

UDC 521.3.  
629.783-54

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-295

自機搭載型軌道保持システムのための  
軌道決定と制御

松 島 弘 一

1972年8月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-269T Approximation of Linear Operator Semi-groups Feb. 1972 Tadayasu TAKAHASHI
- TR-270 円筒殻の座屈実験  
The Experiments on the Buckling of Circular Cylindrical Shells 1972年2月 戸田 勳, 日下和夫
- TR-271 並列結合はりの振動  
On the Vibration of Three-Parallel-Beams 1972年2月 林 洋一, 築地恒夫
- TR-272 遷音速軸流タービンの研究 (第一報)  
—タービンノズル円環翼列の実験—  
An Investigation of a Transonic Axial-Flow Turbine (I) —A Cold Air Test of the Annular Turbine Nozzel Cascade— 1972年2月 鳥崎忠雄, 能瀬弘幸  
森田光男, 井上重雄  
関根 静雄
- TR-273 高速軸流タービンの研究 (第二報)  
—1段軸流タービンの研究—  
An Investigation of a High Speed Axial Flow Turbine (II) —A Investigation of a Single Stage Turbine— 1972年2月 鳥崎忠雄, 森田光男  
能瀬弘幸, 関根 静雄  
井上重雄
- TR-274 軸流圧縮機ディスクの強度  
(1 外周付近に多数のピン孔を有するディスク)  
Investigation of Strength of Axial-Flow Compressor Disc  
(1 On the Disc with many Pin hole) 1972年2月 松末勝利
- TR-275 高度制御試験設備  
Height Control Test Equipment for VTOL Aircraft 1972年2月 松木正勝, 鳥崎忠雄  
西尾健二, 遠藤征紀  
吉田晃, 藤中山克巳  
岩部柱相, 中田武越  
関根 静雄
- TR-276 フライングテストベッド機体総合実験  
—エンジンを除く本体の機能—  
Overall Grond Experiments on Flying Test Bed for VTOL Aircrfts at National Aerospace Laboratoy 1972年2月 滝沢直人, 田辺義一  
渋谷昭義, 小川敏夫  
藤枝俊史, 小野幸幸  
西村博史, 小野幸幸  
後藤芳夫
- TR-277 円環状ディフューザの乱流境界層の発達、  
Development of Turbulent Boundary Layers Along the Curred Walls of an Annular Diffusing Passage 1972年2月 藤井昭一, 五味光男  
西脇英夫  
Theodore H. OKIISHI
- TR-278T Development of Turbulent Boundary Layers Along Curred Walls of an Annular Diffusing Passage Feb. 1972 Shoichi FUJII  
Theodore H. OKIISHI
- TR-279 直線硬化特性材料での有孔帯板内の応力およびひずみの集中係数について  
Stress and Strain Concentration Factor of Strips With a Control Circular Hole in Linearly Strain Herdening Materials 1972年2月 青木由雄, 倉元真実  
小林芳人, 国尾武
- TR-280 ガンタンネルによる鈍頭円錐の極超音速空力特性試験  
Experimental Study on the Hypersonic Aerodynamic Characteristics of Spherically Blunted Cones by the Gun tunnel 1972年5月 曾我 国男, 小野寺信幸
- TR-281 ジェットエンジンのデジタル制御  
(1) 装置および予備実験  
Digital Control of Jet Engines  
(1) Control System and Preliminary Experiments 1972年7月 西尾健二, 遠藤征紀  
杉山七契, 藤沼幸雄  
大畑敏美, 松田幸晋  
吉田 晃, 中山
- TR-282 高温タービン試験設備およびその計測装置  
On the High Temperature Test Facilities and the Data Processing System. 1972年6月 原 動 機 部

# 自機搭載型軌道保持システムのための 軌道決定と制御\*

松島 弘 —\*\*

## Orbit Determination and Control Methods for Self-contained Station-keeping Systems

By Koichi MATSUSHIMA

### Abstract

Orbit determination method for self-contained station-keeping systems, using observational data of only on-board sensors is formulated, and the general equations of motion which determine the motion of a satellite due to control forces in the Earth's gravitational field is derived from Lagrange's planetary equations and the mechanism of orbit control is discussed from the dynamical point of view using the equations.

Then the effects of the perturbations of the Earth's gravitational field on the longitudinal drift of synchronous satellite are cleared up and it is showed that the station-keeping of synchronous satellite in the Earth's gravitational field, having no consideration for the effects of other perturbative forces, result in the control of only two parameters  $a$  and  $L$ .

### 1. 緒 言

静止衛星の軌道保持を行なうシステムとして、一般の space vehicle の誘導制御と同様に次の三つの方式が考えられる。

- (1) 地上からのレーダによるトラッキングおよび指令による制御
- (2) 自機搭載型システムによる完全な自動制御
- (3) 両方を結合した方法

これらの方式をはっきりさせるために、軌道保持の過程を概念的に図示すると図1のようになる。そこで(A), (B)の部分は衛星の任意の瞬間における状態および目標とする状態からのずれの決定、(C)は(B)からの情報を基にして、目標位置にもどすのに必要な(あるいは最適な)制御量の決定を行ない、(D)は(C)の部分で決められた制御指令を実行する actuator の部分である。ここで上に述べた(1)の方式は(A)の全部または一部および(B), (C)の過程を地上のシステムを通して行なうものであり、(2)の方式は(A)から(D)までのすべての過程を衛星上で行なうものであ

る。特に静止衛星の軌道保持を行なう際に困難なのは(A), (B)の過程であり、二つの方式の差異もこれらの過程を地上のシステムで行なうか、それとも衛星上で行なうかにある。

ところで従来の軌道保持はほとんど(1)の方式で行なわれてきたが、今後は(2)の自機搭載型システムによる方式の重要性が増大してくることが予想されている<sup>1)</sup>。そこでこの方式の持つ特徴を操作上の問題と精度の問題の二つの観点から検討してみる。

まず純粋に操作の問題だけを取り出してみると、自機搭載型システムによる方式は地上のシステムを必要としない。したがって、(1)の方式と比較してトラッキングや制御指令などの地上での操作量は激減される。つぎに精度の問題であるが、軌道保持の精度を決定する重要な要素は二つあり、一つは軌道保持システム自体の精度である。前者に関しては軌道決定などに要する大きな計算量をそのまま衛星上で処理することは現在のところ困難で、この方式を実行する場合の最も大きな問題点である。一方、後者に関してはこの方式は(1)の方式と比較して次のような理由から有利である。たとえば衛星の経度方向の保持誤差は、もちろんその衛星の用途によって異なるが、従来は2度程度

\* 昭和47年6月17日受付

\*\* 計測部

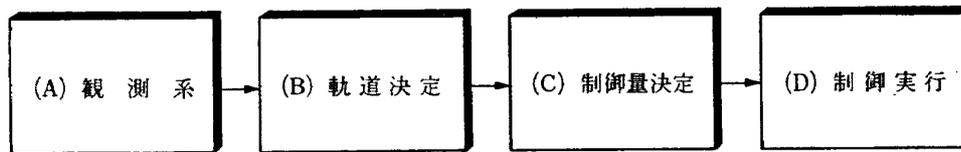


図 1 軌道保持の過程

であった。しかし通信衛星では通信容量を増大させるため、ビームの半値幅を小さくしたり、一個の衛星に複数個のスポットビームを装備するなどの方向にあるため<sup>2)</sup>、今後はますます高精度は制御が要求されると予想され、その目標精度を 0.5 度、さらには 0.1 度程度にすることが必要と思われる。このためには衛星に常時作用している地球の重力場のひずみ、月、太陽の引力、太陽輻射などによる摂動を除去するため、制御間隔を数日以下にする必要がある。しかしこれを現在の地上の追跡システムで行なうことは、静止衛星の数の増大ともあいまって、非常に大きな負担になると考えられる。さらに搭載用計算機などのハードウェアの発達は、衛星上での計算能力を非常に増大させると思われ、自機搭載型システムによる軌道保持は今後、重要な役割を果たすと予想される。

そこで本報告ではその前半においてこの方式の制御に応用できる簡単な軌道決定の手法を定式化した。センサとしては star tracker, horizon sensor 時計などを想定し、これらの情報を基にして、軌道 6 要素を衛星上の観測だけで決定するものである。今までに衛星上からの観測だけで軌道要素を決定する手法はいくつか発表されているが<sup>3)-9)</sup>、その多くは低高度の衛星を対象としている。また推定理論の応用という面に重点が置かれていて実用的なものは少ない。その中で文献 4) は静止衛星の軌道保持を目標にして非常に実際的で有益な軌道決定の手法を提案している。この報告において示した軌道決定においても、後半でその考え方を応用した。

次に静止衛星の軌道保持の問題を Lagrange's planetary equations を用いて力学的観点から検討し、重力場の摂動を含む、制御力と軌道要素の変化の関係を表わす運動方程式を定式化するとともに、これを用いて制御力の三軸方向の各成分と軌道要素の変化との間の関係を明確にした。また静止軌道の制御ではパラメータとして mean longitude  $L (= \Omega + \omega + M)$  をとることによって軌道 6 要素の制御から 4 要素の制御に簡単化できることを示した。さらにこれらの手法を用いて重力場のゆがみによる静止衛星の摂動とその制御について検討した。

## 2. 記号

$a$ :	軌道の semi-major axis
$a_e$ :	地球の平均赤道半径
$E$ :	eccentric anomaly
$e$ :	eccentricity
$F_{i, m, p}$ :	inclination function
$f$ :	true anomaly
$G_{l, p, q}$ :	eccentricity function
$i$ :	inclination
$i, j, k$ :	基準座標系における $X$ 軸, $Y$ 軸, $Z$ 軸方向の単位ベクトル
$i', m_0', q_0'$ :	図 3 で定義された角度
$J_{l, m}$ :	定数
$L$ :	mean longitude
$l_0, m_0, q_0$ :	図 2 で定義された角度
$M$ :	mean anomaly
$n$ :	平均運動
$p_k$ :	軌道上にとった任意の点
$R_c$ :	制御力による摂動関係
$R_g$ :	地球重力場の摂動関数
$S_1, S_2, S_3$ :	衛星上における座標系の $x$ 軸, $y$ 軸, $z$ 軸方向の単位ベクトル
$S_1, D_1$ :	衛星からその位置がわかっている二つの恒星の方向にとって単位ベクトル
$S_0, T_0, W_0$ :	制御力によって衛星に生じる加速度
$T$ :	周期
$t$ :	時刻または時間
$t_V$ :	本初子午線の $XZ$ 面通過時刻
$u_0, v_0$ :	図 4 で定義された角度
$\Delta V_S, \Delta V_T, \Delta V_W$ :	制御力による impulsive な速度増分
$X, Y, Z$ :	地球中心の基準座標系
$x, y, z$ :	衛星上の座標系
$\alpha, \beta$ :	azimuth angle および elevation angle
$\gamma, \delta$ :	恒星の赤経および赤緯

- $\delta_0$ : 図2で定義された角度
- $\lambda_i, m$ : 定数
- $\nu$ : 地球の自転角速度
- $\Omega$ : longitude of ascending node
- $\Omega'$ : 図3で定義された角度
- $\omega$ : argument of perigee
- $\lambda$ : 衛星の経度
- $\phi$ : 衛星の緯度
- $\mu$ : 万有引力の定数と地球の質量の積

3. 軌道要素の決定

3.1 座標系

まず軌道要素を定義する基準座標系をつぎのように設定する。(図2)

