NAL TR-301

UDC 519.2:
53.087:
65.012.1

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-301

観測系の評価に関するひとつの数学的理論

木 村 武 雄

1972年8月

航 空 宇 宙 技 術 研 究 所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

TR-277	円環状ディフューザの乱流境界層の発達 Development of Turbulent Boundary Layers Along the Curred Walls of an Annular Diffusing Passage	1972年2月	藤井昭一, 五味光男 西脇英夫 Theodore H. OKIISHI
TR-278T	Development of Turbulent Boundary Layers Along Curred Walls of an Annular Diffusing Passage	Feb. 1972	Shoichi FUJII Theodore H. OKIISHI
TR-279	直線硬化特性材料での有孔帯板内の応力およびひずみの集中係数について Stress and Strain Concentration Factor of Strips with a Control Circular Hole in Linearly Strain Herdening Materials	1972年2月	青木由雄, 倉元真実 小林芳人, 国尾　武
TR-280	ガンタンネルによる鈍頭円錐の極超音速空力特性試験 Experimental Study on the Hypersonic Aerodynamic Characteristics of Spherically Blunted Cones by the Gun Tunnel	1972年5月	曾我国男, 小野寺信幸
TR-281	ジェットエンジンのディジタル制御 (1) 装置および予備実験 Digital Control of Jet Engines (1) Control System and Preliminary Experiments	1972年7月	西尾健二, 遠藤征紀 杉山七契, 越沼　威 大畑敏美, 松田幸雄 吉田　晃, 中山　晋
TR-282	高温タービン試験設備およびその計測装置 On the High Temperature Test Facilities and the Data Processing System.	1972年6月	原動機部
TR-283	エンジン特性の実時間シミュレーション(I) (装置および特性) Real-time Simulation of Jet Engines with Digital Computer (I) (Fabrication and Characteristics of the Simulator)	1972年7月	西尾健二, 杉山七契 越沼　威, 橋本武男 大畑敏美, 市川英夫
TR-284	高 *dn* 値における玉軸受の性能に関する研究 Study on Performance of Ball Bearings at High *dn* Valves	1972年5月	宮川行雄, 関　勝美 横山正幸
TR-285	高温固体潤滑剤としての一酸化鉛(PBO)に関する基礎的研究 Study on Lead Monoxide as Solid Lubricant for High Temperatures	1972年5月	宮川行雄, 西村　允 安部　亘
TR-286T	An Investigation of Secondary Injection Thrust Vector Control	May 1972	Tatsuo YAMANAKA
TR-287	内面加熱を受ける中空円筒の非定常熱応力 Transient Thermal Stresses of the Hollow Cylinder Subjected Uniform Inner Heating	1972年5月	江川幸一, 竹中幸彦
TR-288	低アスペクト比後退角片持平板翼の遷音速および超音速のフラッタ特性 The Transonic and Supersonic Flutter Characteristics of Low Aspect Ratio Sweptback Thin Cantilever	1972年5月	中井暎一, 森田甫之 菊池孝男, 高橋　実 東久保正年
TR-289T	Transient Hypersonic Leading-Edge Flow	Jun. 1972	Katsuhisa KOURA
TR-290	二自由度回転駆動振動検出型ジャイロの研究 Study of a Rotary-drive Vibratory-output Two-degree-of-freedom Gyro	1972年7月	山田　博
TR-291	はり板結合構造物の振動(III) On the Natural Vibration of Plate-Beam Conbination Structures (III)	1972年7日	塙　武敏, 林　洋一 多田保夫, 戸田　勧 日下和夫

観測系の評価に関するひとつの数学的理論*

木　村　武　雄**

A Mathematical Theory of the Evaluation of Observation Systems

By Takeo KIMURA

Abstract

The purpose of the theory in this paper is to show how the observation systems should be defined as "better" or "best" quantitatively. On the basis of this theory, we can find the best observation system by means of only a numerical calculation. It should be noted that the word "better" or "best" is not meant economically, socially or so on but has the meaning of certainty or accuracy. In the case in which the unknown state to be obtained by observation is represented by only one variable, the certainty or accuracy of the state is obvious, but in cases in which the unknown state is represented by many variables, the certainty or accuracy is ambiguous in the recent theories. The theory in this report is effective also in the latter case, and we shall examine in a few examples in this report whethere the theory is useful and admissible.

The certainty or accuracy in the case of many variables is usually represented by the evaluation functions of quadratic form. However it would be incorrect, as is mathematically verified in this report if the evaluation function should be represented by the so-called generalized variance, which is not of quadratic but of determinant form.

0. まえがき

本報告は過去3年間の理論的研究の結果をまとめたものである。その内容は標題に示すとおり，観測系の評価に関する数学的理論，であるが，この種の論文は極く少い。本論文はある特異な観点から見たひとつの観測系の理論であり，多少の参考にはなるものと思う。

本論文の目的，意義を明らかにするために，問題提起の意味で，人工衛星の軌道を決めるための観測系について考えてみる。この場合「角度観測方式とドップラ周波数観測方式とを比較すると，どちらが良い観測方式だろうか」という問題がある。これは観測方式の優劣を問う問題であり，本理論＝観測系の評価に関する数学的理論の適用範囲内の問題である。ただ，ここで注意すべきことは，観測系の優劣といっても，値段や扱い易さとかについては考慮することなく，もっぱら精度についてのみ考察するということである。というのは，観測系の優劣というものは確かに値段とか扱いやすさとかも関係してくるが，値段が安く，扱いが簡単であっても精度が悪るければ問題にならない。逆に値段も高く，扱いも難しいが精度は良いとするなら，これは善しとすることが普通である。このようなことから筆者は次のように考える。観測系の優劣を決する主要な要因は精度である。値段，扱い易さとかは2次的な要因である。研究の初めの段階では2次的要因を無視して1次近似で考えるべきである，と。

さて上述の問題に対する答にどのようなものがあるだろうか。従来の代表的な答として次のようなものがある。「角度観測の場合，観測値の有効桁数は現在のところせいぜい4桁から5桁程度，他方，ドップラ周波数観測方式の場合は楽に8桁から9桁は可能，従ってその桁数なら，有効桁数の多くとれるドップラ周波数観測方式の方がはるかに精度が良く優れている」と。しかし実際には，角度観測方式（精度0.1度，有効桁4桁）とドップラ周波数観測方式（精度 15 Hz/3000 MHz，有効桁8桁）とがほぼ同等であるという事実が経験的に知られている[11),12)]。このことは，直接桁数で議論すると矛盾が生ずるということを示している。またこれ以外の方法でも，今のところ，現行の

* 昭和47年3月15日受付
** 計測部

方法ではうまくいくものがない。

これらの考え方による矛盾の原因は，誤差に関する誤った考え，あるいはもっと正確にいえば，観測系の評価に関して，非常に単純な考えをそのまま適用した結果に外ならない。従って，この矛盾を解決するためには，観測系の評価のもっと正しい方法を確立しなければならない。

本理論は以上のような立場に立って考え出されたひとつの数学的理論であり，上述の観測方式の優劣に関する問題について答えることができると同時に，観測局の最良の配置の問題についても明確な解を与えることができる。

尚，本理論の目的，意義をもう少しはっきりさせるためには，本報告の第 XII 章応用を最初に読まれるとよいと思う。

I. 観測の抽象

	記号	具体例 1	具体例 2	具体例 3
観測対象物	O	人工衛星	物体	りんご
所求対象	Θ	運動状況	重さ	色彩
未知所求量	θ	$\boldsymbol{r}_0, \dot{\boldsymbol{r}}_0$	質量	波長
同誤差	$\Delta\theta$	1 m, 1 m/sec	0.02 g	0.1Å
観測	X	角度観測	平衡点観測	位置観測
観測値	y	39.07°	15.04 g	6.81 mm
同誤差	Δy	0.01°	0.05 g	0.01 mm

観測の形式*1

1) 初歩的認識の段階 $y \Longleftarrow X\cdot O$
2) 定性的認識の段階 $y \Longleftarrow X\cdot \Theta$
3) 定量的認識の段階 $y \Longleftarrow X\cdot \theta$

仮定

1) 観測誤差は正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ をなす。
2) 誤差の期待値 μ は $\mu=0$ である。

註 1. 観測形式についての説明

具体例 3 に則して説明すると

1) は，りんご (O) を観測 (X) して“りんご色”という情報 (y) を得る。

2) は，りんごの色彩 (Θ) を観測 (X) して赤いという情報 (y) を得る。

3) は，りんごの表皮から反射してくる波長 θ の光がプリズムを通過，屈折してスクリーンに投映され，その投映された位置を測定 (X) することにより，ある基準から何 cm という情報 (y) を得る。

ということになる。

このことからも分るように 1) および 2) の段階では O も Θ も X も数量化されていない。また，y も完全には数量化されていない。これに対し 3) の段階では，θ も y も数量化されており，投映された位置測定 X の意味も数量的によく解明されている。

II. 観測方程式

本理論では観測の形式が第 3 段階（定量的認識の段階）にある，あるいは第 3 段階にあると見なされうる場合についてのみ議論する。即ち観測形式として

$$y \Longleftarrow X\cdot\theta \qquad \cdots\cdots(1)$$

解析的表示では

$$y_l = X_l(\theta_1\theta_2\cdots\theta_N) \quad l=1, 2\cdots, \ L \geqq N \cdots\cdots(2)$$

