+a_{14}xy^4+a_{24}x^2y^4 +a_{06}y^6 \quad \cdots\cdots(2.2)$$

逆対称振動に対しては，

$$w=a_{01}y+a_{11}xy+a_{21}x^2y+a_{31}x^3y+a_{41}x^4y +a_{51}x^5y+a_{61}x^6y +a_{03}y^3+a_{13}xy^3+a_{23}x^2y^3+a_{33}x^3y^3+a_{43}x^4y^3 +a_{05}y^5+a_{15}xy^5+a_{25}x^2y^5 +a_{07}y^7 \quad \cdots\cdots(2\cdot3)$$

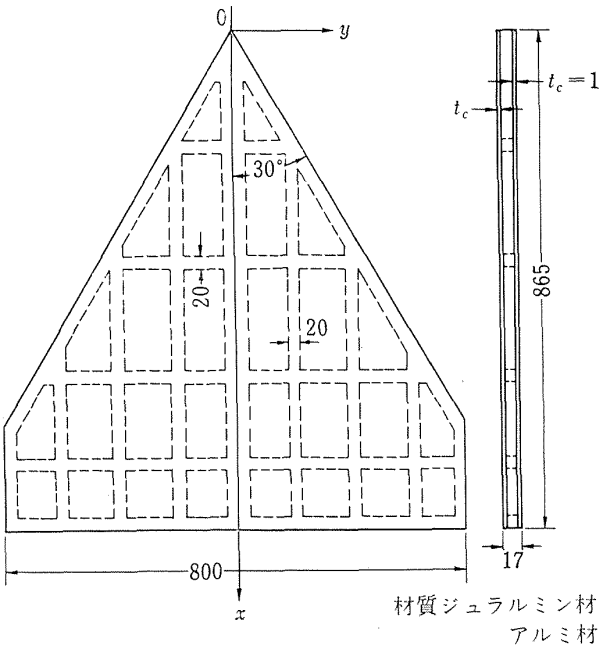


図 13·1　等厚自由三角構造翼の形状寸法(単位 mm)

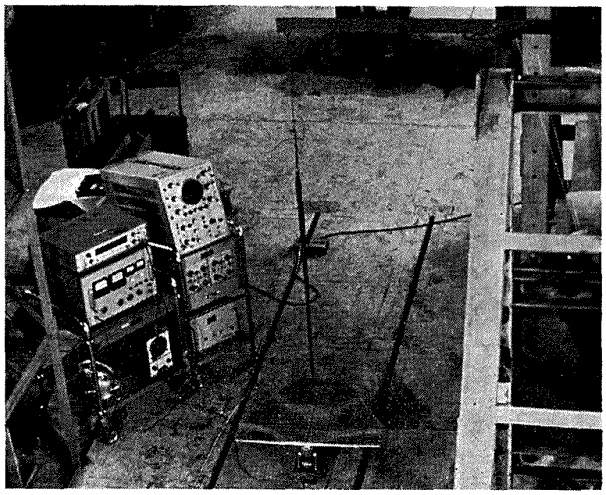


図 13·2　試験片取付状況

表 2 等厚自由三角構造翼の振動数と振動モード

固有値より振動数に換算する係数は0.33である（固有値）×0.33＝振動数

		1 st	2 nd	3 rd	4 th	5 th	6 th	7 th	
実験		137 c/s		158	324			410	
			148			333	390		
計算	EVEN	130 c/s	———	151	338	———	———	443	←振動数
		$\lambda a^2=393.79$	———	458.46	1023.64	———	———	1341.56	←固有値
	ODD	———	144 c/s	———	———	340	401	———	
		———	$\lambda a^2=436.83$	———	———	1031.36	1215.52	———	

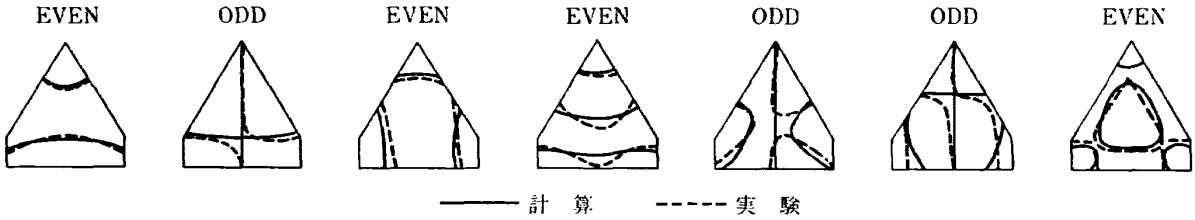


表 3 等厚自由三角構造翼の振動モード関数の係数

1 st (EVEN)		2 nd (ODD)		3 rd (EVEN)	4 th (EVEN)
$\lambda a^2=0.3937942\,E+03$		$\lambda a^2=0.4368346\,E+03$		$\lambda a^2=0.4584567\,E+03$	$\lambda a^2=0.1023637\,E+04$
	$m\ n$		$m\ n$		
0.1000000 E +01	0 0	0.1000000 E +01	0 1	0.1000000 E +01	0.1000000 E +01
−0.3561501 E +01	1 0	−0.6613300 E −01	1 1	−0.9486103 E +01	−0.5974836 E +01
−0.3167049 E +00	2 0	0.8208474 E +00	2 1	−0.9486103 E +00	−0.8883252 E +01
0.4710554 E +01	3 0	−0.8137841 E +01	3 1	0.8214773 E +01	0.7653793 E +02
0.3336169 E +01	4 0	0.9103696 E +01	4 1	−0.1046918 E +02	−0.1237311 E +03
−0.7458960 E +01	5 0	−0.3376537 E +01	5 1	0.5745507 E +01	0.7863713 E +02
0.2710313 E +01	6 0	0.1959195 E +00	6 1	−0.1589196 E +01	−0.1237311 E +02
−0.1000611 E +00	0 2	0.2349113 E +00	0 3	0.1651112 E +00	−0.3078872 E +01
−0.3886905 E +01	1 2	−0.2039613 E +01	1 3	−0.5573322 E +01	0.1630399 E +02
0.1187495 E +02	1 1	0.2748285 E +01	2 3	0.4686511 E +02	−0.2017687 E +02
−0.1235118 E +02	3 2	−0.7576121 E +00	3 3	−0.5356525 E +02	0.4172100 E +01
0.4314571 E +01	4 2	−0.1083155 E +00	4 3	0.1986049 E +02	0.1919370 E +01
−0.2369910 E −01	0 4	0.6836836 E −01	0 5	0.5099005 E +00	0.4071875 E +00
0.1203544 E +00	1 4	−0.4672892 E −02	1 5	−0.3657916 E +01	−0.1950472 E +01
−0.6735137 E −01	2 4	−0.6380087 E −01	2 5	0.4433258 E +00	0.1938640 E +01
−0.4281764 E +02	0 6	−0.7080137 E −02	0 7	0.5154292 E +00	−0.4417773 E −01

5 th (ODD)	6 th (ODD)	7 th (EVEN)
$\lambda a^2=0.1031362\,E+04$	$\lambda a^2=0.1215524\,E+04$	$\lambda a^2=0.1341561\,E+04$
0.1000000 E +01	0.1000000 E +01	0.1000000 E +01
−0.5371091 E +00	−0.4395770 E +00	−0.6147273 E +01
0.7086230 E +01	0.6293607 E +01	−0.1990736 E +02
−0.5461465 E +02	−0.5832015 E +02	0.1717364 E +03
0.1065780 E +03	0.1121929 E +03	−0.2999144 E +03
−0.8059847 E +02	−0.8453063 E +02	0.1916575 E +03
0.2159221 E +02	0.2243169 E +02	−0.4015612 E +02
0.1046874 E +01	0.2408306 E +01	−0.9720129 E +00
−0.1229010 E +02	−0.2711953 E +02	−0.2414072 E +02
0.3057987 E +02	0.7939174 E +02	−0.1724413 E +02
−0.2957904 E +02	−0.7728070 E +02	0.9248557 E +02
0.9627293 E +01	0.2603315 E +02	−0.4556538 E +02
0.4706927 E +00	0.1354772 E +01	0.5515923 E +01
−0.7614486 E +00	−0.5247343 E +01	0.4802623 E +01
0.5930422 E +00	0.1886175 E +01	−0.1113402 E +02
−0.6079857 E −01	0.4417227 E +00	−0.4712582 E +00

表 4·1　等厚片持構造翼の振動計算におけるエネルギーの割合を推定する資料

$mnrs$		0202		0505		3232		構造重量比
板の曲げ	A_{mnrs}	0.5937501E+01	0.1%	0.6272322E+02	0.098%	0.3465663E+01	0.09%	42.0
		0.1612533E−01	26.	0.6777471E−02	21.7	0.4022913E−02	25.5	
板のストレッチ	B_{mnrs}	0.4560001E+04	81.	0.4817143E+05	75.6	0.2661629E+04	74.4	
		0.3612553E−04	0.6	0.6576995E−04	0.21	0.2400518E−04	0.15	
縦補強材曲げ	C_{mnrs}	0.1018187E+04	18.	0.1454553E+05	22.8	0.2797820E+03	7.82	28.5
		0.1988492E−01	32.	0.9038601E−02	28.9	0.4641197E−02	29.3	
〃 捩り	D_{mnrs}	0.6309270E+02	1.1	0.9013243E+03	1.4	0.1848732E+03	5.17	
		0.8067994E−05	0.004	0.16808332E−04	0.05	0.6588996E−05	0.04	
横補強材曲げ	E_{mnrs}	0.0000000E−40	—	0.0000000E−40	—	0.2109534E+03	5.89	29.5
		0.2590512E−01	41.8	0.1520341E−01	48.7	0.7061997E−02	44.8	
〃 捩り	F_{mnrs}	0.0000000E−40	—	0.0000000E−40	—	0.2363685E+03	6.6	
		0.5460731E−04	0.088	0.1436819E−03	0.48	0.1378389E−04	0.09	
Total	STRAIN	0.5647218E+04	100	0.6368101E+05	100	0.3577072E+04	100	100
	INERTIA	0.6201417E−01	100	0.3125573E−01	100	0.1577048E−01	100	

上段の数値はひずみエネルギーの割合 ((1.3.4)式の $P_0Q_0+\sum\cdots\cdots+\sum P_SQ_S$ の各項に相当)
下段の数値は(運動エネルギ)/(固有値)の割合(1.3.4)式の $R_1S_1+R_2S_2\cdots\cdots+\sum R_SS_Q$ の各項に相当)

