

UDC 517.544:
536.21:
621.438-226

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-297

Green 関数を二次元ラプラス方程式に適用した
解法による冷却タービン翼の温度分布の計算
—— 境界条件として温度勾配を与える場合 ——

西村英明・臼井 弘

1972 年 8 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-275	高度制御試験設備 Height Control Test Equipment for VTOL Aircraft	1972年2月	松木正勝, 鳥崎忠雄 西尾健二, 遠藤征紀 吉田晃相, 中田克己 岩根柱静, 武越沼
TR-276	フライングテストベッド機体総合実験 —エンジンを除く本体の機能— Overall Ground Experiments on Flying Test Bed for VTOL Aircrafts at National Aerospace Laboratory	1972年2月	滝澤直人, 田辺義一 波谷昭義, 小川敏幸 藤枝郭俊, 甲斐野幸 西村博史, 藤芳夫
TR-277	円環状デフューザの乱流境界層の発達 Development of Turbulent Boundary Layers Along the Curved Walls of an Annular Diffusing Passage	1972年2月	藤井昭一, 五味光男 西脇英夫 Theodore H. OKIISHI
TR-278T	Development of Turbulent Boundary Layers Along the Curved Walls of an Annular Diffusing Passage	Feb. 1972	Shoichi FUJII Theodore H. OKIISHI
TR-279	直線硬化特性材料での有孔帯板内の応力およびひずみの集中係数について Stress and Strain Concentration Factor of Strips with a Central Circular Hole in Linearly Strain-Hardening Materials	1972年2月	青木山雄, 倉元真実 小林芳人, 国尾武
TR-280	ガンタンネルによる鈍頭円錐の極超音速空力特性試験 Experimental Study on the Hypersonic Aerodynamic Characteristics of Spherically Blunted Cones by the Gun Tunnel	1972年5月	曾我 国男, 小野寺信幸
TR-281	ジェットエンジンのデジタル制御 (1) 装置および予備実験 Digital Control of Jet Engines (1) Control System and Preliminary Experiments	1972年7月	西尾健二, 遠藤征紀 杉山七契, 越沼威 大畑敏美, 松田幸雄 吉田晃相, 中山晋
TR-282	高温タービン試験設備およびその計測装置 On the High Temperature Turbine Test Facilities and the Data Processing System	1972年6月	原動機部
TR-283	エンジン特性の実時間シミュレーション(I) (装置および特性) Real-time Simulation of Jet Engines with Digital Computer (I) (Fabrication and Characteristics of the Simulator)	1972年7月	西尾健二, 杉山七契 越沼威, 橋本武男 大畑敏美, 市川英夫
TR-284	高 dn 値における玉軸受の性能に関する研究 Study on Performance of Ball Bearings at High dn Values	1972年5月	宮川行雄, 関 勝美 横山正幸
TR-285	高温固体潤滑剤としての一酸化鉛 (PbO) に関する基礎的研究 Study on Lead Monoxide as Solid Lubricant for High Temperatures	1972年5月	宮川行雄, 西村 允 安部 亘
TR-286T	An Investigation of Secondary Injection Thrust Vector Control	May, 1972	Tatsuo YAMANAKA
TR-287	内面加熱を受ける中空円筒の非定常熱応力 Transient Thermal Stresses of the Hollow Cylinder Subjected Uniform Inner Heating	1972年5月	江川幸一, 竹中幸彦
TR-288	低アスペクト比後退角片持平板翼の遷音速および超音速のフラッタ特性 The Transonic and Supersonic Flutter Characteristics of Low Aspect Ratio Sweptback Thin Cantilever	1972年5月	中井暎一, 森田甫之 菊地孝男, 高橋 実 東久保正年

目 次

1. はじめに	1
2. 問題の提示	2
3. 滑らかな境界をもつ空所を内部に一つ含む場合	4
3.1 数値解法	5
4. 滑らかな境界をもつ空所を内部に二つ以上含む場合	7
4.1 数値解法	8
4.2 積分方程式の離散化	9
4.3 例題 二重同心円の場合	10
4.4 数値計算方法および結果	11
4.5 冷却孔のある翼型への適用	14
5. ま と め	17
6. 附 録	24
6.1 附録Ⅰ 対数による正則関数の表示	24
6.2 附録Ⅱ 変数分離法によるフーリエ級数展開	25
6.3 附録Ⅲ 複素関数(5)式の定数の意味	26
7. 参 考 文 献	27

Green 関数を二次元ラプラス方程式に適用した 解法による冷却タービン翼の温度分布の計算*

—境界条件として温度勾配を与える場合—

西村英明**・臼井 弘**

A Calculation of Temperature Distribution by Applying Green's Function to a Two-Dimensional Laplace's Equation —The Case in which the Temperature Gradients on the Boundary are Given—

By Hideaki NISHIMURA and Hiroshi USUI

The motivation of this work arose from the research on an air-cooled turbine blade surrounded by a high-temperature gas stream.

Due to the critical conditions of the material used for the blade, how to prevent the blade from destruction by thermal stress, thermal shock and fatigue etc. is a main subject to be solved in this research field.

The destruction of a cooled blade which may occur in engine operation will generally be caused by several complicated phenomena.

An improper temperature distribution which might occur in a cooled blade would not be desirable from a viewpoint of thermal stress and might cause a destruction of the blade.

In the previous paper, this problem was studied analytically when a temperature distribution is given on the boundary of the blade as the first boundary value problem (Dirichlet Problem).

In present paper, a case where a temperature-gradient distribution is given on the blade boundary is treated as the second boundary-value problem (Neuman Problem), assuming that;

1. The temperature field is bounded by smooth lines forming arbitrary figures,
2. steady state,
3. two-dimensional,
4. without heat source and heat sink,
5. and the material is isotropic.

An example of the temperature distribution and the isothermal lines, obtained from this method, in a blade with eleven air-cooled holes is presented.

1. はじめに

ガスタービンの性能向上のためにガス温度を上昇させる傾向が近年ますます強くなってきている。しかし一方ガス温度が高くなるとそれに触れる金属材料の劣化等がおこり、材料破損など非常に危険な事態が発生

する。これらの危険を前もって予測し、対処しなければならない。

このような状態を完全に把握し、解析することは非常に困難であるため、ここでは極めて単純化した状態について空気冷却孔を持つ二次元タービン動翼内の温度分布の計算を行なうことを目的とする。

冷却孔は翼断面において多数の丸穴よりできているものが多い、そのため穴のあいた領域を考える必要が

* 昭和 47 年 3 月 18 日受付

** 原動機部

ある。条件としては、

- 定常状態
- 二次元領域
- 等方性物質

領域内部には熱の発生源，吸収源は存在しない。

このような場合温度は二次元領域であるから二変数ラプラス方程式により支配される。

境界条件としては各境界上で温度勾配が与えられている場合について考える。

方法としては数多くあるが後に述べるような利点を有するグリーン関数を利用し，積分方程式を導き数値解を得る方法をとる。この方法はさきに境界上で温度分布が与えられた場合についての解法を報告したが，その場合と全く同じ方法を採用するわけである。ここで本文中で述べるような手段を用いて「境界上で与えられた温度勾配分布」を「境界上で与えられた温度分布」に変換し，領域内の温度分布計算は，さきの報告と同様数値解法によって求めた。

計算結果は，二重同心円の場合と 11 個の冷却孔を持つ二次元翼について得たものを示す。

二次元翼については，無限上流の一樣流れにおける温度を 1.0 (1150°C) で表示し，冷却空気貯気槽内温度を 0.0 (590°C) で表示する。一方空気の流速は翼列入口で一樣にマッハ数 0.34 とした。

このような状況下における冷却翼内の温度分布を等温線で示した。その結果と電導紙によるアナログ法の結果との比較はかなりの一致を示した。

2. 問題の提示

二変数ラプラス方程式の境界値問題として，さきに任意の滑らかな閉曲線（リアプノフ条件を満足する任意の単純な閉曲線）からなる境界を有し，かつ，その境界上で温度分布が与えられた場合にその内部領域における温度分布を求める第一種境界値問題を扱った (Dirichlet Problem)。方法として，二次元のグリーン関数を用いて，第二種フレッドホルム型積分方程式を得，これを周期的な性質を考慮してエルミットの求積法により積分方程式の離散化を行ない数値計算を行なった⁶⁾。

境界上で温度勾配が与えられた場合，いわゆる第二種境界値問題 (Neumann Problem) を本報では取り扱う。この境界値問題に対して方法はいくつか存在するが，ここではこの問題を，ある複素関数の実数部と虚数部の間に存在する関係式（コーシー・リーマンの関係式）を使って第一種境界値問題に帰着させること

ができることを示す。

まず，問題を数式によって表示しよう。図 1 に示すように滑らかな閉曲線 C で囲まれた領域 D を考え， $\partial T(\xi, \eta)/\partial n$ (ただし， n は内法線) を境界上で与えられた温度勾配とし， $T(x, y)$ を内部領域 D での温度分布とする。

温度分布 $T(x, y)$ は領域 D 内で

$$\nabla^2 T(x, y) = 0 \quad (1)$$

を満足し，境界 C 上では

$$f(\xi, \eta) = \partial T(\xi, \eta)/\partial n \quad (2)$$

に一致する。

このような境界値問題に対して解の一意性を考えると，グリーンの公式より，必要条件として

$$\oint_C \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial n} dc = \oint_C f(\xi, \eta) dc = 0 \quad (3)$$

が求まり，また同時にこの式は十分条件であることも証明される。

この問題を第一種境界値問題として取り扱うために次の複素関数（コーシーの積分表示）を考えよう。

$$\Phi(z) = -\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = U(x, y) + iV(x, y) \quad (4)$$

ここに， $u(\zeta)$ は実数値関数， $\zeta = \xi + i\eta$ ， $z = x + iy$ とする。

この複素関数の実数部 $U(x, y)$ を一価調和関数とすると，次のように表わすことができる。

$$\Phi(z) = \text{const.} + \Phi^*(z) \quad (5)$$

ここで定数 const. は境界条件によって決定されるわけであるから境界上で $\Phi(\zeta)$ の値が与えられなければならない，なおこの定数 const. の性質は附録 III の (2) 式で述べられているように境界上のある平均

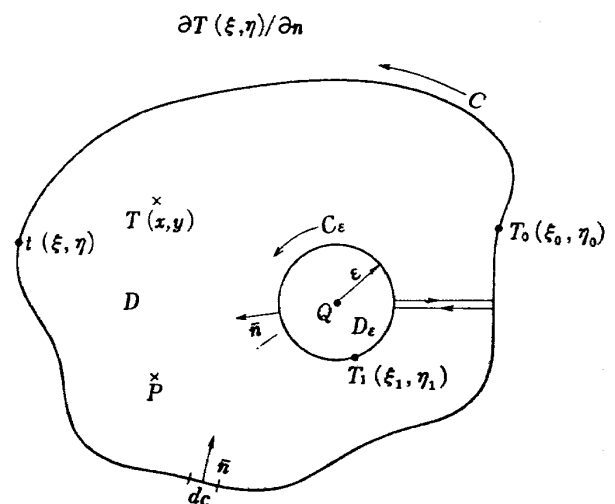


図 1

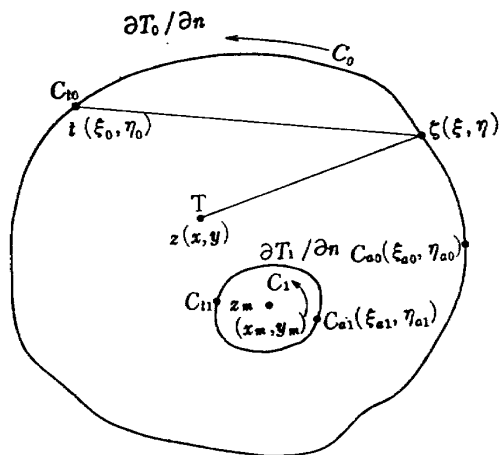


図 2

値を意味している。また、 $\Phi^*(z)$ は次の形の積分で与えられる一価関数とする。

$$\Phi^*(z) = -\frac{1}{2\pi} \oint \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = U^*(x, y) + iV^*(x, y) \quad (6)$$

このコーシー型積分は主値をとることとする。

(6)において、コーシー・リーマンの関係式により

$$\frac{\partial V^*}{\partial c} = \frac{\partial U^*}{\partial n}$$

であるから、 V^* は次の不定積分として得られる。

$$V^* = \int \frac{\partial U^*}{\partial n} dc + b \quad (7)$$

ただし、 b は積分定数である。

また、 $\partial U^*/\partial n$ は境界上では (4), (5), (6) 式から

$$\frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial n} = \frac{\partial U^*(\xi, \eta)}{\partial n} \quad (8)$$

であり、いま $U(\xi, \eta)$ と $T(\xi, \eta)$ が同じ意味を持つとすると

$$\frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial n} = \frac{\partial U^*(\xi, \eta)}{\partial n} \equiv \frac{\partial T(\xi, \eta)}{\partial n} = f(\xi, \eta) \quad (9)$$

であるから、(7) 式により、境界上で、虚数部 $V^*(x, y)$ の値 $V^*(\xi, \eta)$ が与えられたこととなる。この境界条件の与え方は $V^*(x, y)$ について第一種境界値問題であることを意味している。

次に領域内の点 z が境界上のある一点 t に領域内部から近付いた場合の (6) 式の性質について考察する。この積分は良く知られているように境界上の点においてその点における関数 $u(t)$ に依存した量だけ跳躍するから、境界上で (6) 式は次のように表わされる。

$$\Phi_i^*(t) = \frac{u(t)}{2i} - \frac{1}{2\pi} \oint \frac{u(\zeta)}{\zeta - t} d\zeta \quad (10)$$

ここで添字 i は内部領域から境界に近づいたことを示す。

(10) 式の実数部 $U_i^*(\xi, \eta)$ 、および虚数部 $V_i^*(\xi, \eta)$ は

$$\begin{aligned} U_i^*(\xi, \eta) &= -\frac{1}{2\pi} \oint u(t) \cdot d \ln |\zeta - t| \\ &= -\frac{1}{2\pi} \oint u(t) \cdot \frac{\partial \ln |\zeta - t|}{\partial c} dc \quad (11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} V_i^*(\xi, \eta) &= -\frac{u(t)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint u(t) \cdot d\theta \\ &= -\frac{u(t)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint u(t) \cdot \frac{\partial \ln |\zeta - t|}{\partial n} \cdot dc \quad (12) \end{aligned}$$

$$\left(\because \frac{\partial \theta}{\partial c} = \frac{\partial \ln r}{\partial n} \right)$$

ここで変数 c は滑らかな閉じた境界上の、ある基準となる点からの距離とする。

これまでで (5) 式の殆どどの性質は分ったが、定数 const. については、附録 I において示したように、内部に空所を有する領域に対しては

$$A \ln |z - z_m| + B \quad (13)$$

ただし、 z_m は空所内の座標に等しい。

すなわち (5) 式は

$$\Phi(z) = A \ln |z - z_m| + B + \Phi^*(z) \quad (5)'$$

である。

この問題の機成をここでまとめてみよう。

複素関数 $\Phi(z)$ は (5) 式によって表わされるように、(13) 式に等しい const. の項と一価調和関数 $\Phi^*(z)$ の項から成る。

$\Phi(z)$ の実数部 $U(x, y)$ は領域内で

$$\nabla^2 U(x, y) = 0 \quad (14)$$

を満足し、境界 C 上では

$$V^*(\xi, \eta) = \int \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial n} dc + D \quad (15)$$

に一致する。

このとき、解は次式によって与えられる。

$$U(x, y) = A \ln |z - z_m| + B + U^*(x, y) \quad (16)$$

ただし、解の一意性より

$$\oint \frac{\partial U(\xi, \eta)}{\partial n} dc = 0 \quad (17)$$

でなければならない。

すなわち (12) 式を (15) の境界条件のもとに $u(t)$ について解くことは第一種境界の問題であり、その解 $u(t)$ を使って (11), (16) 式から (14) を満足する