ここに l: 観測番号

L: 観測回数

N: 未知所求量数

省略的表現では

$$y = X(\theta) \qquad \cdots\cdots(3)$$

以下，この省略的表現を用いる。

処で，上式は誤差の考慮に関して必ずしも厳密であるとはいえない。上式はむしろ観測値 y に誤差が全然ない場合に対応している。このことを更に明瞭にするために式（3）を改めて次のようにかく。

$$y^\circ = X(\theta) \qquad \cdots\cdots(4)$$

ここに y°: 観測量の真値

そして上式が可解ならば，上式から未知所求量 θ の真値を決定することができる。すなわち

$$\hat{\theta} = \theta^\circ \qquad \cdots\cdots(5)$$

ここに θ°: 未知所求量の真値

一方，観測値 y に誤差のある一般的な場合の観測方程式は次のようにかける。

$$y = X(\theta) + \varepsilon \qquad \cdots\cdots(6)$$

ここに ε: 残差

但し $\quad y = y^\circ + \Delta y \qquad \cdots\cdots(7)$

かつ，もし $\Delta y \to 0$ ならば $\varepsilon \to 0$

上式（6）が何らかの意味で可解ならば（普通最小自乗法によって解かれる。最小自乗法の詳細については付録 1 を参照されたい）未知所求量 θ を推定することができる。すなわち

$$\hat{\theta} = \theta^\circ + \Delta\theta$$

ここに $\Delta\theta$: 推定誤差 $\qquad \cdots\cdots(8)$

そして，もし $\Delta y \to 0$ ならば $\Delta\theta \to 0$

ここで，同じ未知所求量 θ を求めるにも，各観測方法（観測系）に対応して，いろいろな観測方程式がありうることに注意しなければならない。つまり

観測系 1 $\quad y_1 = X_1(\theta) + \varepsilon_1 \ (\to \hat{\theta}_1)$

2 $\quad y_2 = X_2(\theta) + \varepsilon_2 \ (\to \hat{\theta}_2)$

… ……………… ……

ここに関数 X は一般に観測系と称される。本理論では同じ目的をもった各観測系 $X_1, X_2, \cdots\cdots$ の優劣を決めようとするものである。

III. 誤差方程式

本章では観測誤差 $\varDelta y$ と未知所求量 θ の推定誤差 $\varDelta\theta$ との関係を考える。

観測方程式（6）を未知所求量 θ について真値 θ° のまわりでテーラー展開する。

まず，（6）式を改めて

$$y^\circ+\varDelta y=X(\theta^\circ+\varDelta\theta)+\varepsilon \quad \cdots\cdots(9)$$

次に，θ° のまわりで展開すると

$$y^\circ+\varDelta y=X(\theta^\circ)+\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\varDelta\theta+\cdots\cdots+\varepsilon \quad \cdots\cdots(10)$$

つまり，普通の書き表わし方では

$$y_l^\circ+\varDelta y_l^\circ= X_l(\theta_1^\circ\theta_2^\circ\cdots\theta_N^\circ)+\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial X(\theta_1^\circ\theta_2^\circ\cdots\theta_N^\circ)}{\partial\theta_i^\circ}\varDelta\theta_i +\cdots\cdots+\varepsilon_l$$

$$l=1,2\cdots\cdots L\geq N$$

以下同様

処で，$y^\circ=X(\theta^\circ)$ だから

$$\varDelta y\doteqdot\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\varDelta\theta+\varepsilon \quad \cdots\cdots(11)$$

上式は近似的に線形方程式である旨を示しているが函数 X が線形である場合には上式は厳密に等式として成り立つ。また，函数 X が線形でない場合でも，観測誤差 $\varDelta y$ を $\varDelta y\to0$ とするとき $\varDelta\theta\to0$ となって式(11)の近似の程度は良くなる。以下に出てくる近似式記号 $\doteqdot$ もこの意味である。

さて，線形の場合の最小自乗法により式 (11) を解くと，次のようになる。

$$\varDelta\theta\doteqdot\left(\widetilde{\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}}\cdot W\cdot\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right)^{-1}\cdot\widetilde{\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}}\cdot W\cdot\varDelta y \quad \cdots\cdots(12)$$

ここに　$W=(\overline{\varDelta y\cdot\widetilde{\varDelta y}})^{-1}$: 重み行列　……(13)

　$\varDelta y$:　縦ベクトル（観測誤差）

　$\sim$:　転　置

　$-$:　平均値あるいは期待値をとること

詳細については付録 2 を参照のこと。

つぎに誤差 $\varDelta\theta$ の分散・共分散行列 $(\overline{\varDelta\theta\cdot\widetilde{\varDelta\theta}})$ を求めると，次のようになる。

$$(\overline{\varDelta\theta\cdot\widetilde{\varDelta\theta}})\doteqdot\left(\widetilde{\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}}\cdot W\cdot\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right)^{-1} \cdots\cdots(14)$$

詳細については付録 3 を参照されたい。

尚，重み W について，(11) 式（6）式とも同じ重み W を用いる。これは，(11) 式は（6）式から単に $y^\circ=X(\theta^\circ)$ を差し引いた形になっており，それによって重みが変化することはない事による。

IV. 未知所求量の変換

所求対象 Θ の数量的表現である未知所求量 θ はただひと通りの表現しかないとは決していえない。例えば所求対象として人工衛星の運動状況を考えると，その数量的表現として，ある時刻 t_0 の衛星の位置ベクトルおよび速度ベクトル $(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0)$ があるが，これは何も時刻 t_0 におけるそれでなくてもよい，それと異る時刻 t_1 の位置ベクトルおよび速度ベクトル $(\boldsymbol{r}_1,\dot{\boldsymbol{r}}_1)$ でももちろんよい。さらに，それとは種類の異る表現，軌道 6 要素 $(a,e,i,\Omega,\omega,T)_t$ による表現でもよい。このように未知所求量 θ の表現としては一意でなくいろいろなものが，いくらでもある。本章ではこれらの表現の間の誤差の関係について考える。

ある表現を θ，もうひとつの表現を θ^* とする。両者の間には普通，1 対 1 の対応があり，なめらかな函数関係で結ばれていることが多い。すなわち

$$\theta^*=\Phi(\theta) \quad \cdots\cdots(15)$$

ここに Φ: ベクトル値函数

ただし

$$\left|\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\right|\neq0 \quad \cdots\cdots(16)$$

この (16) 式は 1 対 1 対応の為の必要条件である。

さて，θ^* と θ との誤差の関係は (15) 式を全微分して

$$\varDelta\theta^*\doteqdot\frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\varDelta\theta \quad \cdots\cdots(17)$$

ただし，函数 Φ が線形である場合には上式は厳密に等式として成り立つ。またそれが非線形である場合でも誤差 $\varDelta\theta^*$, $\varDelta\theta$ が小さい場合には，ほとんど等式と考えてよい。

さて，(17) 式より未知所求量 θ^* および θ の分散・共分散行列の関係を求めると，次のようになる。

$$(\overline{\varDelta\theta^*\cdot\widetilde{\varDelta\theta^*}})\doteqdot\frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}(\overline{\varDelta\theta\cdot\widetilde{\varDelta\theta}})\widetilde{\frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}} \quad \cdots\cdots(18)$$

上式のもっと厳密な証明については付録 4 を参照されたい。

V. 予 測 量

予測函数 F が既知のとき，未知所求量 θ が求まれば予測量 e を計算することができる。すなわち

$$e=F(\theta) \quad \cdots\cdots(19)$$

予測量 e としてはいろいろなものがある。たとえば人工衛星の運動の場合，ある時刻 t_0 の位置ベクトルおよび速度ベクトル $(\boldsymbol{r}_0,\dot{\boldsymbol{r}}_0)$ を知って，任意の時刻 t

における衛星の位置ベクトル (r_t), 速度ベクトル ($\dot{r}_t$), ある地点から見える方向 (A_t, h_t), 距離 (ρ_t) 等を予測することができるが，これらはみな予測量である。このように予測量 e としてはいろいろなものが無数にある。場合によると，このような物理的に現実的な予測量というものが無いこともありうる。しかし理論上の予測量というものは (19) 式のように表わせさえするなら，そして予測函数 F は任意でよいので，予測量というものは必ず存在し，その数は無限である。

さて，今，それらの予測量のうち互いに異る（正確には (21) 式を満たす）N個の予測量からなる組 ($e_1 e_2 \cdots e_N$) を考える。つまり，既に求まっているN個の $\hat{\theta}=(\theta_1\theta_2\cdots\theta_N)$ から同じくN個の未知の予測量 $(e_1e_2\cdots e_N)\equiv\tilde{e}$ を予測する場合を考える。そうすると予測誤差と未知所求量誤差との関係は

$$\Delta e \doteqdot \frac{\partial F(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\Delta\theta \qquad \cdots\cdots(20)$$

但し
$$\left|\frac{\partial F(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right| \neq 0 \qquad \cdots\cdots(21)$$

F:　ベクトル値函数

もし函数 F が線形であるならば(20)式は近似式でなく厳密に等式となる。非線形の場合には上記の通り近似式であるが誤差 $\Delta\theta$ が小さい場合はほとんど等式と考えてよい。以下に出てくる近似式記号≒もこれと同様の意味である。

さて，予測誤差と未知所求量誤差の分散・共分散の関係は (20) 式より

$$\overline{(\Delta e\cdot\widetilde{\Delta e})} \doteqdot \frac{\partial F(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\cdot\overline{(\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta})}\cdot\frac{\widetilde{\partial F(\theta^\circ)}}{\partial\theta^\circ} \qquad \cdots\cdots(22)$$

VI. 観測系を評価するための測度

ここでいう測度とは数学における厳密な意味のものではなく観測系の良し悪しを比較するための尺度という意味で使われる。

観測系の評価に限らず，誤差に関する評価測度として，従来ほとんど二次形式を採用していた。しかし，これは少し無理なのではないだろうか（この理由はIX章およびX章で明らかにしようと思う)。筆者は次のような新しい評価測度 S を採用すべきであると考える。

$$S=\log|\Sigma| \qquad \cdots\cdots(23)$$

但し　$\Sigma=\overline{(\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta})}$: 未知所求量の分散・共分散行列