表 4·2　等厚全辺自由三角構造翼の振動計算におけるエネルギーの割合を推定する資料

		対称振動の項の例		逆対称振動の項の例		
$mnrs$		2224		2123		構造重量比
板の曲げ	A_{mnrs}	0.7699602E+01	0.105%	0.14893608E+01	0.107%	23.4
		0.4221113E−02	41.36	0.6110531E−2	40.46	
板のストレッチ	B_{mnrs}	0.5913294E+04	0.86	0.1143835E+04	82.53	
		0.1217910E−04	0.119	0.1114906E−04	0.074	
縦補強材曲げ	C_{mnrs}	0.11337819E+04	5.50	0.8855664E+02	6.39	36.3
		0.4831553E−02	47.3	0.66818909E−02	44.24	
〃 捩り	D_{mnrs}	0.1938409E+03	2.65	0.90791411E+02	6.55	
		0.28430547E−05	0.028	0.20602462E−05	0.0136	
横補強材曲げ	E_{mnrs}	0.1731794E+01	0.024	0.36643103E+01	0.264	40.3
		0.1131387E−02	11.1	0.226843189E−2	15.02	
〃 捩り	F_{mnrs}	0.62591745E+02	0.856	0.576073701E+02	4.156	
		0.62855714E−05	0.062	0.3046360E−04	0.2017	
Total	STRAIN	0.731293999E+04	100	0.13859441E+04	100	100
	INERTIA	0.102053607E−01	100	0.15104527E−01	100	

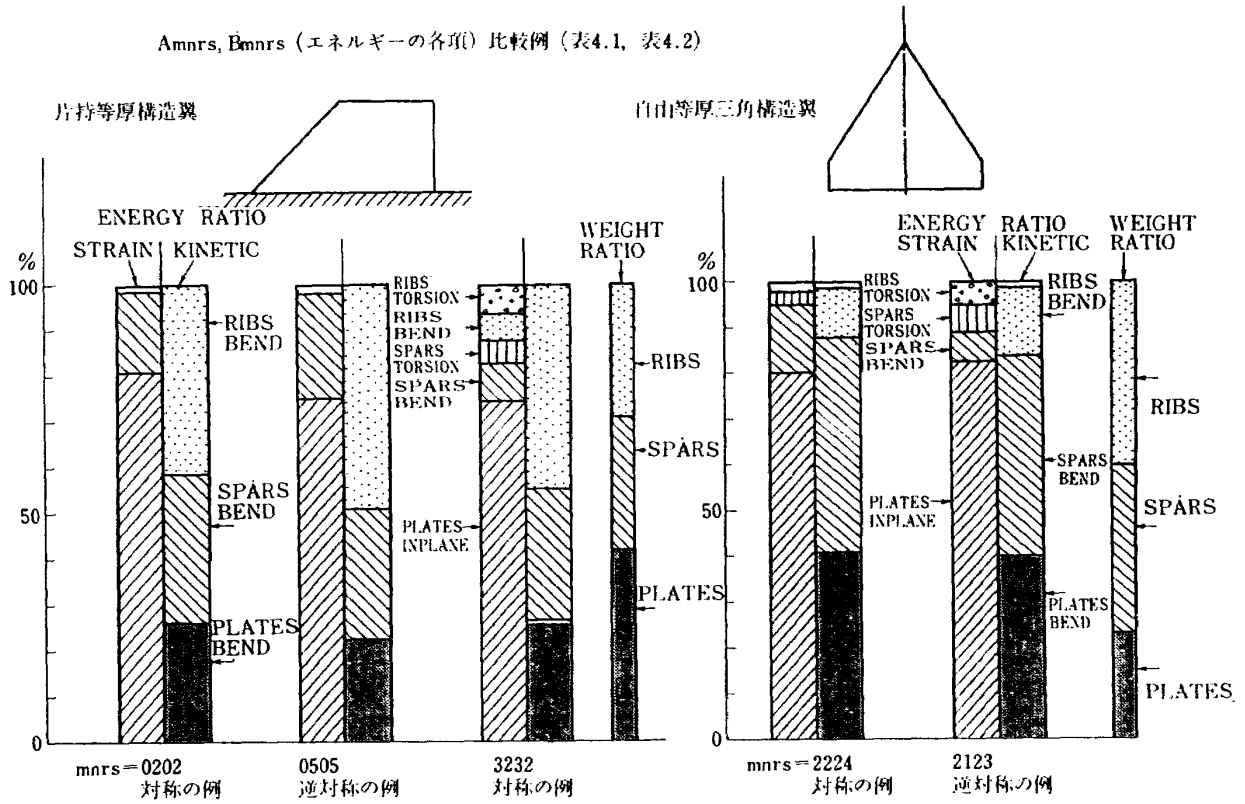


図 13·3 エネルギー配分図 (等厚構造翼)

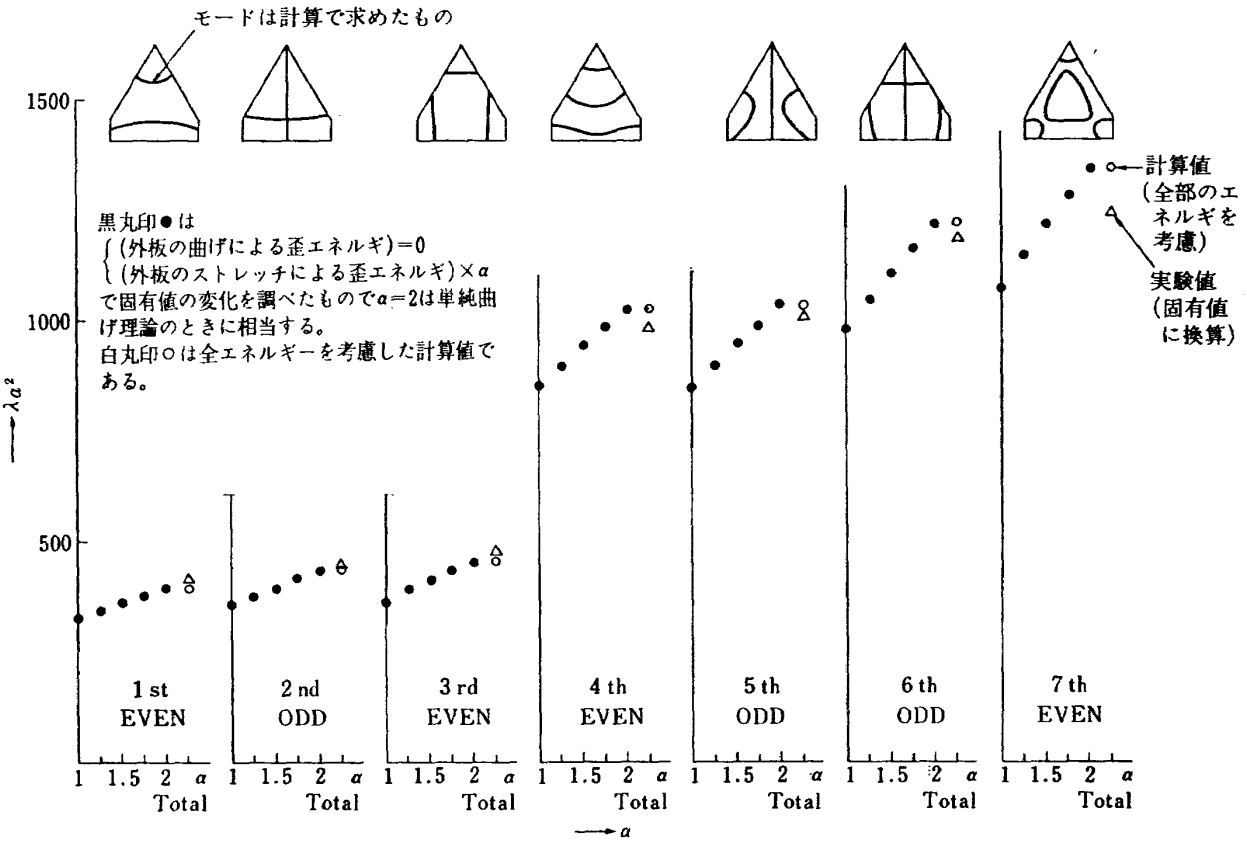


図 13·4 等厚自由三角構造翼の振動数

のようにとればよい。

実験は構造翼の重心位置をゴムひもで吊るし，桁または小骨の部分に加振器をとりつけて加振し，共振法で振動数を求め，また砂を散布して振動モードのノーダルラインを求めた。

試験片取付状況を図 13·2 に示した。

振動数およびノーダルラインの計算結果を表 2 に示した。また実験結果も併記した。表の EVEN，ODD の記号は，EVEN のときは対称振動，ODD のときは逆対称振動であることを示す。

表 3 に振動計算結果のたわみ関数を示した。

また，表 4 にエネルギ配分表の一例を示した。ここに示したエネルギー配分の様子は，ロケットの尾翼のような一つの模型についてのエネルギ配分例にすぎないので，実際の航空機の場合には，ここで用いた試験片と較べると，けたおよび小骨の肉厚と外板厚との比率が少なくなっていると思はれる。翼厚一定としてこの場合外板のひずみエネルギーの量は変化しないと考えてみると，けたおよび小骨の運動エネルギーは比較的少ない配分となり，外板の運動エネルギーの割合が増して，振動数の変化を支配するのは，外板であると考えられる。

エネルギーを適当に配分する問題については，最適設計の研究も近年マトリックス法によって急速に進歩開発されているので，これらの問題も解決されるであろう。

三角自由辺構造翼の場合は，先に示した片持構造翼の場合と比較して，高次の振動数まで，極めて，よい近似解が得られた。

これは一つには，自由辺構造翼の場合には，片持の構造翼と比較して，けたおよび小骨の割合が極めて密に入っているためであろうと思われる。先に論じたように，外板のひずみが減少することが少ないためであろうか。

図 12 と同じように，外板のエネルギーを何割か減少させた計算例を図 13·4 に示したが，ほとんど，この場合はこの点を考慮する必要はないことがわかる。

α および慣性項を零とすると，これは外板のない桁と小骨のみの振動解になる。

B) 変厚構造翼

変厚構造翼では外板は一様な厚さとしたが，翼厚は変化するため各種の係数が複雑になる。これらのうち変厚の影響が直接計算式に入れられるものはそのままあたへ，数値計算を必要とする定数のものには近似多項式を求めて，その係数を用いた。

