

UDC 519.28:

629.783.058

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-302

Kalman-Bucy フィルターによる
誘導誤差の推定

村田正秋

1972年10月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|----------|---|-----------|---|
| TR-280 | ガンタンネルによる鈍頭円錐の極超音速空力特性試験
Experimental Study on the Hypersonic Aerodynamic Characteristics of Spherically Blunted Cones by the Gun Tunnel | 1972年5月 | 曾 我 国 男, 小野寺信幸 |
| TR-281 | ジェットエンジンのデジタル制御
(1) 装置および予備実験
Digital Control of Jet Engines
(1) Control System and Preliminary Experiments | 1972年7月 | 西尾健二, 遠藤征紀
杉山七契, 藤沼幸雄
大畑敏美, 松田幸晋
吉田晃, 中山 |
| TR-282 | 高温タービン試験設備およびその計測装置
On the High Temperature Test Facilities and the Data Processing System | 1972年6月 | 原 動 機 部 |
| TR-283 | エンジン特性の実時間シミュレーション(I)
(装置および特性)
Real-Time Simulation of Jet Engines With Digital Computer (I)
(Fabrication and Characteristics of the Simulator) | 1972年7月 | 西尾健二, 杉山七契
越沼威, 橋本武男
大畑敏美, 市川英夫 |
| TR-284 | 高 dn 値における玉軸受の性能に関する研究
Study on Performance of Ball Bearings at High dn Values | 1972年5月 | 宮川行雄, 関 勝美
横山正幸 |
| TR-285 | 高温固体潤滑剤としての一酸化鉛 (PBO) に関する基礎的研究
Study on Lead Monoxide as Solid Lubricant for High Temperatures | 1972年5月 | 宮川行雄, 西村 允
安部 亘 |
| TR-286 T | An Investigation of Secondary Injection Thrust Vector Control | May, 1972 | Tatsuo YAMANAKA |
| TR-287 | 内面加熱を受ける中空円筒の非定常熱応力
Transient Thermal Stresses of the Hollow Cylinder Subjected Uniform Inner Heating | 1972年5月 | 江川幸一, 竹中幸彦 |
| TR-288 | 低アスペクト比後退角片持平板翼の遷音速および超音速のフラッタ特性
The Transonic and Supersonic Flutter Characteristics of Low Aspect Ratio Sweptback Thin Cantilever | 1972年5月 | 中井暎一, 森田甫之
菊池孝男, 高橋 実
東久保正年 |
| TR-289 T | Transient Hypersonic Leading-Edge Flow | Jun. 1972 | Katsuhisa KOURA |
| TR-290 | 二自由度回転駆動振動検出型ジャイロの研究
Study of a Rotary-drive Vibratory-output Two-degree-of-freedom Gyro | 1972年7月 | 山 田 博 |
| TR-291 | はり板結合構造物の振動(III)
On the Natural Vibration of Plate-Beam Combination Structures (III) | 1972年7月 | 埜 武敏, 林 洋一
多田保夫, 戸田 敏
日下和夫 |
| TR-292 | 翼型の非圧縮乱流ウェーク流の近似計算法
—対称ウェーク流の場合—
An Approximate Calculation Method of Incompressible Turbulent Wakes Behind Aerofoils -Symmetrical Wake Flow Case- | 1972年7月 | 石田洋治 |
| TR-293 | き裂先端塑性域に線形な応力分布のある弾塑性モデルの解析
An Elastic-Plastic Analysis of a Crack with Linearly Distributed Stress in the Plastic Zone | 1972年8月 | 寺 田 博 之 |
| TR-294 | ジェットフラップを持つ高揚力機の地面効果
Effect of Ground Proximity on the Longitudinal Aerodynamic Characteristics of an Airplane with a Jet-Flapped High Lift Wing | 1972年8月 | 遠藤 浩, 高橋 宏
中谷輝臣, 綿貫忠晴 |

Kalman-Bucy フィルターによる誘導誤差の推定*

村 田 正 秋**

Estimation of Guidance Errors by Kalman-Bucy Filtering Technique

By Masaaki MURATA

This report describes the application of Kalman-Bucy filter theory to postflight guidance error analysis. It concentrates especially on trajectory reconstruction and the estimation of guidance hardware errors and radar system errors, such as accelerometer bias, gyro drift rate, radar location uncertainty and the like, by processing both guidance telemetered and radar tracking data. The filtering technique is developed in full detail for a launch vehicle with a strapdown inertial navigation system.

Digital simulations are also presented. The results demonstrate that the approach proposed here is very promising for postflight guidance-trajectory analysis.

1. ま え が き

最大のペイロードを所要の軌道に精度よく投入するために、人工衛星打ち上げ用ロケット (launch vehicle) のような大型ロケットは、何らかの誘導システム (広義の) を有するのが普通である。この誘導システムは機能上もっと細かく分類されて、航法 (Navigation)、誘導 (Guidance)、制御 (Control) という各サブシステムから構成される。すなわち完全な誘導システムはひとつの規準座標に対する、ロケットの時々刻々の位置、速度を決定し (Navigation)、この情報に基づいて目的を達成するためには現時刻でロケットの速度ベクトルの方向と大きさをどのように修正すべきか (Guidance)、そこで指定された修正量を忠実に実行する (Control)、という3つの機能を満足するものでなければならない。図1は一般的な GN & C システムを示している^{36)~38)}。

誘導方式は大きく、慣性誘導と電波誘導に分けられる。慣性誘導は、ロケットに搭載されている加速度計、ジャイロからなる慣性機器 (Inertial Measurement Unit、以後では IMU と略述することが多い) の出力に基づき G & N を行なう方式であるが、G & N が

完全に (搭載計算機によって) onboard で実行されるか、あるいはその一部が地上の計算設備を介して閉ループを構成するかに応じて、それぞれ純慣性誘導 (pure inertial guidance) および電波慣性誘導 (radio-inertial guidance) という。一方電波誘導 (radio guidance) は、地上の誘導ステーションのトラッキングデータのみに基づいて G & N を行なう方式である。

慣性誘導における航法システムには gimbaled stable platform 方式と strapdown 方式がある。platform 方式は規準座標をメカニカルに保持するものであるが、strapdown 方式では、機体固定座標と慣性座標の間の変換行列を実時間計算することによって規準座標を保持する。strapdown 方式は搭載計算機および IMU のハードウェア、ソフトウェアの発展により近い将来航法システムの主流になることが期待される。platform 方式と比べた利点としては、低価格で消費電力も少なく小型軽量、高い信頼性、メンテナンスが容易等を挙げることができる。欠点としては座標変換のための高速計算機を必要とする、機体振動に対するミスアラインメントの補正という問題がある。