$U(x, y)$ が求まる。

ここに述べた (12) 式の右辺第二項の積分核として次の性質を持つグリーン関数 $G(z, z_0)$ を利用する。

- i) 領域 D 内の一点 z_0 を除いて D 内で $G(z, z_0)$ は z について調和。
 - ii) z_0 の近傍で $\omega \equiv G(z, z_0) + \ln |z - z_0|$ は調和。
 - iii) 領域 D の境界 C の任意の点を $\zeta = \xi + i\eta$ とするとき, $G(z, z_0) \rightarrow 0$, ($z \in D$, $z \rightarrow \zeta$)
- すなわち (12) 式は,

$$V_i^*(\xi, \eta) = -\frac{u(t)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_C u(t) \frac{\partial G(\zeta, t)}{\partial n} dc$$

ということである。このフレッドホルム型積分方程式は前報において求めたものである。

3. 滑らかな境界をもつ空所を内部に一つ含む場合

複素関数 $\Phi(z)$ は (5) 式において示されるように対数項と正則関数 $\Phi^*(z)$ 部から成り立つ。

一方, 境界条件 (15) は境界の上で成り立つ条件であるから (12) 式に等しい。

$$\begin{aligned} & \frac{u(t)}{2} - \frac{1}{2\pi} \oint_C u(t) \cdot \frac{\partial \ln |\zeta - t|}{\partial n} dc \\ &= - \int_{C_a}^{C_t} f(\xi, \eta) dc - b \end{aligned} \quad (18)$$

ただし, C_a は境界上の任意の点であり, C_t は t 点である (図 2 参照)。

ここで $\oint_C f(\xi, \eta) dc = 0$ でなければならない。

第二種のフレッドホルム型積分方程式 (18) の解として $u(t)$ が得られる。この $u(t)$ を利用して, (16) 式から $U(x, y)$ を求めることができる。この式は (14) 式の解であるからこの問題は解けることになる。いまこの解 $U(x, y)$ を $T(x, y)$ と書いて領域内の温度分布とする。

$$\begin{aligned} T(x, y) &= A \ln |z - z_m| + B - \frac{1}{2\pi} \oint_C u(\zeta) \\ &\quad \times \frac{\partial \ln |\zeta - z|}{\partial c} \cdot dc \end{aligned} \quad (19)$$

ただし, z_m は空所の内部における点とする (図 2 参照)。

また,

$$\frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\partial \ln |\zeta - z|}{\partial n} dc = -\frac{1}{2} \quad (20)$$

なる積分が得られることを示しておく⁶⁾。

$\zeta = \xi + i\eta$, $t = \xi_0 + i\eta_0$, $z = x + iy$ であるとすると,

(18), (19), (20) 式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \frac{u^{(0)}(\xi_0, \eta_0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot K(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) dc \\ & \quad - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} u^{(1)}(\xi, \eta) \cdot K(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) dc \\ &= - \int_{C_{a0}}^{C_{t0}} f_0(\xi, \eta) dc - b_0 \\ & \frac{u^{(1)}(\xi_1, \eta_1)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot K(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) dc \\ & \quad - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} u^{(1)}(\xi, \eta) \cdot K(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) dc \\ &= - \int_{C_{a1}}^{C_{t1}} f_1(\xi, \eta) dc - b_1 \end{aligned} \quad (21)'$$

積分定数 b は次式によって与えられる。

$$b_k = -\frac{\alpha_k}{2\pi} \oint_{C_k} u^{(k)}(\xi, \eta) dc \quad (22)$$

ただし, α_k は任意の定数とする。

このとき, 点 $z(x, y)$ における温度 $T(x, y)$ は次式により得られる。

$$\begin{aligned} T(x, y) &= A \ln \sqrt{(x - x_m)^2 + (y - y_m)^2} + B \\ & \quad - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot L(x, y; \xi, \eta) dc \\ & \quad + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} u^{(1)}(\xi, \eta) \cdot L(x, y; \xi, \eta) dc \end{aligned} \quad (23)$$

ただし,

$$K(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) = \frac{(\xi - \xi_0) \cdot \partial \eta / \partial c - (\eta - \eta_0) \cdot \partial \xi / \partial c}{(\xi - \xi_0)^2 + (\eta - \eta_0)^2}$$

$$K(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) = \frac{(\xi - \xi_1) \cdot \partial \eta / \partial c - (\eta - \eta_1) \cdot \partial \xi / \partial c}{(\xi - \xi_1)^2 + (\eta - \eta_1)^2}$$

$$L(x, y; \xi, \eta) = \frac{(\xi - x) \cdot \partial \xi / \partial c + (\eta - y) \cdot \partial \eta / \partial c}{(\xi - x)^2 + (\eta - y)^2}$$

したがって, K は次の性質を有する。

$$\oint_{C_p} K(\xi_p, \eta_p; \xi, \eta) dc = \pi \quad (24)$$

C_p は任意の滑らかな閉じた曲線。

また (21) 式の右辺第一項の和は 0 でなければならない。

$$\oint_{C_0} f_0(\xi, \eta) dc - \oint_{C_1} f_1(\xi, \eta) dc = 0 \quad (25)$$

(21)' 式の第二式は固有値 π を持ち¹⁾, このままでは一意的には解を得ることができない。しかし, 積分定数 b_k を (22) 式のように与えると, 次式の (21) 式のように固有値 π をもつことを避けることができる。また $b_0 = 0$ とする。

$$\begin{aligned}
& \frac{u^{(0)}(\xi_0, \eta_0)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot K(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) dc \\
& - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} u^{(1)}(\xi, \eta) \cdot K(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) dc \\
& = - \int_{C_a}^{C_{a0}} f_0(\xi, \eta) dc \\
& \frac{u^{(1)}(\xi_1, \eta_1)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot K(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) dc \\
& - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} u^{(1)}(\xi, \eta) [K(\xi_1, \eta_1; \xi, \eta) - \alpha_1] dc \\
& = - \int_{C_{a1}}^{C_{a1}} f_1(\xi, \eta) dc
\end{aligned} \tag{21}$$

α_1 を任意の定数とすると、(21)式により $u^{(0)}(\xi, \eta)$, $u^{(1)}(\xi, \eta)$ が求まり、(23)式から定数 A , B を除いてはすべて求められた。

定数 A , B が決まるためには、各境界上のある一点における温度がわからなければならない。いま図2の点 C_{a0} と点 C_{a1} の温度を T_{a0} と T_{a1} とする

$$\begin{aligned}
& A \ln \sqrt{(\xi_{a0} - x_m)^2 + (\eta_{a0} - y_m)^2} + B \\
& = T_{a0} + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot L(\xi_{a0}, \eta_{a0}; \xi, \eta) dc \\
& - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} u^{(1)}(\xi, \eta) \cdot L(\xi_{a0}, \eta_{a0}; \xi, \eta) dc \\
& A \ln \sqrt{(\xi_{a1} - x_m)^2 + (\eta_{a1} - y_m)^2} + B \\
& = T_{a1} + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot L(\xi_{a1}, \eta_{a1}; \xi, \eta) dc \\
& - \frac{1}{2\pi} \oint_{C_1} u^{(1)}(\xi, \eta) \cdot L(\xi_{a1}, \eta_{a1}; \xi, \eta) dc
\end{aligned} \tag{26}$$

すなわち、(21)式により解 $u^{(0)}$, $u^{(1)}$ が得られ、この解を利用して(26)式から定数 A , B が求まる。したがって(23)式により内部領域における温度分布を得ることができる。

ここで注意しなければならないことは、境界条件は(25)式を満足しなければならないということである。すなわち、ここで問題としているのは、二次元定常状態にある温度分布であるが、もし、境界条件が(25)式を満足しないならば、いま、この領域に流入する熱量を $Q_0(\alpha - \partial T_0 / \partial n)$ とし、流出する熱量を $Q_1(\alpha - \partial T_{i1} / \partial n)$ とするとき、ある熱量 $(|Q_0 - Q_1|)$ がこの領域に蓄積されることになる、したがって定常状態にはなり得なく、意図するものと異なってしまうからである。また(21)式および(24)式中の被積分項 K および L は $\xi = \xi_0, \eta = \eta_0; \xi = \xi_1, \eta = \eta_1; \xi = \xi_{a0}, \eta = \eta_{a0}; \xi = \xi_{a1}, \eta = \eta_{a1}$ の場合に不連続になるが、後述するようにこの値はコーシーの主値を考えると存在し、積分が可能である。

3.1 数値解法

ここまでは積分変数として、ある基準点からの周の長さを変数としてきたが、周は滑らかな閉じた曲線からなるものとしているので、ここで新たに変数 φ を導入する、ただし、変数 c との関係は次式によって与えられる(図3参照)。

$$v(\varphi) \cdot d\varphi = u(c) \cdot dc \tag{27}$$

この新変数 φ を使って(21)式を書き換える。ただし、 $\dot{\xi}(\varphi) = \frac{\partial \xi(\varphi)}{\partial \varphi}$, $\dot{\eta}(\varphi) = \frac{\partial \eta(\varphi)}{\partial \varphi}$, $\dot{\xi}(\psi) = \frac{\partial \xi(\psi)}{\partial \psi}$, $\dot{\eta}(\psi) = \frac{\partial \eta(\psi)}{\partial \psi}$ とする。

$$\begin{aligned}
& \frac{v^{(0)}(\varphi)}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{\xi}_0^2(\varphi) + \dot{\eta}_0^2(\varphi)}} \\
& + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\psi) \cdot K_{0,0}(\varphi, \psi) d\psi \\
& - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\psi) \cdot K_{1,0}(\varphi, \psi) d\psi
\end{aligned}$$

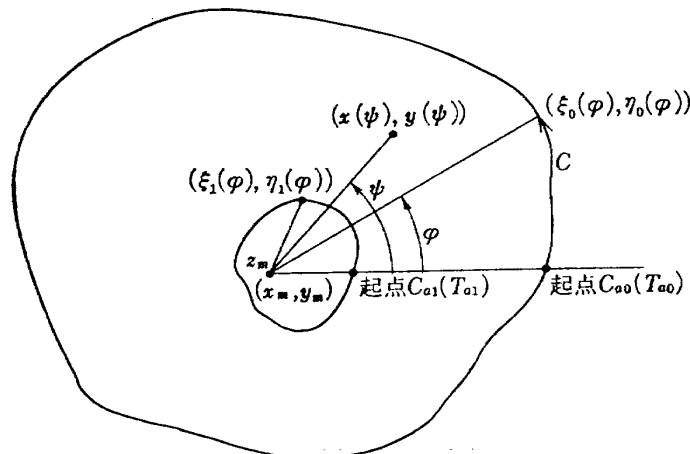


図 3

$$\begin{aligned}
&= -\int_0^\varphi f_0(\phi) \cdot \sqrt{\dot{\xi}_0^2(\phi) + \dot{\eta}_0^2(\phi)} \cdot d\phi &= T_{a1} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\phi) \cdot L_{0,1}(0, \phi) d\phi \\
\frac{v^{(1)}(\varphi)}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{\xi}_{11}^2(\varphi) + \dot{\eta}_{11}(\varphi)}} & & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\phi) \cdot L_{1,1}(0, \phi) d\phi \\
&+ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\phi) \cdot K_{0,1}(\varphi, \phi) d\phi & \text{このとき温度分布は次式により得られる,} \\
&- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\phi) \cdot [K_{1,1}(\varphi, \phi) - \alpha_1] d\phi & T(x, y) = A \ln \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} + B \\
&= -\int_0^\varphi f_1(\phi) \cdot \sqrt{\dot{\xi}_1^2(\phi) + \dot{\eta}_1^2(\phi)} \cdot d\phi & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\phi) \cdot L_{0,(x,y)} d\phi \\
& & + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\phi) \cdot L_{1,(x,y)}(\phi) d\phi \quad (30) \\
& & \text{また (25) 式は,} \\
& & \int_0^{2\pi} f_0(\phi) \cdot \sqrt{\dot{\xi}_0^2(\phi) + \dot{\eta}_0^2(\phi)} \cdot d\phi \\
& & - \int_0^{2\pi} f_1(\phi) \cdot \sqrt{\dot{\xi}_1^2(\phi) + \dot{\eta}_1^2(\phi)} \cdot d\phi = 0 \quad (31) \\
& & \text{となる。} \\
& & \text{ただし,}
\end{aligned} \quad (28)$$

また, (26) 式は次のようになる,

$$\begin{aligned}
&A \ln \sqrt{(\xi_{a0}(0) - x_m)^2 + (\eta_{a0}(0) - y_m)^2} + B \\
&= T_{a0} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\phi) \cdot L_{0,0}(0, \phi) d\phi \\
&- \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\phi) \cdot L_{1,0}(0, \phi) d\phi \\
&A \ln \sqrt{(\xi_{a1}(0) - x_m)^2 + (\eta_{a1}(0) - y_m)^2} + B
\end{aligned}$$

$$K_{k,l}(\varphi, \phi) = \frac{[\dot{\xi}_k(\phi) - \dot{\xi}_l(\varphi)] \cdot \dot{\eta}_k(\phi) - [\eta_k(\phi) - \eta_l(\varphi)] \cdot \dot{\xi}_k(\phi)}{[\dot{\xi}_k(\phi) - \dot{\xi}_l(\varphi)]^2 + [\eta_k(\phi) - \eta_l(\varphi)]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{\xi}_k^2(\phi) + \dot{\eta}_k^2(\phi)}} \quad (32)$$

$$L_{k,l}(0, \phi) = \frac{[\dot{\xi}_k(\phi) - \dot{\xi}_l(0)] \cdot \dot{\xi}_k(\phi) + [\eta_k(\phi) - \eta_l(0)] \cdot \dot{\eta}_k(\phi)}{[\dot{\xi}_k(\phi) - \dot{\xi}_l(0)]^2 + [\eta_k(\phi) - \eta_l(0)]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{\xi}_k^2(\phi) + \dot{\eta}_k^2(\phi)}}$$

$$L_{k,(x,y)}(\phi) = \frac{[\dot{\xi}_k(\phi) - x] \cdot \dot{\xi}_k(\phi) + [\eta_k(\phi) - y] \cdot \dot{\eta}_k(\phi)}{[\dot{\xi}_k(\phi) - x]^2 + [\eta_k(\phi) - y]^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{\xi}_k^2(\phi) + \dot{\eta}_k^2(\phi)}} \quad (33)$$

また, (24) 式は (32) 式において $k=l$ の場合であり

$$\int_0^{2\pi} K_{k,k}(\varphi, \phi) \cdot \sqrt{\dot{\xi}_k^2(\phi) + \dot{\eta}_k^2(\phi)} \cdot d\phi = \pi \quad (34)$$

で表示できる。

さて, ここでききにも述べたように (32), (33) 式で $k=l$, かつ $\phi=\varphi$ のときに積分方程式の核 $K_{k,k}(\varphi, \varphi)$ および $L_{k,k}(\varphi, \varphi)$ の値が存在することを示そう。 $K_{k,k}(\varphi, \varphi)$ については, 一般に $\varphi=\phi \pm 2n\pi$ ($n=0, 1, 2, \dots$) のとき,

$$\lim_{\phi \rightarrow \varphi \pm 2n\pi} K_{k,k}(\varphi, \phi) = \frac{\dot{\xi}(\varphi) \cdot \dot{\xi}(\varphi) - \dot{\eta}(\varphi) \cdot \dot{\xi}(\varphi)}{2[\dot{\xi}^2(\varphi) + \dot{\eta}^2(\varphi)] \cdot \sqrt{\dot{\xi}^2(\varphi) + \dot{\eta}^2(\varphi)}} \quad (35)$$

$$\text{ただし, } \dot{\xi}(\varphi) = \frac{\partial \xi(\varphi)}{\partial \varphi}, \quad \ddot{\xi}(\varphi) = \frac{\partial^2 \xi(\varphi)}{\partial \varphi^2}, \quad \dot{\eta}(\varphi) = \frac{\partial \eta(\varphi)}{\partial \varphi}, \quad \ddot{\eta}(\varphi) = \frac{\partial^2 \eta(\varphi)}{\partial \varphi^2} \quad \text{とする。}$$