この値 S が小さければ小さい程，良い観測系であるとする。（従来のは $\overline{\widetilde{\Delta\theta}\cdot\Delta\theta}$ とか $\overline{\widetilde{\Delta\theta}\cdot Q\cdot\Delta\theta}$ という二次形式が多い）

尚，$|\Sigma|$ は一般化分散として知られている。

もし，このような測度 S を採用するならば後で応用の所に示されるように非常に興味ある良好な結果を得ることができる。但し，次のような測度でもよい。

$$V=|\Sigma|$$
$$h=|\Sigma|^{1/2N}$$
$$\sigma=|\Sigma|^{1/2}$$

このような測度 (V, h, σ) を撰んでも，その大小関係は S と変らない。すなわち観測系 1, 2 に対して

$$S_1>S_2 \rightleftarrows V_1>V_2 \rightleftarrows h_1>h_2 \rightleftarrows \sigma_1>\sigma_2 \qquad \cdots\cdots(24)$$

つまり観測系の評価の尺度として，これらはいづれも等価である。(23) 式を特に選ぶ理由は次章で明らかとなる。

処で，一般化分散 $|\Sigma|$ の実際の計算は (14) 式より

$$|\Sigma| \doteqdot \left|\frac{\widetilde{\partial X(\theta^\circ)}}{\partial\theta^\circ}W\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right|^{-1} \qquad \cdots\cdots(25)$$

これによって各観測系 X_i に対応する $S_i(V_i, h_i, \sigma_i)$ の値が計算でき，この値の大小により，観測系 X の良い悪いの序列化が可能となる。

VII. 観測系の測度の情報理論的根拠

前章 (23) 式で表わされる観測系の測度 S の理論的根拠は情報理論にある。測度 S は情報理論におけるエントロピー（不確定度）の概念と密接な関係がある。

○エントロピー H の定義

$$H\equiv-\int f(X)\log f(X)dX \qquad \cdots\cdots(26)$$

但し $f(X)$: 確率変数 X の分布密度函数

○多次元正規分布の分布密度函数 $f(X)$

$$f(X)=\frac{1}{(2\pi)^{N/2}|\Sigma|^{1/2}}\cdot\exp\left(-\frac{1}{2}\tilde{X}\Sigma X\right) \qquad \cdots\cdots(27)$$

但し　$\Sigma=E(X\cdot\tilde{X})$: 分散・共分散行列

$E(X)=0$

○多次元正規分布の場合のエントロピー

$$H=\frac{N}{2}\log 2\pi e+\frac{1}{2}\log|\Sigma| \qquad \cdots\cdots(28)$$

但し　N: 確率変数 X の次元数

計算の手順の詳細については付録5を参照されたい。

○エントロピー H と測度 S との関係

$$H=S+\frac{N}{2}\log 2\pi e \qquad \cdots\cdots(29)$$

この関係式から明らかなように，エントロピー H

と測度 S とは観測系の評価に関して等価である。すなわち観測系 1,2 について

$$H_1<H_2 \rightleftarrows S_1<S_2 \qquad \cdots\cdots(30)$$

VIII. 観測系の測度としての妥当性

測度 S には色々な性質がある。本章ではそれらの性質が観測系を評価するための測度として妥当であることを示す。

1. 前章で明らかにしたように，測度 S とは情報理論におけるエントロピーという概念に等価である。処が，エントロピーという概念は不確定度という概念の一つの数量的表現に外ならないことが情報理論で明らかにされている。従って上述の測度 S の大小とは未知所求量の不確定度の大小のことであり，それによって観測系を評価することはごく自然のやり方である。つまり「未知所求量の不確定度を小さくさせる観測系程，良い観測系である」というのは極く自然の考えである。

2. 観測データにおける不確定度ではなく，未知所求量における不確定度を評価測度として採用すると，未知所求量を得る手段の如何にかかわらず難なく観測系の評価が可能となる。たとえば，人工衛星の軌道を決めるための観測方式として，角度観測方式とかドップラー観測方式とかがあるが，各方式によって得られる軌道 6 要素における不確定度で観測系を評価すれば同じ 6 要素における比較なので難点はない。これをもし，観測データで比較するとなると，一方は角度，他方は周波数という具合に質的に異る量の間の比較なので問題が多い。

3. 未知所求量の不確定度の大小は，未知所求量の表現の仕方によらず一定である。この事情は (18) 式より

$$S^*=\log|\Sigma^*|\doteqdot 2\log\left|\frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right|+\log|\Sigma|$$

$$=2\log\left|\frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right|+S \qquad \cdots\cdots(31)$$

但し
$$\Sigma=\overline{(\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta})}$$
$$\Sigma^*=\overline{(\Delta\theta^*\widetilde{\Delta\theta^*})} \qquad \cdots\cdots(32)$$

従って，観測系 1,2 について

$$S_1^*=2\log\left|\frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right|+S_1$$

$$S_2^*=2\log\left|\frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^0}\right|+S_2 \qquad \cdots\cdots(33)$$

上式 (33) の右辺第 1 項は観測系 1.2 によらず一定である。

従って

$$S_1^*<S_2^* \rightleftarrows S_1<S_2 \qquad \cdots\cdots(34)$$

いいかえれば

〔未知所求量 θ の不確定度の大小〕

＝〔未知所求量 θ^* の不確実の大小〕

4. 未知所求量の不確定度の大小は，予測量の不確定度の大小に同じである。このことは (22) 式より

$$S^e=\log|\Sigma^e|\doteqdot 2\log\left|\frac{\partial F(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right|+\log|\Sigma|$$

$$=2\log\left|\frac{\partial F(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right|+S \qquad \cdots\cdots(35)$$

但し
$$\Sigma^e=\overline{(\Delta e\cdot\widetilde{\Delta e})}$$
$$\Sigma=\overline{(\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta})} \qquad \cdots\cdots(36)$$

従って，観測系 1,2 に対して

$$S_i^e=2\log\left|\frac{\partial F(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right|+S_i \quad (i=1,2)$$

この式の右辺第一項は観測系 i によらない。従って

$$S_1^e<S_2^e \rightleftarrows S_1<S_2 \qquad \cdots\cdots(37)$$

いいかえれば

(予測量の不確定度の大小)

＝(未知所求量の不確定度の大小)

以上をまとめると

(観測系の良し悪し)

＝(未知所求量の確定度の大小)

＝(予測量の確定度の大小)

これらの関係ははなはだ好都合の関係で，測度として，未知所求量の不確定度 S を採用することの妥当性を示すひとつの根拠となりうる。

IX. 観測系の測度 S の数学的基礎

上述のように測度 S には都合のよい色々な性質がある。しかし，これらの性質のうち何が基本的なのであろうか。観測系の測度として是非備えていなければならない性質とはどんなものなのであろうか。

このような観点から，先ず，観測系の測度として，最低限満たしていなければならない条件を列挙し，その後で，それらの条件を満たす解を得ようと思う。

1. 観測系を評価するための測度として持つべき条件

1) 観測系の良し悪しは未知所求量 θ の推定誤差 $\Delta\theta$ の統計的分布如何によって測られるべきである。また，それを測るときには実数値の大小によって測られなければならない。

○任意の統計的分布は 1 次，2 次……n 次……のモーメントによって完全に特徴づけられる。

○正規分布は 1 次，2 次のモーメントのみによって完全に特徴づけられる。

○従って正規分布は，もし1次モーメントが全て0であるならば，2次モーメントのみ即ち分散・共分散のみによって完全に特徴づけられる。

という統計学的事実によって，先に述べた条件は，次のように定式化することができる。

仮定　誤差 $\Delta\theta$ は1次モーメントが全て0の多次元正規分布を（近似的に）とる。

以上の仮定のもとで，観測系の評価は次のような函数によって（近似的に）測られるべきである。

$$f(\Sigma)$$

ここに　$\Sigma=\overline{(\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta})}$:　分散・共分散行列

f:　実数値函数

2)　もし，ある観測系によって未知所求量 θ が誤差なく完全に求まったとしたならば ($\Sigma=0$)，それより良い観測系はありえない。すなわち

$$f(\Sigma)\geq f(O) \quad \cdots\cdots(38)$$

但し　O: 全ての要素が0のゼロ行列

不等号の向きは逆向きでもよい。上式 (38) のようにすると f の値が小さい程，良い観測系ということになる。逆向きにすれば，逆に f の値が大きい程，良い観測系であるということになる。ここでは一応上式 (38) のようにとる。勿論，どちらを選んでも構わない。

3)　さらに次に述べる，ほとんど自明の条件が必要である。

$$\lim_{\Sigma\to 0} f(\Sigma)=f(O) \quad \cdots\cdots(39)$$

そして便宜上　$f(O)=0$ とする　　$\cdots\cdots(40)$

この便宜上の仮定 (40) 式は必ずしも必要ではないがこう仮定すれば，できるだけ簡単な形の函数形 f が求まるだろう。また，それを算出する際の手間も，できるだけ少なくてすむだろう。

以上の3項目の条件は，便宜上の仮定 (40) 式を含めて，いづれも，ほとんど自明な条件であり，今まで知られている全ての評価函数はこれらの条件を満たす。しかし大切なのは次にかかげる条件であろうと思われる。従来の2次形式評価函数は次の条件を満たしていないので不適当であると思う。先に VI 章において，2次形式は無理であると述べたのはこの理由である。

4)　観測系の評価，すなわち，スカラー函数 $f(\Sigma)$ の大小関係は未知所求量 θ の採り方によって変化してはならない。つまり

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2) \rightleftarrows f(\Sigma_1^*)<f(\Sigma_2^*) \quad \cdots\cdots(41)^{*2}$$

但し　$\Sigma^*=\overline{(\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta^*})}$

$$\doteqdot \frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\overline{(\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta})}\frac{\widetilde{\partial\Phi(\theta^\circ)}}{\partial\theta^\circ}$$

$$=D\cdot\Sigma\cdot\tilde{D} \quad \cdots\cdots(42)$$

$$D\equiv\frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ},\quad |D|\neq 0 \quad \cdots\cdots(43)$$