誘導性能は、インジェクション時の軌道誤差で評価するのが普通であるが、その誘導性能を劣化させる誤差源は次の3つの主要なクラスに分けられる。

- 1) 誘導のためのハードウェアに起因する誤差
慣性機器固有の誤差で、例えば加速度計のバイア

* 昭和47年7月12日受付

** 計測部

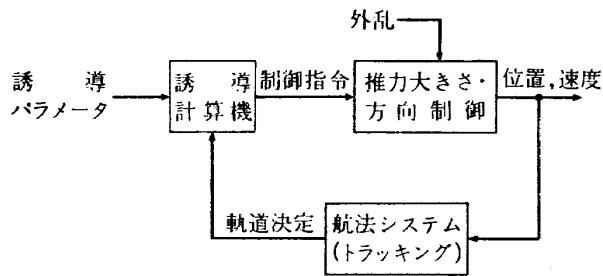


図1 一般的な GN & C システム

ス、スケールファクタ誤差あるいはジャイロのドリフトなど。

2) 誘導のためのソフトウェアに起因する誤差

重力ポテンシャルおよび誘導方程式の近似誤差、ロケット諸元のパラメータ同定誤差、搭載計算機の計算誤差など。

3) プロパルジョンシステムの誤差

推力軸のミスアラインメント、推力大きさの誤差、残留推力、切り離しのためのインパルス誤差など。

その他電波誘導においては、トラッキングステーションの位置誤差、レーダーシステムの観測誤差も無視しえない誤差源である。誘導性能向上のためには上記各誤差に関する詳細な評価と検討が必要である。

誘導誤差の解析に利用できる情報は通常 (a) テレメータによって地上へ伝送される IMU データ (guidance telemetered data), (b) トラッキングデータ、であり、ロケットのダイナミクス、航法システムおよびレーダーシステムは常に不規則な雑音を受けているという実際的情況から、解析の手法も統計的であることが望ましい。共分散 (covariance) 法とモンテカルロ法²⁴⁾ が代表的である。

不規則雑音に汚された観測データから、もとのシステムの状態または未知パラメータを推定する統計的推測の研究は、1940 年代 Kolmogorov¹⁾ および Wiener²⁾ による定常エルゴード (スカラー) 過程に対する周波数領域の理論に端を発し、1950 年代後半 Kalman³⁾, Bucy⁴⁾, および Stratonovich⁵⁾ 等によって、今日の状態空間における非定常確率過程に対する推定理論が厳密な理論体系として完成を見た。この推定理論は宇宙航空技術の諸分野に画期的な手段を提供することとなり、現在この分野の技術者、研究者にとって必須の知識であると言える (例えば Smith⁶⁾, Bucy & Joseph⁷⁾, Jazwinski⁸⁾, Meditch¹²⁾)。共分散法という場合は、古典的な (重みつき) 最小自乗法と、ある意味でそれに等価な Kalman-Bucy の線型フィルターなどを代表し、次の 2 つの基本的仮定が満たされるとき極めて有効で

ある。

- (1) システムの挙動は線型常微分方程式に従う。
- (2) すべての誤差源 (擾乱) の分布は正規性である。

本来あらゆる実システムは非線型であることを考慮して (1) は線型化可能といい換えてよい。(2) は出力変数もまた多次元正規分布に従うことを意味し、その分布を特徴づける共分散行列は time-variant である。上記 2 つの仮定が満足されるならば、モンテカルロ法による解析は不要であって正規分布の知識から変数に関する確率論的主張が可能になる。これらの仮定のうち少くともひとつが満たされないとき、すなわち誤差源と出力変数の関係が非線型であったり、あるいは正規分布に従わない誤差が存在するならばモンテカルロ法によらざるを得ない。宇宙技術においては通常誤差が線型に伝播するという仮定が疑わしいということではなく、むしろある種の非線型現象があるというべきである。例えば惑星間飛行における速度修正 (midcourse velocity correction) ではエンジン出力 (修正) と入力 (速度変位) は非線型の関係で結ばれている。

誘導誤差解析は、そのなされる時点がミッションの各段階、すなわち飛しょう前、推力飛しょう中、飛しょう後のいずれであるかに応じて当然手法と目的を異にする。表 1 はその分類と推定理論との関係を示すものである。ただし、軌道投入までの推力飛しょう段階に限定されている。推定理論の各段階への応用上著しい相違は、いわゆる状態ベクトルの次元である。推力飛しょう中は、現時刻までの実観測データに基づく実時間プロセッシングが中心であり、それを可能ならしめるため推定すべきパラメータも極力精選されて最終的には 10~15 にしぼられる。一方飛しょう前、飛しょう後の解析においては必ずしも実時間計算を行なう必要はないから、原理的には考え得る限りの未知パラメータを状態ベクトルとして導入してよい。しかしながら實際上、観測データの中にそれに関する情報が殆んど含まれていないため分離できないパラメータが多く存在すること、状態ベクトルの次元の 3 乗のオーダーで所要計算時間が増加することから感度解析・モンテカルロ法等による事前解析によって誘導性能に最も敏感な影響を与えるパラメータのみを適切に選択すべきである。

本報告では、衛星打ち上げ後の事後処理の一環として、テレメータによって伝送された IMU データおよび独立な情報源としてのトラッキングデータから軌道誤差、誘導誤差およびレーダーシステム誤差を

表 1 推定理論の誘導誤差解析への応用

phase	content	available information	method
pre-flight	• mission planning	simulated IMU and tracking data	prediction filtering
	• calibration and alignment for IMU	real //	filtering smoothing
in-flight	• in-flight calibration • (near) real time trajectory determination	real //	filtering prediction smoothing
post-flight	• guidance error recovery	real //	filtering smoothing

Kalman-Bucy 理論により推定する手法を strapdown 方式について確立し、擬似観測データに基づくディジタルシミュレーションによりその有効性を検討する。

Stable platform 方式については従来の伝統的な(重みつき)最小自乗法によるものまで含めて多数報告されている。例えば、W. Eisner & A.F. Goodman¹⁴⁾, R.C. Rodems²⁰⁾, J.V. Brown & J.S. Tyler Jr.^{17),18)}, W.F. Trench¹⁵⁾, K.L. Remmler & R.T. Theobald¹⁹⁾ および J.L. Greenstein¹⁶⁾ が代表的である。

ここで述べる手法は、誘導のためのソフトウェア誤差およびプロパルジョン誤差の有無とは全く無関係にレーダーシステムも含めた航法系のハードウェア誤差および軌道誤差を推定する手段を提供し、次段階の総合的誤差解析の一端を担うものである。

飛しょう後の誘導誤差解析の目的としては、

- (1) 軌道の再構成
- (2) IMU 作動状況のチェックアウト
- (3) 将来のミッションに対する統計的データの収集 (例えばステーションの位置誤差、観測バイアスの推定)

を挙げることができる。

本報告は次の8節と付録から構成されている。まず2節において本報告で使用する主要な記号を説明する。3, 4節で strapdown 方式による航法システムの構成と慣性機器の誤差モデル、トラッキングにおける誤差モデルが説明される。5節で Kalman-Bucy 理論による統計的誘導誤差解析の思想が述べられ、strapdown方式に対する一般的アルゴリズムが与えられる。6, 7節は、アルゴリズムの有効性を確認するためのシミュレーションの手法と計算結果の検討に割り当てられる。8節では今後の研究が期待される未解決の課