例えば，外板の面内ひずみエネルギーの式，(1.1.2.4)の中の e_{pq} などは，翼厚が x, y の関数として与えられれば，その与えられた関数を用いればよいが，けたのねじりエネルギーの式 (1.1.3.17) の中の K_s などは，けたの高さが翼厚の式で与えられたとしても，けた断面形状によっては，x, y の位置によって K_s の値を計算し，K_s を x, y の関数としたグラフを近似した係数を用いる必要がある。

ここでけたは矩形断面で高さのみが変化するものとした。

a) 変厚構造片持翼，$\alpha=45°$，$\beta=90°$ の振動

ここに用いた変厚構造翼は，A) a) でおこなった図 10·1 の等厚構造翼試験片を利用したもので，このため平面図形は，まったく図 10·1 と同様であるが，この試験片を分解して外板をとり，けたおよび小骨部にテーパーをつけ，これに外板を再びつけて試験片とした。この試験片寸法を図 14·1 に示した。

計算および実測結果を図 14·2～14·4 に，図 14.4 では等厚構造翼の場合も比較して示した。

b) 変厚三角片持構造翼，$\alpha=30°$，$\beta=90°$ の振動

ここでは，のちにのべる胴体と変厚三角構造翼の結合した系の一部分である変厚三角構造翼の計算結果をのべる。振動計算に用いた定数は図 15·1 の片翼部を考えたのであるが，この翼は，のちに示す図 16·1 では，胴体との結合部で，胴体内にはのびていない。翼は胴体の外壁に補強環で結合されている。計算は，胴体のある全系との対応を吟味したい目的もあったので，翼と胴体との結合部を，この片持翼の固定辺とせずに，胴体の中心軸を固定辺とした。このことは全系を考えると，TR-160[1] でものべたように，合理的であるので，この定数を用いた。計算方法は同様であるので省略し，結果を，のちに示す全系の振動計算および実験結果に併記した（図 18·1，18·2)。

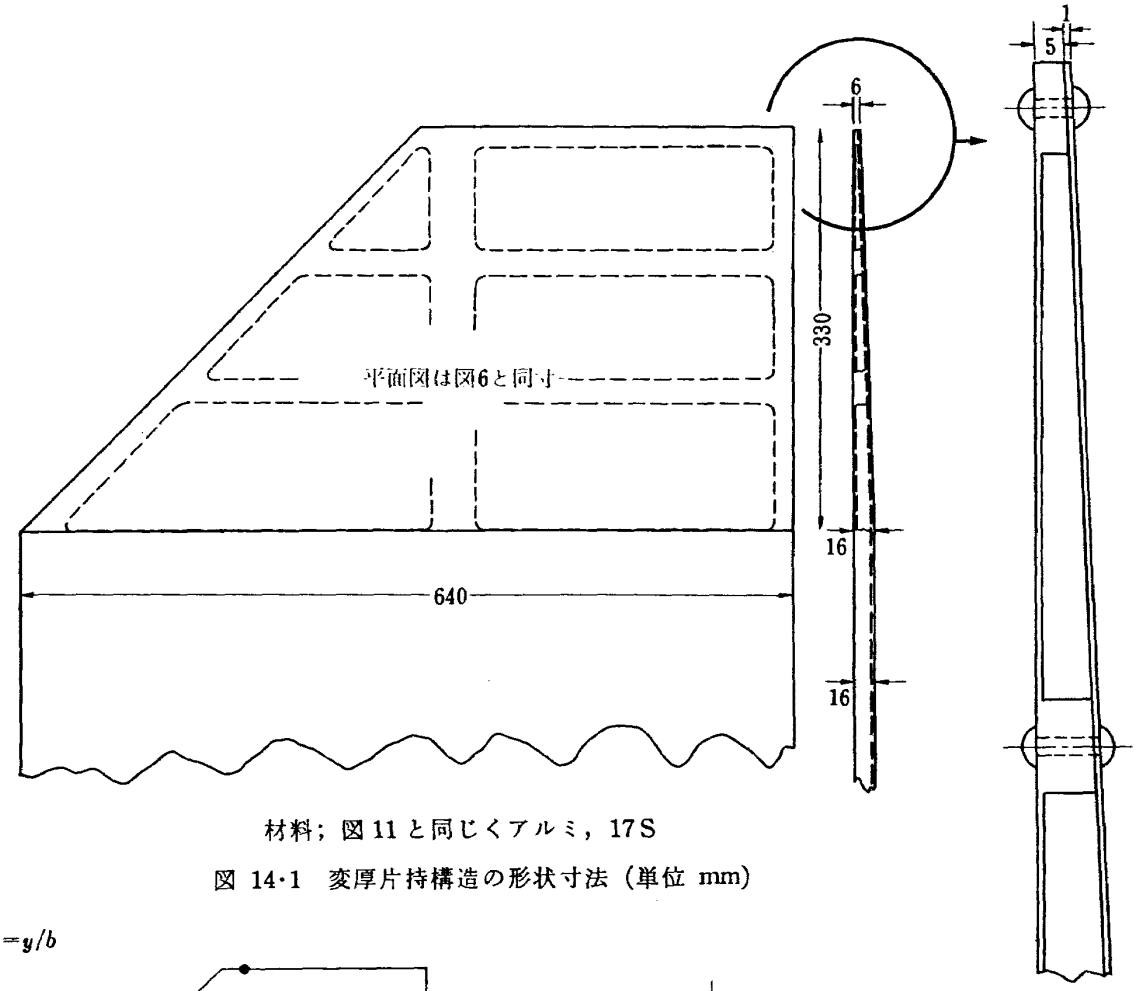
c) 全辺自由の三角変厚構造翼，$\alpha=30$，$\beta=90°$ の振動

b)項と同様であるが，図 15·1 に示したように，図 16·2 で胴体と結合するための補強環の軸方向の部材をけたと考えた定数を用いた。

計算結果は図 18 に併記したが，図 15·2 にも x, y 軸を無次元化した図で，振動モードを示した。

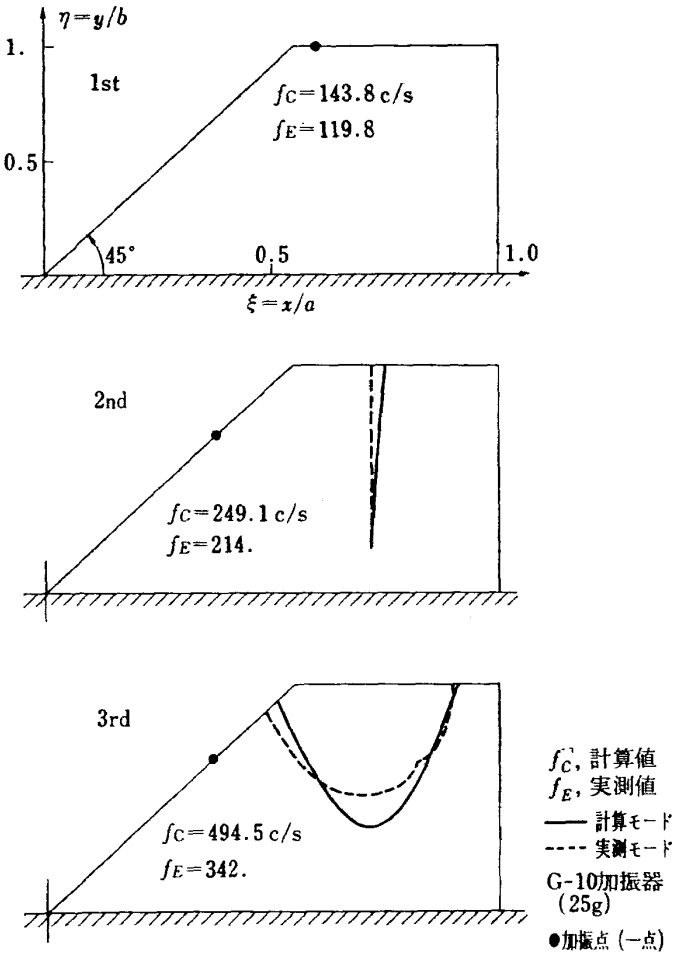
d) 胴体と変厚構造翼，$\alpha=30°$，$\beta=90°$ との結合した系の振動