（D は任意でよい）

（第IV章を参照のこと。特に (18)式）

＊註 2　(41) 式の補足説明

未知状態 Θ について，観測系1によってデータ Y_1 を得，観測系2によってデータ Y_2 を得たとする。そしてデータ Y_1 から未知状態 Θ を推定し $\hat{\theta}_1$ およびその誤差の分散共分散 Σ_1（或いは $\hat{\theta}_1^*$ および Σ_1^*）を得，データ Y_2 から同じく $\hat{\theta}_2, \Sigma_2$（或いは $\hat{\theta}_1^*, \Sigma_2^*$）を得たとする。このとき θ, θ^* いづれを取るかに必然性はない。

以上，表にまとめると次のようになる。

観測系	データ	Θ の推定，およびその誤差の分散・共分散			
1	Y_1	$\hat{\theta}_1,\ \Sigma_1$	$\hat{\theta}_1^*,\ \Sigma_1^*$	·	·
2	Y_2	$\hat{\theta}_2,\ \Sigma_2$	$\hat{\theta}_2^*,\ \Sigma_2^*$	·	·
·	·	·	·	·	·

観測系1,2を比較するためには（観測系の評価は推定誤差の分散・共分散によって行われるべきであることは既に述べた）Σ_1 と Σ_2^* を比較するとか，Σ_1^* と Σ_2 を比較するとかしてはならない。1,2 の相違以外の条件は同一にそろえて Σ_1 と Σ_2 或いは Σ_1^* と Σ_2^* とで比較しなければならない。そうしなければ観測系1,2 の比較とはならない。

さてここで仮りに，ある評価函数 f があって

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2) \quad かつ \quad f(\Sigma_1^*)>f(\Sigma_2^*)$$

であったとする。そうすると，θ 系で議論し2より1の方が良いとすると θ^* 系では逆に1より2の方が良いということになる。θ 系，θ^* 系は平等である。特にどちらかを取らねばならぬ理由はない。これではどちらが良い観測系なのか何ともいえない。処がもし仮りに

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2) \quad かつ \quad f(\Sigma_1^*)<f(\Sigma_2^*)$$

であったとすると θ 系，θ^* 系両者の間に異論はない。そして更に任意の系について，つまり任意の $D(\Sigma^*=D\Sigma\tilde{D})$ について (41) 式を満たすならば，どんな系 $(\theta, \theta^*, \cdots)$ についても異論はない。もしそうなら躊躇なく，これこれの方が良い観測系であると断定できるのではないだろうか。

すなわち，任意の函数は (41) 式を満たすか，満たさないかのいづれかである。もし (41) 式を満たさない評価函数であると，われわれはいつかどこかで途方に暮れることになろう。そうでなく，もし式 (41) を満たす評価函数なら，いついかなるときにも矛盾の生ずることはない。

そこで筆者は次のように考える。

「評価函数というものがもし存在するとするなら（筆者は存在すると考える）任意の $D(|D|\neq 0)$ について (41) 式を満たさなければならない」と。

処で (41) 式は次のようにも書き換えられる。

$$\left[\frac{f(\Sigma_2)}{f(\Sigma_1)}\right]^k=\left[\frac{f(\Sigma_2^*)}{f(\Sigma_1^*)}\right]^{k^*} \quad \cdots\cdots(44)$$

但し　$k/k^*>0$ ……(45)

しかし，(44) 式のままで函数形 f を見い出そうとなると恐らく至難の業であろう。そこで次のような便宜上の仮定を設けて簡単化しよう。

$$k=k^* \quad \cdots\cdots(46)$$

そうすると (44) 式は最も簡単な形となって

$$\frac{f(\Sigma_2)}{f(\Sigma_1)}=\frac{f(\Sigma_2^*)}{f(\Sigma_1^*)} \quad \cdots\cdots(47)$$

但し上式 (47) のように限定しても，是非満たしていなければならない (41) 式の条件は充分満たしていることに注意しなければならない。つまり (47) 式は (41) 式の特別の場合となっている。

2. 上記諸条件を満たす函数

観測系を評価するための函数 f が満たしていなければならない基本的な条件は上述したように (38), (39), (41) 式だけである。これに便宜上の仮定 (40), (46) 式を課すのはもっぱら解法上の便宜のためである。このようにすると最も簡単な解を得るであろうし，またそれを見い出す手続きも多分やさしくなるであろう。

このような立場から函数 f を求めると次のような解を得る。

$$f(\Sigma)=e|\Sigma|^c \quad \cdots\cdots(48)$$

但し $e>0$, $c>0$ ($|\ |$: 行列式)

これは (38), (39), (40), (41), (46) 式, 即ち (38), (39), (40), (47) 式を満たす解であり，これ以外の解はない。e と c の値については正の数でありさえすれば任意でよい。解 (48) を得る手順については付録6を参照されたい。

尚，便宜上の条件 (41), (46) 式を取り除いた場合，次のような函数もまた解である。

$$f'(\Sigma)=c_1\log|\Sigma|+c_2, \quad c_1>0 \quad \cdots\cdots(49)$$

$$f''(\Sigma)=-\frac{c_1}{|\Sigma|}+c_2, \quad c_1>0 \quad \cdots\cdots(50)$$

ただ，これらの函数の間では大小関係が保存されているので，つまり観測系 1, 2 に対して

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)\rightleftarrows f'(\Sigma_1)<f'(\Sigma_2)\rightleftarrows f''(\Sigma_1)<f''(\Sigma_2) \quad \cdots\cdots(51)$$

が成り立つので，観測系の評価についてはどれを選んでも同じことである。

X. 観測系の評価の一般論

前章では一般解を得ずに限定された解を見い出した。本章では"一般的解"を得ようと思う。そのため前章とは多少異る観点も導入される。

ある未知の対象 O のある状態 Θ について，何らかの手段を講じて情報を収得し，状態 Θ を推定する場合を考える。何らかの手段とは実験とか観測とかを意味する。以下このことを観測ないし観測系ということにする。状態 Θ は数量的に表現されうるものとする。このとき状態 Θ の数量的表現は，ただひととおりとは限らない。そのひとつの表現を θ とし他のひとつを θ^* とする。そうすると両者の間には次のような関係が存在する。但し θ, θ^* は一般にベクトル量である。

$$\theta^*=\Phi(\theta) \quad \cdots\cdots(52)$$

但し　$$\left|\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\right|\neq 0 \quad \cdots\cdots(53)$$

Φ: ベクトル値関数

つまり状態 Θ を表現するのに，θ で表現できるとするならば θ^* で表現しても同じことである，ということを意味する。そして一般には Φ は任意の関数でよい。

これを具体的な場合にあてはめると次のようになる。未知対象 O として空間における点を考える。その点の状態 Θ としては点の位置を考える。位置 Θ の数量的表現としては極座標 $(r\theta\varphi)=\theta$ によってもよいし，デカルト座標 $(xyz)=\theta^*$ によってもよい。その他の座標系によっても勿論よい。しかし次のような関係にあることに変りはない。

$$\theta^*=\Phi(\theta)$$

具体的には

$$x=r\cos\theta\cos\varphi=\Phi_1(r\,\theta\,\varphi)$$
$$y=r\cos\theta\sin\varphi=\Phi_2(r\,\theta\,\varphi)$$
$$z=r\sin\theta\qquad\quad=\Phi_3(r\,\theta\,\varphi)$$

ここに

$$\theta^*=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\quad \theta=\begin{pmatrix}r\\\theta\\\varphi\end{pmatrix}\quad \Phi=\begin{pmatrix}\Phi_1\\\Phi_2\\\Phi_3\end{pmatrix}$$

さて，いま (i) という観測系で未知の状態 Θ に関する情報が収得され，未知所求量 θ (あるいは θ^*) が推定されたとする。これを次のようにかく

$$\hat{\theta}_i \text{ (あるいは } \hat{\theta}_i^*) \quad i=1,2\cdots\cdots n\cdots\cdots$$

このとき観測系 i ($i=1,2\cdots\cdots n\cdots\cdots$) のなかでどれが一番良い観測系かを決める問題を考える。つまり観測系の評価について考える。

この場合の良し悪しは未知所求量 θ の推定誤差 $\Delta\theta$ ($\Delta\theta^*$) の統計的分布如何によって測られるべきである。また，それを測るときには実数値の大小によって測られなければならない。

推定誤差 $\Delta\theta$ ($\Delta\theta^*$) がもし多次元正規分布 $N(\mu, \Sigma)$ ($N(\mu^*, \Sigma^*)$) をとるならば，また，たとえ正規分布をとらなくても近似的（観測誤差を小さくしていくと，この近似は次第によくなる）にそのような分布をとると考え，$\mu=0$ ($\mu^*=0$) と仮定すれば次のような函数によって（近似的に）評価されるべきである。

$$f(\Sigma) \qquad (f^{☆}(\Sigma^*))$$

ここで初めて $f^{☆}$ が導入された。前章においては (41) 式に示されているように，Σ に対しても f, Σ^* に対しても同じ f を用いている。普通このようにすることが多い。しかし, Σ^* に対して，Σに対するのと同一のfを用いる必然性があるだろうか。筆者は無いと考える。そこでもっと一般的に Σ^* に対しては，f と必ずしも同一でないという意味で，$f^{☆}$ を用いることにした。

ここに $\Sigma(\Sigma^*)$: 推定誤差 $\Delta\theta(\Delta\theta^*)$ の分散・共分散行列，正定値行列に限る。

$f(f^{☆})$: 実数値函数

次にこれらの函数 $f(f^{☆})$ に課せられる条件を列挙する。

1. 観測系の評価は，未知所求状態 Θ の表現の仕方によって変化してはならない。すなわち観測系 1, 2 に対し

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)\rightleftarrows f^{☆}(\Sigma_1^*)<f^{☆}(\Sigma_2^*) \quad \cdots\cdots(54)$$