題について述べた。付録として本報告の理解を助けるため、Kalman-Bucy 理論の基礎を説明し、続いて5節に使用したH-行列の計算式が与えられる。

2. 主要な記号

Σ_I : 地球中心の慣性座標系で基底 i, j, k をもつ。
 i, k はそれぞれ春分点、北極方向の単位ベクトルで $j = k \times i$ とする。

Σ_B : 機体中心の直交座標系で基底 i_B, j_B, k_B はそれぞれロケットのピッチ軸、ヨー軸およびロール軸方向を示す。

Σ_L : 機体中心の局所水平垂直座標系で基底 e_1, e_2, e_3 はそれぞれダウンレンジ、クロスレンジおよび高度方向を示す。

Σ_T : レーダーステーション T に中心をもつ局所水平垂直座標系で基底を e, n, h とする(図4を参照)。

()': ベクトルまたは行列の転置作用素

()*: 軌道、姿勢またはパラメータの規準値

()_I, ()_B, ()_L: それぞれ Σ_I, Σ_B および Σ_L に関するベクトルまたは行列

()_M: 計測データ

δ : 規準値に関する第1変分

$R = (XYZ)'$: ロケットの Σ_I に関する位置ベクトル

$V = (\dot{X}\dot{Y}\dot{Z})'$: ロケットの Σ_I に関する速度ベクトル

g : 重力加速度ベクトル

a : 非重力加速度ベクトル

p : 重力ポテンシャルの未知パラメータ

$\omega_{IB} = (\omega_x \omega_y \omega_z)'$: ロケットの回転角速度ベクトル

$T_{IB} = (t_{ij})$: Σ_B から Σ_I への座標変換行列

T_{LI} : Σ_I から Σ_L への座標変換行列

$\delta e = (\delta \epsilon_x \delta \epsilon_y \delta \epsilon_z)'$: Σ_B^* に関する Σ_B のドリフト角

$E_A=(e_{ij})$: 加速度計のスケールファクタ および ミス
アラインメント誤差係数行列

$\alpha=(\alpha_x \alpha_y \alpha_z)'$: 加速度計のバイアス誤差

ξ_A : 加速度計の不規則雑音

$E_G=(s_{ij})$: ジャイロのスケールファクタ および ミス
アラインメント誤差係数行列

$F_G=(\gamma_{ij})$: ジャイロの加速度 比例ドリフトレート誤
差係数行列

$\beta=(\beta_x \beta_y \beta_z)'$: ジャイロの定常ドリフトレート誤差

ξ_G : ジャイロの不規則雑音

$R_{T_i}=(X_{T_i} Y_{T_i} Z_{T_i})'$: ステーション T_i の Σ_I に関す
る位置ベクトル

λ_i : ステーション T_i の緯度

ϕ_i : ステーション T_i の経度

ρ_i : ロケットのステーション T_i に対する位置ベクト
ル

ρ_i : ステーション T_i に対するロケットの最短斜距離
(slant range)

$\dot{\rho}_i$: ステーション T_i に対するロケットの相対速度
(range rate)

E_i : 仰角 (elevation)

A_i : 方位角 (azimuth)

$b^i=(b_{\rho_i} b_{\dot{\rho}_i} b_{E_i} b_{A_i})'$: ステーション T_i の観測バイア
ス誤差ベクトル

$\eta^i=(\eta_{\rho_i} \eta_{\dot{\rho}_i} \eta_{E_i} \eta_{A_i})'$: レーダ観測の不規則雑音

t_k : 観測時刻

$y^i=(\rho_i \dot{\rho}_i E_i A_i)'$: ステーション T_i における観測ベ
クトル

N : 利用可能なレーダーステーション数

R_E : 地球の平均半径

$\omega_E=(0 \ 0 \ \omega_E)'$: 地球の自転角速度ベクトル

$\varepsilon\{\cdot\}$: 期待値

$\mathfrak{M}(t_n)$: 時刻 t_n までの観測データの集合

$\varepsilon\{\cdot | \mathfrak{M}\}$: 条件つき期待値

$x(s)$: 力学系の状態ベクトル

$\hat{x}(s|t_n)$: $\mathfrak{M}(t_n)$ により条件づけられた期待値

$\tilde{x}(s|t_n)=x(s)-\hat{x}(s|t_n)$: 推定誤差

$P(s|t_n)$: 共分散行列

$\phi(t)$: 既知の強制項

$F(t)$: システムの感度行列

$H(t)$: 観測感度行列

$K(t_n)$: フィルターの Kalman ゲイン行列

$\Phi(t, s)$: 遷移行列

(\cdot) , $(\ddot{\cdot})$: 1階および2階の時間微分

IA, OA, SRA (PRA): 慣性機器のそれぞれ入力軸,

出力軸, スピン軸 (pendulum 軸)

$\sigma_{(\cdot)}$: パラメータ (\cdot) に関する標準偏差

$|\cdot|$: Euclid ノルム

3. Strapdown 航法システム

近年における搭載型電子計算機技術のめざましい発
展と慣性機器の高精度化によって, strapdown 航法シ
ステムが将来における慣性誘導の主流になることをす
でに述べた。本節では以後の説明の便宜上 strapdown
方式の航法システムに関して補足をしておこう。

慣性機器 (加速度計およびジャイロ) はその入力軸
が互いに直交するように取り付けられるが, strapdown
方式では stable platform 方式と違って機体に固定さ
れる (strapped down)。慣性機器の入力軸が構成する
座標系 (instrumentation coordinate) は規準的 (nomi-
nally) に直交系をなし, しかも Σ_B と一致するものと
してよい。すなわち慣性機器はロケットのピッチ, ヨ
ーおよびロール軸方向の非重力加速度 α_B およびその
軸まわりの回転角速度 ω_{IB} を計測する。したがって
慣性空間における非重力加速度 α_I を知るために, 座
標変換行列 (本報告では方向余弦行列) T_{IB} を同時に
計算しなければならない。そのとき

$$\alpha_I = T_{IB} \alpha_B \quad (3.1)$$

この変換行列 T_{IB} は次の常微分方程式に従うこと
が容易に示される (例えば W. Wrigley²²⁾ の pp. 241
参照)。

$$\dot{T}_{IB} = T_{IB} [\omega_{IB} \times] \quad (3.2)$$

ただし

$$[\omega_{IB} \times] \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \quad (3.3)$$

とする。ここで $\omega_{IB}=(\omega_x \ \omega_y \ \omega_z)'$ はロケットの角速
度ベクトルを表わし, その成分はそれぞれピッチレ
ート, ヨーレートおよびロールレートを示す。ジャイロ
により計測された ω_{IB} を使って (3.2) から計算さ
れる。 T_{IB} の各列ベクトル

$$\begin{pmatrix} t_{11} \\ t_{21} \\ t_{31} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{12} \\ t_{22} \\ t_{32} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} t_{13} \\ t_{23} \\ t_{33} \end{pmatrix}$$