- 原点: 地球中心
- 基準面: 赤道面
- 座標軸: X軸—春分点の方向  
Y軸—赤道面内でX軸と直角方向  
Z軸—天の北極方向

ここで  $i, j, k$  はそれぞれ X 軸, Y 軸, Z 軸方向の単位ベクトルである。

次に衛星上に固定した座標系は、基準座標系に対する位置が前もって知られている二つの恒星を star tracker によって観測して次のようにきめる。(図2, 3)

- 原点: 衛星
- 基準面: 衛星から二つの恒星の方向にとった二つの単位ベクトル  $S_1, D_1$  を含む面
- 座標軸: x 軸— $S_1$  方向  
y 軸—基準面内で x 軸と直角方向

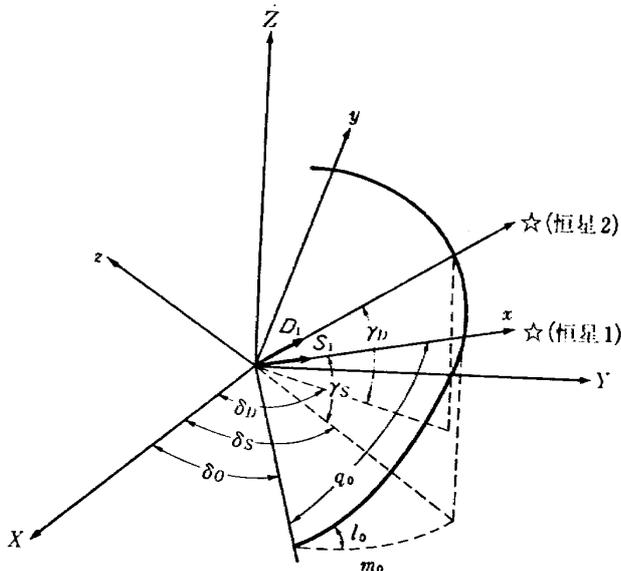


図2 基準座標系と衛星座標系の関係

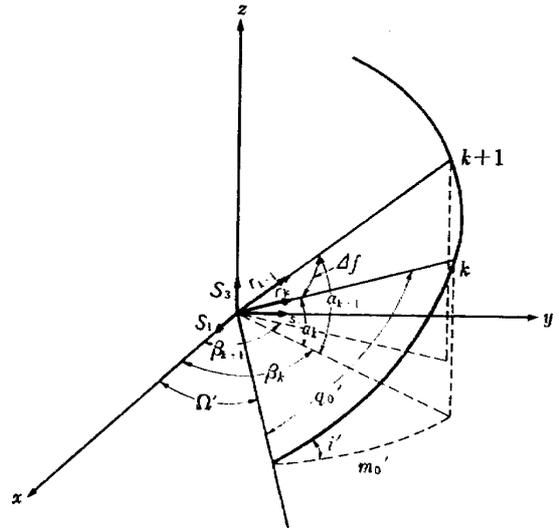


図3 衛星座標系

z 軸—基準面に垂直

ここで  $S_1, S_2, S_3$  はそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸方向の単位ベクトルである。また図2における  $\gamma_S, \gamma_D, \delta_S, \delta_D$  は二つの恒星の赤経, 赤緯である。

3.2 衛星の位置の観測

いま衛星上に固定した座標系において、衛星と地球中心を結ぶ方向にあって向きが地球中心と反対方向にある単位ベクトル  $r_k$  を horizon sensor の観測で求める。ここで  $r_{xk}, r_{yk}, r_{zk}$  は  $r_k$  の x 軸, y 軸, z 軸成分で、また添字  $k$  は  $k$  番目の観測を意味する。

$$r_k = r_{xk}S_1 + r_{yk}S_2 + r_{zk}S_3 \quad (3.1)$$

$$\left. \begin{aligned} r_{xk} &= \cos \alpha_k \cos \beta_k \\ r_{yk} &= \cos \alpha_k \sin \beta_k \\ r_{zk} &= \sin \alpha_k \end{aligned} \right\} \quad (3.2)$$

ここで  $\alpha_k, \beta_k$  は衛星上に固定した座標系から測った  $r_k$  の azimuth angle および elevation angle である。さらにこの  $r_k$  を基準座標 XYZ 系で表わすと

$$r_k = r_{Xk}i + r_{Yk}j + r_{Zk}k \quad (3.3)$$

ここで  $r_{Xk}, r_{Yk}, r_{Zk}$  は  $r_k$  の X 軸, Y 軸, Z 軸成分である。ところで図2において球面三角法の定理を用いると

$$\left. \begin{aligned} \tan l_0 \sin (\delta_D - \delta_S) &= \tan (\gamma_D - \gamma_S) \\ \sin m_0 \tan l_0 &= \tan \gamma_S \\ \cos q_0 &= \cos m_0 \cos \gamma_S \end{aligned} \right\} \quad (3.4)$$

となるから、これらの式から  $l_0, q_0, \delta_0 = \delta_S - m_0$  を求めて  $(r_{xk}, r_{yk}, r_{zk})$  から  $(r_{Xk}, r_{Yk}, r_{Zk})$  への変換は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} r_{Xk} \\ r_{Yk} \\ r_{Zk} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} r_{xk} \\ r_{yk} \\ r_{zk} \end{pmatrix} \quad (3.5)$$



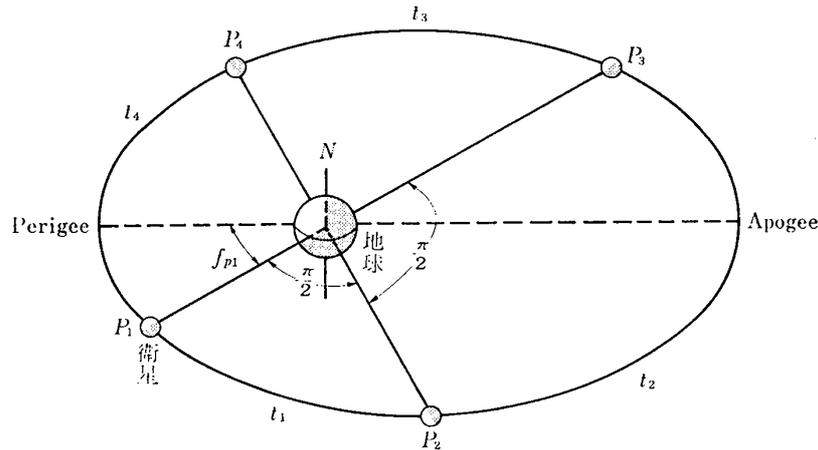


図 5

がこれらの点の間を飛行する時間を次のようにして認識する。いま二つの連続した観測によって求められる単位ベクトル  $\mathbf{r}_k$  および  $\mathbf{r}_{k+1}$  のスカラー積を考える。

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_k \cdot \mathbf{r}_{k+1} &= \cos \Delta f_k \\ &= \cos \alpha_k \cos \alpha_{k+1} \cos (\beta_{k+1} - \beta_k) \\ &\quad + \sin \alpha_k \sin \alpha_{k+1} \end{aligned} \quad (3.18)$$

ここで  $\Delta f_k$  は図 3 に示したように二回の観測の間の true anomaly の増加量を表わしている。したがって二回の観測によって得られた  $\mathbf{r}_k$  と  $\mathbf{r}_{k+1}$  のスカラー積が 0 になったとき衛星の true anomaly は 90 度進んだことになり、一方二回の観測時刻の差  $t_k$  は true anomaly が 90 度離れた二点間を飛行する時間を与える。

ところで  $p_k$  の定義から

$$f_{p_{k+1}} = f_{p_k} + \frac{\pi}{2} \quad (k=1, 2, 3) \quad (3.19)$$

したがって (3.17) 式は

$$nt_k = \frac{\pi}{2} - 2e(\cos f_{p_k} - \sin f_{p_k}) - 3e^2 \sin f_{p_k} \cos f_{p_k} \quad (3.20)$$

となる。そこで実際に  $t_1, t_2, t_3$  を求めると

$$nt_1 = \frac{\pi}{2} - 2e(\cos f_{p_1} - \sin f_{p_1}) - 3e^2 \cos f_{p_1} \sin f_{p_1} \quad (3.21)$$

$$nt_2 = \frac{\pi}{2} + 2e(\cos f_{p_1} + \sin f_{p_1}) + 3e^2 \cos f_{p_1} \sin f_{p_1} \quad (3.22)$$

$$nt_3 = \frac{\pi}{2} + 2e(\cos f_{p_1} - \sin f_{p_1}) - 3e^2 \cos f_{p_1} \sin f_{p_1} \quad (3.23)$$

(3.21) ~ (3.23) から  $n, e, f_{p_1}$  を次のように求める。

(3.21) と (3.22) および (3.22) と (3.23) から

$$e \sin f_{p_1} = \frac{1}{4} \{n(t_1 + t_2) - \pi\} \quad (3.24)$$

$$e \cos f_{p_1} = \frac{1}{4} \{n(t_2 + t_3) - \pi\} \quad (3.25)$$

また (3.21), (3.23) から

$$6e^2 \cos f_{p_1} \sin f_{p_1} = \pi - n(t_1 + t_3) \quad (3.26)$$

(3.24) ~ (3.26) から  $n$  に関する次の二次方程式を得る。

$$An^2 + Bn + C = 0 \quad (3.27)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} A &= (t_1 + t_2)(t_2 + t_3) \\ B &= \frac{8}{3}(t_1 + t_3) - \pi(t_1 + 2t_2 + t_3) \\ C &= \pi^2 - \frac{8}{3}\pi \end{aligned} \right\} \quad (3.28)$$

(3.27) からは二つの  $n$  が求まるが、衛星が完全に静止軌道にあってときの値を実際に求めてみることによって

$$n = \frac{-B + \sqrt{B^2 - 4AC}}{2A} \quad (3.29)$$

がきまる。したがって  $e$  および  $f_{p_1}$  は (3.24), (3.25) 式から次のようになる。

$$e = \frac{1}{4} [\{n(t_1 + t_2) - \pi\}^2 + \{n(t_2 + t_3) - \pi\}^2]^{1/2} \quad (3.30)$$

$$f_{p_1} = \tan^{-1} \left( \frac{n(t_1 + t_2) - \pi}{n(t_2 + t_3) - \pi} \right) \quad (3.31)$$

また楕円運動の関係式から semimajor axis  $a$  と周期  $T$  は

$$a = \left( \frac{\mu}{n^2} \right)^{1/3} \quad (3.32)$$

$$T = \frac{2\pi}{n} \quad (3.33)$$

さらに argument of perigee  $\omega$  はここで求めた  $f_{p_1}$  を用いて図 3, 4 からわかるように

$$\omega = v_0 + q_0' - f_{p_1} \quad (3.34)$$





行時間  $t_a$  を求める。(3.13) 式から点  $p_1$  における mean anomaly  $M_{p_1}$  を求めると  $e^3$  以上の項を無視して

$$\left. \begin{aligned} M_{p_1} &= f_{p_1} - 2e \sin f_{p_1} + \frac{3}{4} e^3 \sin 2f_{p_1} \\ f_{p_1} &= f_{p_1} + \frac{3}{2} \pi \end{aligned} \right\} (3.38)$$

また楕円軌道における飛行時間の方程式は、

$$t = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} M \quad (3.39)$$

与えられるので点  $p_1$  から近地点に到る時間  $t_p$  は

$$t_p = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (2\pi - M_{p_1}) \quad (3.40)$$

となる。同様にして  $t_a$  は

$$t_a = \sqrt{\frac{a^3}{\mu}} (\pi - M_{p_2}) \quad (3.41)$$

与えられる。ここで  $M_{p_2}$  は  $p_2$  点の mean anomaly である。後に述べる軌道制御では近地点または遠地点においてインパルスでな推力を付加することを考えているが、 $t_p, t_a$  を知るによって制御を行なう地点が認識できる。