なる値をとる。

一方 $L_{k,k}(\varphi, \phi)$ については, コーシーの主値を考えるものとする,

$$\lim_{\phi \rightarrow \varphi \pm 2n\pi} L_{k,k}(\varphi, \phi) = \left\{ -\frac{1}{2} \cot \frac{\varphi - \phi}{2} + H_{k,k}(\varphi, \phi) \right\} \cdot \frac{1}{\sqrt{\dot{\xi}_k^2(\phi) + \dot{\eta}_k^2(\phi)}} \quad (36)$$

ただし, $H_{k,k}(\varphi, \phi)$ は次の式によって与えられた連続関数である。

$$\begin{aligned}
H_{k,k}(\varphi, \phi) &= \frac{[\dot{\xi}_k(\phi) - \dot{\xi}_k(\varphi)] \cdot \dot{\xi}(\phi) + [\eta(\phi) - \eta(\varphi)] \cdot \dot{\eta}(\phi)}{[\dot{\xi}_k(\phi) - \dot{\xi}_k(\varphi)]^2 + [\eta_k(\phi) - \eta_k(\varphi)]^2} + \frac{1}{2} \cot \frac{\varphi - \phi}{2} \\
&= \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \phi} \ln \frac{[\dot{\xi}_k(\phi) - \dot{\xi}_k(\varphi)]^2 + [\eta_k(\phi) - \eta_k(\varphi)]^2}{\sin^2 \frac{\varphi - \phi}{2}} \quad (37)
\end{aligned}$$

この関数 $H_{k,k}(\varphi, \psi)$ については、さきの $K_{k,k}(\varphi, \psi)$ の場合と同様に $\xi_k(\varphi) \rightarrow \xi_k(\varphi \pm 2n\pi)$ のときに極限值が存在し、次のような式となる。

$$\lim_{\psi \rightarrow \varphi \pm 2n\pi} H_{k,k}(\varphi, \psi) = \frac{\dot{\xi}(\varphi) \cdot \ddot{\xi}(\varphi) + \dot{\eta}(\varphi) \cdot \ddot{\eta}(\varphi)}{\dot{\xi}^2(\varphi) + \dot{\eta}^2(\varphi)} \times \frac{1}{2} \quad (38)$$

また (37) 式からわかるように

$$\int_0^{2\pi} H_{k,k}(\varphi, \psi) d\psi = 0 \quad (39)$$

である。

一方、積分

$$\int_0^{2\pi} v(\psi) \cdot \cot \frac{\varphi - \psi}{2} d\psi$$

この積分は、まず φ を固定して考える。この値を φ_c とすると

$$\begin{aligned} & v(\varphi_c) \int_0^{2\pi} \cot \frac{\varphi_c - \psi}{2} d\psi \\ &= v(\varphi_c) \left[\int_0^{\varphi_c - \epsilon} \cot \frac{\varphi_c - \psi}{2} d\psi + \int_{\varphi_c - \epsilon}^{\varphi_c + \epsilon} \cot \frac{\varphi_c - \psi}{2} d\psi \right. \\ & \quad \left. + \int_{\varphi_c + \epsilon}^{2\pi} \cot \frac{\varphi_c - \psi}{2} d\psi \right] \end{aligned}$$

と変形すると、第一、第三項は有限な値をとる、第二項について考える、

$$\int_{\varphi_c - \epsilon}^{\varphi_c + \epsilon} \cot \frac{\varphi_c - \psi}{2} d\psi = -2 \left[\ln \sin \frac{\varphi_c - \psi}{2} \right]_{\varphi_c - \epsilon}^{\varphi_c + \epsilon}$$

ここで $\epsilon \rightarrow 0$ を考えるとこの値は 0 である (図 4 参照)。

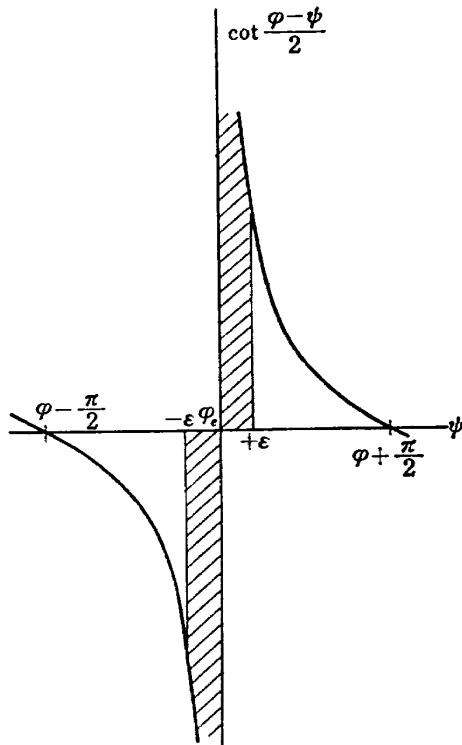


図 4

したがって、 $L_{k,k}(\varphi, \psi)$ については

$$\int_0^{2\pi} L_{k,k}(\varphi, \psi) d\psi = 0 \quad (40)$$

なる性質を有することがわかる。

4. 滑らかな境界をもつ空所を内部に二つ以上含む場合

さきに空所が内部に一つ存在する場合について解を得たが、それと同様な方法を拡張することによって簡単に導くことができる。

実数部 $U(x, y)$ と虚数部 $V(x, y)$ がともに調和関数であるような複素関数を、さきの場合と同様に $\Phi(z)$ とする、

$$\Phi(z) = \sum_{m=1} A_m \cdot \ln(z - z_m) + B + \Phi^*(z) \quad (41)$$

ここで $A_m (m=1, 2, \dots)$, B は境界条件から決定される定数である、また m は空所の数に等しい数値である。 z_m は空所内の点とする。

$\Phi^*(z)$ は次式のように積分の和として与えられる一価関数である。

$$\Phi^*(z) = -\sum_{k=0} \frac{1}{2\pi} \int_{C_k} \frac{u(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (42)$$

ただし、 k は境界線の数だけあり、 m よりは一つだけ多い数値である。

(42) 式の境界線上における性質を調べる。いま領域内の点 $z(x, y)$ が境界上の内法線の正方向から境界線上のある点 $t(\xi, \eta)$ に近づいた場合と境界線上を境界線に沿って境界線上のある点 $t(\xi, \eta)$ に近づいた場合について考えなければならない。後者の場合には明らかに連続的に $\Phi^*(t)$ なる値をとる。一方内法線の正の方向から点 $t(\xi, \eta)$ に近づいた場合は (10) 式と同様に $u(\xi, \eta)/2$ だけの跳躍が発生する、この場合 (10) 式に相当して次式のように表示できる。

すなわち、境界線 $C_l (l=0, 1, 2, \dots)$ 上にある点 $t_l (l=0, 1, 2, \dots)$ に内法線の正の方向から近づいた場合、

$$\begin{aligned} \Phi^*(t_l) &= \frac{u^{(l)}(t_l)}{2i} - \frac{1}{2\pi} \int_{C_0} \frac{u^{(0)}(\zeta)}{\zeta - t_l} d\zeta \\ & \quad + \sum_{k=1} \frac{1}{2\pi} \int_{C_k} \frac{u^{(k)}(\zeta)}{\zeta - t_l} d\zeta \quad (43) \end{aligned}$$

なる値をとる。

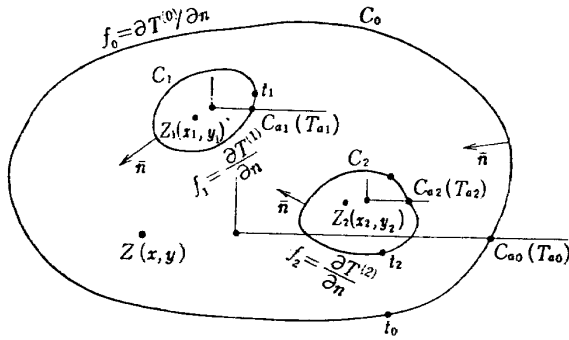


図 5

$u^{(l)}$ は境界条件が与えられれば決定できる。いま各境界線上での温度勾配分布が次のように与えられているものとする。

$$\begin{aligned} f_0(\xi, \eta) &= \partial T^{(0)}(\xi, \eta) / \partial n \\ f_1(\xi, \eta) &= \partial T^{(1)}(\xi, \eta) / \partial n \\ f_l(\xi, \eta) &= \partial T^{(l)}(\xi, \eta) / \partial n \end{aligned} \quad (44)$$

勿論この境界条件は次の条件を満足しなければならない。

$$\begin{aligned} \oint_{C_0} f_0(\xi, \eta) dc - \oint_{C_1} f_1(\xi, \eta) dc - \dots \\ - \oint_{C_l} f_l(\xi, \eta) dc - \dots = 0 \end{aligned} \quad (45)$$

(41) 式, (43) 式および境界条件 (44) 式より次の連立積分方程式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{u^{(l)}(\xi, \eta)}{2} + \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot K(\xi_0, \eta_0; \xi, \eta) dc \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1} \oint_{C_k} u^{(k)}(\xi, \eta) \cdot [K(\xi_l, \eta_l; \xi, \eta) - \alpha_l] dc \\ = - \int_{C_{a_l}} f_l(\xi, \eta) dc, \quad (l=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (46)$$

ただし, α_l は (22) 式によって定義され, $k=l$ の場合にのみ任意の 0 でない数値とし, $k \neq l$ ならば 0 とする。別な面からみると α_l が存在することによってこの積分方程式が固有値 π をもつことが避けられたということである。

この連立積分方程式より解 $u^{(l)}(\xi, \eta)$ が求まり, したがって次式により領域内の温度分布を求めることができる。

$$\begin{aligned} T(x, y) &= \sum_{m=1} A_m \cdot \ln \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} + B \\ &- \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot L(x, y; \xi, \eta) dc \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1} \oint_{C_k} u^{(k)}(\xi, \eta) \cdot L(x, y; \xi, \eta) dc \end{aligned} \quad (47)$$

ただし,

$$K(\xi_l, \eta_l; \xi, \eta) = \frac{(\xi - \xi_l) \cdot \partial \eta / \partial c - (\eta - \eta_l) \cdot \partial \xi / \partial c}{(\xi - \xi_l)^2 + (\eta - \eta_l)^2} \quad (48)$$

$$L(\xi_l, \eta_l; \xi, \eta) = \frac{(\xi - \xi_l) \cdot \partial \xi / \partial c + (\eta - \eta_l) \cdot \partial \eta / \partial c}{(\xi - \xi_l)^2 + (\eta - \eta_l)^2} \quad (49)$$

(47) 式において定数 A_m と B がまだわかっていない。この定数を決定するために, 各境界線上のある一点における温度がわからなければならない。ここでは図 5 における $C_{a0}, C_{a1}, C_{a2}, \dots$ 点における温度がわかっているものとし, この点における温度をそれぞれ $T_{a0}, T_{a1}, T_{a2}, \dots$ とする。

未知数 A_m, B の決定

(47) 式より, 境界線 C_l 上での C_{al} 点の座標を (ξ_{al}, η_{al}) とすると次式が成り立つ。

$$\begin{aligned} T_{al} &= \sum_{m=1} A_m \cdot \ln \sqrt{(\xi_{al} - x_m)^2 + (\eta_{al} - y_m)^2} + B \\ &- \frac{1}{2\pi} \oint_{C_0} u^{(0)}(\xi, \eta) \cdot L(\xi_{al}, \eta_{al}; \xi, \eta) dc \\ &+ \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1} \oint_{C_k} u^{(k)}(\xi, \eta) \cdot L(\xi_{al}, \eta_{al}; \xi, \eta) dc \\ &\quad (l=0, 1, 2, \dots) \end{aligned} \quad (50)$$

この式で積分はコーシーの主値を考えるものとするときに述べたようにこの積分は可能であり, A_m, B を決定することができる。

この方法により A_m, B が決定し (46) 式から $u^{(l)}(\xi, \eta)$ が求まるから領域内の点 (x, y) における温度は (47) 式から求めることができる。

4.1 数値解法

境界条件が滑らかな閉じた境界線上で境界値が与えられるような条件であるため, これら連立積分方程式の解は周期性を有していると考えられることができる。

これまでは境界線の長さ C を変数としてきたが, 周期 2π を有する周期関数への変換を次の関係式により行なうとする。

$$v(\varphi) \cdot d\varphi = u(c) \cdot dc \quad (27)$$

この変数変換により連立積分方程式 (46) は次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} \frac{v^{(l)}(\varphi)}{2\sqrt{\xi_l^2(\varphi) + \eta_l^2(\varphi)}} + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\phi) \cdot K_{0,l}(\varphi, \phi) d\phi \\ - \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1} \int_0^{2\pi} v^{(k)}(\phi) \cdot [K_{k,l}(\varphi, \phi) - \alpha_l] \cdot d\phi \\ = - \int_0^\varphi f_l(\phi) \cdot \sqrt{\xi_l^2(\phi) + \eta_l^2(\phi)} \cdot d\phi \end{aligned} \quad (51)$$

ただし, 右辺の積分領域は積分起点 C_{al} が $\varphi=0$ に等しいとし, 終点を 2π とした (図 5 参照)。

同様に (47) 式は次のようになり、領域内の温度分布を計算することができる。

$$T(x, y) = \sum_{m=1} A_m \cdot \ln \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} + B - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\phi) \cdot L_{0,(x,y)}(\phi) d\phi + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1} \int_0^{2\pi} v^{(k)}(\phi) \cdot L_{k,(x,y)}(\phi) d\phi \quad (52)$$

ここでもやはり境界条件は次の形に変形することができ、かつ満足されなければならない。(46) 式から

$$\int_0^{2\pi} f_0(\phi) \cdot \sqrt{\xi_0^2(\phi) + \eta_0^2(\phi)} d\phi - \sum_{k=1} \int_0^{2\pi} f_k(\phi) \cdot \sqrt{\xi_k^2(\phi) + \eta_k^2(\phi)} d\phi = 0 \quad (53)$$

ただし、 $K_{k,l}(\phi, \psi)$, $L_{k,l}(\phi, \psi)$, $L_{k,(x,y)}(\phi)$ は (32), (33) 式で与えられる。

これらの積分を実行するにあたり最も適した近似求積法として Hermite の求積法を周期関数の場合に適用した方法を利用する⁹⁾。この方法を簡単に述べる。

周期 P を持つ周期関数を $g(x)$ とする。境界線 C 上に任意の $(n+1)$ 個の等分割点をとる。このとき、周期関数の 1 周期にわたる積分を次の近似式で求める。

$$\oint_C g(\phi) d\phi = \frac{2\pi}{n} \sum_{k=1}^n g_k + \bar{R}_n \quad (54)$$