但し $\Sigma_i^*=D\Sigma_i\tilde{D}$

$$D=\frac{\partial\Phi(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}, \quad |D|\neq 0 \ (D \text{ は任意}) \quad \cdots\cdots(55)$$

この式は (41) 式の一般化された式である。

2. 処で次のような条件は物理的に判断して，自明であると思われる。任意の正定値行列 A, B に対して

$$f^{☆}(\mathrm{A})<f^{☆}(\mathrm{B})\rightleftarrows f(\mathrm{A})<f(\mathrm{B}) \quad \cdots\cdots(56)$$

これは認められるものとする。そうすると (54), (56) 式を合わせて

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)\rightleftarrows f(\Sigma_1^*)<f(\Sigma_2^*) \quad \cdots\cdots(57)$$

上式はfについての条件式であるが，$f^{☆}$ についても f と全く同様の条件式を得る。f と $f^{☆}$ を区別する条項は，いまのところ，そして，これからも，無い。従って，以下，f のみに注目するが，これは $f^{☆}$ についても同じことがいえる。

(55) 式を考慮して (57) を書き換えると

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)\rightleftarrows f(D\Sigma_1\tilde{D})<f(D\Sigma_2\tilde{D}) \quad \cdots\cdots(58)$$

(D は任意)

この条件式 (58) は非常に重要な条件である。よく用いられるトレイスとかそれの一般形である 2 次形式は本条件を満たさない。

3. 連続性については，至るところ連続であるという条件を課す。すなわち任意の Σ_0 に対して

$$\lim_{\Sigma\to\Sigma_0} f(\Sigma)=f(\Sigma_0) \quad \cdots\cdots(59)$$

但し $\Sigma\to\Sigma_0$ とは $\|\Sigma-\Sigma_0\|\to 0$ を意味する。$\|\cdot\|$ とはノルム。例えば $\|\mathrm{A}\|=\sqrt{\sum_{ij} A^2_{ij}}$

4. 極限については

$$\underset{|\Sigma_0|<\infty}{f(\Sigma_0)}<\lim_{|\Sigma|\to\infty} f(\Sigma) \quad \cdots\cdots(60)$$

この条件で行列式の出てくる所以は，正規多次元分布密度函数 (27) 式の係数にそれが使われていることによる。

上記条件の不等号は逆向きでもよい。上式 (60) のようにすると，f の値が小さい程，良い観測系であるということを意味する。逆向きにすると，逆に f の値が大きい程，良い観測系であることを意味する。どちらをとっても同じことである。数学的には函数fに負号をつけるかつけないかに帰着されうる。

念のため (60) 式の意味を明らかにすると，$|\Sigma|$ が無限大の場合には (27) 式から明らかのように，$|\Sigma|$ が確定している場合より，もんくなしに不確定であるということを意味する。

さて，以上の条件を満たす函数 f にどのようなものがあるかというと，まず最初に行列式が考えられる。これは確かに上述の条件を全て満たす。従って解のひとつである。しかし，これ以外にも解はある（例えば，$\log|\Sigma|$)。そのひとつを f で表す。このときもし det による評価（序列づけ）と f による評価に，食い違いが生じたらどういうことになるだろうか。どちらの函数で評価したらよいだろうか。あるいはどの函数で評価したら一番よいのだろうか。

これについて最も重要な定理を次に掲げる。

定理 1, 2

Th. 1 $\det(\Sigma_1)<\det(\Sigma_2)\to f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)$

Th. 2 $\det(\Sigma_1)=\det(\Sigma_2)\to f(\Sigma_1)=f(\Sigma_2)$

つまり det による評価と上記諸条件を満たす他の函数による評価との間に決して食い違いが生じないということが保障される。このことは同時に，上述の 4 条件を満たす函数であるならば，任意の函数同志で食い違いの生じないことを意味する。この定理の証明については付録 7 を参照されたい。

この定理の証明によって，det による評価の最も重要な妥当性が明らかにされた*。

---

* 註 東京大学理学部教授岩堀長慶氏により本章の

内容に関して次のような定理が証明されている。

定　理

$P(n)$ を n 次実対称正定値行列全体のなす集合とし f を $P(n)$ から正の半区間 $(0,\infty)$ への写像とする。$P(n)$ の元 A, B に対して，f が次の性質

$$f(A)\gtreqless f(B)\Longleftrightarrow \det(A)\gtreqless\det(B)\quad\text{(不等号同順)}$$

を満たすための必要かつ十分な条件は f が次の①,②を満たすことである。

① $A\in P(n)$, $B\in P(n)$ と n 次正則行列 C に対して

$$f(A)<f(B)\Longrightarrow f(CAC')<f(CBC')$$

（本章の(58)式）

② $\inf_{X\in P(n)} f(X)<f(A)$ が全ての $A\in P(n)$ について成り立ち，かつ，$\lim_{\|X\|\to 0} f(X)$ が存在して $\inf_{X\in P(n)} f(X)$ に等しい（本章(60)式の改良）

詳細は後日，統計学会誌上に発表される予定である。

XI. 結　論

以上の議論をまとめると次のようになる。

1) 観測系の良し悪しを測る尺度として情報理論におけるエントロピー（不確定度）あるいは統計学における一般化分散の概念を採用すべきである。

2) 観測とは未知所求量の不確定度(エントロピー)あるいは一般化分散を減少させることであり，その不確定度(エントロピー)あるいは一般化分散を最小にする系が最良の観測系である。

XII. 応　用

1. 平面の方程式測定

図1の如く空間 (xyz) に平面が置かれてある。この平面の方程式 $(z=a+bx+cy)$ を求めるには普通次のようにする。

1) 平面 (xy) 上に観測点 $\{(x_iy_i)\ i=1,2\cdots\cdots n\}$ を設定する。

2) 各観測点からの高さ $\{(z_i)\ i=1,2\cdots\cdots n\}$ を測定する。

3) これらのデータ $\{(z_i)\ i=1,2\cdots\cdots n\}$ から未知所求量 (abc) を計算する。(abc) が求まれば平面 $(z=a+bx+cy)$ は決定されたことになる。

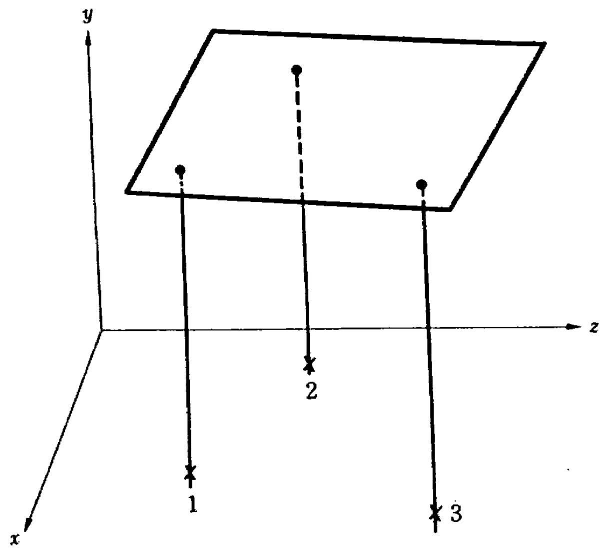

図 1

このようにして求める場合 1) の観測点の配置に大幅な自由度がある。そこで

問　題

観測点の数 n を未知所求量 (abc) の数3に等しくした場合，観測点の最良の配置を求む。

われわれの常識によれば，この3つの観測点はできるだけ広々と分布しているのが良いだろう。本理論による解は果してどのような結論を導くだろうか。

解

本理論に従えば，未知所求量 (abc) の不確定度 S あるいは一般化分散 V を最小にする系が最良の観測系である。

そこで，とりあえず一般化分散 $V=|\Sigma|$ を計算する。

○観測方程式

$$z_i=a+bx_i+cy_i+\varepsilon_i\qquad i=1,2,3$$

行列表示では

$$\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{pmatrix}$$

本理論の観測形式（6）に合わせれば

$$y=\begin{pmatrix}z_1\\z_2\\z_3\end{pmatrix},\quad X=\begin{pmatrix}1&x_1&y_1\\1&x_2&y_2\\1&x_3&y_3\end{pmatrix},\quad \theta=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$$

$$\varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\\varepsilon_2\\\varepsilon_3\end{pmatrix}$$

ここで，本応用問題は観測方程式が線形になっていることに注意しなければならない。そのため，本論では第II章（6）式に示すように観測方程式が

$$y=X(\theta)+\varepsilon$$

という形で表わしているものが，本応用問題では行列表示で簡単に

$$y=X\cdot\theta+\varepsilon$$

で表わされてしまう。

従って一般化分散 $V=|\Sigma|$ の値は

$$\frac{\partial X(\theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial(X\cdot\theta)}{\partial\theta}=X$$

に注意して (25) 式より

$$V=|\Sigma|=|\tilde{X}\cdot W\cdot X|^{-1}=|W|^{-1}/|X|^2$$

処で $|W|^{-1}$ の値は，本論での W についての定義から，観測機器の精度によって決まるものであり，精度が良ければ良い程 $|W|^{-1}$ の値は小さくなる。かつ観測点配置には無関係な値をとる。従って最良の観測点配置を求めるには一般化分散 $|\Sigma|$ の値を最小ならしむ観測点配置を選べば良いのだから，上式から分るように $|X|^2$ の値を最大ならしむような観測点配置を探せば良い。処で $|X|^2$ の値は，観測点 1,2,3 のなす三角形の面積を Δ で表わすとすると

$$|X|^2=(2\Delta)^2$$

という関係にある。従って Δ を最大にすれば $|X|^2$ は最大となる。つまり

答

観測点 1,2,3 のなす三角形の面積が最大となるように観測点 1,2,3 を配置するのが最良の観測点配置である。

先にわれわれの常識で“できるだけ広々と”というのは実は面積を広々とということであった。こう解釈すれば本理論の答はわれわれの常識と良く一致する。

2.　位置測定

図 2 の如く空間に未知の点 $O(xyz)$ がある。観測点 1,2,3 より未知点 O への距離 (range) を測ることにより点 O の座標を算出したい。最良の観測点配置を求む。