以上で軌道6要素および制御に必要なパラメータが決定されたことになるが、その過程を図7に示した。

$$R_G = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \frac{\mu a^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) \cdot G_{l,p,q}(e) \cdot S_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \quad (4.3)$$

ここで inclination function  $F_{l,m,p}(i)$ , eccentricity function  $G_{l,p,q}(e)$  および  $S_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta)$  は参考文献12) に詳しく与えられている。また制御力によって生じる加速度を次の三つの成分に分ける。

- $S_0$ : 動径方向で地球中心から外向きに正
- $T_0$ : 軌道面内にて  $S$  直交し、速度ベクトルとの角度が  $90^\circ$  以下
- $W_0$ : 軌道面に垂直で北極側に正

これらを(4.1)式に入れるために次のように表わす<sup>11)</sup>。

$$\frac{\partial R_0}{\partial a} = \frac{r}{a} S_0$$

## 4. 軌道制御

前節に軌道決定の過程を示したが、本節ではそれに続く軌道制御、特に静止衛星の軌道保持の問題を力学的観点から検討する。

### 4.1 運動方程式

衛星の osculating elements の変化を示す Lagrange's planetary equations は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial \omega} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \omega} - \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\operatorname{cosec} i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= -\frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} \\ \frac{dM}{dt} &= n - \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial e} \end{aligned} \right\} (4.1)$$

ここで重力場のゆがみによる摂動と制御力を考え(4.1)式における摂動関数  $R$  を

$$R = R_G + R_C \quad (4.2)$$

とする。 $R_G, R_C$  はそれぞれ重力場のゆがみおよび制御力による摂動関数を意味する。ところで重力場の摂動関数  $R_G$  は次のように与えられる<sup>12), 13)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial R_C}{\partial e} &= -a \cos f \cdot S_0 + r \sin f \left( \frac{1}{1-e^2} + \frac{a}{r} \right) T_0 \\ \frac{\partial R_C}{\partial i} &= r \sin(\omega+f) \cdot W_0 \\ \frac{\partial R_C}{\partial \Omega} &= -r(1-\cos i) T_0 - r \cos(\omega+f) \sin i \cdot W_0 \\ \frac{\partial R_C}{\partial \omega} &= r(1-\sec i) \cdot T_0 \\ \frac{\partial R_C}{\partial M} &= \frac{ae \sin f}{\sqrt{1-e^2}} \cdot S_0 + \frac{a^2(1-e^2)}{r \sqrt{1-e^2}} \cdot T_0 \end{aligned} \right\} (4.4)$$

(4.3), (4.4)式を(4.1)式に代入して次の式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{na} \left[ \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} (l-2p+q) J_{l,m} \frac{a^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\ &\quad \left. \times \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) + \frac{a}{\sqrt{1-e^2}} \left( S_0 e \sin f + \frac{a(1-e^2)}{r} T_0 \right) \right] \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2 e} \left[ \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin T_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) \{ -(l-2p+q)(1-e^2) + (l-2p)\sqrt{1-e^2} \\
& + ae\sqrt{1-e^2} \{ S_c \sin f + T_c(\cos E + \cos f) \} \} \\
\frac{di}{dt} = & \frac{1}{na^3\sqrt{1-e^2}} \left[ \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l, m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l, m, p}(i) G_{l, p, q}(e) \right. \\
& \times \sin T_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) \times \{ -(l-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \} \\
& \left. + W_{cr} \cos(\omega+f) \right] \\
\frac{d\Omega}{dt} = & \frac{1}{na^3\sqrt{1-e^2} \sin i} \left[ \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l, m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \frac{dF_{l, m, p}(i)}{di} \right. \\
& \left. \times G_{l, p, q}(e) \cos J_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) + W_{cr} \sin(\omega+f) \right] \\
\frac{d\omega}{dt} = & \frac{\sqrt{1-e^2}}{nae} \left[ \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l, m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \cos T_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\
& \times F_{l, m, p}(i) \frac{dG_{l, p, q}(e)}{de} - S_c \cos f + T_c \left( 1 + \frac{r}{p} \right) \sin f \left. \right] \\
& - \frac{\cot i}{na^3\sqrt{1-e^2}} \left[ \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l, m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \cos T_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\
& \left. \times \frac{dF_{l, m, p}(i)}{di} G_{l, p, q}(e) + W_{cr} \sin(\omega+f) \right] \\
\frac{dM}{dt} = & n - \frac{1-e^2}{nae} \left[ \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l, m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l, m, p}(i) \right. \\
& \times \cos T_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) \frac{dG_{l, p, q}(e)}{de} - S_c \cos f \\
& + T_c \left( 1 + \frac{r}{a(1-e^2)} \right) \sin f \left. \right] + \frac{2}{na^2} \left[ \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l, m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \right. \\
& \left. \times (l+1) F_{l, m, p}(i) \cos T_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) G_{l, p, q}(e) - r S_c \right]
\end{aligned} \tag{4.5}$$

ここで

$$\begin{aligned}
T_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) = & (l-2p)\omega + (l-2p+q)M \\
& + m(\Omega - \theta) - m\lambda_{l, m} - \{ 1 - (-1)^{l-m} \} \left( \frac{\pi}{4} \right)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

と与えられる。

方程式 (4.5) は重力場の摂動力および制御力が加わった場合に osculating elements がどのように変化するかを示している。ここで微小な制御力を想定し、(4.3) 式に示された重力場の摂動関数のうち周期が 1

ここで

$$\begin{aligned}
\delta a_{zl, j} = & 0 \\
\delta e_{zl, j} = & \mu \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l (l-2p) J_{l, 0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l, 0, p}(i) G_{l, p, q}(e) \right. \\
& \left. \times \sin T_{l, 0, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right\}_j \cdot \delta t_j \\
\delta i_{zl, j} = & - \mu \left\{ \frac{\cot i}{na^3\sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l (l-2p) J_{l, 0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l, 0, p}(i) \right. \\
& \left. \times G_{l, p, q}(e) \sin T_{l, 0, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right\}_j \cdot \delta t_j
\end{aligned}$$

日以下の短周期項を省略<sup>14)</sup>して第一次摂動を求めると、zonal harmonics の long range parts および resonance terms の影響を考慮した制御力による要素の変化が次のように求まる。

$$\left. \begin{aligned}
\delta a_j = & \delta a_{zl, j} + \delta a_{r, j} + \delta a_{c, j} \\
\delta e_j = & \delta e_{zl, j} + \delta e_{r, j} + \delta e_{c, j} \\
\delta i_j = & \delta i_{zl, j} + \delta i_{r, j} + \delta i_{c, j} \\
\delta \Omega_j = & \delta \Omega_{zl, j} + \delta \Omega_{r, j} + \delta \Omega_{c, j} \\
\delta \omega_j = & \delta \omega_{zl, j} + \delta \omega_{r, j} + \delta \omega_{c, j} \\
\delta M_j = & \delta M_{zl, j} + \delta M_{r, j} + \delta M_{c, j}
\end{aligned} \right\} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}
 \delta\Omega_{xi,j} &= \mu \left\{ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l J_{l,0} \frac{dF_{l,0,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \right. \\
 &\quad \left. \times \cos T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right\}_j \cdot \delta t_j \\
 \delta\omega_{xi,l} &= \mu \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l J_{l,0} \frac{ae^l}{a^{l+1}} \cos T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\
 &\quad \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} F_{l,0,p}(i) \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,0,p}(i)}{di} \right. \\
 &\quad \left. \left. \times G_{l,p,q}(e) \right) \right\}_j \cdot \delta t_j \\
 \delta M_{xi,j} &= \left[ n + \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l J_{l,0} \frac{ae^l}{a^{l+1}} F_{l,0,p}(i) \cos T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(l+1) \frac{1}{na^2} G_{l,0,p,q}(e) \right\} \right]_j \cdot \delta t_j
 \end{aligned} \tag{4.8}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) &= (l-2p)\omega - \{1-(-1)^l\} \left( \frac{\pi}{4} \right) \\
 q &= -l+2p
 \end{aligned} \tag{4.9}$$

となる。また

$$\begin{aligned}
 \delta a_{r,j} &= -2\mu \left\{ \frac{1}{na} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l (l-2p+q) J_{l,m} \frac{ae^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) \right. \\
 &\quad \left. \times G_{l,p,q}(e) \sin K_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right\}_j \cdot \delta t_j \\
 \delta e_{r,j} &= \mu \left[ \frac{1}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{ae^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\
 &\quad \left. \times \sin K_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \{ -(l-2p+q)(1-e^2) + (l-2p)\sqrt{1-e^2} \} \right]_j \cdot \delta t_j \\
 \delta i_{r,j} &= \mu \left[ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{ae^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\
 &\quad \left. \times \sin K_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \{ -(l-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \} \right]_j \cdot \delta t_j \\
 \delta\Omega_{r,j} &= \mu \left( \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{ae^l}{a^{l+1}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \right. \\
 &\quad \left. \times G_{l,p,q}(e) \cos K_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right)_j \cdot \delta t_j \\
 \delta\omega_{r,j} &= \mu \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{ae^l}{a^{l+1}} \cos K_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} F_{l,m,p}(i) \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \times \left\{ \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,m,p}(e)}{di} \right\} \right) \right\}_j \cdot \delta t_j \\
 \delta M_{r,j} &= \mu \left[ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{ae^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) \cos K_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\
 &\quad \left. \times \left\{ -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(l+1) \frac{1}{na^2} G_{l,p,q}(e) \right\} \right]_j \cdot \delta t_j
 \end{aligned} \tag{4.10}$$

ここで

$$\begin{aligned}
 K_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) &= (l-2p)\omega + (l-2p+q) \\
 &\quad \times (M-nt) + m\Omega + m\nu t, \\
 -m\lambda_{l,m} &= \{1-(-1)^{l-m}\} \left( \frac{\pi}{4} \right) \quad (\text{註})
 \end{aligned} \tag{4.11}$$

$$q = -l+2p+m \cdot \frac{\nu}{n} \tag{4.12}$$

(註)

文献12)においては resonance terms による要素の変化を求めたところで(4.6)式の、右辺に現われる  $\omega, M-nt, \Omega$  をそれぞれの epoch における値だけで置きかえて  $T_{l,m,p,q} \doteq K_{l,m,p,q} = \text{constant}$  としているが、ここではそれを修正して  $\omega, M-nt, \Omega$  の変化も考慮している。

さらに

$$\left. \begin{aligned}
 \delta a_{c,j} &= \left\{ \frac{2e \sin f}{n \sqrt{1-e^2}} S_c + \frac{2a \sqrt{1-e^2}}{nr} T_c \right\}_j \cdot \delta t_j \\
 \delta e_{c,j} &= \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2} \sin f}{na} S_c + \frac{\sqrt{1-e^2} (\cos E + \cos f)}{na} T_c \right\}_j \cdot \delta t_j \\
 \delta i_{c,j} &= \left\{ \frac{r \cos(\omega+f)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \right\}_j \cdot W_0 \cdot \delta t_j \\
 \delta \Omega_{c,j} &= \left\{ \frac{r \sin(\omega+f)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \right\}_j \cdot W_0 \cdot \delta t_j \\
 \delta \omega_{c,j} &= \left\{ -\frac{\sqrt{1-e^2} \cos f}{nae} S_c + \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left( a + \frac{r}{1-e^2} \right) \sin f \cdot T_c - \cos i \cdot \delta \Omega_{c,j} \right\}_j \cdot \delta t_j \\
 \delta M_{c,j} &= \left\{ -\sqrt{1-e^2} (\cos i \cdot \delta \Omega_{c,j} + \delta \omega_{c,j}) \right\}_j - \left\{ \frac{2r}{na^2} S_c \right\}_j \cdot \delta t_j
 \end{aligned} \right\} \quad (4.13)$$