先に TR-160[1] では，自由飛行模型に関連して等厚板翼に胴体が結合した系の振動例について吟味したが当時，構造翼にしたならばどうかとの話もあったので，



材料；図 11 と同じくアルミ，17S

図 14·1 変厚片持構造の形状寸法（単位 mm）



翼形状は無次元寸法である。（計算項数 20 項）

図 14·2 変厚片持構造翼の振動数と振動モード

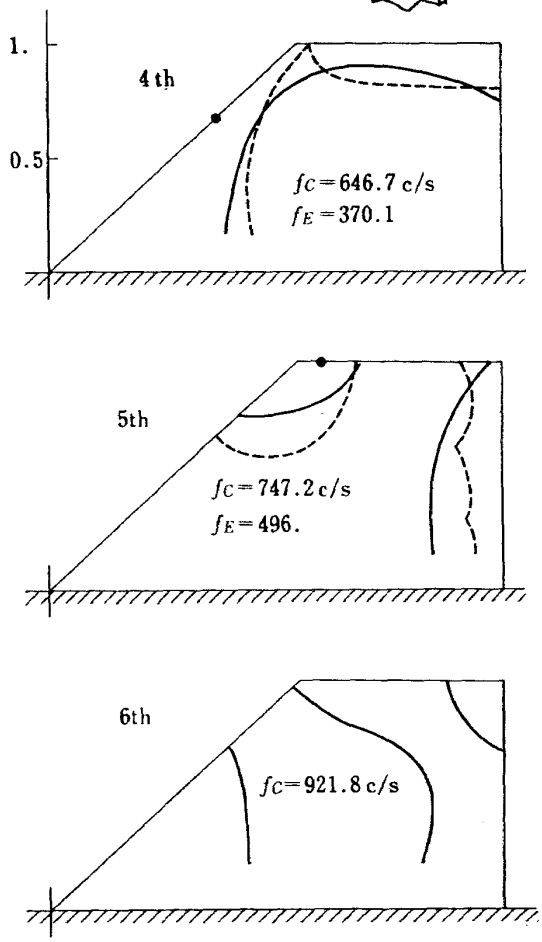


図 14·3

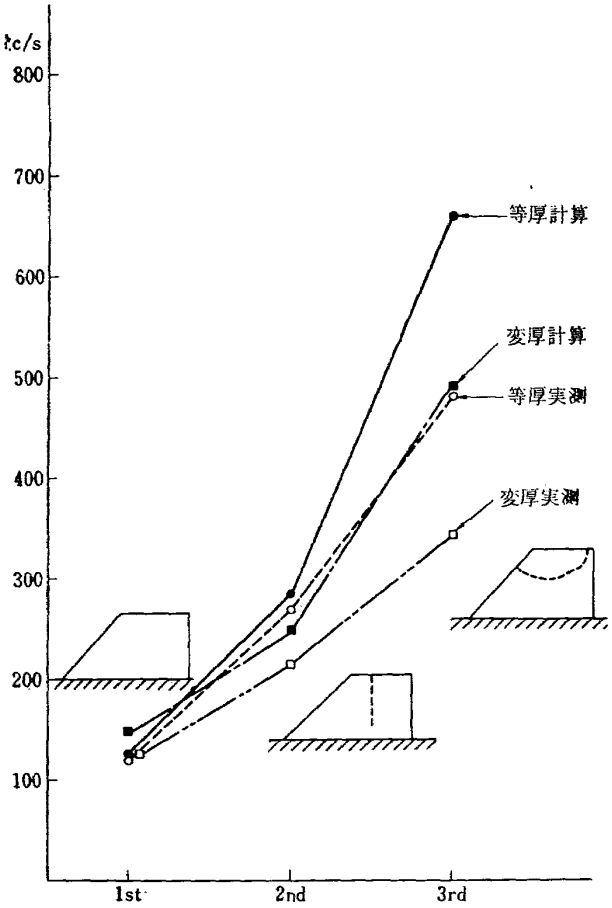


図 14·4　片持構造翼の翼厚の変化と振動数

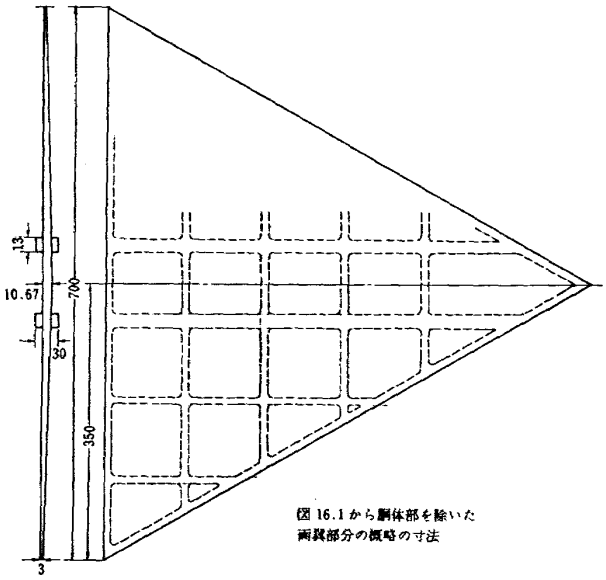
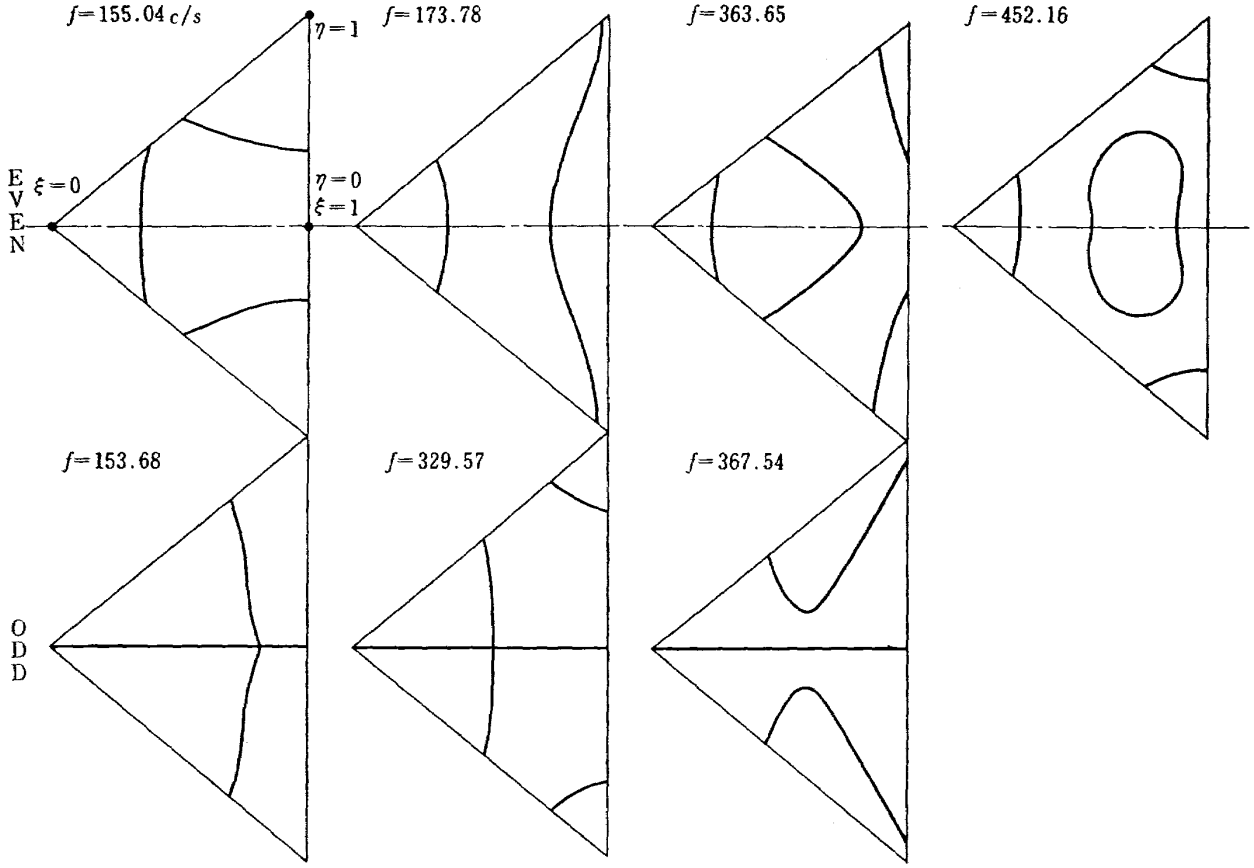