ただし、 ϕ_k を k 番目の分割点とすると、 $g_k = g(\phi_k)$ とする。

また算術平均誤差評価 $|\bar{R}_n|$ は $C(n)$ を定数とすると、

$$|\bar{R}_n| \leq |C(n)| \cdot \text{Max} |\Phi(g)|$$

ただし、

$$\Phi(g) = \frac{d^{2n+2}g}{d\phi^{2n+2}}$$

$$C(n) = \frac{1}{(2n+2)!} \int_0^{2\pi} [\pi(\phi)]^2 d\phi$$

$$\pi(\phi) = (\phi - \phi_0)(\phi - \phi_1) \cdots (\phi - \phi_n)$$

で与えられる。

4.2 積分方程式の離散化

滑らかな閉じた曲線 C_0, C_1, C_2, \dots 上の任意の数の分割点をそれぞれ $2N_0, 2N_1, 2N_2, \dots$ とするときこれらの境界線上の点が等分割になるような変数 ϕ を次のような形で導入する (図 6 参照)。

$$\phi_{\mu_0} = \mu_0 \cdot \frac{2\pi}{2N_0}, \quad (\mu_0 = 0, 1, 2, \dots, 2N_0 - 1)$$

$$\phi_{\mu_1} = \mu_1 \cdot \frac{2\pi}{2N_1}, \quad (\mu_1 = 0, 1, 2, \dots, 2N_1 - 1)$$

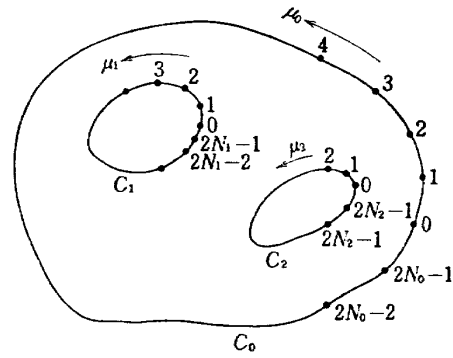


図 6

$$\phi_{\mu_2} = \mu_2 \cdot \frac{2\pi}{2N_2}, \quad (\mu_2 = 0, 1, 2, \dots, 2N_2 - 1)$$

$\mu_0 = 0, \mu_1 = 0, \mu_2 = 0, \dots$ は境界線上の分割の起点の位置とし、任意の位置としてよしい。

周期関数に適用した Hermite の求積法を利用するため連立積分方程式の解を得るには (51) 式、また領域内の温度分布を求める式は (52) 式に (54) 式の近似式を適用する。

$$\frac{v_{\mu}^{(l)}}{2 \cdot \sqrt{\xi_{\mu l}^2 + \eta_{\mu l}^2}} + \frac{1}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot K_{\mu 0, \nu l} - \sum_{k=1} \left\{ \frac{1}{2N_k} \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\nu}^{(k)} (K_{\mu k, \nu l} - \alpha_l) \right\} = - \frac{2\pi}{2Nl} \sum_{\nu=0}^{\mu} f_{\nu l} \cdot \sqrt{\xi_{\nu l}^2 + \eta_{\nu l}^2} \quad (l=0, 1, 2, \dots) \quad (55)$$

ただし、 α_l は $k=l$ かつ $\mu=\nu$ の場合にのみ任意を定数とし、それ以外の場合には 0 とする。

(52) 式は

$$T(x, y) = \sum_{m=1} A_m \cdot \ln \sqrt{(x-x_m)^2 + (y-y_m)^2} + B - \frac{1}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot L_{(x,y), \nu 0} + \sum_{k=1} \left\{ \frac{1}{2N_k} \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\nu}^{(k)} \cdot L_{(x,y), \nu k} \right\} \quad (56)$$

ここに、

$$K_{\mu k, \nu l} = \frac{[\xi_{\nu l} - \xi_{\mu k}] \cdot \eta_{\nu l} - [\eta_{\nu l} - \eta_{\mu k}] \cdot \xi_{\nu l}}{[\xi_{\nu l} - \xi_{\mu k}]^2 + [\eta_{\nu l} - \eta_{\mu k}]^2} \times \frac{1}{\sqrt{\xi_{\nu l}^2 + \eta_{\nu l}^2}}$$

$$L_{(x,y), \nu k} = \frac{[\xi_{\nu k} - x] \cdot \xi_{\nu k} + [\eta_{\nu k} - y] \cdot \eta_{\nu k}}{[\xi_{\nu l} - x]^2 + [\eta_{\nu l} - y]^2} \times \frac{1}{\sqrt{\xi_{\nu k}^2 + \eta_{\nu k}^2}}$$

$$K_{\mu k, \mu k} = \frac{\xi_{\mu k} \cdot \xi_{\mu k} - \eta_{\mu k} \cdot \eta_{\mu k}}{2 \cdot [\xi_{\mu k}^2 + \eta_{\mu k}^2]^{3/2}}$$

また、境界条件の満足しなければならない式 (53) 式は次のようになる。

$$\sum_{i=0} \left\{ \frac{1}{2Nl} \sum_{\nu=0}^{2Nl-1} f_{\nu l} \cdot \sqrt{\xi_{\nu l}^2 + \eta_{\nu l}^2} \right\} = 0 \quad (57)$$

未知数 A_m, B の決定

いま境界 C_l 上の任意の一点 $C_{al}(\xi_{al}, \eta_{al})$ において与えられる温度を T_{al} とする未知数 A_m, B を決定する式は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1} \{ A_m \cdot \ln \sqrt{(\xi_{al} - x_m)^2 + (\eta_{al} - y_m)^2} \} + B \\ & = T_{al} + \frac{1}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot L_{al, \nu 0} \\ & \quad - \sum_{k=1} \frac{1}{2N_k} \left\{ \sum_{\nu=0}^{2N_k-1} v_{\nu}^{(k)} \cdot L_{al, \nu k} \right\} \end{aligned} \quad (58)$$

ただし, $\xi_{\nu k} \neq \xi_{al}, \eta_{\nu k} \neq \eta_{al}$ のとき,

$$\begin{aligned} L_{al, \nu k} &= \frac{[\xi_{\nu k} - \xi_{al}] \cdot \dot{\xi}_{\nu k} + [\eta_{\nu k} - \eta_{al}] \cdot \dot{\eta}_{\nu k}}{[\xi_{\nu k} - \xi_{al}]^2 + [\eta_{\nu k} - \eta_{al}]^2} \\ & \quad \times \frac{1}{\sqrt{\dot{\xi}_{\nu k}^2 + \dot{\eta}_{\nu k}^2}} \end{aligned} \quad (59)$$

また, $\xi_{\nu k} = \xi_{al}, \eta_{\nu k} = \eta_{al}$ のときは,

$$\lim_{\substack{\xi_{\nu k} \rightarrow \xi_{al} \\ \eta_{\nu k} \rightarrow \eta_{al}}} L_{al, \nu k} = \frac{\dot{\xi}_{al} \cdot \dot{\xi}_{al} + \dot{\eta}_{al} \cdot \dot{\eta}_{al}}{2 \cdot [\dot{\xi}_{al}^2 + \dot{\eta}_{al}^2]^{3/2}}$$

数値微分

さきの報告において数値微分は三角級数の補間によって行なったがここでは一次, 二次微分を次の式によって得る。(なお詳しくは参考文献 5) を参照)

ある任意の微分可能な関数 g を考えると, 一次微分は

$$g_0' = \frac{g_{-2} - 8 \cdot g_{-1} + 8 \cdot g_1 - g_2}{12 \cdot h} \quad (60)$$

ただし,

$$h = \frac{2\pi}{2N}$$

二次微分は, 一次微分の方法を繰り返し用いて得る,

$$\begin{aligned} g_0'' &= \frac{1}{144h^2} (g_{-4} - 16 \cdot g_{-3} + 64 \cdot g_{-2} + 16 \cdot g_{-1} \\ & \quad - 130 \cdot g_0 + 16 \cdot g_1 + 64 \cdot g_2 - 16 \cdot g_3 + g_4) \end{aligned} \quad (61)$$

また, Hermite の求積法によると, $n=2N-m$ の近傍を除いて得られた近似積分値は適当であるが, この近傍では一般的にいて多少大きく評価されてしまうので, この点における値は被積分項の有する性質 (24) 式を利用して計算する。

$$K_{m, 2N-m} = N - \sum_{\substack{\mu=0 \\ \mu \neq m}}^{2N-1} K_{\mu, 2N-m} \quad (62)$$

以上で閉領域内の温度分布を計算することができる。

4.3 例題 二重の同心円の場合

附録 II において二重同心円境界の場合について偏微分方程式を変数分離法で解き, 三角級数展開の形で解を得たが, ここではグリーン関数から導いたこれまでの方法の二重同心円境界という制限された境界形状のもとでの解を示す。

図 7 に示すように外側の境界線 C_0 は半径 R_0 の円周であり, この境界線上で温度勾配 $f_0(\varphi) = \partial T^{(0)} / \partial n$ と C_{a0} 点での温度 T_{a0} が与えられている。内側の境界線 C_1 は半径 R_1 であり, 同様に温度勾配 $f_1(\varphi) = \partial T^{(1)} / \partial n$ と C_{a1} 点での温度 T_{a1} が与えられている。この二つの境界 C_0 と C_1 によって囲まれる領域 D における温度 $T(r, \theta)$ を求める。

境界線 $C_0(\xi_0, \eta_0)$ と $C_1(\xi_1, \eta_1)$ は次のような曲座標表示で表わす。

$$\xi_0(\varphi) = R_0 \cdot \cos \varphi, \quad \eta_0(\varphi) = R_0 \cdot \sin \varphi$$

$$\xi_1(\varphi) = R_1 \cdot \cos \varphi, \quad \eta_1(\varphi) = R_1 \cdot \sin \varphi$$

連立積分方程式 (28) 式の被積分項 $K_{k,l}(\varphi, \psi)$ の計算結果は (32) 式より

$$K_{0,0}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2R_0}$$

$$K_{1,0}(\varphi, \psi) = \frac{R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)} \cdot \frac{1}{R_1}$$

$$K_{0,1}(\varphi, \psi) = \frac{R_0^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)}{R_1^2 + R_1^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)} \cdot \frac{1}{R_0}$$

$$K_{1,1}(\varphi, \psi) = \frac{1}{2R_1}$$

したがって連立積分方程式 (28) 式は次のようになる。

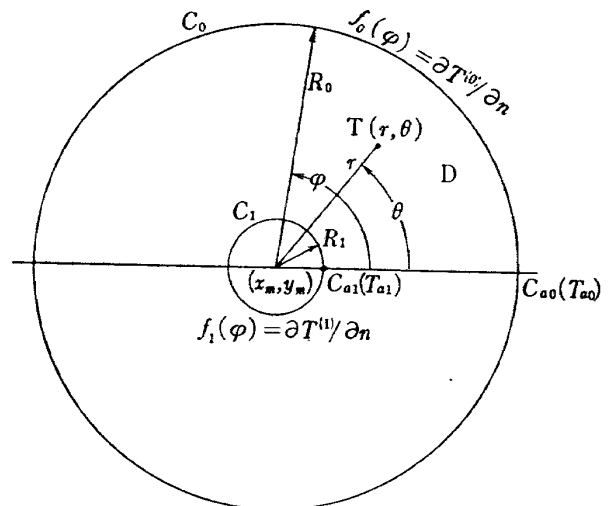


図 7

$$\begin{aligned} & \frac{v^{(0)}(\varphi)}{2R_0} + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{2R_0} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\varphi) d\varphi - \frac{1}{2\pi} \\ & \times \frac{1}{R_1} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\varphi) \frac{R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_1 \cdot R_0 \cdot \cos(\varphi - \psi)} d\psi \\ & = -R_0 \int_0^\varphi f_0(\psi) d\psi \\ & \frac{v^{(1)}(\varphi)}{2R_1} + \frac{1}{2\pi} \\ & \times \frac{1}{R_0} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\varphi) \frac{R_0^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi - \psi)} d\psi \\ & - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\varphi) \left[\frac{1}{2R_1} - \alpha_1 \right] d\psi \\ & = -R_1 \int_0^\varphi f_1(\psi) d\psi \quad (63) \end{aligned}$$

境界線 C_0, C_1 上の点 C_{a0}, C_{a1} において与えられる温度 T_{a0}, T_{a1} により係数 A, B を求める。(33) 式の上の式により

$$\begin{aligned} L_{0,0}(0, \varphi) &= \frac{1}{R_0} \cdot \frac{\sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \\ L_{1,0}(0, \varphi) &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{R_0 \cdot R_1 \cdot \sin \varphi}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos \varphi} \\ L_{0,1}(0, \varphi) &= \frac{1}{R_0} \cdot \frac{R_0 \cdot R_1 \cdot \sin \varphi}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos \varphi} \\ L_{1,1}(0, \varphi) &= \frac{1}{R_1} \cdot \frac{\sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} \end{aligned}$$

であるから (29) 式より A, B を決定する二つの式が決まる。

$$\begin{aligned} A \cdot \ln R_0 + B &= T_{a0} + \frac{1}{2\pi} \\ & \times \frac{1}{R_0} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\varphi) \frac{\sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} d\varphi - \frac{1}{2\pi} \\ & \times \frac{1}{R_1} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\varphi) \frac{R_0 \cdot R_1 \cdot \sin \varphi}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos \varphi} d\varphi \\ A \cdot \ln R_1 + B &= T_{a1} + \frac{1}{2\pi} \\ & \times \frac{1}{R_0} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\varphi) \frac{R_0 \cdot R_1 \cdot \sin \varphi}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos \varphi} d\varphi \\ & - \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_1} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\varphi) \frac{\sin \varphi}{2(1 - \cos \varphi)} d\varphi \quad (64) \end{aligned}$$

ただし、(64) 式の第一式の右辺第二項、および第二式の右辺第三項の積分値はコーシーの主値を考えるものとする。

二つの同心円に囲まれる領域 D の点 (r, θ) における温度は、

$$\begin{aligned} x_m &= 0, & y_m &= 0 \\ x &= r \cos \theta, & y &= r \sin \theta \end{aligned}$$

とすると次の関係式から求めることができる。

(33) の下の式から

$$\begin{aligned} L_{0,(x,y)}(\varphi) &= \frac{R_0 \cdot r \cdot \sin(\varphi - \theta)}{R_0^2 + r^2 - 2R_0 \cdot r \cdot \cos(\varphi - \theta)} \cdot \frac{1}{R_0} \\ L_{1,(x,y)}(\varphi) &= \frac{R_1 \cdot r \cdot \sin(\varphi - \theta)}{R_1^2 + r^2 - 2R_1 \cdot r \cdot \cos(\varphi - \theta)} \cdot \frac{1}{R_1} \end{aligned}$$

これらを (30) 式に代入する、

$$\begin{aligned} T(r, \theta) &= A \cdot \ln r + B - \frac{1}{2\pi} \\ & \times \frac{1}{R_0} \int_0^{2\pi} v^{(0)}(\varphi) \cdot \frac{R_0 \cdot r \cdot \sin(\varphi - \theta)}{R_0^2 + r^2 - 2R_0 \cdot r \cdot \cos(\varphi - \theta)} d\varphi \\ & + \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{R_1} \int_0^{2\pi} v^{(1)}(\varphi) \\ & \times \frac{R_1 \cdot r \cdot \sin(\varphi - \theta)}{R_1^2 + r^2 - 2R_1 \cdot r \cdot \cos(\varphi - \theta)} d\varphi \quad (65) \end{aligned}$$

ただし境界値は次の関係式を満足しているものとする。

$$R_0 \cdot \int_0^{2\pi} f_0(\varphi) d\varphi = R_1 \cdot \int_0^{2\pi} f_1(\varphi) d\varphi \quad (66)$$

$R_0=10, R_1=2$ とし、境界条件は $f_0(\varphi)=2.7 \cos \varphi - 0.3 \sin \varphi, f_1(\varphi)=5.2 \cos \varphi - 5.4 \sin \varphi, T_{a0}=125, T_{a1}=20$ とした場合の温度分布の計算結果を図 9, 10 に示す。この境界条件は、さきに報告した⁶⁾第一種の境界条件の場合と同じ温度分布を得るために与えた境界条件である。

図 9 には変数分離法によって得た結果を示す。このとき $A=49.75, B=-14.47$ である。一方図 10 には分割点を $2N_0=2N_1=36$ 点にとった場合の結果を示した。さきの報告⁶⁾の場合と比較して数値計算の過程が増えたため誤差が大きくなっていることが分割点 36 の場合の両者の結果を比較すると明白である。変数分離法の場合と A, B の値は多少異なり、それぞれ 51.3, -16.8 である。この係数は半径方向の平均温度分布を決定するものである。