はそれぞれピッチ, ヨーおよびロール軸の慣性空間に
対する方向を示す単位ベクトルである。

† 正確にはロケットの打ち上げ直前の calibration
data に基づき, ジャイロの出力を補償する。加速
度計の場合も同様である。また注 11 も参照され
たい。

以上から strapdown 方式による衛星打ち上げ用ロケットの並進運動は、慣性座標系 Σ_I において

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} \quad (3.4)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{g}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + T_{IB}\mathbf{a}_B \quad (3.5)$$

と書ける。ここで \mathbf{R} , \mathbf{V} はそれぞれ位置および速度ベクトル, $\mathbf{g}(\mathbf{R}, \mathbf{p})$ は重力加速度, \mathbf{p} は重力ポテンシャルに関する未知パラメータとする。(3.2), (3.4), (3.5) 式が剛体としてのロケットの運動を記述する厳密な運動方程式である。

次に慣性機器の誤差と strapdown パッケージの構成について言及する。ここでは慣性機器として 1 自由度ペンデュラム型加速度計 (single-degree-of-freedom pendulum type accelerometer) および 1 自由度積分ジャイロ (single-degree-of-freedom rate integrating gyro) を使用するものとする。これらの入出力関係を表わす数学的モデルは predictable で通常次式が採用されている。

$$\mathbf{a}_{BM} = \mathbf{a}_B + \underbrace{E_{AA}\mathbf{a}_B + \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\xi}_A}_{\text{誤差項}} \quad (3.8)$$

$$\boldsymbol{\omega}_{IBM} = \boldsymbol{\omega}_{IB} + \underbrace{E_{GG}\boldsymbol{\omega}_{IB} + F_G\mathbf{a}_B + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\xi}_G}_{\text{誤差項}} \quad (3.7)$$

あるいは成分で表示すると

$$\mathbf{a}_{BM} = \mathbf{a}_B + \begin{pmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{a}_B + \begin{pmatrix} \alpha_x \\ \alpha_y \\ \alpha_z \end{pmatrix} + \boldsymbol{\xi}_A \quad (3.6)'$$

$$\boldsymbol{\omega}_{IBM} = \boldsymbol{\omega}_{IB} + \begin{pmatrix} s_{xx} & s_{xy} & s_{xz} \\ s_{yx} & s_{yy} & s_{yz} \\ s_{zx} & s_{zy} & s_{zz} \end{pmatrix} \boldsymbol{\omega}_{IB} + \begin{pmatrix} \beta_x \\ \beta_y \\ \beta_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \gamma_{xx} & \gamma_{xy} & 0 \\ \gamma_{yx} & \gamma_{yy} & 0 \\ \gamma_{zx} & 0 & \gamma_{zz} \end{pmatrix} \mathbf{a}_B + \boldsymbol{\xi}_G \quad (3.7)'$$

ここに

$E_A = (e_{ij})$: 対角要素 および 非対角要素はそれぞれ 加速度計のスケールファクタ および ミスアライメントを表わす。

$\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_x \ \alpha_y \ \alpha_z)'$: 加速度計の定常バイアス誤差。

$E_G = (s_{ij})$: 対角要素 および 非対角要素はそれぞれ ジャイロのスケールファクタ および ミスアライメントを表わす。

$\boldsymbol{\beta} = (\beta_x \ \beta_y \ \beta_z)'$: ジャイロの定常バイアス誤差。

$F_G = (\gamma_{ij})$: 加速度比例ドリフトレート (mass unbalance drift rate) の誤差係数行列。後述する最適配置構造を組むことによって (3.7)' 式のように縮退化できる。

$\boldsymbol{\xi}_A, \boldsymbol{\xi}_G$: 上記モデルで考慮されなかった誤差, 例え

ば量子化 (quantization) の誤差であって一般的には非定常な不規則雑音と考えられる。

その他ジャイロの誤差として加速度の自乗に比例する不等弾性誤差 (anisoelectricity) を考慮する場合もある。

ところで (非重力) 加速度に比例する, あるいはその自乗に比例するような誤差はジャイロの出力軸 (OA) に垂直方向の加速度が作用するときに限り発生するものであるから⁴⁵⁾, ジャイロの取り付けを工夫することによってこの項の影響を低減することができる。すなわち, 通常 \mathbf{a}_B は推力軸方向に最大の成分を持つから, ピッチジャイロおよびヨージャイロの OA はロール方向に向くようにとればよい。ロールジャイロのスピン軸 (SRA) はヨー軸に対して垂直にとる。

以上から strapdown パッケージとしては図 2 のように構成するのが最適である。

衛星打ち上げ用ロケットのごとき多段大型ロケットでは打ち上げ直前に IMU の精密なチェックアウトがなされるのが普通であって, その結果は例えば搭載計算機に記憶されて, 推力飛しょう中の IMU 出力の補正に使われる。こうして修正された IMU データに

†† 慣性機器誤差モデルの最も詳細なものは Nash Jr.^{26), 28)} によるものであろう。彼らによるとまず $\boldsymbol{\xi}_A, \boldsymbol{\xi}_G$ は 1 次の Markov 過程と仮定され, $\boldsymbol{\beta}$ は定常バイアス, ランプ (ramp) バイアスおよび酔歩 (random walk) の一次結合で与えられるとする。すなわち

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\beta}(t_0) + \mathbf{w}(t) + \mathbf{a}(t - t_0)$$

ただし \mathbf{a} は定ベクトル, $\mathbf{w}(t)$ は Brown 運動過程⁴²⁾とする。また Oravetz²³⁾ らは時系列モデルを提案している。慣性機器の数学的モデルを確立することは誘導精度向上のため (特に惑星間飛行のような長期間にわたるミッションではジャイロのドリフトは著しい影響を及ぼす) 極めて重要な問題である。実験室実験から得られる実データの統計的処理に基づくモデリング, 実データと数学的モデルの比較研究は重要な課題である。

††† サターン V のチェックアウトの手法は, 単純化した最適線型フィルターを用いて, IMU の誤差係数の推定を行なうものである。すなわち補正すべき未知パラメータは, 加速度計のバイアスとスケールファクタおよびジャイロの定常ドリフトレート, g -および g^2 -比例ドリフトレートの合計 15 個である。

Kalman-Bucy フィルターをこの分野に応用した論文としては, strapdown 方式に対して J. F. Bellantoni³¹⁾, E. B. Crocker³²⁾, stable platform 方式に対しては G. T. Schmidt³³⁾ 等多数報告されている。