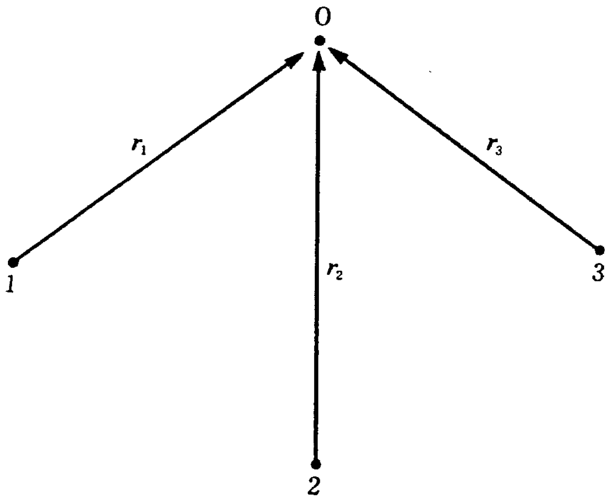

図 2

○観測方程式

$$r_i=\sqrt{(x-x_i)^2+(y-y_i)^2+(z-z_i)^2}+\varepsilon_i$$

$$i=1,2,3$$

本論の観測形式 $y=X(\theta)+\varepsilon$ (6) に合わせれば

$$y=\begin{pmatrix} r_1\\ r_2\\ r_3\end{pmatrix},\quad \theta=\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix},\quad \varepsilon=\begin{pmatrix}\varepsilon_1\\ \varepsilon_2\\ \varepsilon_3\end{pmatrix}$$

X はこの場合非線形函数となる。

○解答

未知所求量 (xyz) の不確定度を最小にする観測点配置を求めればよい。

(25) 式より

$$|\Sigma|\doteqdot\left|\widetilde{\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}}\cdot W\cdot\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}\right|^{-1}$$

観測方程式の右辺を xyz でそれぞれ偏微分することにより

$$\frac{\partial X(\theta^\circ)}{\partial\theta^\circ}=\begin{pmatrix}\dfrac{x^\circ-x_1}{r_1^\circ} & \dfrac{y^\circ-y_1}{r_1^\circ} & \dfrac{z^\circ-z_1}{r_1^\circ}\\[2mm] \dfrac{x^\circ-x_2}{r_2^\circ} & \dfrac{y^\circ-y_2}{r_2^\circ} & \dfrac{z^\circ-z_2}{r_2^\circ}\\[2mm] \dfrac{x^\circ-x_3}{r_3^\circ} & \dfrac{y^\circ-y_3}{r_3^\circ} & \dfrac{z^\circ-z_3}{r_3^\circ}\end{pmatrix}$$

重み W については，観測値 r_i の誤差 Δr_i の標準偏差を σ_{r_i} とし各観測値の間に相関は無いものとすると

$$W^{-1}=\begin{pmatrix}\sigma_{r_1}^2 & 0 & 0\\ 0 & \sigma_{r_2}^2 & 0\\ 0 & 0 & \sigma_{r_3}^2\end{pmatrix}$$

そうすると

$$|\Sigma|\doteqdot(r_1^\circ r_2^\circ r_3^\circ\sigma_{r_1}\sigma_{r_2}\sigma_{r_3})^2/V$$

$$V=\begin{vmatrix} x^\circ-x_1 & y^\circ-y_1 & z^\circ-z_1\\ x^\circ-x_2 & y^\circ-y_2 & z^\circ-z_2\\ x^\circ-x_3 & y^\circ-y_3 & z^\circ-z_3\end{vmatrix}$$

処で V の値はベクトル $\boldsymbol{r}_1^\circ,\boldsymbol{r}_2^\circ,\boldsymbol{r}_3^\circ$ のなす六面体の体積の 2 乗である。従って

$$V\leqq(r_1^\circ r_2^\circ r_3^\circ)^2$$

上式はアダマールの定理によっても直ちに得られる。等号が成り立つのは，ベクトル $\boldsymbol{r}_1^\circ,\boldsymbol{r}_2^\circ,\boldsymbol{r}_3^\circ$ が互いに直交するときであり，それ以外にない。そして，そのとき $|\Sigma|$ は最小の値をとる。従って答は「図 2 におけるベクトル $\boldsymbol{r}_1,\boldsymbol{r}_2,\boldsymbol{r}_3$ を互いに直交ならしむように観測点 1, 2, 3 を配置すべきである」ということになる。これもまたわれわれの常識に一致しているといえる。

XIII.　あとがき

本理論の特徴は評価函数の形として 2 次形式ではなく行列式がとられていることにある。従来の理論では 2 次形式が多かったが，これは技術上，取り扱いが容易であること，計算がしやすいことによると思われる。しかし，これは本報告で述べたように，変数変換

に対して不変であるという要請に応えることができず，何らかの解決策が示されない限り，採用できないと思う。また行列式の形は情報理論のエントロピーの概念と密接な関係にあることを本報告で明らかにしたが，情報理論的な他の接近には，条件付き確率にもとづいたものが多い。しかしこれは計算が煩雑となり成果もその割りには少ないのではないかと筆者には思われる。本理論は無条件確率にもとづくものであり，単純ではあるが価値はあると思う。

筆者は統計学の中のひとつの分野である実験計画法というものを知らなかったが，本理論は正に“実験計画法”であった。しかし本理論は実験計画法と比較して少なくとも次のような点において勝っていると思う。従来の実験計画法では扱えなかった分野非線形の分野にも本理論は適用されるし，基本思想の相違，すなわち“実験計画”という考え方と“最良観測系”という考え方とでは後者の方が見透しがよいと思う。

このほかの相違については付録8を参照されたい。

本理論の応用については本報告の分だけでは不充分なので後日改めて報告したい。

最後に本研究を進めていくなかで，いろいろと教示していただいた東京大学理学部教授岩堀長慶氏，同経済学部教授鈴木雪夫氏ならびに東京工業大学助教授藤井光昭氏に謝意を表する。

参考文献

1) 中山伊知郎；現代統計学大辞典（1962）東洋経済新報社
2) 梅垣寿春・国沢清典；情報理論の進歩（1965）岩波書店
3) 増山元三郎；実験計画法（1956）岩波書店
4) 奥野忠一，芳賀敏郎； 実験計画法（昭和 44）培風館
5) 一瀬正己；誤差論（昭和 28）培風館
6) F.O. Vonbun & W.D. Kahn; Tracking Systems, NASA TND-1471 (1961/8)
7) 長田　正；観測システムの最適化と観測情報の価値，計測自動制御学会論文集，5巻4号(1969)
8) 市野学・平松啓三；統計的認識系の特徴評価函数，電子通信学会論文誌，53-C巻 10号(1970/8) pp. 748～p. 755
9) 大須賀節雄；情報価値と意志決定，情報処理学会誌，11巻4号（1970）pp. 209
10) 鷹尾和昭・阿部保之；人工衛星の追跡精度に関する一評価法，電子通信学会・宇宙航空エレクトロニクス研究会資料，資料番号 SANE 69-21 (1969-12)
11) 鳥海良三，他；角度測定・ドップラ周波測定併用のトラッキング方式の計算処理に関する研究，航技研報告 TR-168 (1968)
12) 人工衛星追跡部；角度測定併用ドップラ周波数測定方式によるトラッキング総合実験，宇宙開発推進本部技術報告 TR-2（昭和 44）

付録 1. 最小自乗法

○観測方程式

$$y_l=X_l(\theta_1\theta_2\cdots\theta_N)\quad l=1,2\cdots L\geq N \qquad \cdots\cdots(1)$$

観測値 y_l は必ず誤差を伴うので，上式は必ずしも全て＝にはならない。そこで

○残差方程式

$$\varepsilon_l=y_l-X_l(\theta_1\theta_2\cdots\theta_N) \qquad \cdots\cdots(2)$$

○最小自乗

$$S=\sum_{l=1}^{L}\varepsilon_l^2=\sum_{l=1}^{L}(y_l-X_l(\theta_1\theta_2\cdots\theta_N))^2\to\mathrm{Mini} \qquad \cdots\cdots(3)$$

上式を満たすような $\theta_1\theta_2\cdots\theta_N$ を求めることを最小自乗法によって解くという。また重みを考慮しなければならない場合は次のようになる。

$$S'=\sum_{l=1}^{L}w_l\cdot\varepsilon_l^2\to\mathrm{Mini} \qquad \cdots\cdots(4)$$

普通，重み w_l として次のような値を用いる。

$$w_l=(\overline{\Delta y_l^2})^{-1} \qquad \cdots\cdots(5)$$

付録 2. 線形方程式の場合の最小自乗法

○残差方程式

$$\varepsilon=y-X\cdot\theta \qquad \cdots\cdots(6)$$

○最小自乗

$$S=\tilde{\varepsilon}\cdot\varepsilon=(\widetilde{y-X\cdot\theta})(y-X\cdot\theta)\to\mathrm{Mini} \qquad \cdots\cdots(7)$$

○実際の解

(7) 式を書き換えて

$$\frac{\partial S}{\partial\theta}=2\frac{\partial\tilde{\varepsilon}}{\partial\theta}\cdot\varepsilon=2\cdot\tilde{X}(y-X\cdot\theta)=0 \qquad \cdots\cdots(8)$$