図 15·1　変厚三角構造翼の形状寸法（単位 mm）



スパンコードそれぞれ無次元化した寸法であり，図 15·1 が原形である

図 15·2　変厚三角構造翼の振動数と振動モード（計算値のみ）

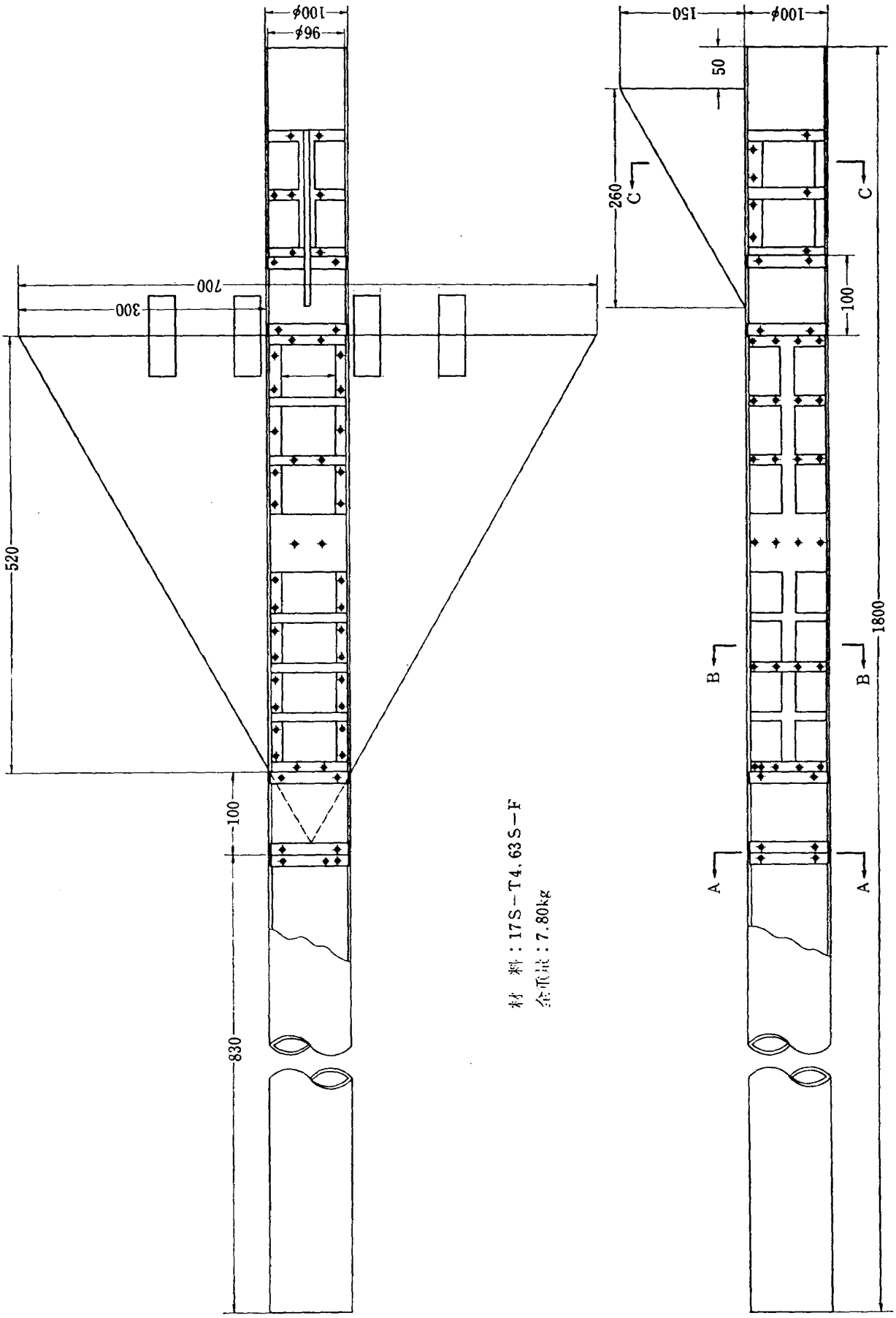


図 16·1 変厚翼胴結合模型形状寸法図（単位 mm）

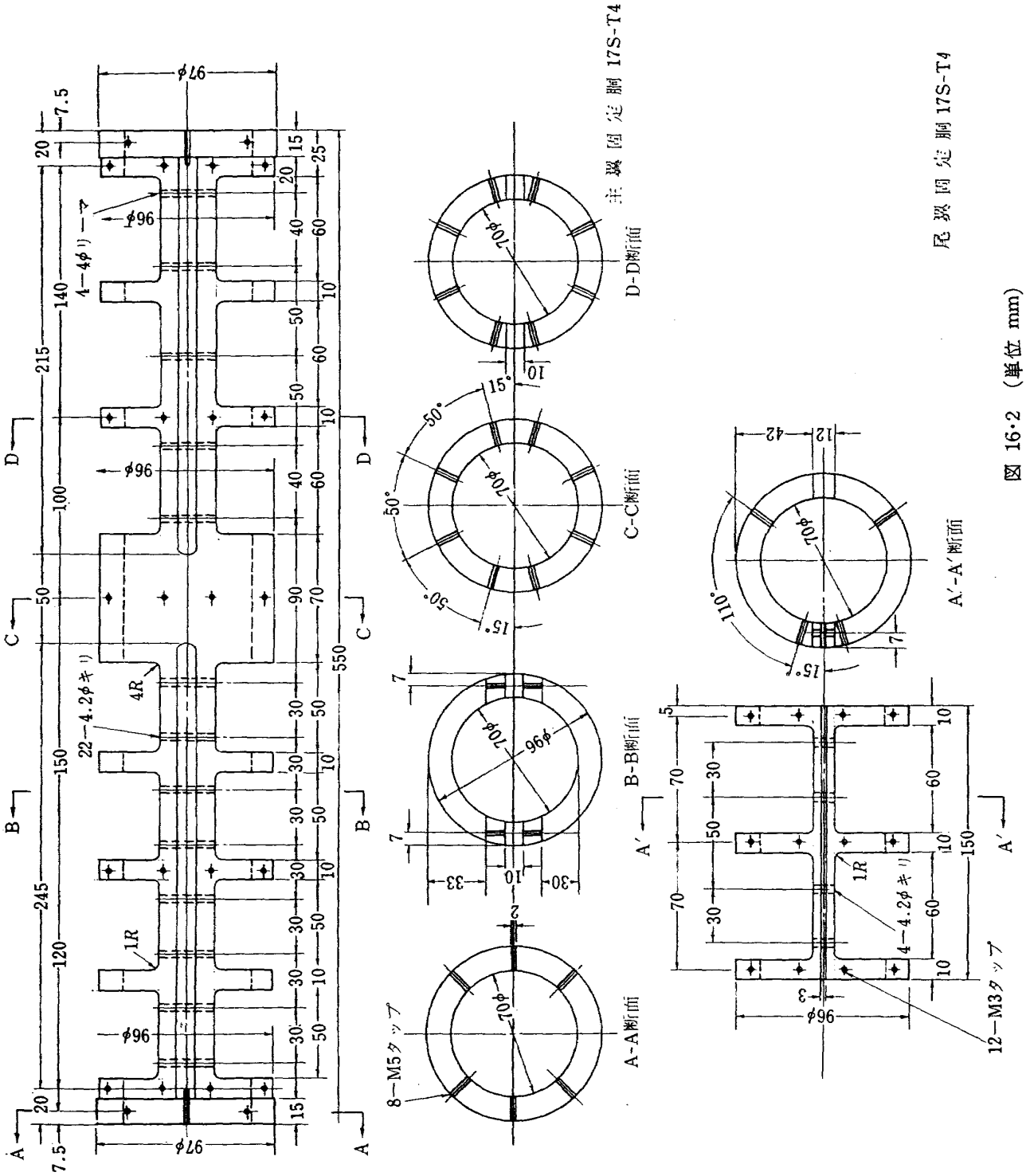


図 16·2 (単位 mm)

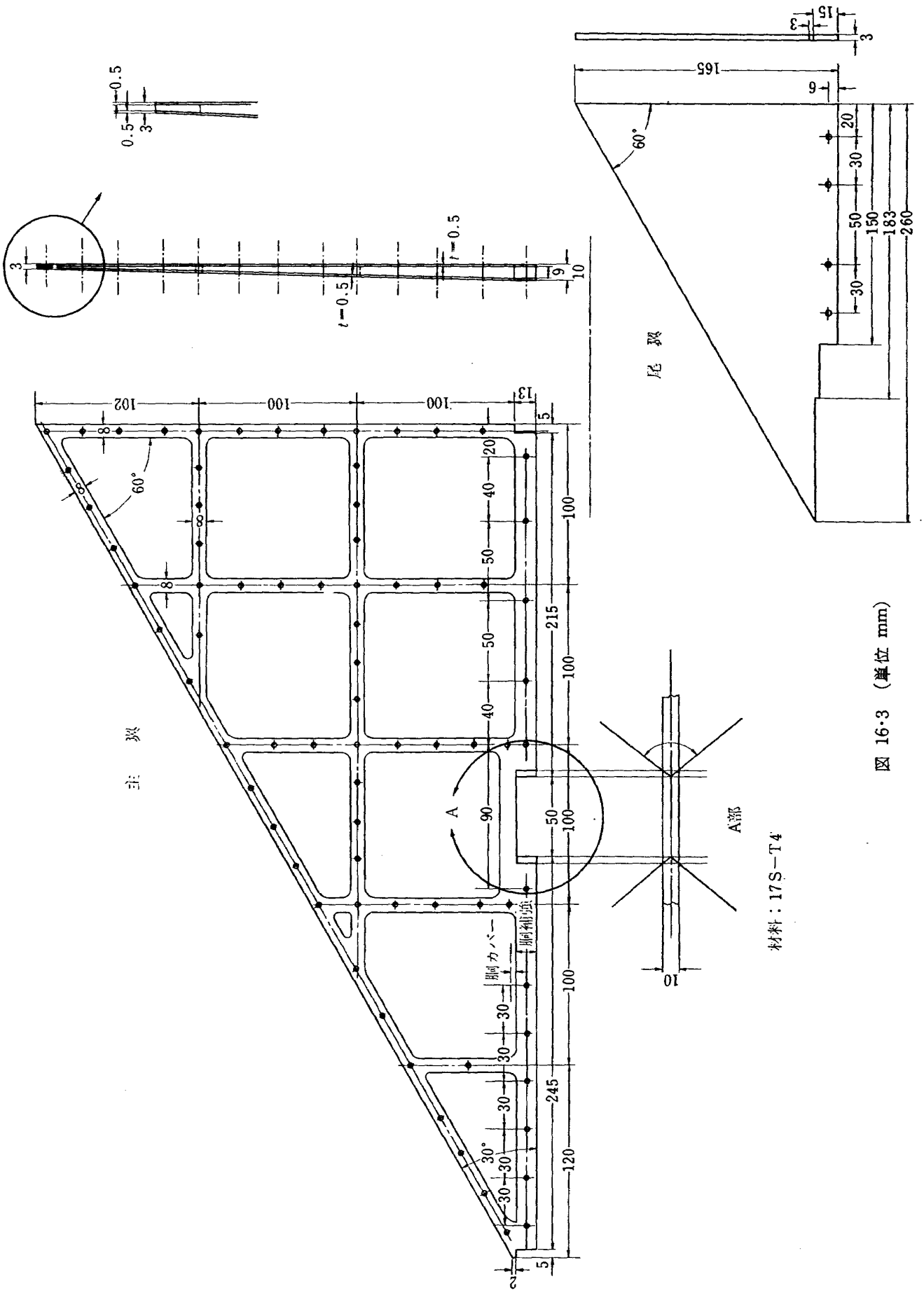


図 16·3 (単位 mm)

ここではこれらの研究を進めた模型の振動計算と実験結果についてのべる。

実機では，ここで用いるような，けたの肉厚が比較的厚いものは用いられないが，研究用小型飛行模型とか，ロケット尾翼などには，このようなけた，小骨のある構造翼も実際に用いられているようである。

ここで用いた試験体の図面を図16·1～16·3に示した。胴体は先に用いたTR-160[1]の追加大型供試体と同じであるが，付根部の翼の肉厚が5 mmから10 mmと変化しているので，翼と胴体とを結合する補強金具が変更されている。