ここで

$$\cos E = \frac{\cos f + e}{1 + e \cos f} \quad (4.14)$$

また (4.8), (4.10), (4.13) の各式の添字  $j$  は右辺の各軌道要素の値を  $t=t_j$  における値で固定していることと示す。また  $\delta t_j$  は  $t=t_j$  から  $t=t_{j+1}$  までの時間である。なお重力場の摂動関数を 4 次の harmonics まで考慮した (4.8) および (4.10) の具体的な式を付録に示した。

$\delta t_j$  の大きさをどの程度まで取ることができるかは実際の計算においては非常に重要な問題であるが、これを一般的に決めることは難しい。人工衛星のように軌道要素が短時間に比較的大きく変化する場合にはかなり小さくとる必要があるが、その中でも静止衛星の摂動力による要素の変化などはかなりゆっくりしたものなので、 $\delta t$  を 1 日程度にとっても十分であろう。したがってある期間における軌道要素の変化を  $\delta a, \delta e, \dots$  とすると、(4.7) 式は一般的に次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned}
 \delta a &= \sum_{j=1}^{K-1} \delta a_j \\
 \delta e &= \sum_{j=1}^{K-1} \delta e_j \\
 \delta i &= \sum_{j=1}^{K-1} \delta i_j
 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned}
 \delta \Omega &= \sum_{j=1}^{K-1} \delta \Omega_j \\
 \delta \omega &= \sum_{j=1}^{K-1} \delta \omega_j \\
 \delta M &= \sum_{j=1}^{K-1} \delta M_j
 \end{aligned} \right\} \quad (4.7)'$$

### 4.2 軌道制御

連続的な推力による制御を考えると、制御途中の重力場の摂動をも考慮した結果を (4.7)' 式から求めることができる。しかし逆に任意の軌道要素の修正量に対して、それを制御するのに必要な推力をこの式から実際に求めることは容易ではない。そこでここでは impulsive な微小推力による静止衛星の軌道制御を考える。

微小時間  $\delta t$  における impulsive な速度増分を

$$\left. \begin{aligned}
 \Delta V_S &= S_0 \cdot \delta t \\
 \Delta V_T &= T_0 \cdot \delta t \\
 \Delta V_W &= W_0 \cdot \delta t
 \end{aligned} \right\} \quad (4.15)$$

とする。これを (4.13) に代入し、さらに impulsive な制御であるから (4.7) 式の各辺の第 1 項目および第 2 項目を省略すると速度増分と軌道要素の変化の関係はマトリックス表示で次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \delta a \\ \delta e \\ \delta i \\ \delta \Omega \\ \delta \omega \\ \delta M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2e \sin f}{n \sqrt{1-e^2}} & , & \frac{2a \sqrt{1-e^2}}{nr} & , & 0 \\ \frac{\sqrt{1-e^2} \sin f}{na} & , & \frac{\sqrt{1-e^2} (\cos E + \cos f)}{na} & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & \frac{r \cos(\omega+f)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \\ 0 & , & 0 & , & \frac{r \sin(\omega+f)}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \\ -\frac{\sqrt{1-e^2} \cos f}{nae} & , & \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left( a + \frac{r}{1-e^2} \right) \sin f & , & -\frac{r \cos i \sin(\omega+f)}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \\ \frac{(1-e)^2 \cos f}{nae} - \frac{2r}{na^2} & , & -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \left( a + \frac{r}{1-e^2} \right) \sin f & , & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_S \\ \Delta V_T \\ \Delta V_W \end{pmatrix} \quad (4.16)$$

ここで

$$M_0 = M - nt \quad (4.17)$$

(4.16)から各制御力の成分と軌道要素の関係がはっき

$$\begin{pmatrix} \delta a \\ \delta e \\ \delta i \\ \delta \Omega \\ \delta \omega \\ \delta M_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & , & \frac{2a}{nr} & , & 0 \\ \frac{\sin f}{na} & , & \frac{\cos E + \cos f}{na} & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & \frac{r \cos(\omega + f)}{na^2} \\ 0 & , & 0 & , & \frac{r \sin(\omega + f)}{na^2 \sin i} \\ -\frac{\cos f}{nae} & , & \frac{(a+r) \sin f}{na^2 e} & , & -\frac{r \sin(\omega + f)}{na^2 \sin i} \\ \frac{\cos f}{nae} - \frac{2r}{na^2} & , & -\frac{(a+r) \sin f}{na^2 e} & , & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_s \\ \Delta V_T \\ \Delta V_W \end{pmatrix} \quad (4.18)$$

(4.18)式において角度要素  $\Omega, \omega, M_0$  の変化を調べてみると、 $\Delta V_W$  による変化  $\delta\Omega$  と  $\delta\omega$ 、および  $\Delta V_T$  による変化  $\delta\omega$  と  $\delta M_0$  はそれぞれ絶対値が等しく向きが反対である。そこで mean longitude  $L = \Omega + \omega + M_0$  をとってみると、

$$\delta L = \delta\Omega + \delta\omega + \delta M_0 = -\frac{2r}{na^2} \Delta V_s \quad (4.19)$$

$$\begin{pmatrix} \delta a \\ \delta e \\ \delta i \\ \delta L \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & , & \frac{2a}{nr} & , & 0 \\ \frac{\sin f}{na} & , & \frac{\cos E + \cos f}{na} & , & 0 \\ 0 & , & 0 & , & \frac{r \cos(\omega + f)}{na^2} \\ -\frac{2r}{na^2} & , & 0 & , & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta V_s \\ \Delta V_T \\ \Delta V_W \end{pmatrix} \quad (4.20)$$

となる。

いま制御を行なう地点を軌道上の近地点 ( $f=0$ ) および遠地点 ( $f=180^\circ$ ) に限ると(4.20)から  $\Delta V_s, \Delta V_W$  はそれぞれ  $L$  および  $i$  の変化にだけ関係し、 $a, e$  の制御と完全に分離できることがわかる。また  $\Delta V_T$  は接線方向の成分に一致する。このようにして静止軌道の制御は  $a, e, i, L$  の4つのパラメータの制御に簡単化でき、しかも  $i, L$  ならびに  $a$  と  $e$  の制御が独立に考えられるため必要な制御量の決定も容易になる。また図8に示したように接線方向の速度増分  $\Delta V_T$  によって  $a, e$  が受ける変化について調べてみると、 $a$  の方は推力が付加される点の true anomaly に依存しないが、 $e$  の方はそれに依存する。そこで  $a, e$  がどのような摂動を受けているかによって図9に示したように制御を行なう地点を変える必要がある。そこで

りするが、ここでは静止衛星の制御を考えているので軌道面の inclination  $i$  および eccentricity  $e$  が非常に小さいとすると(4.16)を次のように書くことができる。

となる。したがって  $\Delta V_T, \Delta V_W$  による変化は相殺されて  $L$  の変化としては  $\Delta V_s$  による成分だけがのこる。ところで静止衛星のように  $i, e$  が非常に小さい場合には  $a$  の変化を考えなければ衛星の経度方向のずれ  $\Delta\lambda$  は  $\Delta\lambda \doteq \delta L$  となる。そこで  $L$  を一つのパラメータとして(4.18)を書き直すと

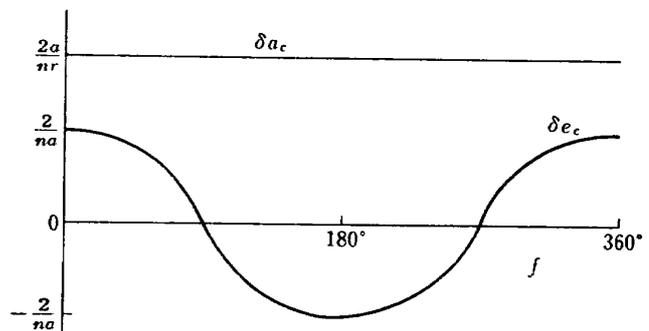


図8 推力の単位成分による  $a$  および  $b$  の変化

$\Delta a, \Delta e$  は衛星の受けた摂動、 $\Delta V_T$  は必要な制御力による接線方向の速度増分を表わす。また  $\Delta a=0$  あるいは  $\Delta e=0$  は必ずしも摂動がないだけでなく、無視できる場合も意味する。

図 9

$a$ の摂動力 $\Delta a$	$\Delta a=0$	$\Delta a>0$	$\Delta a<0$
$e$ の摂動力 $\Delta e$			
$\Delta e=0$	(1) 制御の必要はない	(2) 近地点: $-\frac{1}{2}\Delta V_T$ 遠地点: $-\frac{1}{2}\Delta V_T$	(3) 近地点: $\frac{1}{2}\Delta V_T$ 遠地点: $\frac{1}{2}\Delta V_T$
$\Delta e>0$	(4) 近地点: $-\frac{1}{2}\Delta V_T$ 遠地点: $\frac{1}{2}\Delta V_T$	(5) 近地点: $-\Delta V_T$	(6) 遠地点: $\Delta V_T$
$\Delta e<0$	(7) 近地点: $\frac{1}{2}\Delta V_T$ 遠地点: $-\frac{1}{2}\Delta V_T$	(8) 近地点: $-\Delta V_T$	(9) 遠地点: $\Delta V_T$

5. 静止衛星の重力場による摂動とその制御

次に重力場のゆがみによって静止衛星が受ける摂動を求め、その制御について検討する。(4.8)式の右辺の第1項目と第2項目を用いて地球の重力場による long range の摂動を求めることができる。Epoch における値が

$a=42164.20 \text{ km}$

$e=0.001$

$i=0.1^\circ$

$\Omega=0^\circ$

$\omega=0^\circ$

$M=0^\circ$

として与えられる静止衛星の  $a, e, i, L$  の1日に受け

る摂動量が衛星の経度によってどう変わるかを 図 10 ~ 図 13 に示した。これらのグラフから静止衛星を固定させる経度によってどのような制御をしたらよいかを判断することができる。まず  $L$  が経度に無関係にほぼ一定であるのに対し  $a, e, i$  は大きく変化する。ところで衛星の経度および緯度方向のずれに対する  $e$  と  $i$  の影響を調べてみると 図 14~15 からわかるように経度方向のずれを  $0.1^\circ$  以下にするためには  $e$  の大きさを  $0.001$  以下に、また緯度方向のずれを  $0.1^\circ$  以下にするには  $i$  を  $0.1^\circ$  以下に抑える必要がある。しかし 図 11 と 12 から  $e$  と  $i$  の重力場による摂動は非常に小さいことがわかる。例えば 図 11 から  $e$  の変化の一番大きいのは東経  $40$  度付近であるが、この位置でも  $e$  の摂動量が  $0.001$  になるには約  $4.8 \times 10^4$  日か