4.4 数値計算方法および結果

本文中の例題および附録 II の例題で述べたように二変数ラプラス方程式の解をグリーン関数を利用した方法と変数分離法により無限三角級数展開表示による解を求めた。これらの二方法による解を同一の境界条件のもとに求め両者の解を比較する。

本文中において述べたように境界条件は (図 8 参照) さきの報告⁶⁾で得た温度分布と同じ温度分布を得ることができるような境界条件とするために次のようなものとする。

半径 $R_0=10$ の円周上で

温度勾配 $f_0(\varphi)=2.7 \cos \varphi - 0.3 \sin \varphi$

点 $(10, 0)$ での温度は 125

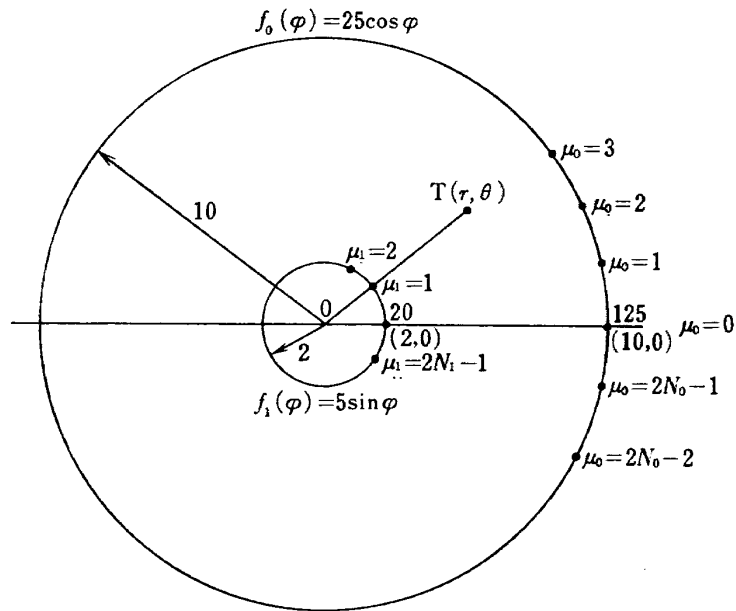


図 8

半径 $R_1=2$ の内周上で

温度勾配 $f_1(\varphi)=5.2 \cos \varphi-5.4 \sin \varphi$

点 $(2,0)$ の温度は 20

とする。

円周上の分割方法は原点 0 において円周をいくつか

の等分割点に分ける。すなわち、

$$\varphi_{\mu k} = \mu_k \cdot \frac{2\pi}{2N_k}, \quad (\mu_k = 0, 1, 2, \dots, 2N-1)$$

外周では $2N_0$ 分割, 内周は $2N_1$ 分割とする。

(63) 式は (54) 式により、

$$\begin{aligned} & \frac{v_{\mu}^{(0)}}{2R_0} + \frac{1}{2N_0} \cdot \frac{1}{2R_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} - \frac{1}{2N_1} \cdot \frac{1}{R_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu}^{(1)} \cdot \frac{R_1^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi_{\mu 0} - \varphi_{\nu 1})}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_1 \cdot R_0 \cdot \cos(\varphi_{\mu 0} - \varphi_{\nu 1})} \\ & = -R_0 \cdot \frac{2\pi}{2N_0} \sum_{\nu=0}^{\mu} (2.7 \cos \varphi_{\nu 0} - 0.3 \sin \varphi_{\nu 0}) \\ & \frac{v_{\mu}^{(1)}}{2R_1} + \frac{1}{2N_0} \cdot \frac{1}{R_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot \frac{R_0^2 - R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi_{\mu 1} - \varphi_{\nu 0})}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos(\varphi_{\mu 1} - \varphi_{\nu 0})} - \frac{1}{2N_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu}^{(1)} \cdot \left[\frac{1}{2R_1} - \alpha_1 \right] \\ & = -R_1 \cdot \frac{2\pi}{2N_1} \sum_{\nu=0}^{\mu} (5.2 \cos \varphi_{\nu 1} - 5.4 \sin \varphi_{\nu 1}) \end{aligned} \quad (67)$$

この連立方程式を解くと、円周上の各分割点における解 $v_{\nu}^{(0)}$ ($\nu=0, 1, 2, \dots, 2N_0-1$), $v_{\nu}^{(1)}$ ($\nu=0, 1, 2, \dots, 2N_1-1$) が求まる。

A, B の決定は (64) 式から

$$\begin{aligned} A \cdot \ln R_0 + B &= 125 + \frac{1}{2N_0} \cdot \frac{1}{R_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot \frac{\sin \varphi_{\nu 0}}{2(1 - \cos \varphi_{\nu 0})} - \frac{1}{2N_1} \cdot \frac{1}{R_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu}^{(1)} \cdot \frac{R_0 \cdot R_1 \cdot \sin \varphi_{\nu 1}}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos \varphi_{\nu 1}} \\ A \cdot \ln R_1 + B &= 20 + \frac{1}{2N_0} \cdot \frac{1}{R_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot \frac{R_0 \cdot R_1 \cdot \sin \varphi_{\nu 0}}{R_1^2 + R_0^2 - 2R_0 \cdot R_1 \cdot \cos \varphi_{\nu 0}} - \frac{1}{2N_1} \cdot \frac{1}{R_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu}^{(1)} \cdot \frac{\sin \varphi_{\nu 1}}{2(1 - \cos \varphi_{\nu 1})} \end{aligned} \quad (68)$$

二重同心円に囲まれた点 (r, θ) における温度は (65) 式より

$$\begin{aligned} T(r, \theta) &= A \cdot \ln r + B - \frac{1}{2N_0} \cdot \frac{1}{R_0} \sum_{\nu=0}^{2N_0-1} v_{\nu}^{(0)} \cdot \frac{R_0 \cdot r \cdot \sin(\varphi_{\nu 0} - \theta)}{R_0^2 + r^2 - 2R_0 \cdot r \cdot \cos(\varphi_{\nu 0} - \theta)} \\ &+ \frac{1}{2N_1} \cdot \frac{1}{R_1} \sum_{\nu=0}^{2N_1-1} v_{\nu}^{(1)} \cdot \frac{R_1 \cdot r \cdot \sin(\varphi_{\nu 1} - \theta)}{R_1^2 + r^2 - 2R_1 \cdot r \cdot \cos(\varphi_{\nu 1} - \theta)} \end{aligned} \quad (69)$$

となり温度分布が求まる。

勿論この境界条件は (66) 式を満足している。

図 9 には変数分離法による結果を示し、図 10 には分割点内、外周とも 36 分割した場合の温度分布を示した。

(69) 式からもわかるように半径方向の温度分布は対数項および定数項が大きな影響を及ぼし、円周方向には積分項の影響が大きい。

定数 A, B の値は変数分離法によると (附録 II 参照),

$$A=49.75$$

$$B=-14.47$$

であるが本報で述べた方法によると、分割点 36 の場合には

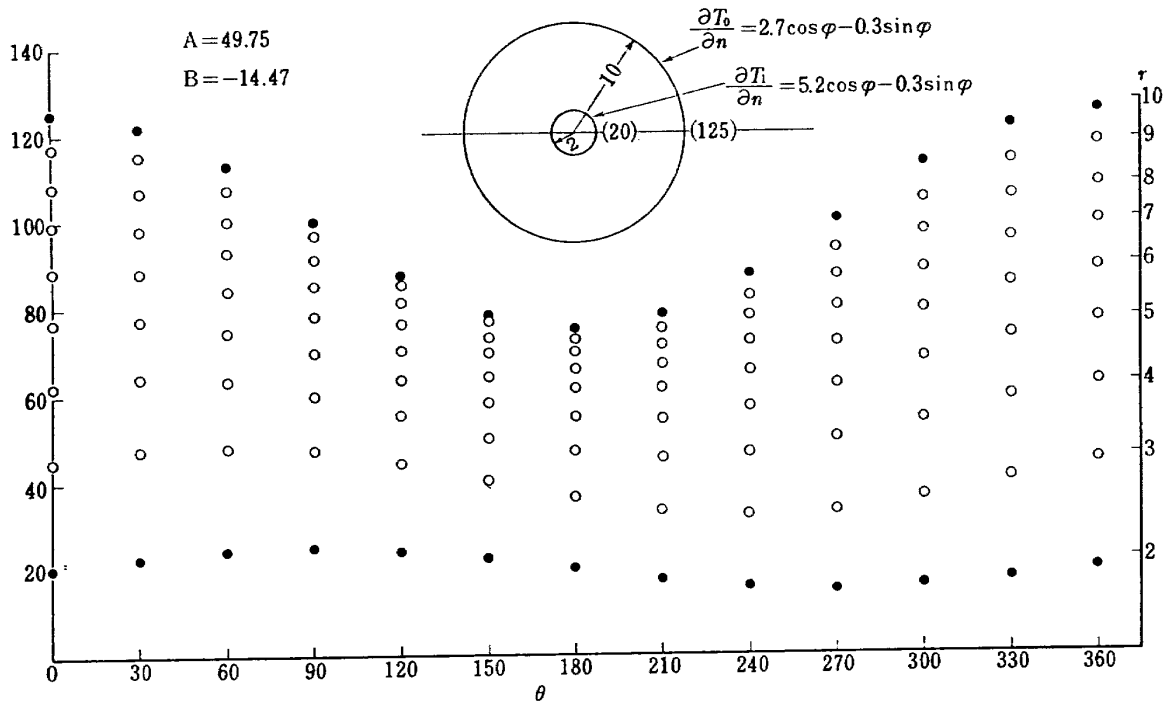


図 9 温度分布 (変数分離法) (附録 II 参照)

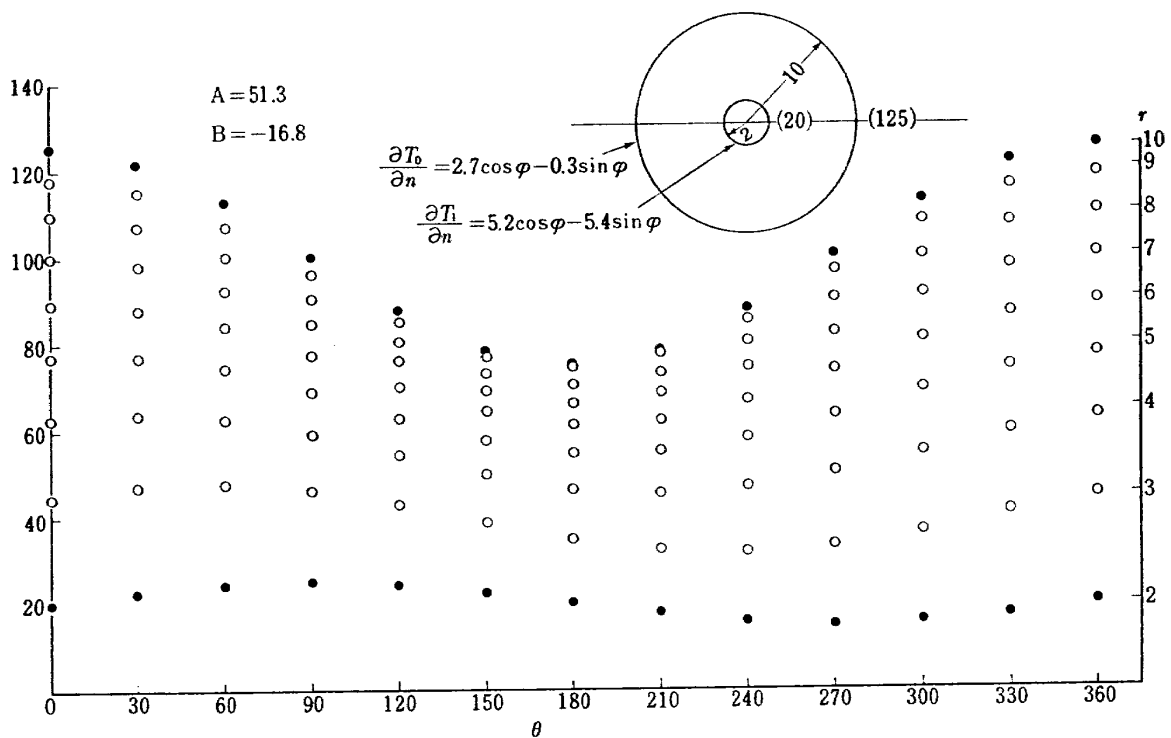


図 10 温度分布 (分割点 $2N_0=36, 2N_1=36$)

$$A=51.3$$

$$B=-16.8$$

である。

分割点を 72 点と倍増した場合には、やや変数分離法の場合に得た係数に近づいた。

この係数は温度分布に非常に大きな影響を与える。一方この係数の決定にあたっては (68) 式においてもみられるように連立方程式 (67) の解が直接関係している。そのため途中の計算の誤差すべてが含まれた結果として係数 A, B が決まるため、 A, B の値はこの計算の精度を決定する非常に重要な要素であることがわかる。

図 9 と図 10 を比べると図 10 では θ が大きくなると (約 180° 以上) 多少、大きめな値を示しており、これは (69) 式の多項式の項の影響を示していると思われる。分割点を 72 点とするとこの差も少なくなる。

4.5 冷却孔のある翼型への適用

これまでに二重同心円の場合を扱ったが、これは境界が最も簡単で数値計算上の誤差も少ないと考えられるものである。フーリエ級数展開による温度分布とグリーン関数を用いた方法の温度分布の計算結果を示し

たが、この比較検討の結果をただちに他の形状を有する境界に適用することは適当ではないように思われる。そこで冷却孔のある翼型へ本方法を適用して得た結果を電導紙によるアナログ法により得た結果を示し、比較検討を行なう。勿論アナログ法も完全な解を与えるものではない。

乱れのない翼の無限上流において一様速度マッハ数 0.34, 温度 1150°C で翼列に流入する。翼列は以下の翼要目で示すようなものである。一方冷却孔は 11 個ありその配置は図に示す。冷却空気の入口における温度は 590°C とする。このときの翼内部における温度分布を等温線で表示することとする。

境界条件の与え方であるが温度勾配は次の二式による。

主流の層流領域では

$$\frac{\partial T_{rw}}{\partial n} = -\frac{h}{k} \left(T_{rw} - 1 - 0.00036 \frac{v_f^2}{T_f - T_c} \right) \quad (70)$$

乱流領域では

$$\frac{\partial T_{rw}}{\partial n} = -\frac{h}{k} \left(T_{rw} - 1 - 0.00038 \frac{v_f^2}{T_f - T_c} \right) \quad (71)$$