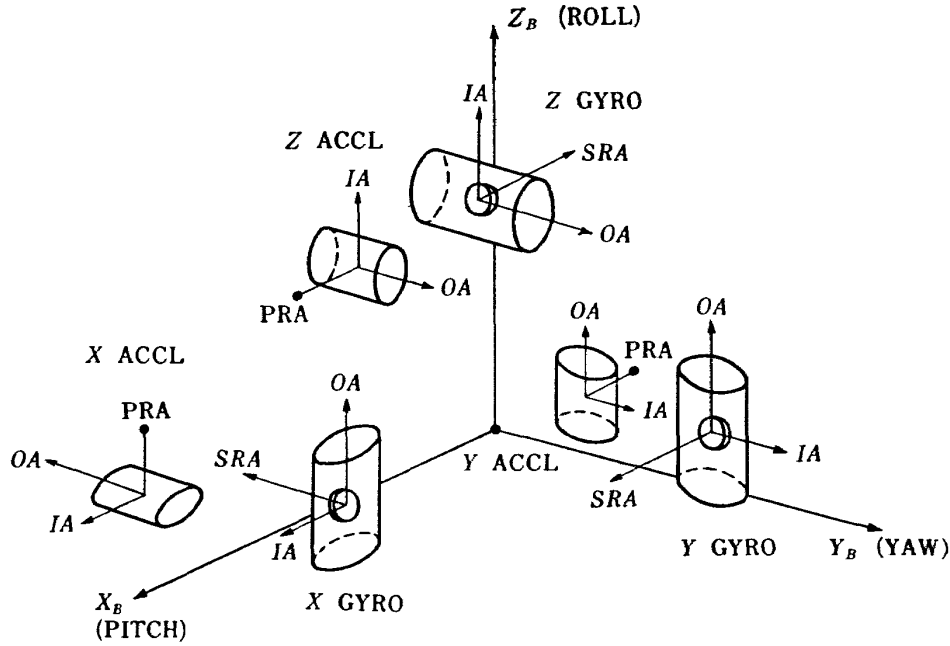


図 2 Strapdown パッケージの構成

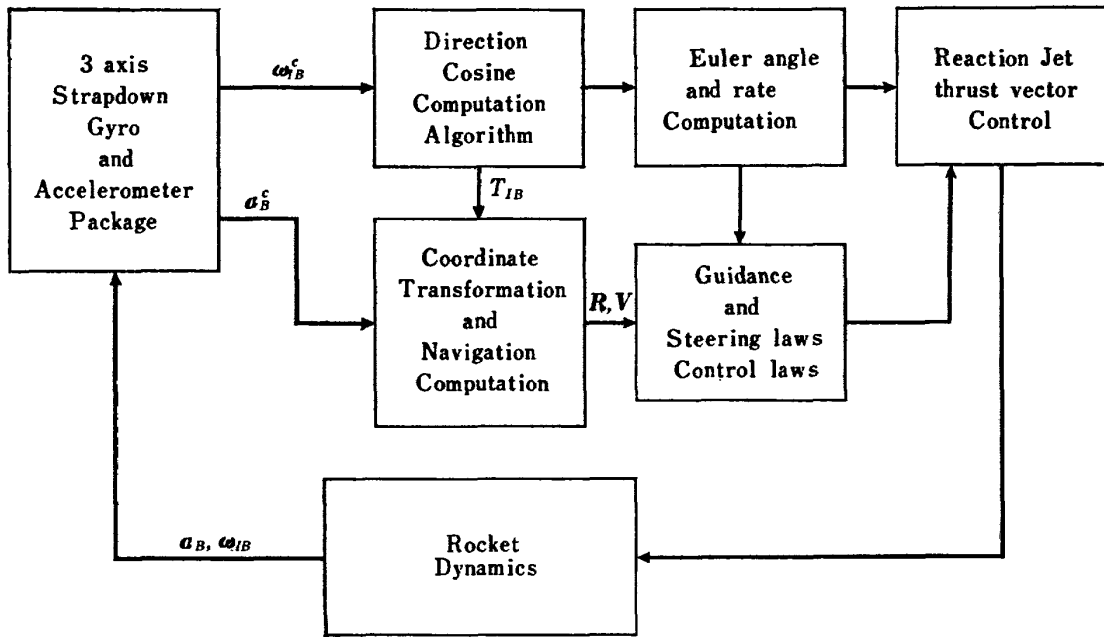


図 3 GN & C システム (strapdown 方式)

に基づき，搭載計算機（電波慣性誘導の場合は地上の大型電子計算機）は (3.2), (3.4), (3.5) を逐次積分することによって，ロケットの慣性空間に対する姿勢，位置および速度を決定することになる。図 3 は strapdown 方式による GN & C システムの概略である。添字 c は補償された IMU 出力を表わす。

4. トラッキングシステム

トラッキングステーション \$T_i (i=1, \dots, N)\$ の，慣性座標系 \$\Sigma_I: O_I X_I Y_I Z_I\$ に関する位置ベクトルを \$\mathbf{R}_{T_i}\$，経度および緯度をそれぞれ \$\lambda_i, \phi_i\$ とする (図 4)*。

いまステーション \$T_i\$ に関するロケットの位置ベクトルを \$\mathbf{\rho}_i\$ と置くと

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{\rho}_i &= \mathbf{R} - \mathbf{R}_{T_i} \\ \dot{\mathbf{\rho}}_i &= \dot{\mathbf{R}} - \dot{\mathbf{R}}_{T_i} \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

ただし

$$\mathbf{R}_{T_i} = \begin{pmatrix} X_{T_i} \\ Y_{T_i} \\ Z_{T_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_E \cos \phi_i \cos \lambda_i \\ R_E \cos \phi_i \sin \lambda_i \\ R_E \sin \phi_i \end{pmatrix}$$

$$\dot{\mathbf{R}}_{T_i} = \begin{pmatrix} \dot{X}_{T_i} \\ \dot{Y}_{T_i} \\ \dot{Z}_{T_i} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega_E Y_{T_i} \\ \omega_E X_{T_i} \\ 0 \end{pmatrix}$$

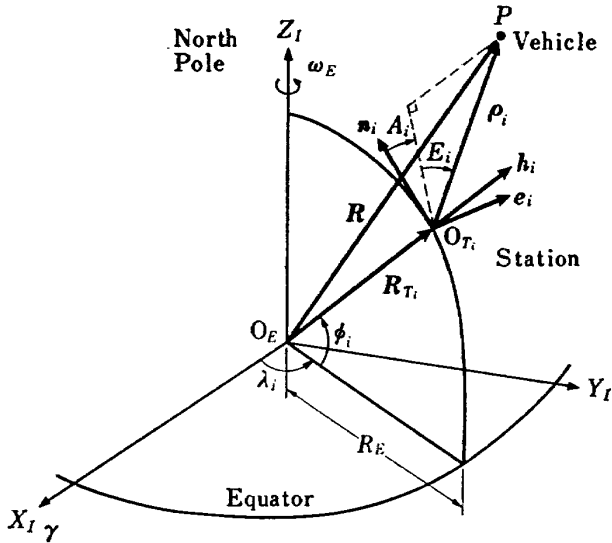


図4 レーダートラッキングシステム

ここで R_E は地球の平均半径を、 ω_E は自転角速度を表わす。したがって

$$\lambda_i(t) = \omega_E t + \lambda_i(0) \quad (4.2)$$

さてステーション T_i では通常次の4つの諸量に対する観測データが得られる:

$$\left. \begin{aligned} \text{スラントレンジ} \quad \rho_i &= |\rho_i| \\ \text{レンジレート} \quad \dot{\rho}_i &= \frac{d}{dt} \rho_i \\ \text{仰角} \quad E_i &= \sin^{-1} \left[\frac{(\rho_i, \mathbf{h}_i)}{\rho_i} \right] \\ \text{方位角} \quad A_i &= \tan^{-1} \left[\frac{(\rho_i, \mathbf{e}_i)}{(\rho_i, \mathbf{n}_i)} \right] \end{aligned} \right\} (4.3)$$