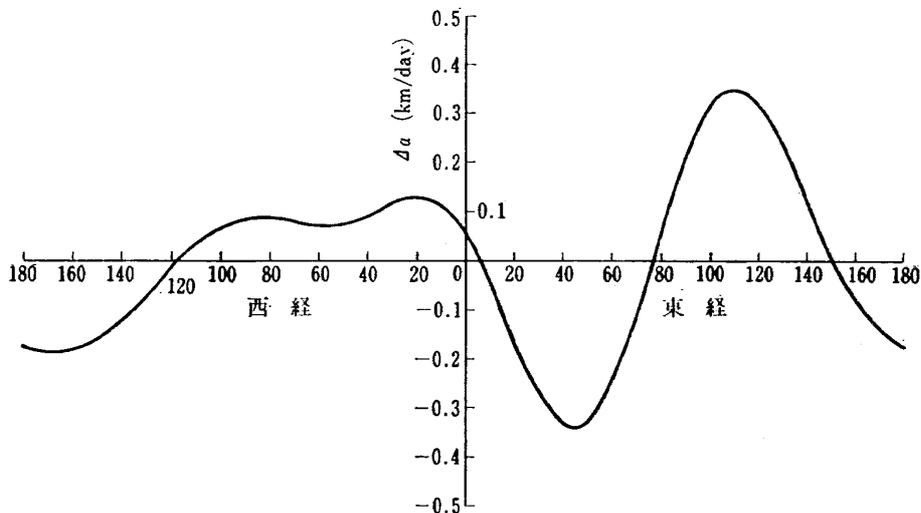


図 10 衛星の経度と  $a$  が一日に受ける摂動量  $\Delta a$  との関係

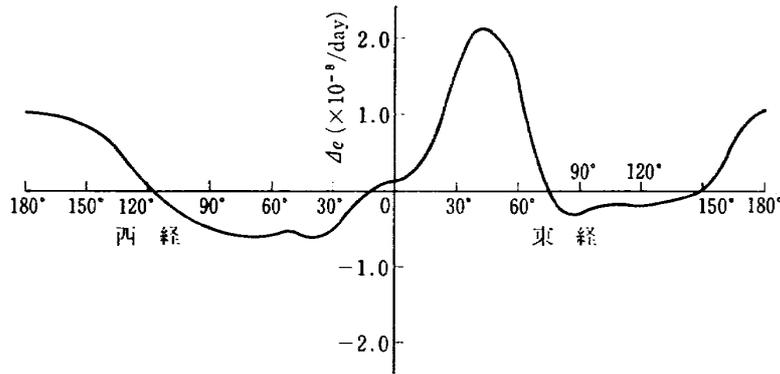


図 11 衛星の経度と  $e$  が 1 日に受ける摂動量  $\Delta e$  との関係

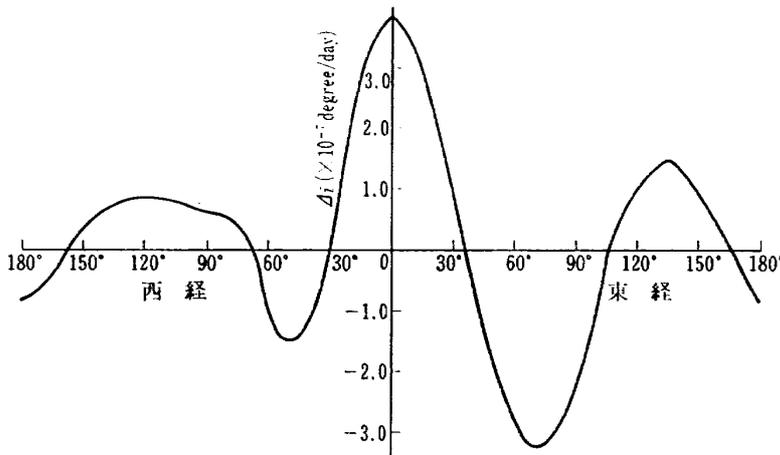


図 12 衛星の経度と  $i$  が 1 日に受ける摂動量  $\Delta i$  との関係

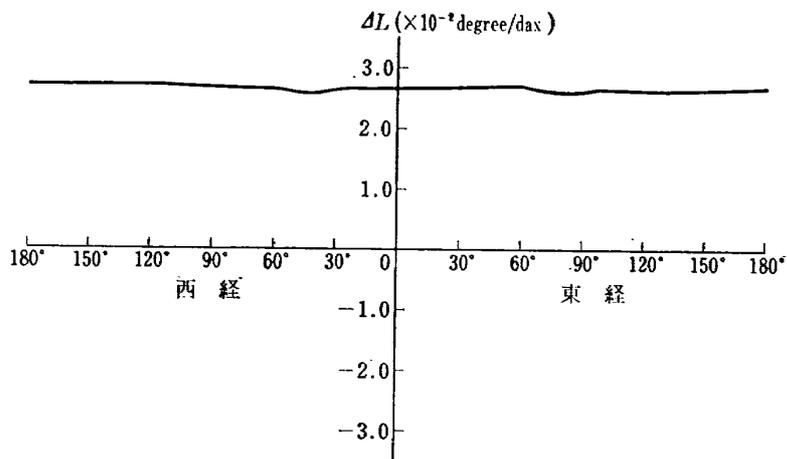


図 13 衛星の経度と  $L$  が 1 日に受ける経動量  $\Delta L$  との関係

かる。また図 12 から経度 0 付近で  $i$  の摂動量が  $0.1^\circ$  になるには  $2.6 \times 10^5$  日かかる。したがって重力場の摂動に関する限り  $e$  と  $i$  の制御は省略でき、 $a$  および  $L$  の制御を考えて行くことにする。これは図 9 の分類では衛星の経度によって (2) または (3) に属する。

図 16~17 に  $a$  および  $L$  の摂動と衛星の経度方向のずれ  $\Delta \lambda$  の関係を示した。図 13 からわかるように  $L$  の摂動量は衛星の経度に関係なくほぼ一定なの

で、 $\Delta \lambda$  との関係も図 17 に示したように直線になる。一方  $a$  の  $\Delta \lambda$  に対する影響は最初の 10 日間ぐらいは  $L$  の影響よりむしろ小さいが、その後は急激に増加する。ところで重力場の摂動による衛星の経度方向のずれは結局  $a$  と  $L$  の摂動の効果の合わさったものになるが、それを図 18 に示した。ここで衛星の経度が  $45^\circ$  の場合は  $a$  としての摂動の効果が同じ方向にあるためには急激に大きくなっていくが、経度が  $110$  度ある

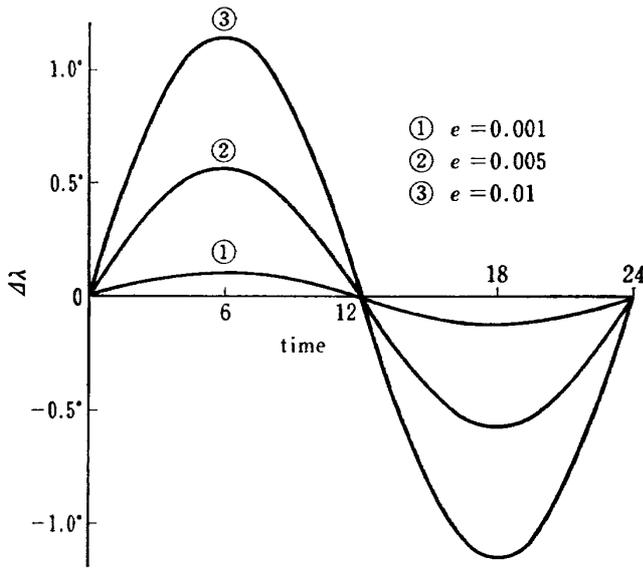


図 14  $e$  による衛星の経度方向のずれ  $\Delta\lambda$   
( $i=10^{-10}$ )

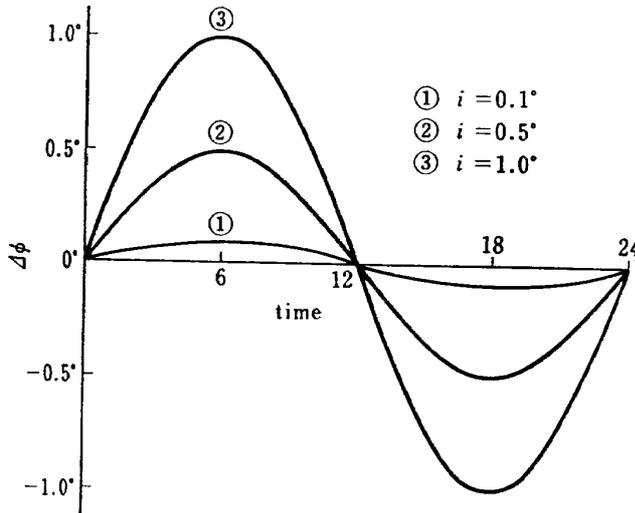


図 15  $i$  による衛星の経度方向のずれ  $\Delta\phi$   
( $e=10^{-10}$ )

いは 135 度の場合にはその方向が異なるため、最初のうちは両方の効果が相殺しあって  $\Delta\lambda$  の変化が小さい。特に経度 135 度の場合には  $a$  の摂動量が比較的小さいために約 30 日間の  $\Delta\lambda$  の変化が  $\pm 0.2^\circ$  以下になっている。したがって  $\Delta\lambda$  の許容範囲を  $\pm 0.2^\circ$  程度に取るならば、この場合には制御間隔をかなり大きくとれる。また経度方向のずれの精度を 0.1 度以下にするためには、もちろん衛星の経度によって異なるが、3~5 日に一度の制御が必要になる。またこのような高精度な経度方向の制御を行なうためには、 $L$  の摂動の影響を  $a$  のそれと同等に考慮する必要がある。制御量はいま修正しようとする  $a, L$  の大きさを  $\delta a, \delta L$  とすれば (4.20) から

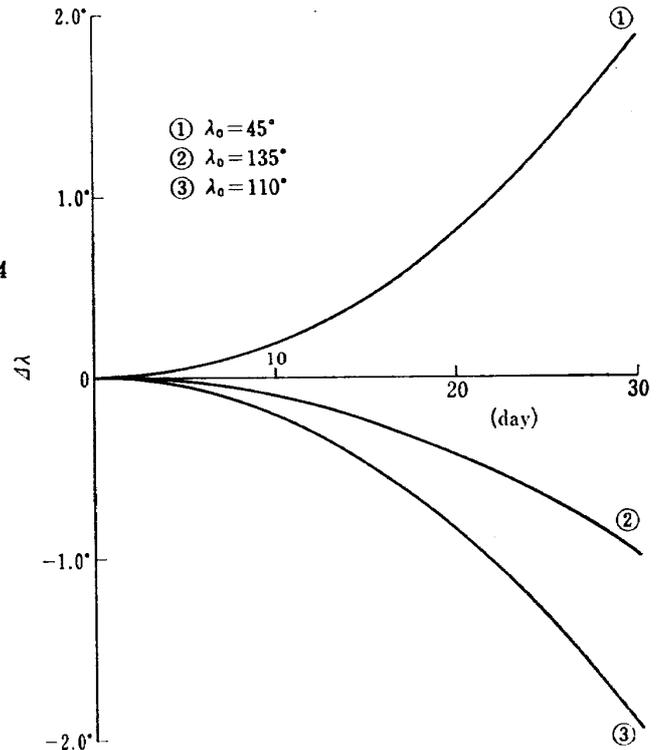


図 16  $a$  の摂動と  $\Delta\lambda$  の関係  
( $\lambda_0$  は衛星の初期の経度)