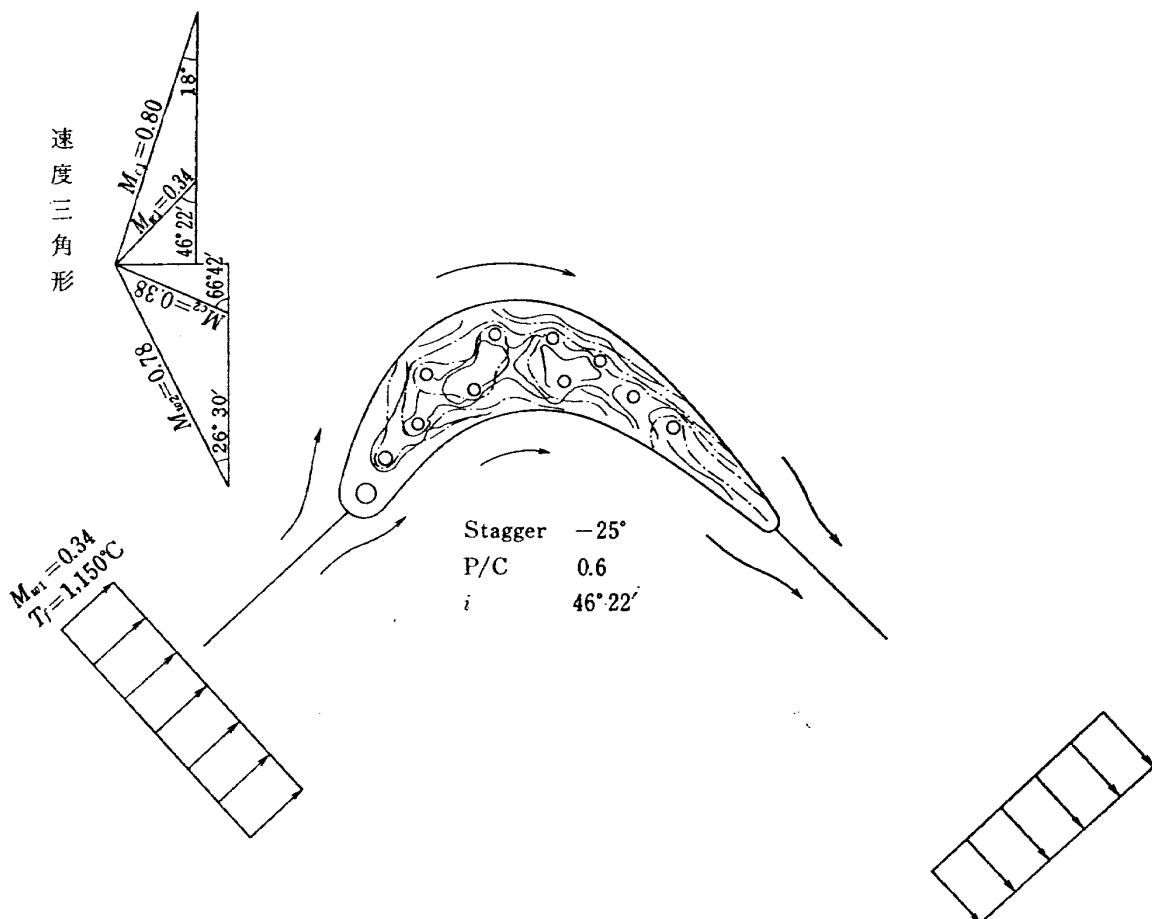


図 11 全体図

により計算する。

ただし

$$T_{rw} = \frac{T - T_c}{T_f - T_c} \quad (72)$$

T_f ; 無限上流の主流温度 (1150°C)

T_c ; 冷却空気の入口温度 (590°C)

v_f ; 翼列の中の主流の流速

(70), (71) 式から $\partial T_{rw}/\partial n$ を求めるには, さらに主流の翼列内の速度分布が必要である。この速度分布の計算は参考文献 8) によるものでその結果を図 12 に示す。図中たて軸はマッハ数であり, 記号 M_{w1} は主流の翼列への相対流入速度である。横軸は翼表面の前縁からの距離 l を前縁から翼背面を通り後縁までの長さ L で割った無次元長さである。記号 T_p は翼腹面, T_s は翼背面における層流から乱流への遷移領域を示す。

さらに翼表面の無次元温度 T_{rw} が必要であるが,

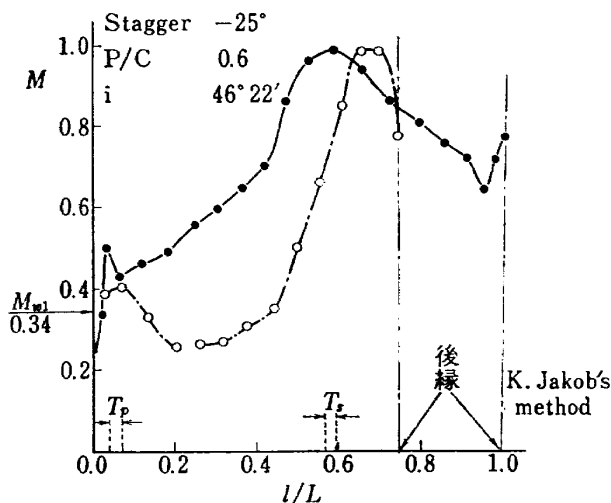


図 12 速度分布

これは表 2 に示す。

最後に熱伝達率 (h) と翼の熱伝導率 (k) の比が必要である。図 13 のような熱伝達率を与える。これは Ainley, Hodge, Ellerbrock 等の研究に基づいて決定したものであり, 冷却孔の熱伝達率については Dittler と Boelter の実験式を用いた。翼の熱伝導率は図 14 に示すように Inconel 100 とする。翼表面における h/k を表 2 に示す。冷却孔に関しては $h \cdot d/k = 40.8$ (但し d は冷却孔直径) と一定とする。以上により $\partial T_{rw}/\partial n$ を求め同様に表 2 に示す。

翼 要 目	
入口全温	1150°C
翼弦長 (c)	19.6 mm
ソリデティ	1.68
スタック	-25°
入射角	46°22'
翼座標	表 1 参照

これまでに, 境界条件の与え方を述べたが, 数値計算法は, 翼表面を全部で 72 個の分割点に分け, 冷却孔については各冷却孔に対して 8 点, 合計 88 分割点とした。さらに各境界におけるある一点の温度を与える必要がある。冷却孔については, すべて表 2 における位置 0 (すなわち図 16 において各冷却孔の右端に位置する点) の値を与えた。翼表面に関する値としては表 2 における位置 56 の値を採用した。この点における (55) 式の解が比較的精度が良いことが主な理由である。もしこの解の精度が悪いと, ただちに (58) 式から精度の悪い A_m, B が求まり, 温度分布を与える (56) 式の対数項, 定数項の精度が悪くなり結果の信頼度が落ちるからである。なお計算時間は HITAC 5020 F

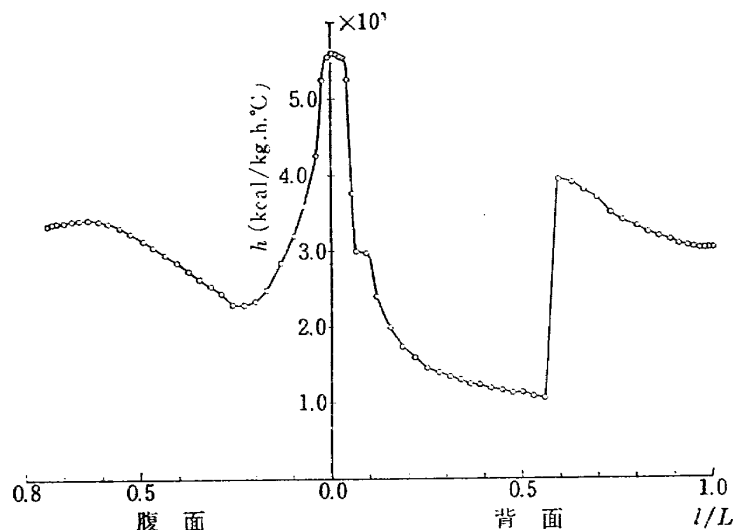


図 13 熱伝達率分布

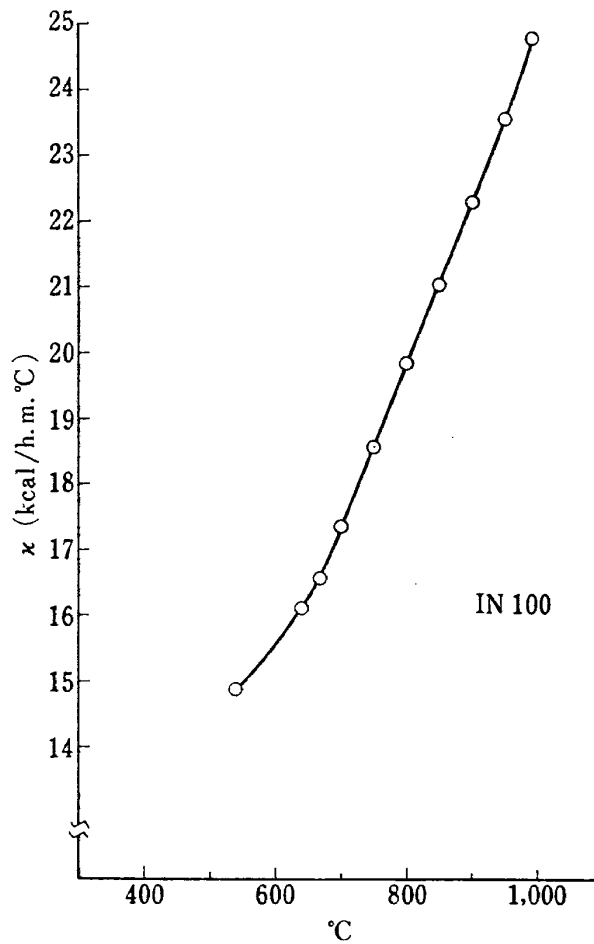


図 14 熱伝導率

で 176 秒であり、係数 A_m , B の値は表 3 に示す。

電導紙による温度分布

図 15 に配線図を示す。この場合冷却孔の温度分布は各孔について平均値を与えた。すなわち、

冷却孔	与えた平均温度
1	0.256
2	0.281
3	0.305
4	0.282
5	0.301
6	0.304
7	0.292
8	0.294
9	0.308
10	0.337
11 (上半分)	0.375
(下半分)	0.398

したがって計測結果は境界付近において数値計算の結果と異なることが予想される。このことは数値計算のための境界値は点で与え、アナログ法は線で与えるという根本的な点でも異なっている。この結果は図 16 に点線と () 内の数値で示した。

電導紙の抵抗値は翼弦に垂直方向に $0.029 \text{ k}\Omega/\text{mm}$ 翼弦方向に $0.024 \text{ k}\Omega/\text{mm}$ である。

全体的な両者の傾向は大体同じであるが、前縁付近の 0.35 の線は翼背面付近においてその傾向が著しく異なっている。アナログ法による点線は抵抗値のため、横方向の相異を考慮する必要があるが、数値計算結果は、この領域ではこのような性質を有し、誤差もやや大きいことがわかった。また数値計算結果は、多少複雑な曲線を描いているが、これもやはり境界条件の与え方が異なっているからであろう。

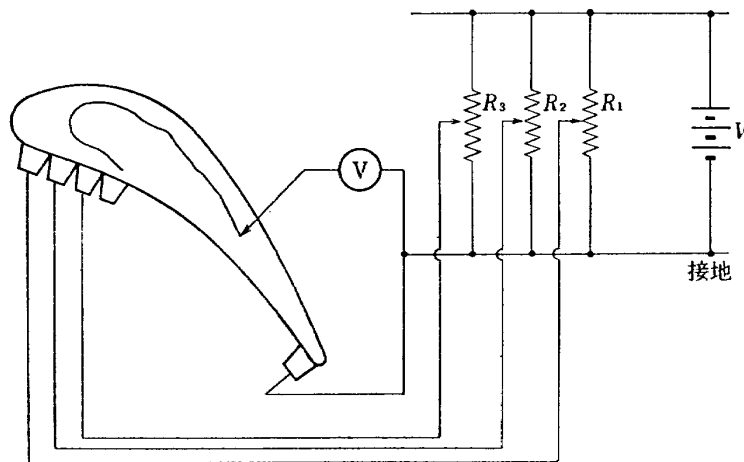


図 15 電導紙によるアナログ計算のための配線図

5. ま と め

さきの報告⁶⁾において任意の形状を有する滑らかな閉じた境界が存在し、その境界上での温度分布が与えられた場合にその内部領域における温度分布を計算する方法としてグリーン関数を利用した解法を述べた。

境界線上で温度勾配が与えられる場合についてもその内部領域での温度分布を計算する方法はいろいろあるが、ここではさきの報告に沿って思想の展開が行なわれるように、ある最も適した複素関数（コーシーの積分）から出発し、複素関数の実部と虚部との関係をうまく利用することによって前報と全く同じ過程で結論を導くことができることを示した。

その応用として、二重同心円の場合と、11 個の冷却孔を持つ翼型の場合の数値計算結果を図 10, 16 にそれぞれ示した。なお図 9 は図 10 との比較検討のために附録 II で述べるような変数分離法による計算結果を示す。

まず、二重同心円の場合について。

与えた境界条件は、さきの報告と同じ温度分布が得られるようなものとした。

変数分離法を基準として考えると、まず円周方向については、図 9 と図 10 から θ が 180° より小さい

場合には、数値計算結果はやや小さめの値を示し、 180° 以上ではその逆になっている。また半径方向については本文中に述べたように、基準の値（すなわち B の値）の差が変数分離法の B に対して約 16% の差があり対数平均項の係数（すなわち A の値）は約 3% の差がある。なおこれは数値計算の分割点数が 36 点ずつの場合であるが、分割点 72 点に増すと各数値は変数分離法の値に近づく。

次に冷却孔を持つ翼の温度分布の計算は、電導紙によるアナログ法の結果との比較検討を行なう。

境界上の（ ）内の数値は無次元温度を表わしており、境界上での境界条件として与えた温度勾配は表 2 に示してある。図 16 で等温線は実線が数値計算結果であり点線がアナログ法に基づく結果である。

両者の等温線の大体の傾向は似ているが前縁付近翼背面において 0.35 の線の傾向に多少異なるところが認められる。詳しくは本文を参照されたい。

なお、より計算方法の精度をあげる必要はあるが、この方法によって冷却孔の温度分布に対する影響が大体計算できることがわかった。計算時間は HITAC 5020 F で 176 秒である。

この結果、冷却タービン翼の冷却孔の配置の決定に適用できる。

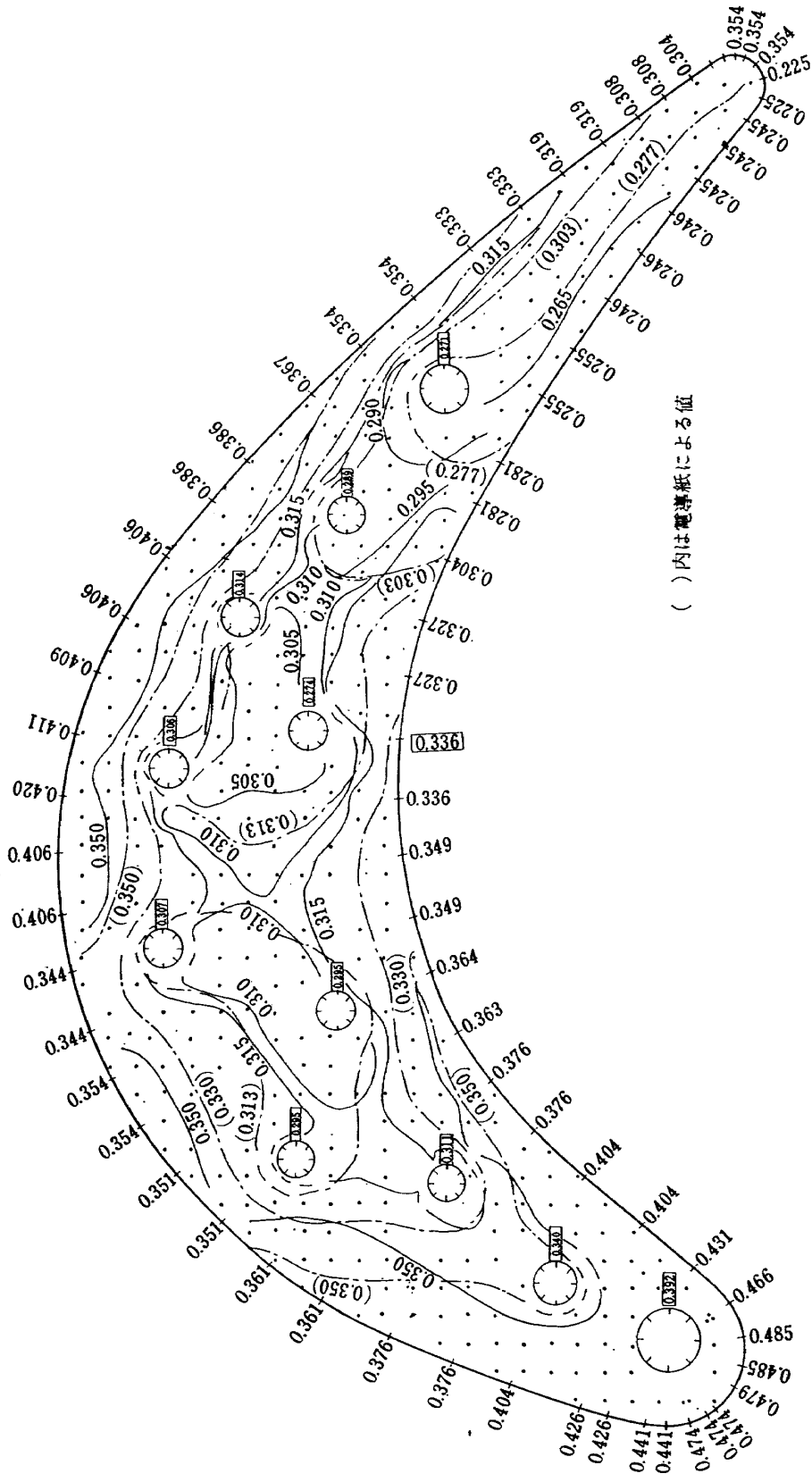


図 16 冷却孔を持つ翼の温度分布

表 1 翼 座 標

位 置	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
x/c	1.000	1.006	1.008	1.006	1.000	0.990	0.976	0.959	0.938	0.914	0.886	0.855
y/c	0.000	0.012	0.015	0.021	0.033	0.045	0.063	0.086	0.113	0.144	0.179	0.214
$v(m/sec)$	0.0	227.73	236.31	313.25	401.14	376.28	360.59	382.67	406.56	417.97	427.24	445.15