ただし $(\mathbf{e}_i, \mathbf{n}_i, \mathbf{h}_i)$ は局所水平垂直座標系 (local horizon-vertical coordinate system) Σ_{T_i} で、 Σ_I への変換は次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{i} &= -\sin \lambda_i \mathbf{e}_i - \cos \lambda_i \sin \phi_i \mathbf{n}_i + \cos \lambda_i \cos \phi_i \mathbf{h}_i \\ \mathbf{j} &= \cos \lambda_i \mathbf{e}_i - \sin \lambda_i \sin \phi_i \mathbf{n}_i + \sin \lambda_i \cos \phi_i \mathbf{h}_i \\ \mathbf{k} &= \cos \phi_i \mathbf{n}_i + \sin \phi_i \mathbf{h}_i \end{aligned} \right\} (4.4)$$

(4.3) 式は誤差のない完全観測の方程式であるが、現実には不規則雑音を含む極めて複雑な誤差源によって汚されたデータしか取得できない。誤差源としては、ステーションの位置誤差、レーダ観測におけるバイアス誤差、その他、タイミング、スケールファクタ、電波の屈折と遅れ等を挙げることができる。トラッキングの誤差モデルとして、どのレベルまでモデル化するかは、推定の要求精度と所要計算時間の trade-

off によって決定されるべきであり、その際モデル化されないパラメータの存在には細心の注意を払わなければならない。このモデリングの問題は後にも触れるが、フィルターの発散 (divergence)** のひとつの主要な原因をなすものであって理論的には種々の対策が提案されている。そのうち取扱いの最も簡単な常套手段はモデリング誤差それ自体をある種の不規則雑音によって置き換えてしまおうとするものである。“発散”問題とその防止については稿を改めて詳述することにした。

さて本報告ではステーションの位置ベクトル \mathbf{R}_{T_i} の誤差とレーダ観測におけるバイアス誤差

$$\mathbf{b}^i = \begin{pmatrix} b_{\rho_i} \\ b_{\dot{\rho}_i} \\ b_{E_i} \\ b_{A_i} \end{pmatrix}$$

を主要な誤差源と見なし、他のモデリング誤差を不規則雑音 $\boldsymbol{\eta}^i(t_k)$ に含めて考える。すなわちステーション T_i について観測方程式は

$$\mathbf{y}_M^i(t_k) = \mathbf{y}^i(t_k) + \mathbf{b}^i + \boldsymbol{\eta}^i(t_k) \quad (4.5)$$

で与えられる。ここで $\mathbf{y}^i(t_k)$ は T_i で得られる観測ベクトル

$$\mathbf{y}^i = \begin{pmatrix} \rho_i \\ \dot{\rho}_i \\ E_i \\ A_i \end{pmatrix}$$

で定義される。また $\{t_k\}$ は観測時刻であり、観測が連続的でなく離散的に行なわれることを表わす。

また

$$\mathbf{y} = \begin{pmatrix} y^1 \\ y^2 \\ \vdots \\ y^N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b^1 \\ b^2 \\ \vdots \\ b^N \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\eta} = \begin{pmatrix} \eta^1 \\ \eta^2 \\ \vdots \\ \eta^N \end{pmatrix}$$

と置くと観測方程式は簡単に

$$\mathbf{y}_M(t_k) = \mathbf{y}(t_k) + \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}(t_k) \quad (4.5)'$$

と書ける。

後節では、 $\boldsymbol{\eta}(t_k)$ は平均値 0、共分散行列 $R(t_k)$ をもつ正規性白色雑音であると仮定される。この仮定は必ずしも現実的でないことは明らかである。実際多段大型ロケットの誘導に見られるように、比較的低高度の時点から誘導を開始するとき、仰角および方位角に関する観測雑音は数秒の correlation time をもつ有色雑音 (colored noise) であることが認められる。こ

* ここでは球状の地球を設定している。扁球形を考慮した定式化は例えば P.R. Escobal⁴⁰⁾ に見られる。

** 推定誤差の共分散行列の trace は 0 に収束するにもかかわらず、推定誤差のノルムは発散してゆく現象。

の問題についても本稿の範囲を超えるので別に論じた
い。

5. 誘導誤差解析への応用

誘導誤差は、(1) ハードウェア誤差、(2) ソフトウェア誤差、(3) プロパルジョン誤差に分類できることをまえがきで述べた。インジェクション誤差を上各誤差に分離し、さらに誤差の構成要因（例えば加速度計のバイアスなど）別に分離することが、総合的誘導誤差解析の主題になるわけであるがそれについてはここでは言及しない*。本報告では、特にレーダー誤差を含めて(1)の誘導用ハードウェア誤差の分離を行なう手法を論じる。それは他の誤差(2)、(3)の有無とは無関係に遂行でき、総合的誤差解析の一部分を構成するものである。誤差解析に利用できる情報は、テレメータによって伝送された IMU データと、それに独立な情報源としてのトラッキングデータである。IMU データは“go-to-inertial”** 以後インジェクションまでの推力飛しょう時における加速度計およびジャイロの出力から成る。一方トラッキングデータは、ロケットが各ステーションの追跡可能領域にある時間を通して、レンジ、レンジレート、仰角および方位角に関する観測情報を提供する。いずれのデータも不規則雑音に汚されていることを考慮して、解析は統計的手法に基づくことは当然であり、それによって確率論的主張が可能になる。

5.1 Kalman-Bucy フィルターリング

統計的手法としての常套手段は伝統的な(重みつき)最小自乗法であろうが本報告は、Kalman-Bucy 理論(1960, 1961)^{3),4)}による。いわゆる Kalman-Bucy フィルターは、ある意味で重みつき最小自乗法と等価で、観測データを入手する毎にプロセッシングの可能なように(それゆえ最小自乗法と違って、過去の観測データを全て記憶しておく必要はない)、リカーシブに変形したものといえる。Kalman, Bucy に始まる最近の推定理論は、連続系に対しては Kushner 等によって導入された確率微分方程式によって数学的に厳密な理論体系として完成を見ている***。離散系は、例えばそれがレーダートラッキングのような実際現象を