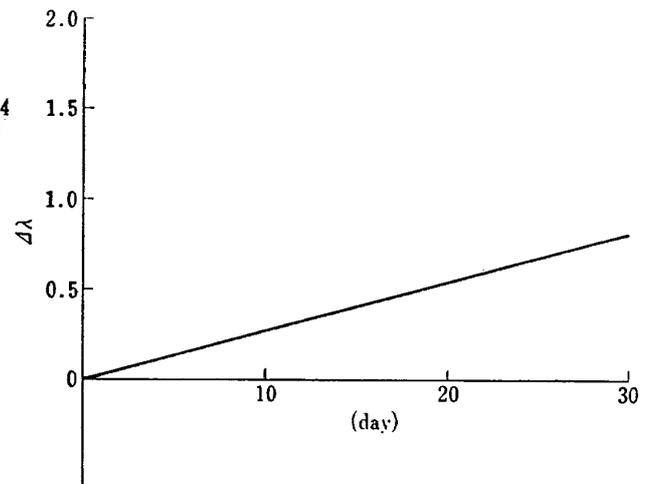


図 17  $\Delta L$  と  $\Delta\lambda$  の関係

$$\left. \begin{aligned} \Delta V_S &= -\frac{na^2}{2r} \cdot \delta L \\ \Delta V_T &= \frac{nr}{2a} \cdot \delta a \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

となる。

以上は最初に衛星の  $a$  が理想的状態にあった場合であるが、もし最初から  $a$  に少しの誤差があると様子がかなり異なってくる。図 19 に  $a$  が 3 km および 5 km だけ理想値よりずれていた場合の  $\Delta\lambda$  の変化を示したが、この場合には経度方向の高精度な制御を行なうためには制御間隔を非常に小さくする必要がある。例えば  $\Delta\lambda$  を 0.1 度以下にしたい場合には 1~2 日、0.5



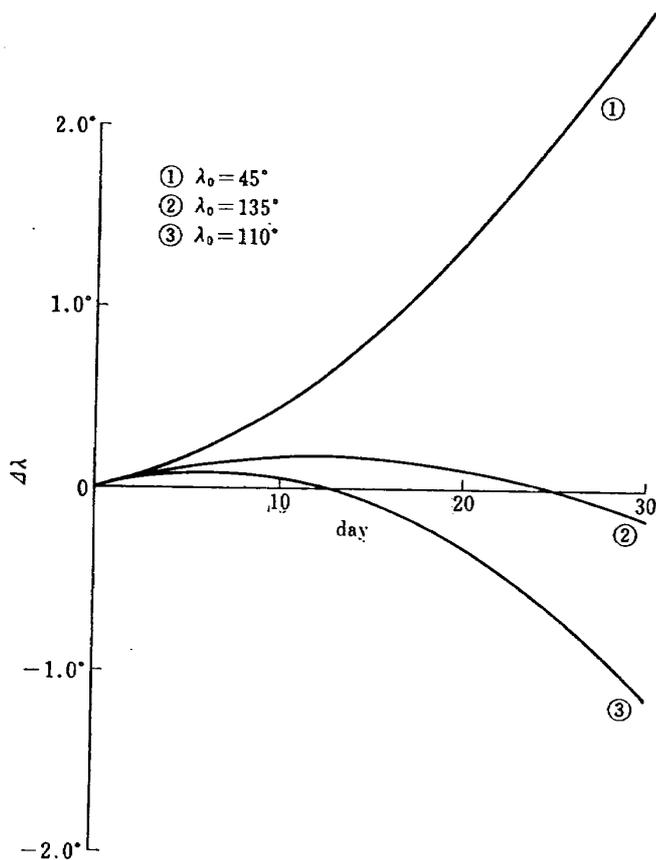


図 18  $a$  および  $L$  の摂動と  $\Delta\lambda$  の関係 ( $\lambda_0$  は衛星の初期の経度)

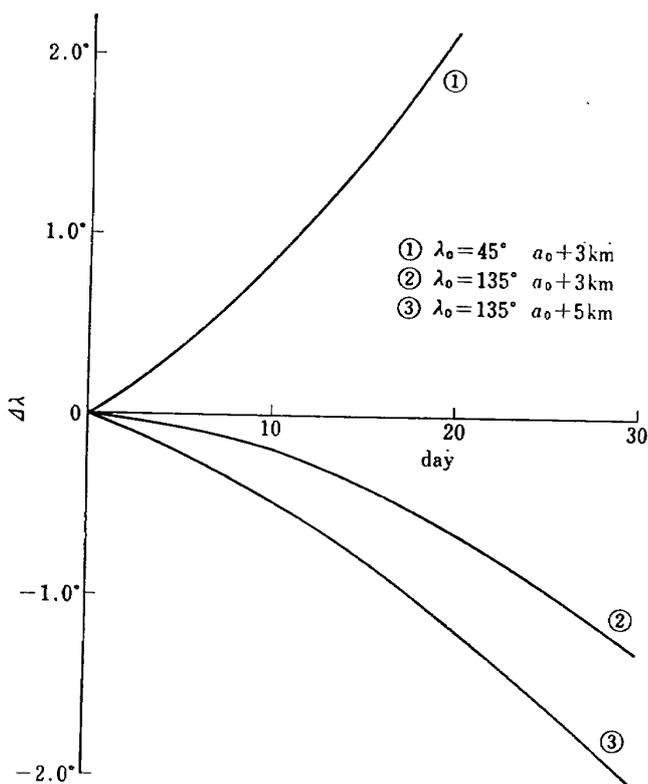


図 19  $a$  に最初から誤差があった場合の経度方向のずれ ( $a_0$  は静止軌道の  $a$ )

度では 5~16 日程度になる。これに eccentricity  $e$  の効果を含めるとこれらの制御間隔はずっと小さくなるであろう。したがって衛星を静止軌道に injection する場合には  $a$  の理想値からのずれは極力小さくする必要がある。

## 6. 結 び

自機搭載型システムによる軌道保持を想定して軌道決定の手法を定式化し、それに続く軌道制御の問題を力学的観点から検討した。また実際に重力場の摂動に対する制御を考えたが要約すると次のようになる。

(1) 恒星の観測によって衛星上に基準座標系を設定して軌道要素  $i, \Omega, \omega$  を決定する手法を導いた。

(2) 軌道要素  $a, e, M$  を horizon sensor を用いて  $r_k \cdot r_{k+1} = 0$  になる時刻の連続的観測によって求める方法を導いた。

(3) 地球の重力場の中で運動する衛星に制御力が加わった場合の運動方程式を一般的に求めた。

(4) 静止軌道における制御力と軌道要素の変化との関係を明確にし、パラメータとして mean longitude  $L$  を用いることによって軌道 6 要素の制御から 4 要素の制御に簡単化できることを示した。

(5) 地球の重力場のひずみによる軌道要素の摂動量が衛星の経度によってどう変わるかを示した。

(6) 地球の重力場による摂動が衛星の経度方向のずれにどう影響するかを示し、結局  $a$  と  $L$  の摂動に対する制御になることを示した。

観測および制御を完全に機上で行なう自機搭載型システムによる軌道制御は大きな利点があるが、またハードウェアによる制約も大きい。それを考慮して軌道決定と制御をいかにして簡単化するかという観点からこの研究を行なった。しかしここでは観測系や制御系におけるハードウェアのことを具体的に考慮してない。実際に軌道保持システムを構成し、各コンポーネントの誤差、特性を考慮して全システムの高精度化を図ることは姿勢制御の問題とも関連してきて今後の重要な問題である。

最後に本研究を行なうに当たって御援助して頂いた樋口一雄計測部長、奥石肇計測研究室長、および終始親切な討論をして下さった宇宙研究グループ武内澄夫主任研究官に謝意を表する。

## 参 考 文 献

- 1) A.A. Braga, Illa: "The future of self-contained control of synchronous orbits", AIAA Paper No. 70-479, 1970.

- 2) 宮 憲一: “商業通信衛星の展望”, 電子通信学会誌, Vol. 54, No. 5, 1971.
- 3) R. H. Gersten and Z. E. Schwarzbein: “Self-contained orbit determination techniques”, Celestial mechanics and astrodynamics Vol. 14, Academic Press, 1964.
- 4) A.A. Braga-Illa: “Automatic orbit control of the Lincoln Experimental Satellite LES-6”, Lincoln Laboratory Technical Report TR-469, 1969.
- 5) K. N. Satyendra and R. E. Bradford: “Self-contained navigational system for determination of orbital elements of a satellite”, ARS Journal, July 1961.
- 6) M. Frazier, B. Kriegsman and F. William Nesline Jr.: “Self-contained satellite navigation systems”, AIAA Journal, October 1963.
- 7) J.C. Wilcox: “Self-contained orbital navigation systems with correlated measurement errors”, J. Spacecraft, Vol. 3, No. 11, 1966.
- 8) T.L. Gunckel II and J.C. Elsey: “Fixed-point simulation of orbit determination”, J. Spacecraft, Vol. 0, No. 7, 1967.
- 9) N. F. Toda and F. H. Schlee: “Autonomous orbital navigation by optical tracking of unknown landmarks”, J. Spacecraft, Vol. 4, No. 12, 1967.
- 10) R. M. L. Baker: “Astrodynamics”, Academic Press, 1967.
- 11) W. M. Smart: “Celestial mechanics”, Longmans, Green and Co., 1953.
- 12) 武内澄夫, 松島弘一: “地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究”, 航技研報告 TR-255, 1971.
- 13) W.M. Kaula: “Analysis of gravitational and geometric aspects of geodetic utilization of satellites”, Geophys. J., Vol. 5, 1961.
- 14) 松島弘一: “静止衛星の軌道保持シミュレーションシステムの構成 (I)—地球の重力場による摂動—”, 航技研資料, TM-206, 1971.

## 付 録

本文中の式 (4.8) および (4.10) 式において、重力場の摂動関数を 4 次の harmonics まで、 $e$  を二次の項まで考慮すると次のようになる。なお以下の式における

$F_{l, m, p}(i)$ ,  $G_{l, p, q}(e)$ ,  $\frac{dF_{l, m, p}(i)}{di}$ ,  $\frac{dG_{l, p, q}(e)}{de}$  の具

体的な値は文献 12) の表を用いて求められる。また  $T_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta)$ ,  $K_{l, m, p, q}(\omega, M, \Omega, \theta)$  の値は (4.6) または (4.9) および (4.11) 式を用いて簡単に得られる。