従って

$$\tilde{X}\cdot X\cdot\theta=\tilde{X}\cdot y \qquad \cdots\cdots(9)$$

つまり

$$\theta=(\tilde{X}\cdot X)^{-1}\tilde{X}\cdot y \qquad \cdots\cdots(10)$$

※重みを考慮する場合

○残差方程式

$$\varepsilon'=W^{1/2}\cdot\varepsilon=W^{1/2}y-W^{1/2}X\cdot\theta \qquad \cdots\cdots(11)$$

ただし $W=(\overline{\Delta y\cdot\widetilde{\Delta y}})^{-1}$ ……(12)

○最小自乗

$$S'=\tilde{\varepsilon}'\cdot\varepsilon'\to\mathrm{Mini} \qquad \cdots\cdots(13)$$

○実際の解

(6) 式と (11) 式とを比較すると

y: $W^{1/2}\cdot y$

X: $W^{1/2}\cdot X$

という関係にあるので (10) 式における X を $W^{1/2}X$, y を $W^{1/2}y$ で置き換えれば (13) 式の解を得る。すなわち

$$\theta=(\tilde{X}\cdot W\cdot X)^{-1}\cdot\tilde{X}\cdot W\cdot y \qquad \cdots\cdots(14)$$

付録 3. 分散・共分散

○残差方程式

$$\varepsilon'=W^{1/2}\Delta y-W^{1/2}X\cdot\Delta\theta \qquad \cdots\cdots(15)$$

○実際の解

(14) 式に従って

$$\Delta\theta=(\tilde{X}\cdot WX)^{-1}\tilde{X}\cdot W\cdot\Delta y \qquad \cdots\cdots(16)$$

○分散・共分散

$$(\overline{\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta}})=(\tilde{X}\cdot W\cdot X)^{-1}\cdot\tilde{X}\cdot W(\overline{\Delta y\cdot\widetilde{\Delta y}})\cdot\tilde{W}X(\tilde{X}\cdot WX)^{-1} \qquad \cdots\cdots(17)$$

処で $(\overline{\Delta y\cdot\widetilde{\Delta y}})=W^{-1}=\tilde{W}^{-1}$ ……(18)

但し Δy: 観測誤差，通常は観測機器の誤差と考えてよい

従って

$$(\overline{\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta}})=(\tilde{X}\cdot WX)^{-1}\tilde{X}WX(\tilde{X}\cdot WX)^{-1}$$

$$=(\tilde{X}\cdot W\cdot X)^{-1} \qquad \cdots\cdots(19)$$

付録 4. 未知所求量の変換に伴う誤差の伝播

○変換方程式

$$\theta^*=\Phi(\theta) \qquad \cdots\cdots(20)$$

○観測方程式

$$y=X(\theta^*)+\varepsilon \qquad \cdots\cdots(21)$$

$$y=X(\Phi(\theta))+\varepsilon \qquad \cdots\cdots(22)$$

○誤差方程式

$$\Delta y=\frac{\partial X(\theta^*)}{\partial\theta^*}\Delta\theta^*+\varepsilon \qquad \cdots\cdots(23)$$

$$\Delta y=\frac{\partial X(\theta^*)}{\partial\theta^*}\,\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\Delta\theta+\varepsilon \qquad \cdots\cdots(24)$$

○最小自乗法による分散・共分散

(19) 式より

$$(\overline{\Delta\theta^*\widetilde{\Delta\theta^*}})=\left(\frac{\partial\widetilde{X(\theta^*)}}{\partial\theta^*}\cdot W\cdot\frac{\partial X(\theta^*)}{\partial\theta^*}\right)^{-1} \qquad \cdots\cdots(25)$$

$$(\overline{\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta}})=\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi(\theta)}}{\partial\theta}\,\frac{\partial\widetilde{X(\theta^*)}}{\partial\theta^*}W\frac{\partial X(\theta^*)}{\partial\theta^*}\,\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\right)^{-1} \qquad \cdots\cdots(26)$$

○分散・共分散同志の関係

(26) 式より

$$(\overline{\Delta\theta\cdot\widetilde{\Delta\theta}})=\left(\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\right)^{-1}\left(\frac{\partial\widetilde{X(\theta^*)}}{\partial\theta^*}W\frac{\partial X(\theta^*)}{\partial\theta^*}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi(\theta)}}{\partial\theta}\right)^{-1}$$

$$=\left(\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\right)^{-1}(\overline{\Delta\theta^*\widetilde{\Delta\theta^*}})\left(\frac{\partial\widetilde{\Phi(\theta)}}{\partial\theta}\right)^{-1} \qquad \cdots\cdots(27)$$

従って

$$\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}\overline{(\varDelta\theta\cdot\widetilde{\varDelta\theta})}\widetilde{\frac{\partial\Phi(\theta)}{\partial\theta}}=\overline{(\varDelta\theta^*\varDelta\theta^*)}\quad\cdots\cdots(28)$$

付録 5. エントロピーの計算

○多次元正規分布

$$f(x_1\cdots x_n)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\sum_{ij}\sigma^{ij}x_ix_j\right)$$

但し $\Sigma=(\sigma_{ij})=\overline{x_ix_j}$

$\Sigma^{-1}=(\sigma^{ij})$

○エントロピー

$$S\equiv-\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int f(x_1\cdots x_n)\log f(x_1\cdots x_n)\times dx_1\cdots dx_n$$

$$=-\int\cdots\int_{-\infty}^{\infty}f(x_1\cdots x_n)\left[\log\frac{1}{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}}+\left(-\frac{1}{2}\Sigma\sigma^{ij}x_ix_j\right)\right]\times dx_1\cdots dx_n$$

$$=\log\{2\pi^{n/2}|\Sigma|^{1/2}\}\int\cdots\int f(x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n+\frac{1}{2}\sum_{ij}^{n}\sigma^{ij}\int\cdots\int x_ix_jf(x_1\cdots x_n)dx_1\cdots dx_n$$

$$=\log\{(2\pi)^{n/2}|\Sigma|^{1/2}\}+\frac{1}{2}\sum_{ij}\sigma^{ij}\sigma_{ij}$$

処で $\sigma_{ij}=\sigma_{ji}$ なので

$$\sum_{ij}\sigma^{ij}\sigma_{ij}=\sum_{jj}\sigma^{ij}\sigma_{ji}=\sum_{i}(\Sigma^{-1}\Sigma)_{ii}=\sum_{i}\mathrm{I\!I}_{ii}=n$$

したがつて

$$S=\frac{1}{2}n\log 2\pi+\frac{1}{2}\log|\Sigma|+\frac{1}{2}n=\frac{n}{2}\log 2\pi e+\frac{1}{2}\log|\Sigma|$$

付録 6. 観測系を評価する為の必要条件を満たす函数

○必要条件

1) 函数 f の定義域は $n\times n$ の正定値実数行列 Σ および零行列 O

2) $f(\Sigma)\geq f(O)$ 本文 (38) 式 ……(1)

3) $\lim_{\Sigma\to 0}f(\Sigma)=f(O)$ 本文 (39) 式 ……(2)

但し便宜上 $f(O)=0$ 本文 (40) 式 ……(3)

4) 行列式の値が0でない $n\times n$ の実数正方行列を $D(|D|\neq 0)$ とするとき，任意の $\Sigma_i\in\Sigma$ に対して

$$\frac{f(\Sigma_2)}{f(\Sigma_1)}=\frac{f(D\Sigma_2\tilde{D})}{f(D\Sigma_1\tilde{D})}\quad \text{本文 (47) 式}\cdots\cdots(4)$$

但し，D については上記条件を満たしさえすれば任意でよい。

○補助定理

A, B は共に任意の $n\times n$ 正方行列とし，スカラー函数 h が常に $h(A\cdot B)=h(A)\cdot h(B)$ なる関係にあるならば，そのスカラー函数 h は次のいづれかである。

1) $h(A)=\begin{cases}|\det(A)|^c & (\det(A)\neq 0)\\ 0 & (\det(A)=0)\end{cases}$

2) $h(A)=\begin{cases}\mathrm{sgn}(\det(A))|\det(A)|^c & (\det(A)\neq 0)\\ 0 & (\det(A)=0)\end{cases}$

3) $h(A)=0$

4) $h(A)=1$

5) $h(A)=|\mathrm{sgn}(\det(A))|$

6) $h(A)=\mathrm{sgn}(\det(A))$

この定理の証明は次の文献を参照されたい。

Lectures on Functional Equation and their Application by J. Aczel

Academic Press 1966

○上述の必要諸条件を満たす解

前述の補助定理を使って解を求める。従って，何らかの手段により，補助定理の使える状態にもって行く。

条件4を書き換えて

$$\frac{f(D\Sigma_1\tilde{D})}{f(\Sigma_1)}=\frac{f(D\Sigma_2\tilde{D})}{f(\Sigma_2)}\quad\cdots\cdots(5)$$

これは任意の Σ_i に対して成り立たねばならないので，

$$\frac{f(D\Sigma\tilde{D})}{f(\Sigma)}=h(D)\quad\cdots\cdots(6)$$

従って $f(D\Sigma\tilde{D})=h(D)f(\Sigma)$ ……(7)

処で $(A\in D,\ B\in D)\rightleftarrows(A\cdot B\in D)$ なので，そのような A, B に対して

$$f(AB\Sigma\tilde{B}\tilde{A})=h(A)f(B\Sigma\tilde{B})=h(A)\cdot h(B)\cdot f(\Sigma)\quad\cdots\cdots(8)$$

一方

$$f(AB\Sigma\tilde{B}\tilde{A})=f((AB)\Sigma(\widetilde{AB}))=h(A\cdot B)\cdot f(\Sigma)\quad\cdots\cdots(9)$$

従って

$$h(AB)=h(A)\cdot h(B)\quad\cdots\cdots(10)$$

これは補助定理をそのまま適用できて，この解は，補助定理の項における 1) から 6) までの函数形のうちのいずれかである。

処で函数 h の満たすべきその他の条件は，(6) 式を考慮して

① f に関する条件 2，すなわち(1)式および(3)式より

$$h(D)=\frac{f(D\Sigma\tilde{D})}{f(\Sigma)}>0$$

② f に関する条件3すなわち (2) 式より

$$\lim_{D\to 0} h(D)=\lim_{D\to 0}\frac{f(D\Sigma\tilde{D})}{f(\Sigma)}=\frac{f(O)}{f(\Sigma)}=0$$