また今回の計算では，この補強金具を連結する胴体

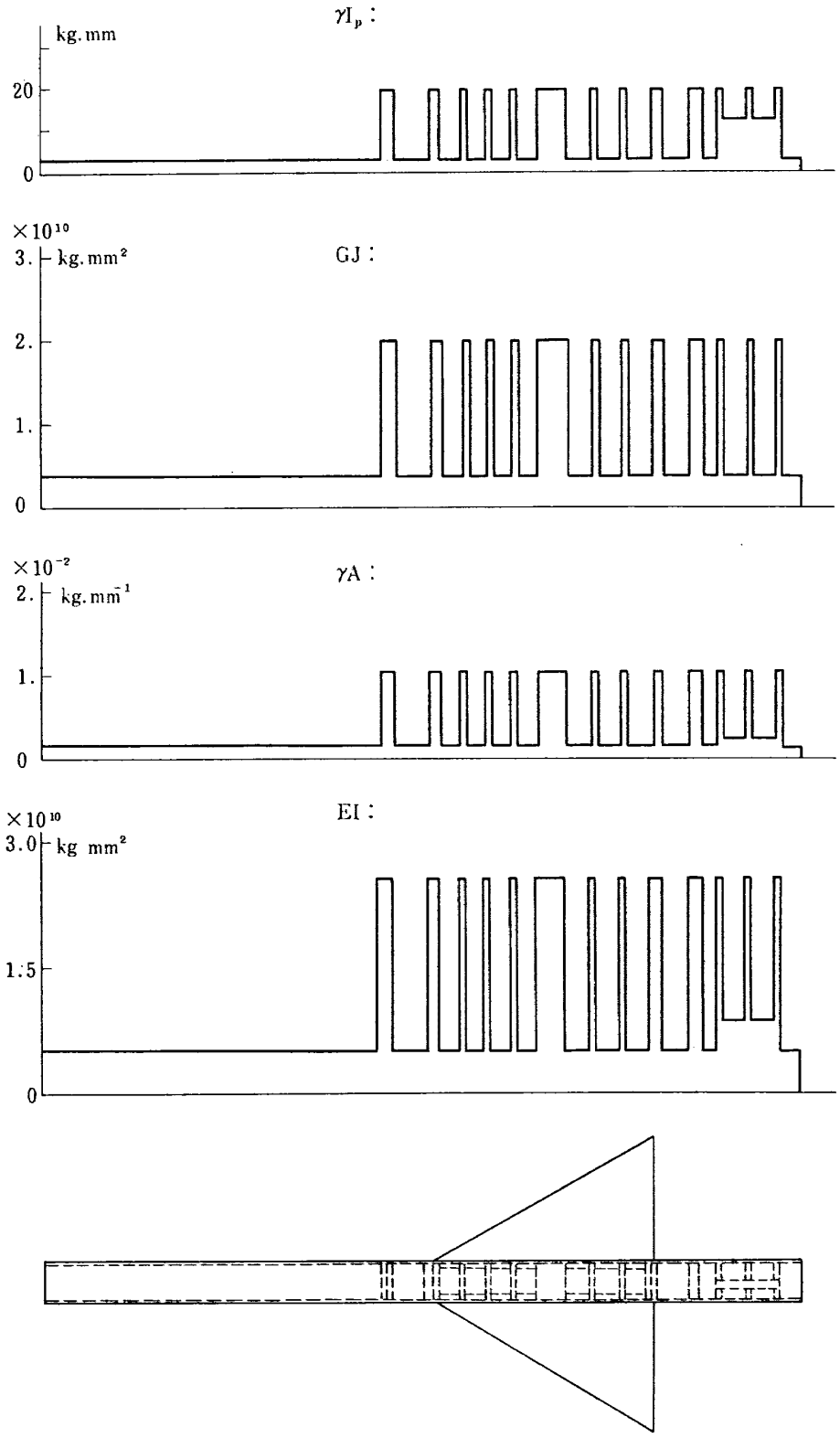


図 16·4　変厚翼胴結合模型の胴体定数

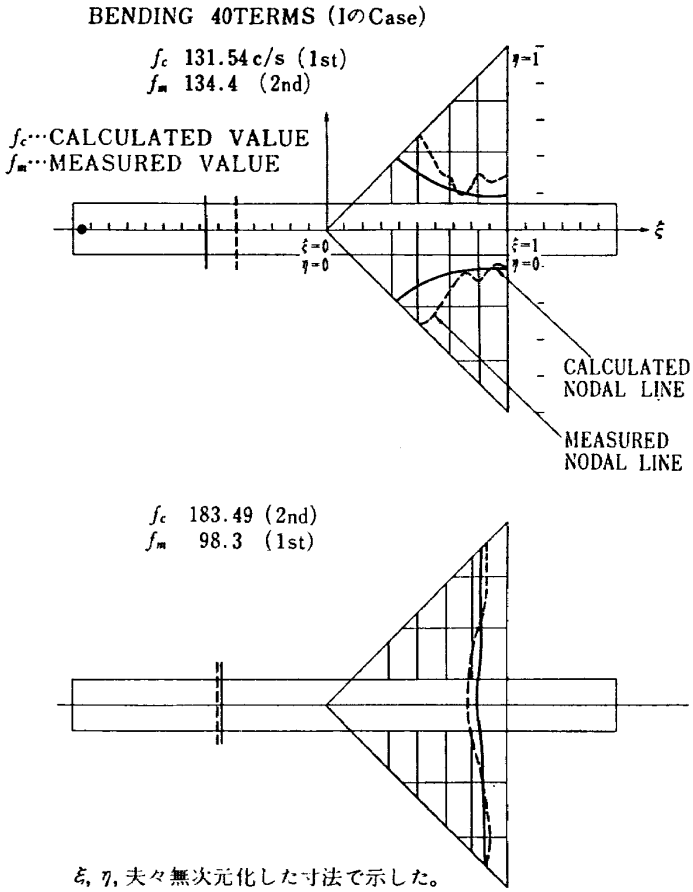


図 16·5 変厚翼胴結合模型の振動モード (I・Case)

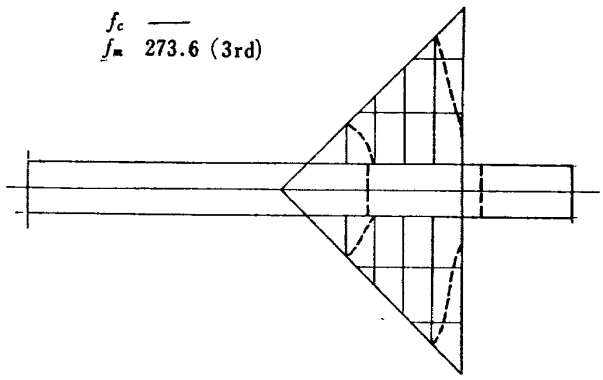


図 16·6 (I·Case)

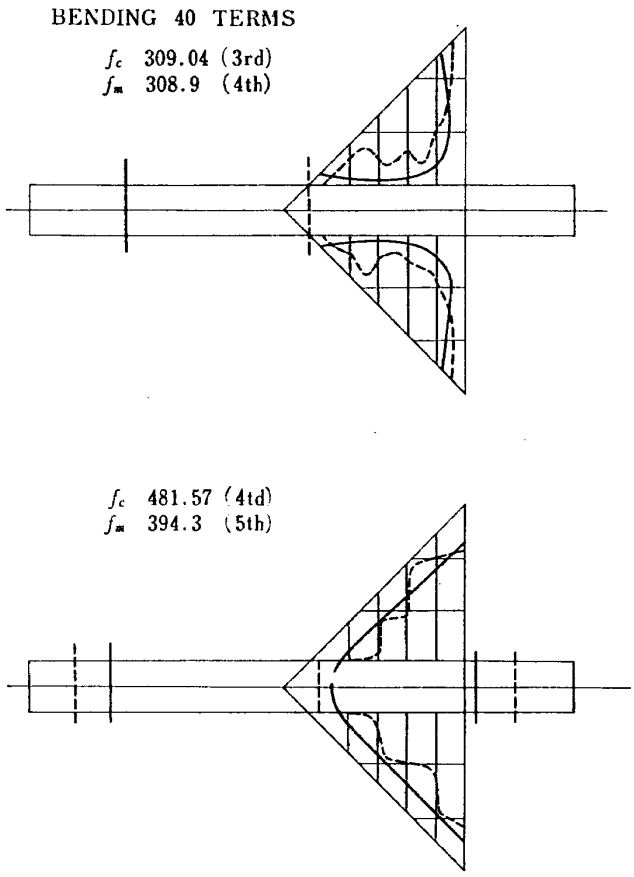


図 16·7 (I·Case)

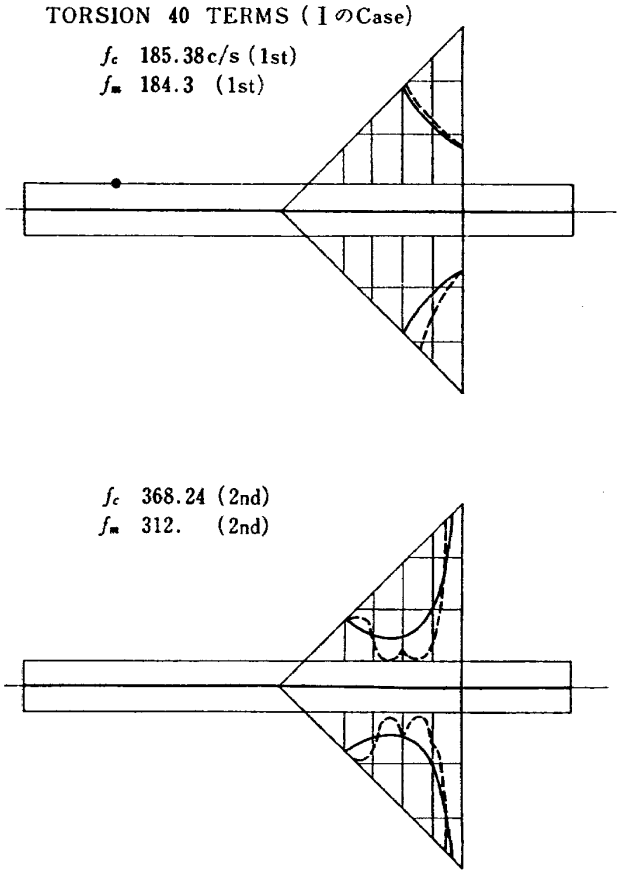


図 16·8 (I·Case)

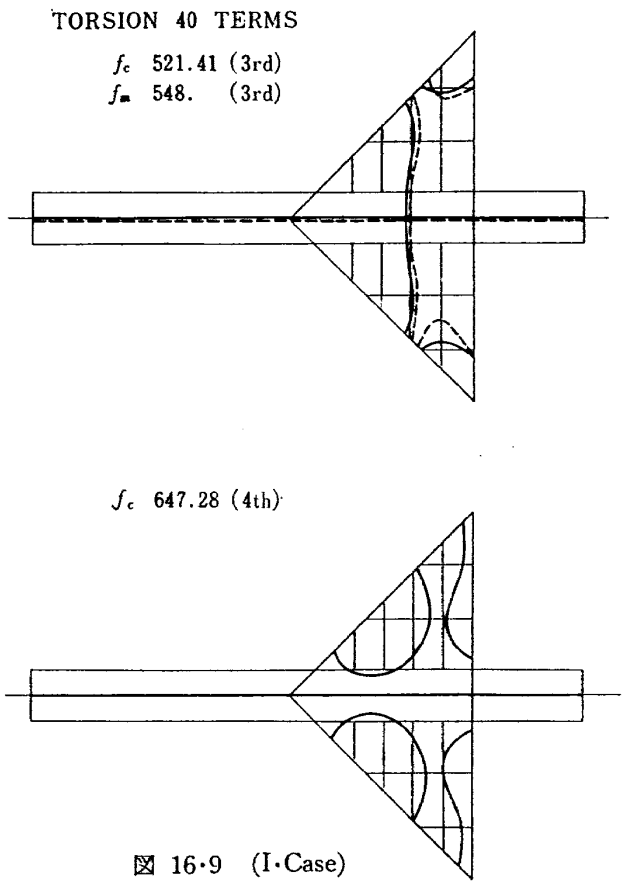


図 16·9 (I·Case)