$$\begin{aligned}
 \delta e_{z1j} &= \left[ \frac{\mu \sqrt{1-e^2}}{na^2e} \left\{ J_{30} \frac{ae^3}{a^4} F_{301}(i) G_{31-1}(e) \sin T_{301-1} - J_{30} \frac{ae^3}{a^4} F_{302}(i) G_{321}(e) \sin T_{3021} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2J_{40} \frac{ae^4}{a^5} F_{401}(i) G_{41-2}(e) \sin T_{401-2} - 2J_{40} \frac{ae^4}{a^5} F_{403}(i) G_{432}(e) \sin T_{4032} \right\} \right] \delta t_j \\
 \delta i_{z1j} &= \left[ -\frac{\mu \cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left\{ J_{30} \frac{ae^3}{a^4} F_{301}(i) G_{31-1}(e) \sin T_{301-1} - J_{30} \frac{ae^3}{a^4} F_{302}(i) G_{321}(e) \sin T_{3021} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + 2J_{40} \frac{ae^4}{a^5} F_{401}(i) G_{41-2}(e) \sin T_{401-2} - 2J_{40} \frac{ae^4}{a^5} F_{403}(i) G_{432}(e) \sin T_{4032} \right\} \right] \delta t_j \\
 \delta \Omega_{z1j} &= \left[ \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left\{ J_{30} \frac{ae^3}{a^3} \frac{dF_{301}(i)}{di} G_{210}(e) \cos T_{2010} + J_{30} \frac{ae^3}{a^4} \frac{dF_{301}(i)}{di} G_{31-1}(e) \cos T_{301-1} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + J_{30} \frac{ae^3}{a^4} \frac{dF_{302}(i)}{di} G_{321}(e) \cos T_{3021} + J_{40} \frac{ae^4}{a^5} \frac{dF_{401}(i)}{di} G_{41-2}(e) \cos T_{401-2} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + J_{40} \frac{ae^4}{a^5} \frac{dF_{403}(i)}{di} G_{430}(e) \cos T_{4030} + J_{40} \frac{ae^4}{a^5} \frac{dF_{403}(i)}{di} G_{432}(e) \cos T_{4032} \right\} \right] \delta t_j \\
 \delta \omega_{z1j} &= \mu \left\{ J_{30} \frac{ae^3}{a^3} \cos T_{2010} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{301}(i) \frac{dG_{210}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{301}(i)}{di} G_{210}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{30} \frac{ae^3}{a^4} \cos T_{301-1} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{301}(i) \frac{dG_{31-1}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{301}(i)}{di} G_{31-1}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{30} \frac{ae^3}{a^4} \cos T_{3021} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{302}(i) \frac{dG_{321}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{302}(i)}{di} G_{321}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{40} \frac{ae^4}{a^5} \cos T_{401-2} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{401}(i) \frac{dG_{41-2}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{401}(i)}{di} G_{41-2}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{40} \frac{ae^4}{a^5} \cos T_{4030} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{403}(i) \frac{dG_{430}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{403}(i)}{di} G_{430}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{40} \frac{ae^4}{a^5} \cos T_{4032} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{403}(i) \frac{dG_{432}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{403}(i)}{di} G_{432}(e) \right) \right\} \delta t_j \\
 \delta M_{z1j} &= -\mu \left\{ J_{30} \frac{ae^3}{a^3} F_{301}(i) \cos T_{2010} \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{210}(e)}{de} - \frac{6}{na^2} G_{210}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{30} \frac{ae^3}{a^4} F_{301}(i) \cos T_{301-1} \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{31-1}(e)}{de} - \frac{8}{na^2} G_{31-1}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{30} \frac{ae^3}{a^4} F_{302}(i) \cos T_{3021} \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{321}(e)}{de} - \frac{8}{na^2} G_{321}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{40} \frac{ae^4}{a^5} F_{401}(i) \cos T_{401-2} \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{41-2}(e)}{de} - \frac{10}{na^2} G_{41-2}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{40} \frac{ae^4}{a^5} F_{403}(i) \cos T_{4030} \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{430}(e)}{de} - \frac{10}{na^2} G_{430}(e) \right) \right. \\
 &\quad \left. + J_{40} \frac{ae^4}{a^5} F_{403}(i) \cos T_{4032} \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{432}(e)}{de} - \frac{10}{na^2} G_{432}(e) \right) \right\} \delta t_j \\
 \delta a_{rj} &= -2\mu \left\{ \frac{1}{na} \left( 2J_{22} \frac{ae^3}{a^3} F_{220}(i) G_{200}(e) \sin K_{2200} + 2J_{22} \frac{ae^3}{a^3} F_{221}(i) G_{212}(e) \sin K_{2212} \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. + J_{31} \frac{ae^3}{a^4} F_{310}(i) G_{30-2}(e) \sin K_{310-2} + J_{31} \frac{ae^3}{a^4} F_{311}(i) G_{310}(e) \sin K_{3110} \right) \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + J_{31} \frac{ae^3}{a^4} F_{312}(i) G_{322}(e) \sin K_{3122} + 2J_{32} \frac{ae^3}{a^4} F_{320}(i) G_{30-1}(e) \sin K_{320-1} \\
& + 2J_{33} \frac{ae^3}{a^4} F_{321}(i) G_{311}(e) \sin K_{3211} + 3J_{33} \frac{ae^3}{a^4} F_{330}(i) G_{300}(e) \sin K_{3300} \\
& + 3J_{33} \frac{ae^3}{a^4} F_{331}(i) G_{312}(e) \sin K_{3312} + J_{41} \frac{ae^4}{a^5} F_{411}(i) G_{41-1}(e) \sin K_{411-1} \\
& + J_{41} \frac{ae^4}{a^5} F_{412}(i) G_{421}(e) \sin K_{4121} + 2J_{42} \frac{ae^4}{a^5} F_{420}(i) G_{40-2}(e) \sin K_{420-2} \\
& + 2J_{42} \frac{ae^4}{a^5} F_{421}(i) G_{410}(e) \sin K_{4210} + 2J_{42} \frac{ae^4}{a^5} F_{422}(i) G_{422}(e) \sin K_{4222} \\
& + 3J_{43} \frac{ae^4}{a^5} F_{430}(i) G_{40-1}(e) \sin K_{430-1} + 3J_{43} \frac{ae^4}{a^5} F_{431}(i) G_{411}(e) \sin K_{4311} \\
& + 4J_{44} \frac{ae^4}{a^5} F_{440}(i) G_{400}(e) \sin K_{4400} + 4J_{44} \frac{ae^4}{a^5} F_{441}(i) G_{412}(e) \sin K_{4412} \Big\} \delta t_j \\
\delta e_{rj} = & -\mu \left[ \frac{1}{na^3e} \left( J_{22} \frac{ae^3}{a^3} F_{220}(i) G_{200}(e) \sin K_{2200} \{2(1-e^2) - 2\sqrt{1-e^2}\} \right. \right. \\
& + J_{22} \frac{ae^3}{a^3} F_{221}(i) G_{212}(e) \sin K_{2212} \{2(1-e^2)\} \\
& + J_{31} \frac{ae^3}{a^4} F_{310}(i) G_{30-2}(e) \sin K_{310-2} \{(1-e^2) - 3\sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{31} \frac{ae^3}{a^4} F_{311}(i) G_{310}(e) \sin K_{3110} \{(1-e^2) - \sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{31} \frac{ae^3}{a^4} F_{312}(i) G_{322}(e) \sin K_{3122} \{(1-e^2) + \sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{32} \frac{ae^3}{a^4} F_{320}(i) G_{30-1}(e) \sin K_{320-1} \{2(1-e^2) - 3\sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{32} \frac{ae^3}{a^4} F_{321}(i) G_{311}(e) \sin K_{3211} \{2(1-e^2) - \sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{33} \frac{ae^3}{a^4} F_{330}(i) G_{300}(e) \sin K_{3300} \{3(1-e^2) - 3\sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{33} \frac{ae^3}{a^4} F_{331}(i) G_{312}(e) \sin K_{3312} \{3(1-e^2) - \sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{41} \frac{ae^4}{a^5} F_{411}(i) G_{41-1}(e) \sin K_{411-1} \{(1-e^2) - 2\sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{41} \frac{ae^4}{a^5} F_{412}(i) G_{421}(e) \sin K_{4121} \{(1-e^2)\} \\
& + J_{42} \frac{ae^4}{a^5} F_{420}(i) G_{40-2}(e) \sin K_{420-2} \{2(1-e^2) - 4\sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{42} \frac{ae^4}{a^5} F_{421}(i) G_{410}(e) \sin K_{4210} \{2(1-e^2) - 2\sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{42} \frac{ae^4}{a^5} F_{422}(i) G_{422}(e) \sin K_{4222} \{2(1-e^2)\} \\
& + J_{43} \frac{ae^4}{a^5} F_{430}(i) G_{40-1}(e) \sin K_{430-1} \{3(1-e^2) - 4\sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{43} \frac{ae^4}{a^5} F_{431}(i) G_{411}(e) \sin K_{4311} \{3(1-e^2) - 2\sqrt{1-e^2}\} \\
& + J_{44} \frac{ae^4}{a^5} F_{440}(i) G_{400}(e) \sin K_{4400} \{4(1-e^2) - 4\sqrt{1-e^2}\} \\
& \left. \left. + J_{44} \frac{ae^4}{a^5} F_{441}(i) G_{412}(e) \sin K_{4412} \{(1-e^2) - 2\sqrt{1-e^2}\} \right] \delta t_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \delta i_{rj} = & -\mu \left[ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left\{ J_{22} \frac{a_e^2}{a^3} F_{220}(i) G_{200}(e) \sin K_{2200} (2 \cot i - 2 \operatorname{cosec} i) \right. \right. \\
 & + J_{32} \frac{a_e}{a} F_{321}(i) G_{212}(e) \sin K_{3212} (-2 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{31} \frac{a_e}{a} F_{310}(i) G_{30-2}(e) \sin K_{310-2} (3 \cot i - \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{31} \frac{a_e}{a} F_{311}(i) G_{310}(e) \sin K_{3110} (\cot i - \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{31} \frac{a_e}{a} F_{312}(i) G_{322}(e) \sin K_{3122} (-\cot i - \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{32} \frac{a_e}{a} F_{320}(i) G_{30-1}(e) \sin K_{320-1} (3 \cot i - 2 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{32} \frac{a_e}{a} F_{321}(i) G_{311}(e) \sin K_{3211} (\cot i - 2 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{33} \frac{a_e}{a} F_{330}(i) G_{300}(e) \sin K_{3300} (3 \cot i - 3 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{33} \frac{a_e}{a} F_{331}(i) G_{312}(e) \sin K_{3312} (\cot i - 3 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{41} \frac{a_e}{a} F_{411}(i) G_{41-1}(e) \sin K_{411-1} (2 \cot i - \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{41} \frac{a_e}{a} F_{412}(i) G_{421}(e) \sin K_{4121} (-\operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{42} \frac{a_e}{a} F_{420}(i) G_{40-2}(e) \sin K_{420-2} (4 \cot i - 2 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{42} \frac{a_e}{a} F_{421}(i) G_{410}(e) \sin K_{4210} (2 \cot i - 2 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{42} \frac{a_e}{a} F_{422}(i) G_{422}(e) \sin K_{4222} (-2 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{43} \frac{a_e}{a} F_{430}(i) G_{40-1}(e) \sin K_{430-1} (4 \cot i - 3 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{43} \frac{a_e}{a} F_{431}(i) G_{411}(e) \sin K_{4311} (2 \cot i - 3 \operatorname{cosec} i) \\
 & + J_{44} \frac{a_e}{a} F_{440}(i) G_{400}(e) \sin K_{4400} (4 \cot i - 4 \operatorname{cosec} i) \\
 & \left. + J_{44} \frac{a_e}{a} F_{441}(i) G_{412}(e) \sin K_{4412} (2 \cot i - 4 \operatorname{cosec} i) \right\} \Big] \delta t_j \\
 \delta \Omega_{rj} = & \mu \left\{ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \left( J_{22} \frac{a_e^2}{a^3} \frac{dF_{220}(i)}{di} G_{200}(e) \cos K_{2200} + J_{22} \frac{a_e^2}{a^3} \frac{dF_{321}(i)}{di} G_{212}(e) \cos K_{3212} \right. \right. \\
 & + J_{31} \frac{a_e^3}{a^4} \frac{dF_{310}(i)}{di} G_{30-2}(e) \cos K_{310-2} + J_{31} \frac{a_e^3}{a^4} \frac{dF_{311}(i)}{di} G_{310}(e) \cos K_{3110} \\
 & + J_{31} \frac{a_e^3}{a^4} \frac{dF_{312}(i)}{di} G_{322}(e) \cos K_{3122} + J_{32} \frac{a_e^3}{a^4} \frac{dF_{320}(i)}{di} G_{30-1}(e) \cos K_{320-1} \\
 & + J_{32} \frac{a_e^3}{a^4} \frac{dF_{321}(i)}{di} G_{311}(e) \cos K_{3211} + J_{33} \frac{a_e^3}{a^4} \frac{dF_{330}(i)}{di} G_{300}(e) \cos K_{3300} \\
 & + J_{33} \frac{a_e^3}{a^4} \frac{dF_{331}(i)}{di} G_{312}(e) \cos K_{3312} + J_{41} \frac{a_e^4}{a^5} \frac{dF_{411}(i)}{di} G_{41-1}(e) \cos K_{411-1} \\
 & + J_{41} \frac{a_e^4}{a^5} \frac{dF_{412}(i)}{di} G_{421}(e) \cos K_{4121} + J_{42} \frac{a_e^4}{a^5} \frac{dF_{420}(i)}{di} G_{40-2}(e) \cos K_{420-2} \\
 & \left. + J_{42} \frac{a_e^4}{a^5} \frac{dF_{421}(i)}{di} G_{410}(e) \cos K_{4210} + J_{42} \frac{a_e^4}{a^5} \frac{dF_{422}(i)}{di} G_{422}(e) \cos K_{4222} \right\}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + J_{43} \frac{ae^4}{a^5} \frac{dF_{430}(i)}{di} G_{40-1}(e) \cos K_{430-1} + J_{43} \frac{ae^4}{a^5} \frac{dF_{431}(i)}{di} G_{411}(e) \cos K_{4311} \\
& + J_{44} \frac{ae^4}{a^5} \frac{dF_{440}(i)}{di} G_{400}(e) \cos K_{4400} + J_{44} \frac{ae^4}{a^5} \frac{dF_{441}(i)}{di} G_{411}(e) \cos K_{4411} \Bigg\} \delta t_j \\
\delta \omega_{rj} = & \mu \left\{ J_{22} \frac{ae^2}{a^3} \cos K_{2200} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{220}(i) \frac{dG_{200}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{220}(i)}{di} G_{200}(e) \right) \right. \\
& + J_{22} \frac{ae^2}{a^3} \cos K_{2212} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{221}(i) \frac{dG_{212}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{221}(i)}{di} G_{212}(e) \right) \\
& + J_{31} \frac{ae^3}{a^4} \cos K_{310-2} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{310}(i) \frac{dG_{30-2}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{310}(i)}{di} G_{30-2}(e) \right) \\
& + J_{31} \frac{ae^3}{a^4} \cos K_{3110} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{311}(i) \frac{dG_{310}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{311}(i)}{di} G_{310}(e) \right) \\
& + J_{31} \frac{ae^3}{a^4} \cos K_{3122} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{312}(i) \frac{dG_{322}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{312}(i)}{di} G_{322}(e) \right) \\
& + J_{32} \frac{ae^3}{a^4} \cos K_{320-1} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{320}(i) \frac{dG_{30-1}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{320}(i)}{di} G_{30-1}(e) \right) \\
& + J_{32} \frac{ae^3}{a^4} \cos K_{3211} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{321}(i) \frac{dG_{311}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{321}(i)}{di} G_{311}(e) \right) \\
& + J_{32} \frac{ae^3}{a^4} \cos K_{3223} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{322}(i) \frac{dG_{323}(e)}{de} \right) \\
& + J_{33} \frac{ae^3}{a^4} \cos K_{3300} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{330}(i) \frac{dG_{300}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{330}(i)}{di} G_{300}(e) \right) \\
& + J_{33} \frac{ae^3}{a^4} \cos K_{3312} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{331}(i) \frac{dG_{312}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{331}(i)}{di} G_{312}(e) \right) \\
& + J_{41} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{410-3} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{410}(i) \frac{dG_{40-3}(e)}{de} \right) \\
& + J_{41} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{411-1} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{411}(i) \frac{dG_{41-1}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{411}(i)}{di} G_{41-1}(e) \right) \\
& + J_{41} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{4121} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{412}(i) \frac{dG_{421}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{412}(i)}{di} G_{421}(e) \right) \\
& + J_{41} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{4133} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{413}(i) \frac{dG_{433}(e)}{de} \right) \\
& + J_{42} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{420-2} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{420}(i) \frac{dG_{40-2}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{420}(i)}{di} G_{40-2}(e) \right) \\
& + J_{42} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{4210} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{421}(i) \frac{dG_{410}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{421}(i)}{di} G_{410}(e) \right) \\
& + J_{42} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{4222} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{422}(i) \frac{dG_{422}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{422}(i)}{di} G_{422}(e) \right) \\
& + J_{43} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{430-1} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{430}(i) \frac{dG_{40-1}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{430}(i)}{di} G_{40-1}(e) \right) \\
& + J_{43} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{4311} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{431}(i) \frac{dG_{411}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{431}(i)}{di} G_{411}(e) \right) \\
& + J_{43} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{4323} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{432}(i) \frac{dG_{433}(e)}{de} \right) \\
& + J_{44} \frac{ae^4}{a^5} \cos K_{4400} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{440}(i) \frac{dG_{400}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{440}(i)}{di} G_{400}(e) \right) \\
& + J_{44} \frac{ae^4}{a^5} \cot K_{4412} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{441}(i) \frac{dG_{412}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{441}(i)}{di} G_{412}(e) \right) \Bigg\} \delta t_j \\
\delta M_{rj} = & \mu \left\{ J_{22} \frac{ae^2}{a^3} F_{220}(i) \cos K_{2200} \left( -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{200}(e)}{de} + \frac{6}{na^2} G_{200}(e) \right) \right.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &+ J_{32} \frac{a e^2}{a^3} F_{221}(i) \cos K_{2212} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{212}(e)}{de} + \frac{6}{na^2} G_{212}(e) \right) \\
 &+ J_{31} \frac{a e^3}{a^4} F_{310}(i) \cos K_{310-2} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{30-2}(e)}{de} + \frac{8}{na^2} G_{30-2}(e) \right) \\
 &+ J_{31} \frac{a e^3}{a^4} F_{311}(i) \cos K_{3110} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{310}(e)}{de} + \frac{8}{na^2} G_{310}(e) \right) \\
 &+ J_{31} \frac{a e^3}{a^4} F_{312}(i) \cos K_{3122} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{322}(e)}{de} + \frac{8}{na^2} G_{322}(e) \right) \\
 &+ J_{32} \frac{a e^3}{a^4} F_{320}(i) \cos K_{320-1} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{30-1}(e)}{de} + \frac{8}{na^2} G_{30-1}(e) \right) \\
 &+ J_{32} \frac{a e^3}{a^4} F_{321}(i) \cos K_{3211} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{311}(e)}{de} + \frac{8}{na^2} G_{311}(e) \right) \\
 &+ J_{32} \frac{a e^3}{a^4} F_{322}(i) \cos K_{3223} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{323}(e)}{de} \right) \\
 &+ J_{33} \frac{a e^3}{a^4} F_{330}(i) \cos K_{3300} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{300}(e)}{de} + \frac{8}{na^2} G_{300}(e) \right) \\
 &+ J_{33} \frac{a e^3}{a^4} F_{331}(i) \cos K_{3312} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{312}(e)}{de} + \frac{8}{na^2} G_{312}(e) \right) \\
 &+ J_{41} \frac{a e^4}{a^5} F_{410}(i) \cos K_{410-3} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{40-3}(e)}{de} \right) \\
 &+ J_{41} \frac{a e^4}{a^5} F_{411}(i) \cos K_{411-1} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{41-1}(e)}{de} + \frac{10}{na^2} G_{41-1}(e) \right) \\
 &+ J_{41} \frac{a e^4}{a^5} F_{412}(i) \cos K_{4121} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{421}(e)}{de} + \frac{10}{na^2} G_{421}(e) \right) \\
 &+ J_{41} \frac{a e^4}{a^5} F_{413}(i) \cos K_{4133} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{433}(e)}{de} \right) \\
 &+ J_{42} \frac{a e^4}{a^5} F_{420}(i) \cos K_{420-2} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{40-2}(e)}{de} + \frac{10}{na^2} G_{40-2}(e) \right) \\
 &+ J_{42} \frac{a e^4}{a^5} F_{421}(i) \cos K_{4210} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{410}(e)}{de} + \frac{10}{na^2} G_{410}(e) \right) \\
 &+ J_{42} \frac{a e^4}{a^5} F_{422}(i) \cos K_{4222} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{422}(e)}{de} + \frac{10}{na^2} G_{422}(e) \right) \\
 &+ J_{43} \frac{a e^4}{a^5} F_{430}(i) \cos K_{430-1} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{40-1}(e)}{de} + \frac{10}{na^2} G_{40-1}(e) \right) \\
 &+ J_{43} \frac{a e^4}{a^5} F_{431}(i) \cos K_{4311} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{411}(e)}{de} + \frac{10}{na^2} G_{411}(e) \right) \\
 &+ J_{43} \frac{a e^4}{a^5} F_{432}(i) \cos K_{4323} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{433}(e)}{de} \right) \\
 &+ J_{44} \frac{a e^4}{a^5} F_{440}(i) \cos K_{4400} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{400}(e)}{de} + \frac{10}{na^2} G_{400}(e) \right) \\
 &+ J_{44} \frac{a e^4}{a^5} F_{441}(i) \cos K_{4412} \left( -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{412}(e)}{de} + \frac{10}{na^2} G_{412}(e) \right) \Bigg\}_j \delta t_j
 \end{aligned}$$