反映するばかりか、電子計算機による計算アルゴリズムを直接与えているという意味で重要である。離散系について Kalman-Bucy フィルターの構造を概観しておこう。いま離散時間 t_k における観測データを $m(t_k)$ とし、時刻 t_n までに入手された観測データの集合を $\mathfrak{M}(t_n)$ で表わす。すなわち

$$\mathfrak{M}(t_n) = \{m(t_0), m(t_1), \dots, m(t_k), \dots, m(t_n)\} \quad (5.1)$$

ただし一般に $m(\cdot)$ は多次元ベクトルである。その時評価規範

$$\varepsilon\{\|\mathbf{x}(s) - \hat{\mathbf{x}}(s|t_n)\|^2 | \mathfrak{M}(t_n)\} \quad (5.2)$$

を最小にする $\hat{\mathbf{x}}(s|t_n)$ は一意的に

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(s|t_n) &= \varepsilon\{\mathbf{x}(s) | \mathfrak{M}(t_n)\} \\ &= \int \mathbf{x}(s) p(\mathbf{x}(s) | \mathfrak{M}(t_n)) d\mathbf{x}(s) \end{aligned} \quad (5.3)$$

で与えられる。ここで $\varepsilon\{\cdot | \mathfrak{M}(t_n)\}$ は、 $\mathfrak{M}(t_n)$ によって条件づけられた期待値を、 $p(\mathbf{x}(s) | \mathfrak{M}(t_n))$ は条件つき確率密度関数を表わす。(5.3)式で計算される $\hat{\mathbf{x}}(s|t_n)$ が最小分散の意味で最適な推定値を与えるわけであるが、推定論ではさらに $s < t_n$ のとき平滑化(smoothing), $s = t_n$ のときフィルターリング(filtering), $s > t_n$ のとき予測(prediction)と区別している。この推定精度は、推定誤差

$$\tilde{\mathbf{x}}(s|t_n) = \mathbf{x}(s) - \hat{\mathbf{x}}(s|t_n) \quad (5.4)$$

の共分散行列(つまり2次のモーメント)

$$P(s|t_n) = \varepsilon\{\tilde{\mathbf{x}}(s|t_n)\tilde{\mathbf{x}}(s|t_n)' | \mathfrak{M}(t_n)\} \quad (5.5)$$

および3次以上の高次モーメントで評価される。

$\hat{\mathbf{x}}(s|t_n)$ は明らかに次の性質を持っている。

(a) 不偏推定[(unbiased), すなわち

$$\varepsilon\{\hat{\mathbf{x}}(s|t_n)\} = \varepsilon\{\varepsilon\{\mathbf{x}(s) | \mathfrak{M}(t_n)\}\} = \varepsilon\{\mathbf{x}(s)\}$$

(b) $\tilde{\mathbf{x}}(s|t_n)$ と $m(t_k)$ は無相関(uncorrelated), すなわち

$$\begin{aligned} \varepsilon\{\tilde{\mathbf{x}}(s|t_n)m(t_k)'\} &= \varepsilon\{\varepsilon\{\tilde{\mathbf{x}}(s|t_n)m(t_k)' | \mathfrak{M}(t_n)\}\} \\ &= \varepsilon\{\tilde{\mathbf{x}}(s|t_n) | \mathfrak{M}(t_n)\} \varepsilon\{m(t_k)\} \\ &= 0 \end{aligned}$$

以上の記述は制御対象である力学系および観測過程の構造を問わずに成立するものである。Kalman, Bucy が初期の論文で研究しているのは力学系、観測過程ともに線型の場合である。周知のように線型システムの充足統計量(sufficient statistics)は、平均値と共分散であって、推定精度は共分散行列だけで評価できることになる。

さて、 $p(\mathbf{x}(s) | \mathfrak{M}(t_n))$ を知れば原理的には(5.3)式の多重積分計算により推定値 $\hat{\mathbf{x}}(s|t_n)$ を得られる。線型の場合には後述するように $\hat{\mathbf{x}}(s|t_n)$ が電子計算機による計算に最も適した逐次推定の形式のある方程式

* 例えば J. L. Greenstein¹⁶⁾ を参照。

** IMU が慣性空間に対して計測を開始すること。

*** 確率微分方程式については、Skorokhod⁴¹⁾, 伊藤清⁴²⁾を参照されたい。また参考のため線型連続系に対する Kalman-Bucy フィルターの概要を付録Aに説明した。

を満足することが示される。その導出には、性質 (b) (これはいわゆる principle of orthogonality である) を使った Kalman-Bucy 流の接近と、Baye's rule により実際 $p(\mathbf{x}(s)|\mathfrak{M}(t_n))$ を評価する Y.C. Ho, R.C. K. Lee⁴³⁾ らの接近があって容易に同一の結果に到達できる。ここでは後に本質的役割を演じる場所のフィルターリングと予測のアルゴリズムのみを記しておく。その証明は上記著者の原論文、あるいは多くの成書^{7), 8), 12)}に見られるから再述しない。

ある力学系のダイナミクスが線型システム

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\mathbf{x}(t) + \phi(t) + G(t)\mathbf{w}(t) \quad (5.6)$$

で記述されると仮定する*。ここに

$\mathbf{x}(t)$: n 次元状態ベクトル

$F(t)$: $n \times n$ システム感度行列

$\phi(t)$: 既知の強制項を表わす n 次元ベクトル

$G(t)$: 雑音の強度を表わす $n \times d$ 行列

$\mathbf{w}(t)$: d 次元システム雑音で、 $\varepsilon\{\mathbf{w}(t)\} = 0$,

$\varepsilon\{\mathbf{w}(t)\mathbf{w}(s)'\} = Q(t)\delta(t-s)$ の正規白色雑音

であり、 $\delta(t)$ は Dirac の δ -関数を表わす。(5.6) 式は遷移行列 (transition matrix)

$$\dot{\Phi}(t, s) = F(t)\Phi(t, s) \quad (5.7)$$

$$\Phi(s, s) = I \text{ (単位行列)}$$

を用いると陽明的に解けて

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t_{n+1}) = & \Phi(t_{n+1}, t_n)\mathbf{x}(t_n) + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau)\phi(\tau)d\tau \\ & + \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau)G(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau \end{aligned} \quad (5.8)$$

となる。いま、

$$\bar{\phi}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau)\phi(\tau)d\tau$$

$$\bar{\mathbf{w}}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau)G(\tau)\mathbf{w}(\tau)d\tau$$

と置くと最終的に

$$\mathbf{x}(t_{n+1}) = \Phi(t_{n+1}, t_n)\mathbf{x}(t_n) + \bar{\phi}(t_n) + \bar{\mathbf{w}}(t_n) \quad (5.9)$$

を得る。ここで、 $\varepsilon\{\bar{\mathbf{w}}(t_n)\} = 0$ かつ $\varepsilon\{\bar{\mathbf{w}}(t_k)\bar{\mathbf{w}}(t_l)'\}$