位 置	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
x/c	0.822	0.785	0.747	0.705	0.665	0.621	0.577	0.532	0.486	0.441	0.396	0.351
y/c	0.254	0.296	0.333	0.375	0.408	0.440	0.470	0.496	0.509	0.519	0.521	0.517
$v(m/sec)$	459.70	472.68	492.63	520.73	539.09	560.37	570.11	568.13	557.39	534.86	501.69	445.56

乱流層流
遷移

位 置	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
x/c	0.308	0.265	0.226	0.187	0.151	0.118	0.087	0.059	0.035	0.014	-0.004	-0.018
y/c	0.510	0.497	0.482	0.460	0.433	0.402	0.364	0.321	0.276	0.229	0.181	0.130
$v(m/sec)$	409.22	393.94	382.11	365.56	351.33	340.03	328.13	307.29	291.16	285.68	275.42	259.76

位 置	36	37	38	39	40	41	42	43	44	45	46	47
x/c	-0.027	-0.033	-0.035	-0.033	-0.027	-0.018	-0.004	0.014	0.035	0.059	0.087	0.118
y/c	0.097	0.080	0.051	0.033	0.023	0.013	0.001	-0.004	-0.004	0.005	0.038	0.076
$v(m/sec)$	258.25	275.14	303.52	232.61	201.93	137.87	24.59	221.74	232.33	239.26	243.58	223.41

層流乱流
遷移

位 置	48	49	50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
x/c	0.151	0.187	0.226	0.265	0.308	0.351	0.396	0.441	0.486	0.532	0.577	0.621
y/c	0.116	0.159	0.194	0.218	0.238	0.251	0.260	0.263	0.262	0.256	0.244	0.224
$v(m/sec)$	197.95	157.14	150.88	150.58	154.39	155.84	161.41	169.88	180.64	195.42	206.07	235.26

位 置	60	61	62	63	64	65	66	67	68	69	70	71
x/c	0.665	0.705	0.747	0.785	0.822	0.855	0.886	0.914	0.938	0.959	0.976	0.990
y/c	0.202	0.179	0.153	0.126	0.101	0.078	0.057	0.038	0.022	0.006	-0.006	-0.006
$v(m/sec)$	291.53	344.09	382.61	449.19	492.53	553.59	566.40	566.06	566.98	479.02	492.0	472.68

冷 却 孔 座 標

名 称	中 心 座 標		直 径	名 称	中 心 座 標		直 径
	x_0/c	y_0/c	d/c		x_0/c	y_0/c	d/c
冷 却 孔 1	0.765	0.231	0.060	冷 却 孔 7	0.292	0.308	0.030
" 2	0.670	0.304	0.030	" 8	0.179	0.339	0.030
" 3	0.589	0.384	0.030	" 9	0.161	0.225	0.030
" 4	0.506	0.330	0.030	" 10	0.086	0.143	0.036
" 5	0.476	0.435	0.030	" 11	0.042	0.057	0.048
" 6	0.339	0.439	0.030				

冷却孔 1

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>x/c</i>	0.795	0.786	0.765	0.744	0.735	0.744	0.765	0.786
<i>y/c</i>	0.231	0.256	0.261	0.252	0.231	0.210	0.201	0.210

冷却孔 2

位置	0	1	2	3	4	5	7	7
<i>x/c</i>	0.685	0.681	0.670	0.659	0.655	0.659	0.670	0.681
<i>y/c</i>	0.304	0.315	0.319	0.315	0.304	0.293	0.289	0.293

冷却孔 3

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>x/c</i>	0.604	0.600	0.589	0.578	0.574	0.578	0.589	0.600
<i>y/c</i>	0.384	0.395	0.399	0.395	0.384	0.373	0.369	0.373

冷却孔 4

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>x/c</i>	0.521	0.517	0.506	0.495	0.491	0.495	0.506	0.517
<i>y/c</i>	0.330	0.341	0.345	0.341	0.330	0.319	0.315	0.319

冷却孔 5

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>x/c</i>	0.491	0.487	0.476	0.465	0.461	0.465	0.476	0.487
<i>y/c</i>	0.435	0.446	0.450	0.446	0.435	0.424	0.420	0.424

冷却孔 6

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>x/c</i>	0.354	0.350	0.339	0.328	0.324	0.328	0.339	0.350
<i>y/c</i>	0.439	0.450	0.454	0.450	0.439	0.428	0.424	0.428

冷却孔 7

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>x/c</i>	0.307	0.303	0.292	0.281	0.277	0.281	0.292	0.303
<i>y/c</i>	0.308	0.319	0.323	0.319	0.308	0.297	0.293	0.297

冷却孔 8

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
<i>x/c</i>	0.194	0.190	0.179	0.168	0.164	0.168	0.179	0.190
<i>y/c</i>	0.339	0.350	0.354	0.350	0.339	0.328	0.324	0.328

冷却孔 9

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
x/c	0.176	0.176	0.161	0.150	0.146	0.150	0.161	0.172
y/c	0.225	0.236	0.240	0.236	0.225	0.214	0.210	0.214

冷却孔 10

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
x/c	0.104	0.099	0.086	0.073	0.068	0.073	0.086	0.099
y/c	0.143	0.156	0.161	0.156	0.143	0.130	0.125	0.130

冷却孔 11

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
x/c	0.066	0.059	0.042	0.025	0.018	0.025	0.042	0.059
y/c	0.057	0.074	0.081	0.074	0.057	0.040	0.033	0.040

表 2 翼 背 面

$$T_{rw} = \frac{T - T_c}{T_f - T_c}$$

位置	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
l/L	1.000	0.992	0.989	0.985	0.977	0.967	0.953	0.934	0.913	0.889	0.860	0.831
温度(T_{rw})	0.354	0.354	0.354	0.329	0.304	0.304	0.308	0.308	0.319	0.319	0.333	0.333
h/k	155.6	155.6	155.6	158.0	161.4	161.4	160.5	161.6	162.3	164.9	165.8	168.4
$\partial T_{rw} / \partial n$	100.5	106.0	106.4	116.5	130.0	127.8	125.2	127.9	128.7	131.8	131.1	135.0

位置	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
l/L	0.800	0.765	0.730	0.696	0.661	0.628	0.594	0.563	0.532	0.503	0.475	0.447
温度(T_{rw})	0.354	0.354	0.367	0.386	0.386	0.406	0.406	0.409	0.411	0.420	0.406	0.406
h/k	170.9	173.5	176.8	185.0	190.0	169.6	171.7	45.7	47.8	46.0	51.1	52.4
$\partial T_{rw} / \partial n$	134.9	138.4	141.0	147.6	154.1	136.9	140.0	36.5	37.7	35.1	38.6	37.8

← 乱流 ↑ 層流 →
遷移

位置	24	25	26	27	28	29	30	31	32	33	34	35
l/L	0.419	0.391	0.365	0.337	0.309	0.280	0.249	0.218	0.186	0.154	0.121	0.088
温度(T_{rw})	0.344	0.344	0.354	0.354	0.351	0.351	0.361	0.361	0.376	0.376	0.404	0.426
h/k	61.5	64.1	63.8	66.3	69.2	71.8	73.6	81.2	87.5	100.0	118.2	145.1
$\partial T_{rw} / \partial n$	47.0	48.4	47.2	48.5	50.4	51.9	52.1	56.8	59.4	67.6	76.2	89.6

位置	36	37	38	39	40	41	42
l/L	0.066	0.055	0.038	0.026	0.020	0.012	0.000
温度(T_{rw})	0.426	0.441	0.441	0.474	0.474	0.474	0.479
h/k	146.3	180.3	252.4	261.8	263.0	263.7	264.2
$\partial T_{rw} / \partial n$	90.2	109.6	156.0	146.9	145.2	141.9	137.8

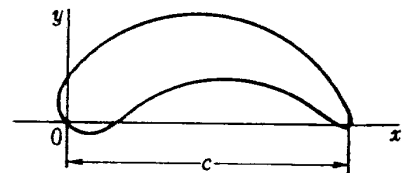
翼 腹 面

位 置	42	43	44	45	46	47	48	49	50	51	52	53
l/L	0.000	0.012	0.025	0.041	0.069	0.100	0.133	0.169	0.201	0.230	0.260	0.289
温度 (T_{rw})	0.479	0.485	0.485	0.466	0.431	0.404	0.404	0.376	0.376	0.363	0.364	0.349
h/k	264.2	259.3	245.3	201.4	174.8	158.4	141.1	125.0	117.5	121.1	119.8	125.6
$\partial T_{rw}/\partial n$	137.8	141.7	134.8	115.0	106.5	99.8	87.8	80.1	75.1	79.0	78.1	83.8

← 層流 | 乱流 →
遷移

位 置	54	55	56	57	58	59	60	61	62	63	64	65
l/L	0.317	0.345	0.374	0.404	0.434	0.464	0.495	0.526	0.555	0.584	0.612	0.637
温度 (T_{rw})	0.349	0.336	0.336	0.327	0.327	0.304	0.281	0.281	0.255	0.255	0.246	0.246
h/k	130.8	136.1	141.2	148.4	153.6	161.4	170.3	175.1	181.9	185.7	188.4	189.5
$\partial T_{rw}/\partial n$	87.5	93.0	96.5	103.7	107.8	118.4	132.3	140.0	153.6	163.8	173.1	182.3

位 置	66	67	68	69	70	71	72
l/L	0.660	0.682	0.701	0.718	0.731	0.739	0.746
温度 (T_{rw})	0.246	0.245	0.245	0.245	0.225	0.225	0.354
h/k	188.4	189.4	188.3	187.8	189.3	188.2	155.6
$\partial T_{rw}/\partial n$	183.1	184.2	183.2	171.0	177.8	174.4	100.5



冷 却 孔 ($h \cdot d/k=40.8$)

冷 却 孔 1 ($d_1/c=0.060, x_0/c=0.765, y_0/c=0.231$)

位 置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_1	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.271	0.271	0.267	0.267	0.246	0.246	0.241	0.241
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.85×10^4	3.85×10^4	3.87×10^4	3.87×10^4	3.98×10^4	3.98×10^4	4.00×10^4	4.00×10^4

冷 却 孔 2 ($d_2/c=0.030, x_0/c=0.670, y_0/c=0.304$)

位 置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_2	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.289	0.289	0.289	0.285	0.274	0.274	0.279	0.279
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.75×10^4	3.75×10^4	3.75×10^4	3.77×10^4	3.83×10^4	3.83×10^4	3.80×10^4	3.80×10^4

冷 却 孔 3 ($d_3/c=0.030, x_0/c=0.589, y_0/c=0.384$)

位 置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_3	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.314	0.314	0.299	0.299	0.299	0.286	0.296	0.296
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.62×10^4	3.62×10^4	3.70×10^4	3.70×10^4	3.70×10^4	3.77×10^4	3.72×10^4	3.72×10^4

冷却孔 4 ($d_4/c=0.030$, $x_0/c=0.506$, $y_0/c=0.330$)

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_4	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.274	0.285	0.285	0.279	0.279	0.289	0.289	0.274
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.83×10^4	3.77×10^4	3.77×10^4	3.80×10^4	3.80×10^4	3.75×10^4	3.75×10^4	3.83×10^4

冷却孔 5 ($d_5/c=0.030$, $x_0/c=0.476$, $y_0/c=0.435$)

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_5	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.306	0.311	0.311	0.297	0.297	0.290	0.290	0.306
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.66×10^4	3.64×10^4	3.64×10^4	3.71×10^4	3.71×10^4	3.75×10^4	3.75×10^4	3.66×10^4

冷却孔 6 ($d_6/c=0.030$, $x_0/c=0.339$, $y_0/c=0.439$)

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_6	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.307	0.311	0.314	0.309	0.299	0.299	0.295	0.295
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.66×10^4	3.64×10^4	3.62×10^4	3.65×10^4	3.70×10^4	3.70×10^4	3.72×10^4	3.72×10^4

冷却孔 7 ($d_7/c=0.030$, $x_0/c=0.292$, $y_0/c=0.308$)

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_7	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.295	0.291	0.287	0.288	0.288	0.293	0.298	0.296
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.72×10^4	3.74×10^4	3.76×10^4	3.76×10^4	3.76×10^4	3.73×10^4	3.70×10^4	3.72×10^4

冷却孔 8 ($d_8/c=0.030$, $x_0/c=0.179$, $y_0/c=0.339$)

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_8	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.295	0.295	0.296	0.296	0.296	0.296	0.288	0.288
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.72×10^4	3.72×10^4	3.72×10^4	3.72×10^4	3.72×10^4	3.72×10^4	3.76×10^4	3.76×10^4

冷却孔 9 ($d_9/c=0.030$, $x_0/c=0.161$, $y_0/c=0.225$)

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_9	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.311	0.298	0.298	0.311	0.311	0.311	0.311	0.311
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.64×10^4	3.70×10^4	3.70×10^4	3.64×10^4	3.64×10^4	3.64×10^4	3.64×10^4	3.64×10^4

冷却孔 10 ($d_{10}/c=0.036$, $x_0/c=0.086$, $y_0/c=0.143$)

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_{10}	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.340	0.329	0.329	0.335	0.335	0.342	0.342	0.340
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.49×10^4	3.54×10^4	3.54×10^4	3.51×10^4	3.51×10^4	3.47×10^4	3.47×10^4	3.49×10^4

冷却孔 11 ($d_{11}/c=0.048, x_0/c=0.042, y_0/c=0.057$)

位置	0	1	2	3	4	5	6	7
l/L_{11}	0.000	0.125	0.250	0.375	0.500	0.625	0.750	0.875
温度 (T_{rw})	0.392	0.361	0.361	0.384	0.384	0.408	0.408	0.392
$\partial T_{rw}/\partial n$	3.21×10^4	3.38×10^4	3.38×10^4	3.25×10^4	3.25×10^4	3.13×10^4	3.13×10^4	3.21×10^4