TR-283	エンジン特性の実時間シミュレーション(I) (装置および特性) Real-time Simulation of Jet Engines with Digital Computer (I) (Fabrication and characteristics of the Simulator)	1972年7月	西尾健二, 杉山七契 越沼威, 橋本武男 大畑敏美, 市川英夫
TR-284	高 $dn$ 値における玉軸受の性能に関する研 究 Study on Performance of Ball Bearings at High $dn$ Valves	1972年5月	宮川行雄, 関 勝美 横山正幸
TR-285	高温固体潤滑剤としての一酸化鉛(PBO)に 関する基礎的研究 Study on Lead Monoxide as Solid Lubricant for High Temperatures	1972年5月	宮川行雄, 西村 充 安部 亘
TR-286T	二次噴射推力方向制御の研究 An Investigation of Secondary Injection Thrust Vector Control	1972年5月	山中龍夫
TR-287	内面加熱を受ける中空円筒の非定常熱応力	1972年5月	江川幸一, 竹中幸彦
TR-288	低アスペクト比後退角片特平板翼の遷音速 および超音速のフラッタ特性 The Transonic and Supersonic Flutter characteristics of Low Aspect Ratio Sweptback Thin Cantilerer	1972年5月	中井暎一, 森田甫之 菊池孝男, 高橋 実 東久保正年
TR-289T	Transient Hypersonic Leading-Edge Flow	Jun. 1972	Katsuhisa KOURA
TR-290	二自由度回転駆動振動検出型ジャイロの研 究 Study of a Rotary-drive Vibratory-oot-put Two-degree-of-freedom Gyro	1972年7月	山田 博
TR-291	はり板結合構造物の振動(III) On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (III)	1972年7月	埜 武敏, 林 洋一 多田保夫, 戸田 勲 日下和夫
TR-292	翼型の非圧縮乱流ウェーク流の近似計算法 —対称ウェーク流の場合— An Approximate Calculation Method of Incompressible, Turbulent Wakes behind Aerofoils—Symmetrical Wake Flow Case—	1972年7月	石田洋治
TR-293	き裂先端塑性域に線形な応力分布のある弾 塑性モデルの解析 An Elastic-Plastic Analysis of a Crack with Linearly Distributed Stress in the Plastic Zone.	1972年8月	寺田博之
TR-294	ジェットフラップを持つ高揚力機の地面効 果 Effect of Ground Proximity on the Longi- tudinal Aerodynamic Characteristics of an Airplane with a Jet-Flapped High Lift Wing	1972年8月	遠藤 浩, 高橋 宏 中谷輝臣, 綿貫忠晴

## 航空宇宙技術研究所報告295号

昭和47年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)☎182  
印刷所 有限会社啓文堂松本印刷  
東京都文京区水道2-7-5