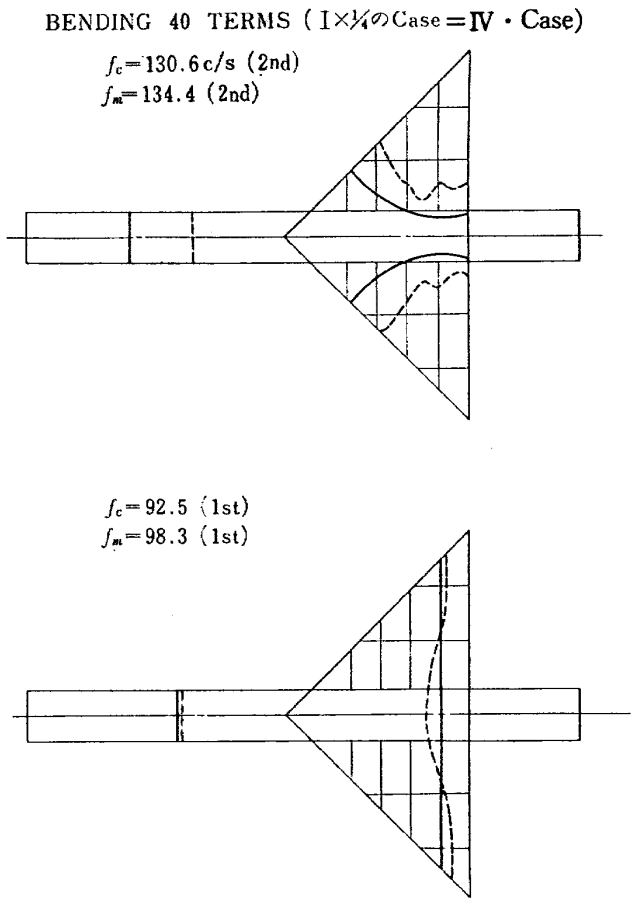


図 17·1 変厚翼胴結合模型の振動数と振動モード (IV・Case)

軸に平行な部分は，小骨と考えて計算した。

計算方法は，1.で誘導した式を用いた。

胴体の定数を図 16.4 に示した。

計算は HITAC 5020 でおこなったものであるが，試験関数を 40 項とした場合には，5 ケの固有値と固有振動モードを求めるのに約 30 分を要した。

振動数方程式は，想定最低固有値以下の値を与えて行列式の値を計算し，この固有値を少しづつ高くして行き，行列式の値が零となる固有値を求め，これから固有振動モードを求める，初歩的な方法によった。

計算結果を実験結果と比較して，図 16·5～16·9 に示した。

図 16·5～16·9 に示した計算値は，胴体の結合部なども単に幾何学的寸法通りに求めた 図 16·4 のような値を用いたものである。胴体が変形する振動モードが主要な対称な曲げ振動の場合には実測された固有値は計算と比較してかなり低い。逆対称振動の捩りでは，このことはみられない。ただ捩り振動の実験では，低次の振動では胴体は一方向回転のモードが主である。

前者の曲げ振動実験において，胴体の曲げ振動の低下がみられることは，結合部の剛性が，幾何学的寸法から求められた値とかなりちがうことが考えられる。

詳しい吟味はのちのきかいにしたいが，この影響を

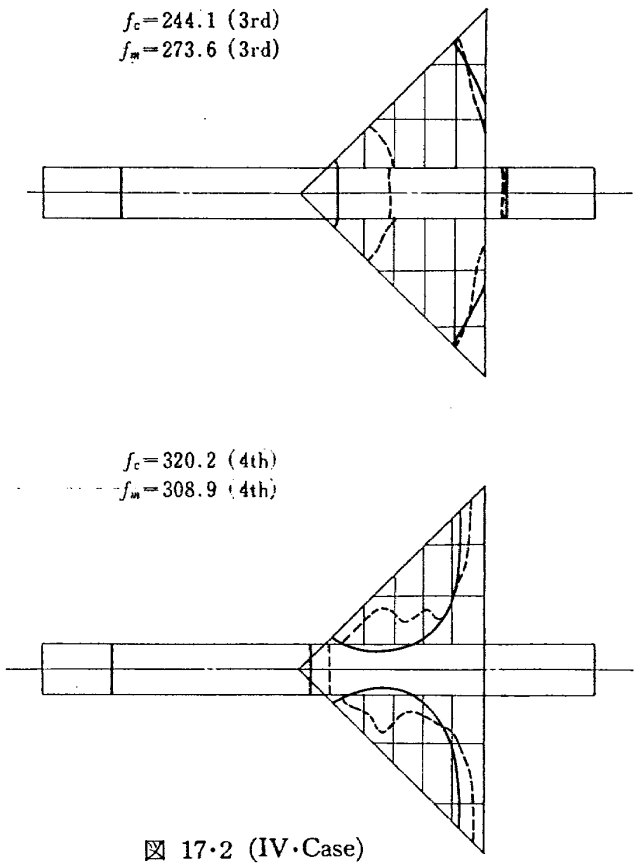


図 17·2 (IV·Case)