表 3 ((58) 式参照)

係 数	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
値	0.77	0.14	0.18	0.10	0.17	0.19	0.12	0.17	0.16	0.22

係 数	A_{11}
値	0.58

係 数	B
値	2.36

6.1 附録 I

対数による正則関数の表示

同心円環 $\rho < |z| < R$ において一価調和な関数 $U(x, y)$ の同心円周 C_r ($|z|=r, \rho < r < R$) での平均は次の式で与えられる。

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = A \ln r + B \quad (1)$$

さらに、一価調和関数を実数部にもつ正則関数 $\Phi(z)$ は、次のように表示することができる。

$$\Phi(z) = A \ln z + B + \Phi^*(z) \quad (2)$$

ただし、 A, B は定数であり、 $\Phi^*(z)$ は一価正則関数であるとする。

(証明) (附図 1 参照)

附図 1 において円周 C_r と C_ρ によって囲まれる領域を D とする。

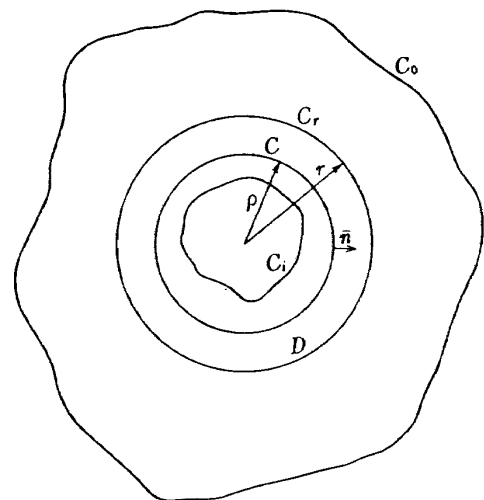
いま、

$$\Phi(z) - \Phi^*(z) = U(x, y) + iV(x, y) \quad (3)$$

とすると、Green の第二公式より

$$\begin{aligned} & \iint_D (V' \cdot \nabla^2 U - U \cdot \nabla^2 V') dD \\ &= \int_{C_r + C_\rho} \left(U \cdot \frac{\partial V'}{\partial n} - V' \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) dc \quad (4) \end{aligned}$$

において、 $\nabla^2 U = \nabla^2 V' = 0$ とすると



附 I 図 1

$$\int_{C_r + C_\rho} \left(U \cdot \frac{\partial V'}{\partial n} - V' \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) dc = 0$$

ここに、 $V' = \ln |z|$ とすると

$$\begin{aligned} & \oint_{C_r} \left(U \cdot \frac{\partial \ln |z|}{\partial n} - \ln |z| \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) dc \\ &= \oint_{C_\rho} \left(U \cdot \frac{\partial \ln |z|}{\partial n} - \ln |z| \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) dc \quad (5) \end{aligned}$$

この関係式において、この両辺の値は積分路に関係

ない。したがってこの式は積分路に関係しない一定値をとる。いまここでこの値を $2\pi B$ で表わす。(5)式から $|z|=r$ とすると、

$$2\pi B = \int_0^{2\pi} U(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta - \ln r \oint_{C_p} \frac{\partial U}{\partial n} dc \quad (6)$$

また、一方(4)式において $\nabla^2 U=0, V'=1$ とすると

$$\int_{C_p+C_p'} \frac{\partial U}{\partial n} dc = 0$$

したがって

$$\int_{C_r} \frac{\partial U}{\partial n} dc = \int_{C_p} \frac{\partial U}{\partial n} dc \quad (7)$$

この(7)式においてもまた積分値は積分路に関係しない一定値をとる。これを $2\pi A$ とする。

$$2\pi B = \int_0^{2\pi} U(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta - 2\pi A \ln r$$

したがって

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(r \cos \theta, r \sin \theta) d\theta = A \ln r + B \quad (8)$$

一方、コーシー・リーマンの関係式

$$\partial V' / \partial \theta = \partial U' / \partial (\ln r)$$

より、

$$\int_{C_r} dV' = \int_0^{2\pi} \frac{\partial V'}{\partial \theta} \cdot d\theta = \frac{d}{d \ln r} \int_0^{2\pi} U' d\theta$$

右辺は(8)式より $2\pi A$ に等しい。また

$$\int_{C_r} d(\text{arc } z) = \int_{C_r} d\theta = 2\pi$$

すなわち、 $\Phi(z) - \Phi^*(z) - A \ln z$ は円環で一価正則関数となる。

6.2 附録 II

変数分離法によるフーリエ級数展開

二変数ラプラス方程式の (r, θ) 表示は

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial T}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} = 0 \quad (1)$$

である。この偏微分方程式を次の境界条件のもとに解を求める。

$$\begin{aligned} f(r_0, \varphi) &= \frac{\partial T(r_0, \varphi)}{\partial r} \\ f(r_1, \varphi) &= \frac{\partial T(r_1, \varphi)}{\partial r} \end{aligned} \quad (2)$$

(1) 式の解の形は次のようになる。

$$\begin{aligned} T(r, \theta) &= a_0 \cdot \ln r + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [r^{-n} (a_n \cdot \cos n\theta + b_n \cdot \sin n\theta) \\ &\quad + r^n (a_n' \cdot \cos n\theta + b_n' \cdot \sin n\theta)] \end{aligned} \quad (3)$$

境界条件(2)の右辺は次のような三角級数展開と

して与えられるものとする。

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{m=1}^{\infty} (A_m \cdot m \cdot \cos m\varphi + B_m \cdot m \cdot \sin m\varphi) \cdot r_0^{m-1} \quad r=r_0 \quad (4)$$

$$\frac{\partial T}{\partial r} = \sum_{i=1}^{\infty} (C_i \cdot l \cdot \cos l\varphi + D_i \cdot l \cdot \sin l\varphi) \cdot r_i^{l-1} \quad r=r_i \quad (5)$$

偏微分方程式(1)の一般解(3)は半径方向のみに関係する対数項と半径方向と円周方向に依存する項から成り立っている。一方境界条件(4), (5)は円周方向、半径方向の関数であることを考慮すると以下のようにして(3)式の係数を定めることができる。

まず(3)式を r について微分する。

$$\begin{aligned} \frac{\partial T(r, \theta)}{\partial r} &= \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} [(-n) \cdot r^{-n-1} \cdot (a_n \cdot \cos n\theta \\ &\quad + b_n \cdot \sin n\theta) + n \cdot r^{n-1} \cdot (a_n' \cdot \cos n\theta + b_n' \cdot \sin n\theta)] \end{aligned} \quad (6)$$

$r=r_0$ の場合(6)式は(4)式と等しく、 $r=r_i$ のときは(5)式と等しいためには

$$A_k \cdot k \cdot r_0^{k-1} = a_k (-k) \cdot r_0^{-k-1} + a_k' \cdot k \cdot r_0^{k-1}$$

$$B_k \cdot k \cdot r_0^{k-1} = b_k (-k) \cdot r_0^{-k-1} + b_k' \cdot k \cdot r_0^{k-1}$$

$r=r_1$ の場合も同様に(5)式と(6)式から

$$C_k \cdot k \cdot r_1^{k-1} = a_k \cdot (-k) \cdot r_1^{-k-1} + a_k' \cdot k \cdot r_1^{k-1}$$

$$D_k \cdot k \cdot r_1^{k-1} = b_k \cdot (-k) \cdot r_1^{-k-1} + b_k' \cdot k \cdot r_1^{k-1}$$

であれば良い。

これらの関係式から a_k, a_k', b_k, b_k' を A_k, B_k, C_k, D_k の関数として求めることができる。

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{(A_k - C_k) \cdot r_0^{k-1} \cdot r_1^{k-1}}{r_0^{k-1}/r_1^{k+1} - r_1^{k-1}/r_0^{k+1}} \\ a_k' &= \frac{A_k \cdot r_0^{k-1}/r_1^{k+1} - C_k \cdot r_1^{k-1}/r_0^{k+1}}{r_0^{k-1}/r_1^{k+1} - r_1^{k-1}/r_0^{k+1}} \\ b_k &= \frac{(B_k - D_k) \cdot r_0^{k-1} \cdot r_1^{k-1}}{r_0^{k-1}/r_1^{k+1} - r_1^{k-1}/r_0^{k+1}} \\ b_k' &= \frac{B_k \cdot r_0^{k-1}/r_1^{k+1} - D_k \cdot r_1^{k-1}/r_0^{k+1}}{r_0^{k-1}/r_1^{k+1} - r_1^{k-1}/r_0^{k+1}} \end{aligned} \quad (7)$$

一般(3)式であら a_0 と b_0 が決定していない。

これらの値を決定するために次の条件を与える。

図1に示すように、外周上の起点 ($\varphi=0, r=r_0$) において温度 T_0 を与え、内周上の起点 ($\varphi=0, r=r_i$) において温度 T_1 が与えられている。

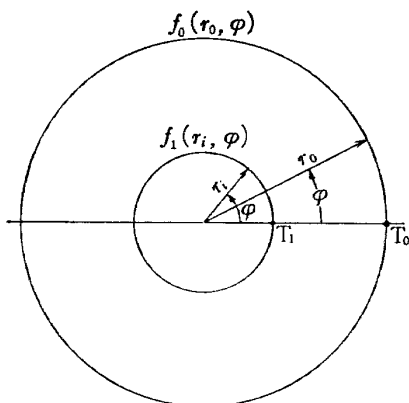
すなわち、(3)式より

$$T(r_0, 0) = T_0$$

$$T(r_1, 0) = T_1$$

(8)

であるから



附 II 図 1

$$T_0 = a_0 \cdot \ln r_0 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot r_0^{-n} + a_n' \cdot r_0^n)$$

$$T_1 = a_0 \cdot \ln r_1 + b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cdot r_1^{-n} + a_n' \cdot r_1^n)$$

したがって、

$$a_0 = \frac{(T_0 - T_1) - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cdot (r_0^{-n} - r_1^{-n}) + a_n' \cdot (r_0^n - r_1^n)]}{\ln(r_0/r_1)}$$

$$b_0 = \frac{(T_0 \cdot \ln r_1 - T_1 \cdot \ln r_0) - \sum_{n=1}^{\infty} [a_n (r_0^{-n} \cdot \ln r_1^{-n} \cdot \ln r_0) + a_n' (r_0^n \cdot \ln r_1^{-n} \cdot \ln r_0)]}{\ln(r_1/r_0)}$$

(9)

となり、(3) 式のすべての係数が決定したので、二つの円周によって囲まれた領域内の温度分布を計算することができる。

【例題】

境界条件

$$f(10, \varphi) = 2.7 \cos \varphi - 0.3 \sin \varphi$$

$$f(2, \varphi) = 5.2 \cos \varphi - 5.4 \sin \varphi \quad (10)$$

境界線上での点で与えられた温度は

$$T_0(10, 0) = 125$$

$$T_1(2, 0) = 20 \quad (11)$$

とする (図 9 参照)。

6.3 附録 III

複素関数 (5) 式の定数の意味

6.1 附録 I と同様グリーンの公式 (附図 1 参照)

$$\iint_D (V' \cdot \nabla^2 U - U \cdot \nabla^2 V') dD$$

$$= \int_{C_r + C_p} \left(U \cdot \frac{\partial V'}{\partial n} - V' \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) dc \quad (1)$$

において $V' = N$ とする。ただし N は次の性質を持つノイマン関数とする。

i) 一点 $z_0 \in D$ 以外の D 内で $N(z, z_0)$ は z に

ついて調和。

ii) z_0 の近傍で $\nu(z, z_0) \equiv N(z, z_0) + \ln |z - z_0|$ は調和。

iii) D の境界の任意の点を ζ とすると、 $\partial N(z, z_0) / \partial n$ が $z \in D$, $z \rightarrow \zeta$ に対して一定値 $2\pi/l$ を持つ。ただし l は閉曲線の長さである。

U を調和関数とすると、(1) 式の左辺は 0 であるから右辺は

$$\int_{C_r} \left(U \cdot \frac{\partial N}{\partial n} - N \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) dc$$

$$- \int_{C_p} \left(U \cdot \frac{\partial U}{\partial n} - N \cdot \frac{\partial U}{\partial n} \right) dc = 0$$

左辺第二項は $2\pi u(z)$ に等しい。したがって、

$$u(z) = \frac{1}{l} \int_{C_r} U dc - \frac{1}{2\pi} \int_{C_r} N \cdot \frac{\partial U}{\partial n} dc \quad (2)$$

右辺第一項は U と境界線の長さの積を全長 l で割った値であるから U の平均値を意味する定数である。

なぜ一定値として $2\pi/l$ としたかという点、

$$\partial N(z, \zeta) / \partial n = K$$

とするとき、

$$\oint_{C_r} \frac{\partial N}{\partial n} dc = \oint_{C_r} \left(-\frac{\partial}{\partial n} \ln |z - z_0| + \frac{\partial v}{\partial n} \right) dc$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{\partial}{\partial r} \ln r \cdot r \cdot d\theta = 2\pi$$

左辺は

$$\oint_{C_r} \frac{\partial N}{\partial n} dc = \oint K \cdot dc = K \cdot l$$

したがって

$$K = \frac{2\pi}{l} \quad (3)$$

7. 参考文献

- 1) MIKHLIN; Integral Equations
- 2) MUSKHELISHVILI; Singular Integral Equations
- 3) HILDEBRAND; Introduction to Numerical Analysis
- 4) L. Collatz; The Numerical Treatment of Differential Equations
- 5) D.H. Wilkinson; A Numerical Solution of the Analysis and Design Problems for the Flow Past One or More Aerofoils, R & M No. 3545, April 1967
- 6) 西村英明; Green 関数をラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算 NAL TR-234 Jan. 1971
- 7) A.B. Turner; Local Heat Transfer Measurements on a Gas Turbine Blade, Journal Mechanical Engineering Science, Vol. 13, No. 1, 1971
- 8) K. Jacob; Berechnung der Potentialströmung um Profile mit Absaugung und Ausblasen, Ing.-Arch. 32 (1963) s. 51~65
- 9) G. Hämmerlin; Zur numerischen Integration periodischer Funktionen, ZAMM, 39 (1959) s. 80~82

TR-289T	Transient Hypersonic Leading-Edge Flow	Jun. 1972	Katsuhisa KOURA
TR-290	二自由度回転駆動検出型ジャイロの研究 Study of a Rotary-drive Vibratory-output Two-degree-of-freedom Gyro	1972年7月	山田 博
TR-291	はり板結合構造物の振動 (III) On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (III)	1972年7月	埴 武敏, 林 洋一 多田保夫, 戸田 勸 日下和夫
TR-292	翼型の非圧縮乱流ウェーク流の近似計算法 —対称ウェーク流の場合— An Approximate Calculation Method of Incompressible Turbulent Wakes behind Aerofoils—Symmetrical Wake Flow Case—	1972年7月	石田洋治
TR-293	き裂先端塑性域に線形な応力分布のある弾塑性モデルの解析 An Elastic-Plastic Analysis of a Crack with Linearly Distributed Stress in the Plastic Zone	1972年8月	寺田博之
TR-294	ジェットフラップを持つ高揚力機の地面効果 Effect of Ground Proximity on the Longitudinal Aerodynamic Characteristics of an Airplane with a Jet-Flapped High Lift Wing	1972年8月	遠藤 浩, 高橋 宏 中谷輝臣, 綿貫忠晴
TR-295	自機搭載型軌道保持システムのための軌道決定と制御 Orbit Determination and Control Method for Self-Contained Station-Keeping Systems	1972年8月	松島弘一
TR 296	航空用ガスタービン燃焼器のライナ壁面の冷却 Liner Cooling of the Aeronautical Gas Turbine Combustor	1972年8月	柁 又哲朗

航空宇宙技術研究所報告 297 号

昭和 47 年 8 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) 182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2-27-12