③ （6）式の D を E で置き換えて

$$h(E)=\frac{f(E\Sigma\tilde{E})}{f(\Sigma)}=\frac{f(\Sigma)}{f(\Sigma)}=1$$

但し E: 単位行列

函数 h はすでに述べたように補助定理における(1)式から (6) 式までのいづれかでなければならないが，更に上記の3条件を満たすものでなければならない。

函数形 2) と 6) は条件①を満たさない。4) と 5) は条件②を満たさない。3) は条件③を満たさない。残るのは 1)のみであるが，そのうち $c\leq 0$ の場合は，条件②を満たさない。結局，次に示す函数形のみとなる。

$$h(D)=|\det(D)|^c \quad (c>0) \qquad \cdots\cdots(11)$$

函数 f については，（6）式より

$$f(D\tilde{D})=f(DE\tilde{D})=h(D)\cdot f(E)$$
$$=f(E)\cdot|\det(D)|^c \quad (c>0) \qquad \cdots\cdots(12)$$

従って

$$f(D\tilde{D})=f(E)\cdot(\det(D\tilde{D}))^{c/2} \qquad \cdots\cdots(13)$$

処で $D\tilde{D}\subset\Sigma$, 且つ $\Sigma\subset D\tilde{D}$ であるから，上式は次のように書き表わされる。

$$f(\Sigma)=f(E)\cdot(\det(\Sigma))^{c'} \quad (c'>0) \qquad \cdots\cdots(14)$$

$f(E)=e$ として改めて

$$f(\Sigma)=e(\det(\Sigma))^c \quad (c>0) \qquad \cdots\cdots(15)$$

これが，函数 f に関する最終的な答である。これは函数 f として満たさなければならない4項目の条件を全て満たす。つまり，これは函数 f の解であり，且つこれ以外にない。

付録 7. 定理 1,2 の証明

Th 1 $\det(\Sigma_1)<\det(\Sigma_2)\rightarrow f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)$ ……(1)

Th 2 $\det(\Sigma_1)=\det(\Sigma_2)\rightarrow f(\Sigma_1)=f(\Sigma_2)$ ……(2)

但し函数 f は次の条件を満たしている。

1. 任意の実数値正方行列 D（大きさは Σ と同じ）に対して

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)\rightleftarrows f(D\Sigma_1\tilde{D})<f(D\Sigma_2\tilde{D}) \qquad \cdots\cdots(3)$$

但し Σ_1,Σ_2 については $f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)$ でありさえすれば任意でよい。

2. 任意の Σ_0 に対して

$$\lim_{\Sigma\to\Sigma_0} f(\Sigma)=f(\Sigma_0) \qquad \cdots\cdots(4)$$

3. $|\Sigma_0|<\infty$ なる任意の Σ_0 に対して

$$f(\Sigma_0)<\lim_{|\Sigma|\to\infty} f(\Sigma) \qquad \cdots\cdots(5)$$

○定理 1 の証明

$0<|\Sigma_1|<|\Sigma_2|$ なるひとつの Σ_1, ひとつの Σ_2 について考える。このことからもちろん

$$|\Sigma|<\infty \qquad \cdots\cdots(6)$$

Σ_1,Σ_2 は次のような関係にあるものとする。

$$\Sigma_2=A\Sigma_1\tilde{A} \qquad \cdots\cdots(7)$$

（このような A は必ず存在する）

そうすると

$$|\Sigma_1|<|\Sigma_2|=|A\Sigma_1\tilde{A}|=|\Sigma_1|\cdot|A|^2 \qquad \cdots\cdots(8)$$

従って $|A|^2>1$ ……(9)

いま次のような行列 Σ_n の系列 ($n=2,3,\cdots$) を考える。

$$\Sigma_n=A\Sigma_{n-1}\tilde{A} \quad 即ち \quad \Sigma_n=A^{n-1}\Sigma\tilde{A}^{n-1} \qquad \cdots\cdots(10)$$

そうすると条件 1，あるいは（9）式により

$$|\Sigma_1|<|\Sigma_2|<|\Sigma_3|<\cdots\cdots<|\Sigma_n|< \qquad \cdots\cdots(11)$$

但し，この系列の極限については

$$\lim_{n\to\infty}|\Sigma_n|=\lim_{n\to\infty}|\Sigma_1|\cdot|A|^{2(n-1)}=\infty \qquad \cdots\cdots(12)$$

一方，函数 f については，$|\Sigma_1|<|\Sigma_2|$ なるひとつの Σ_1, ひとつの Σ_2 に対して $f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)$ であるか $f(\Sigma_1)\geq f(\Sigma_2)$ であるかのいづれかである。

仮に

$$f(\Sigma_1)\geq f(\Sigma_2) \qquad \cdots\cdots(13)$$

であるとする

そうすると条件 1 （3）式により

$$f(\Sigma_1)\geq f(\Sigma_2)\geq f(\Sigma_3)\geq\cdots\geq f(\Sigma_n)\geq \qquad \cdots\cdots(14)$$

処が $|\Sigma_n|\to\infty$ ($n\to\infty$) なので

$$f(\Sigma_2)\geq f(\Sigma_1)\geq$$
$$\cdots\geq f(\Sigma_n)\geq\cdots\geq\lim_{|\Sigma_n|\to\infty} f(\Sigma_n) \qquad \cdots\cdots(15)$$

これは明らかに条件3（5）式に矛盾する。この矛盾は (13) 式の仮定に帰因する。よって

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2) \qquad \cdots\cdots(16)$$

でなければならない。証明終り。

○定理 2 の証明

$0<|\Sigma_1|=|\Sigma_2|$ なるひとつの Σ_1, ひとつの Σ_2 について考える。

ε を対角行列とし各対角要素 ε_i はことごとく

$$0<\varepsilon_i=c<1 \qquad \cdots\cdots(18)$$

であるとする。

I を単位行列とする。

そうすると

$$|\Sigma_1(\mathrm{I}-\varepsilon)|<|\Sigma_2|<|\Sigma_1(\mathrm{I}+\varepsilon)| \qquad \cdots\cdots(19)$$

従って定理 1 により

$$f(\Sigma_1(\mathrm{I}-\varepsilon))<f(\Sigma_2)<f(\Sigma_1(\mathrm{I}+\varepsilon)) \qquad \cdots\cdots(20)$$

そこで $||\varepsilon||\to 0$ としたときの極限をとれば，連続性

の条件 2 (4) 式により

$$f(\Sigma_1)<f(\Sigma_2)<f(\Sigma_1)$$

従って　$f(\Sigma_1)=f(\Sigma_2)$　証明終り。

尚，定理 1，2 が共に成り立てば，その逆も成り立つ。これは帰謬法により容易に証明される。

付録 8. 実験計画法と本理論との相違

	実験計画法	本理論
発端	農事試験	人工衛星追跡
適用範囲	実験，試験 線形	観測系（実験，試験等を含む） 非線形でもよい。
最適性基準	不明確	不確定度を最小にする。
内容	分散分析に重きをおく。	計画法に重きをおく。 分散分析には言及していない。

TR-292	翼型の非圧縮乱流ウェーク流の近似計算法 —対称ウェーク流の場合— An Approximate Calcutation Method of Incompressible Turbulent Wakes bihind Aerofoils—Symmetrical Wake Flow Case—	1972年7月	石田洋治
TR-293	き裂先端塑性域に線形な応力分布のある弾塑性モデルの解析 An Elastic-Plastic Analysis of a Crack with Linearly Distributed Stress in the Plastic Zone.	1972年8月	寺田博之
TR-294	ジェットフラップを持つ高揚力機の地面効果 Effect of Ground Proximity on the Longitudinal Aerodynamic Characteristics of an Airplane with a Jet-Flapped High Lift Wing	1972年8月	遠藤　浩, 高橋　宏 中谷輝臣, 綿貫忠晴
TR-295	自機搭載型軌道保持システムのための軌道決定と制御 Orbit Determination and Control Method for Self-Contained Station-Keeping System	1972年8月	松島弘一
TR-296	航空用ガスタービン燃焼器のライナ壁面の冷却 Liner Cooling of the Aeronautical Gas Turbine Combustor	1972年8月	相波哲朗
TR-297	Green 関数を二次元ラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算（境界条件として温度勾配を与える場合） A Calculation of Temperature Distribution by Applying Green's Function to a Two-Dimentional Laplace's Equations. (The Case in which the Temperature Gradients on the Boundary are Given)	1972年8月	西村英明, 臼井　弘
TR-255T	The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earthis Gravitational Field	Aug. 1972	Sumio TAKEUCHI, Koichi MATSUSHIMA
TR-298	航空機用対気速度計の位置誤差について Experiment on Airspeed Calibration Procedure	1972年12月	幸尾治朗, 岡　遠一 塚野雄吉, 矢沢健司 小野孝次
TR-299	遷音速における二次元翼の抵抗発散 On the Drag Divergence of Two Dimensional Airfoils at Transonic Speeds	1973年1月	神谷信彦, 西　武徳 伊藤　忠, 瀬川晋策 小此木時雄
TR-300	そり角の小さい遷音速二重円弧二次元翼列実験 Experimental Investigation of Two-Dimensional Cascade Performance with Thin and Low-Cambered Double-Cicular-Arc Blade Sections at Transonic Inlet Mach Number Range	1972年10月	坂口　一, 近藤　博 高森　晋, 岩下敬吾

航空宇宙技術研究所報告301号

昭和47年9月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　有限会社 啓文堂松本印刷
東京都文京区水道2—7—5

Printed in Japan