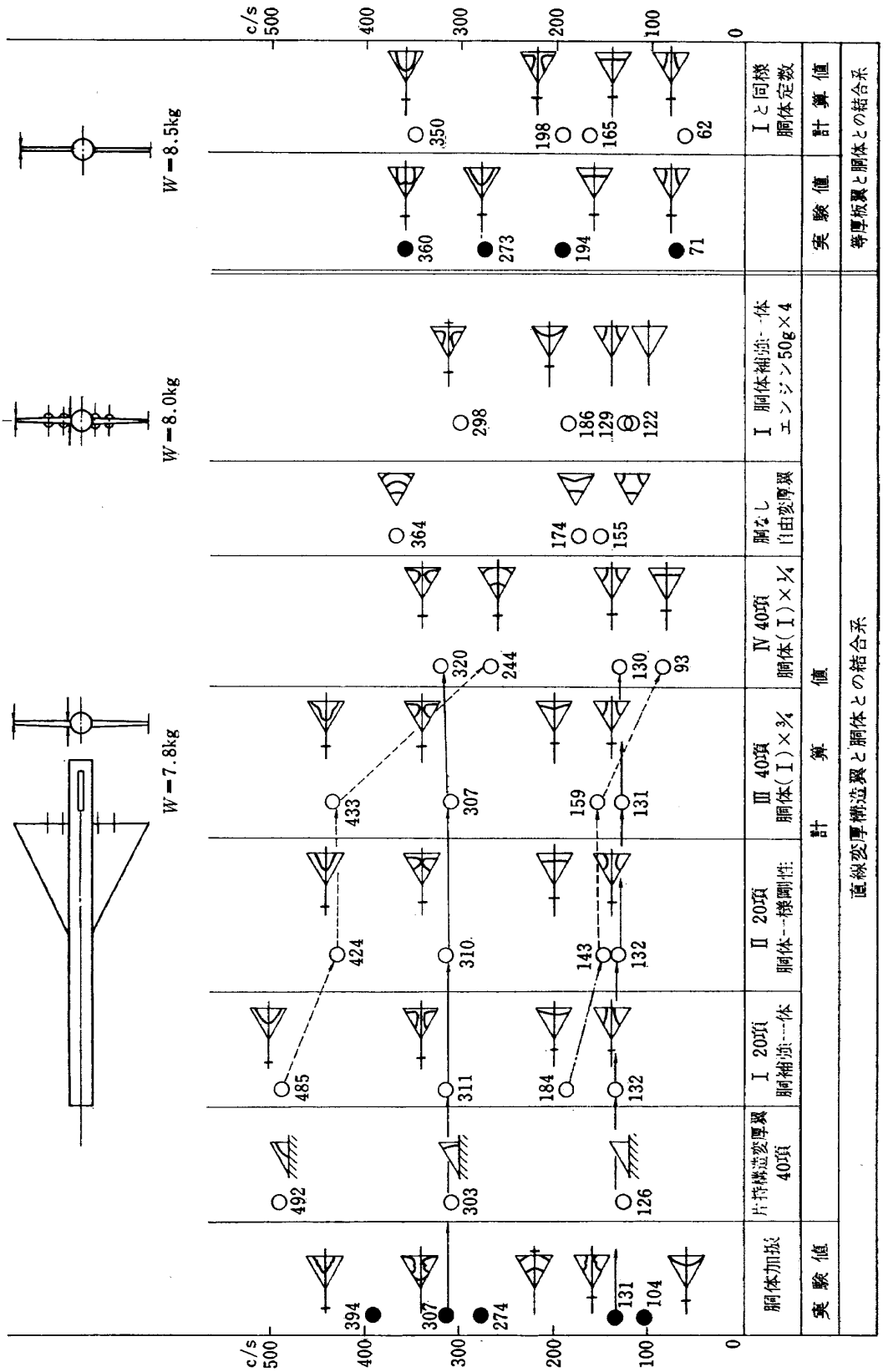


図 18・1 曲げ振動，変厚翼胴結合模型の振動数

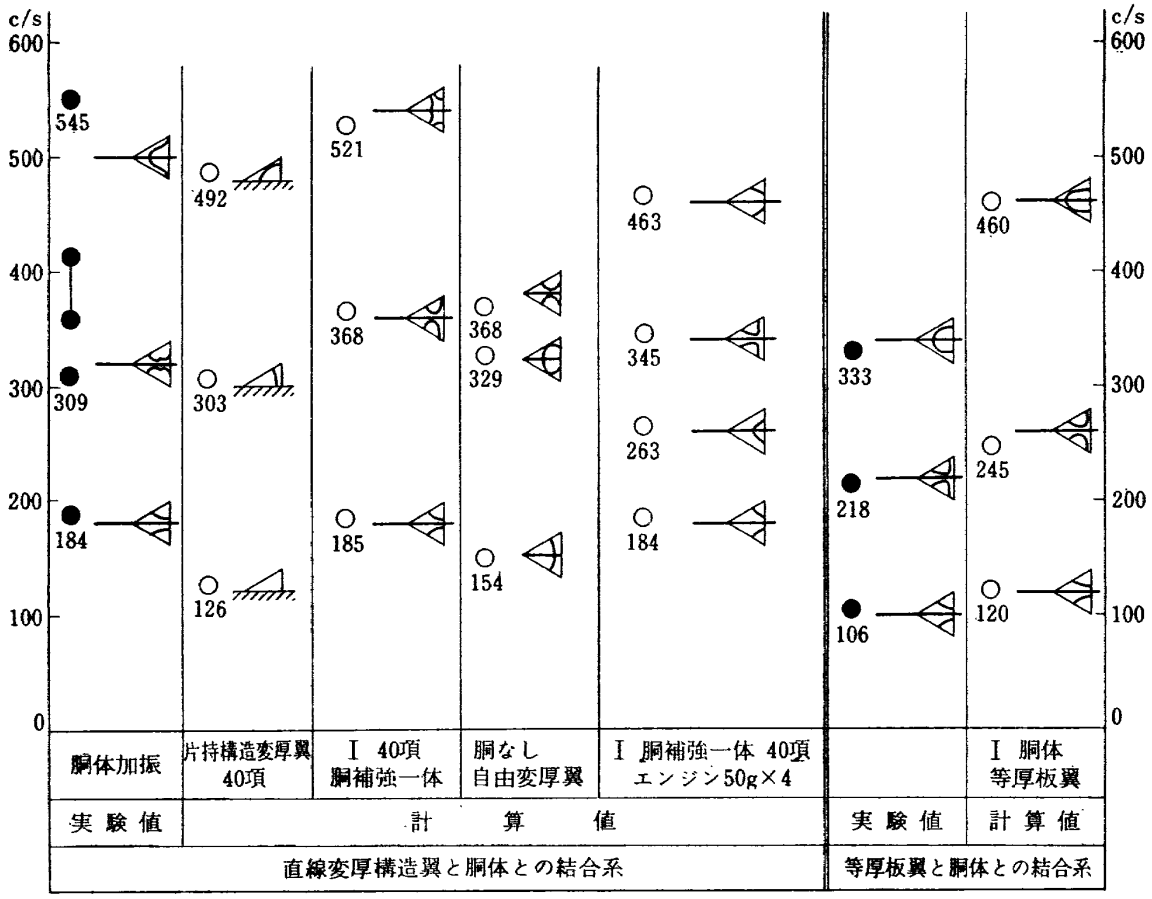


図 18·2 ねじり振動，変厚翼胴結合模型の振動数

考えて，計算定数のうち，胴体の曲げ剛性を変化させたとき，振動がどのように変化するかを吟味してみた。結果の一例を図 17·1，17·2 に示した。

図 18 はこれをグラフに示したものである。

図 18 の I の Case は幾何学的形状のままの剛性を用いた計算値で，II，III，IV と胴体剛性を一様に少なくした場合の計算値である。II は結合部を除いた一様円筒の場合，III，IV は I の Case の EI を機械的に 3/4，1/4 とした場合である。

IV の剛性値になって，実験値と同様な振動モードの順になっている。図 16·1 に示した結合部は二箇所あるが，この場合のゆるみが極めてきいているのであろう。しかし，図 18·1 からもわかるように，胴体の曲げ振動モードの影響の少ない実線矢印で結んだモードの振動は，当然のことながらほとんど影響をうけていない。

e) 胴体とエンジンをもった変厚構造翼，$\alpha=30°$，$\beta=90°$ との結合した系の振動計算

ここで解析しようとするモデルは，図 1 に示すような形状のモデルを考えた。

1. の解析式を用いたが，エンジンは剛体と仮定し，このエンジンの運動エネルギーは，エンジン重心点の試験関数から求められる。

エンジンが翼厚中心からずれたところにある場合も考えられるが，ここでは簡単に翼厚中心にあるとしたが，中心からずれている場合も仮定した試験関数から，このエネルギーを算出することは容易であろう。

図 1 において。エンジン質量を M とすると，エンジンの x 軸まわりの，この点での慣性モーメントは，

$$J\omega_x=Md^2/8 \qquad \cdots\cdots(2.4)$$

y 軸まわりの，この点での慣性モーメントは，

$$J\omega_y=\frac{Ml^2}{12}+\frac{Md^2}{16} \qquad \cdots\cdots(2.5)$$

となる。

エンジンの重心座標を ξ_i，η_i とすると，これらの定数，M，$J\omega_x$，$J\omega_y$ を用いて，運動エネルギーが求められる。

そこで，(1.3.4) 式の $-X^2\{R_1S_1+\cdots\cdots\}$ の式に次の項を追加すればよい。

$$\begin{aligned}-X^2\{&\sum_i MI(i)\xi_i^{m+r}\cdot\eta_i^{n+s}\\&+\sum_i MJX(i)n\cdot s\cdot\xi_i^{m+r}\cdot\eta_i^{n+s-2}\\&+\sum_i MJY(i)m\cdot r\cdot\xi_i^{m+r-2}\cdot\eta_i^{n+s}\}\end{aligned} \qquad \cdots\cdots(2.6)$$

ここに，

$$\left.\begin{aligned} MI(i)&=2M_i/a\cdot b\cdot\rho_c\cdot t_c \\ MJX(i)&=2J\omega_{xi}/\rho_c\cdot t_c\cdot ab^3 \\ MJY(i)&=2J\omega_{yi}/\rho_c\cdot t_c\cdot a^3b \end{aligned}\right\} \quad \cdots\cdots(2.7)$$

である。

以上のような追加プログラムによって図1のような構造物の振動解析をおこなった。

計算定数は，エンジンの幾何学的形状として，

$l=100\,\mathrm{mm}$

$d=\ 30\,\mathrm{mm}$

の円柱に重量50 g（翼・胴結合系は7.8 kg）のものが均一に分布するとした。エンジンは，これが4個対称についたものとする。

計算結果は図18に併記した。

2. 結　　言

構造翼および構造翼と胴体との結合した系の振動解析と振動実験をおこなって，数値解析結果と実測値を比較し，十分実用性のある解法であることを確認するとともに，これらの系の振動特性を明確にした。

解法は古典的なエネルギー法であるが，計算機を利用するうえで，多少便利になっているのではないかと思う。

より複雑な構造物の解析にはマトリックス法が用いられるであろう。より精密な計算がおこなわれることを希望する。

最後に本研究の一部を実習実験としておこなった，東海大学実習生伊東美樹君，花田孝雄君，玉野隆司君および種々有益な討論の労をとっていただいたDr. T.C. Soong に感謝の意を表わします。

文　　献

1) 塙，築地，多田，越出，林，日下：梁板結合構造物の振動(II)，航技研報告 TR-160 (1968)
2) 塙，築地，越出：T型結合板の振動，航技研報告 TR-159 (1968)
3) 塙，越出，戸川，川井：変厚平板翼の振動について，航技研報告 TR-60 (1964)
4) 川井，塙，戸川，高橋，越出：平板翼の振動について，航技研報告 TR-30 (1962)
5) 塙，林，多田：構造翼胴結合系の振動解析，第12回構造強度に関する講演会，昭和45年7月2日 (1970)
6) 塙，林：構造翼と胴体結合系の振動解析例について，機械学会第49期全国大会講演会，昭和46年10月20日 (1971)
7) 塙，林：構造翼の振動解析と実例，第11回構造強度に関する講演会，昭和44年7月4日 (1969)

TR-278T	Development of Turbulent Boundary Layers Along Curred Walls of an Annular Diffusing Passage	Feb. 1972	Shoichi FUJII Theodore H. OKIISHI
TR-279	直線硬化特性材料での有孔帯板内の応力およびひずみの集中係数について Stress and Strain Concentration Factor of Strips With a Control Circular Hole in Linearly Strain Herdening Materials	1972年2月	青木由雄，倉元真実 小林芳人，国尾　武
TR-280	ガンタンネルによる鈍頭円錐の極超音速空力特性試験 Experimental Study on the Hypersonic Aerodynamic Characteristics of Spherically Blunted Cones by the Gun tunnel	1972年5月	曽我国男，小野寺信幸
TR-281	ジェットエンジンのディジタル制御 (1) 装置および予備実験 Digital Control of Jet Engines (1) Control System and Preliminary Experiments	1972年7月	西尾健二，遠藤征紀 杉山七契，越沼　威 大畑敏美，松田幸雄 吉田　晃，中山　晋
TR-282	高温タービン試験設備およびその計測装置 On the High Temperature Test Facilities and the Data Processing System.	1972年6月	原動機部
TR-283	エンジン特性の実時間シミュレーション(I) (装置および特性) Real-time Simulation of Jet Engines with Digital Computer (I) (Fabrication and characteristics of the Simulator)	1972年7月	西尾健二，杉山七契 越沼　威，橋本武男 大畑敏美，市川英夫
TR-284	高 *dn* 値における玉軸受の性能に関する研究 Study on Performance of Ball Bearings at High *dn* Valves	1972年5月	宮川行雄，関　勝美 横山正幸
TR-285	高温固体潤滑剤としての一酸化鉛(PBO)に関する基礎的研究 Study on Lead Monoxide as Solid Lubricant for High Temperatures	1972年5月	宮川行雄，西村　充 安部　亘
TR-286T	An Investigation of Secondary Injection Thrust Vector Control	May 1972	Tatsuo YAMANAKA
TR-287	内面加熱を受ける中空円筒の非定常熱応力	1972年5月	江川幸一，竹中幸彦
TR-288	低アスペクト比後退角片持平板翼の遷音速および超音速のフラッタ特性 The Transonic and Supersonic Flutter characteristics of Low Aspect Ratio Sweptback Thin Cantilerer	1972年5月	中井暎一，森田甫之 菊池孝男，高橋　実 東久保正年
TR-289T	Transient Hypersonic Leading-Edge Flow	Jun. 1972	Katsuhisa KOURA
TR-290	二自由度回転駆動振動検出型ジャイロの研究 Study of a Rotary-drive Vibratory-output Two-degree-of-freedom Gyro	1972年7月	山田　博

航空宇宙技術研究所報告291号

昭和47年7月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　有限会社啓文堂松本印刷
東京都文京区水道2—7—5

Printed in Japan