* 数学的厳密さを保つためには、次の伊藤型の確率微分方程式から出発されなければならない。

$$d\mathbf{x}(t, \omega) = F(t)\mathbf{x}(t, \omega)dt + \phi(t)dt + G(t)d\mathbf{B}(t, \omega)$$

ここで $\mathbf{B}(t, \omega)$ は

$$\mathbf{B}(t, \omega) = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\omega}(s, \omega)ds$$

により定義される Brown 運動過程であり、 ω は確率空間の生成点 (generic point) である。また (5.6) 式はある非線型力学系の (規準軌道の近傍における) 線型化方程式と考えるとよい。後の観測方程式 (5.10) 式についても同様である。

$= \rho_k \delta_{kl}$ である。ただし

$$\rho_n = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, \tau)G(\tau)Q(\tau)G'(\tau)\Phi'(t_{n+1}, \tau)d\tau$$

であり、 δ_{kl} はクロネッカーの δ を表わす。

一方観測方程式を

$$\mathbf{m}(t_n) = H(t_n)\mathbf{x}(t_n) + \mathbf{v}(t_n) \quad (5.10)$$

とする。ここで

$\mathbf{m}(t_n)$: $m(\leq n)$ 次元観測ベクトル

$H(t_n)$: $m \times n$ 観測感度行列

$\mathbf{v}(t_n)$: 観測雑音で $\varepsilon\{\mathbf{v}(t_n)\} = 0$,

$\varepsilon\{\mathbf{v}(t_k)\mathbf{v}(t_l)'\} = R(t_k)\delta_{kl}$ の白色雑音**

である。

さらに次の記号を定義する。

$\hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n)$: $\mathbf{x}(t_{n+1})$ の $\mathfrak{M}(t_n)$ に基づく予測値

$\hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_{n+1})$: $\mathbf{x}(t_{n+1})$ の $\mathfrak{M}(t_{n+1})$ に基づく推定値

$P(t_{n+1}|t_n)$: 予測誤差

$$\tilde{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n) = \mathbf{x}(t_{n+1}) - \hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n)$$

の共分散行列、すなわち

$$P(t_{n+1}|t_n) = \varepsilon\{\tilde{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n)\tilde{\mathbf{x}}'(t_{n+1}|t_n)\}$$

$P(t_{n+1}|t_{n+1})$: 推定誤差 $\tilde{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_{n+1})$ の共分散行列

そのとき Kalman-Bucy によれば、 t_{n+1} において観測のない時***

$$\hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n) = \Phi(t_{n+1}, t_n)\hat{\mathbf{x}}(t_n|t_n) + \bar{\phi}(t_n) \quad (5.11)$$

$$P(t_{n+1}|t_n) = \Phi(t_{n+1}, t_n)P(t_n|t_n)\Phi'(t_{n+1}|t_n) + \rho_n \quad (5.12)$$

時刻 t_{n+1} で観測データ $\mathbf{m}(t_{n+1})$ が取得されると

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_{n+1}) = & \hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n) + K(t_{n+1}) \\ & \times [\mathbf{m}(t_{n+1}) - H(t_{n+1})\hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n)] \end{aligned} \quad (5.13)$$

$$\begin{aligned} P(t_{n+1}|t_{n+1}) = & P(t_{n+1}|t_n) \\ & - K(t_{n+1})H(t_{n+1})P(t_{n+1}|t_n) \end{aligned} \quad (5.14)$$

$$\begin{aligned} K(t_{n+1}) = & P(t_{n+1}|t_n)H'(t_{n+1})\{H(t_{n+1})P(t_{n+1}|t_n) \\ & \times H'(t_{n+1}) + R(t_{n+1})\}^{-1} \end{aligned} \quad (5.15)$$

** 観測雑音が有色雑音の場合には、適当な shaping filter を導入して状態ベクトルに加えることにより、結局 (5.6) および (5.10) 式の形に帰着できる。この方法が通常の state augmentation 法で白色雑音の場合と同様の形式取扱いが可能である反面、状態ベクトルの次元増加による計算時間の増大、“ill-condition” 行列の生起⁹⁾ という欠点を持つ。Bryson, Johansen, Henrikson によって提案された measurement differencing 法は上記欠点を解消するものである^{9), 10)}。

*** 連続系での表現は

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}}(t|t_n) = F(t)\hat{\mathbf{x}}(t|t_n) + \phi(t) \text{ for } t_{n+1} \geq t \geq t_n$$

$$\begin{aligned} \dot{P}(t|t_n) = & F(t)P(t|t_n) + P(t|t_n)F'(t) \\ & + G(t)Q(t)G'(t) \end{aligned}$$

である。

ここに (5.11), (5.12) 式は予測の, (5.13)~(5.15) 式はフィルタリングのアルゴリズムを与える。上式から直ちに Kalman-Bucy フィルターを応用する時の問題点が明らかになる。すなわち, フィルターは確率過程としての数学的モデルの確立を要求するが物理現象を厳密に記述することは不可能であるから, ある種の近似モデルでフィルタを作用させざるを得ない(準最適フィルタ)。特に観測雑音の統計量の誤認およびモデル化されないパラメータの存在はフィルターの性能低下の主要な原因であり, 先述したフィルターの発散の問題と関連して種々の対策が考案されている。

5.2 Strapdown システムへの応用

飛しょう後の誘導誤差解析は, IMU データおよびレーダートラッキングデータに基づいて遂行される。既に述べたように strapdown 方式によるロケットのダイナミクスおよびトラッキング方程式は強い非線型性を呈し, Kalman-Bucy フィルターの応用が可能であるためには適当な近似によって線型化がなされなければならない。ここでは誤差の伝播は線型的であると仮定し, ある規準軌道の近傍に沿って Taylor 展開して第一項まで考慮しよう。以下で () * は規準軌道に沿う値あるいはパラメータのノミナルな値を表わす。

まず, ロケットのダイナミクスに関して (3.2), (3.4), (3.5) 式から

$$\delta \dot{\mathbf{R}} = \delta \mathbf{V} \quad (5.16)$$

$$\delta \dot{\mathbf{V}} = \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{R}} \right)^* \delta \mathbf{R} + \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}} \right)^* \delta \mathbf{p} + \delta T_{IB} \mathbf{a}_B^* + T_{IB}^* \delta \mathbf{a}_B \quad (5.17)$$

$$\delta \dot{T}_{IB} = T^*_{IB} [\delta \boldsymbol{\omega}_{IB} \times] + \delta T_{IB} [\boldsymbol{\omega}^*_{IB} \times] \quad (5.18)$$

を得る。ここで δ は規準値に関する第 1 変分をとる作用素とする。すなわち $\delta \mathbf{R} = \mathbf{R} - \mathbf{R}^*$, $\delta \mathbf{V} = \mathbf{V} - \mathbf{V}^*$, $\delta \mathbf{p} = \mathbf{p} - \mathbf{p}^*$, $\delta T_{IB} = T_{IB} - T_{IB}^*$, $\delta \mathbf{a}_B = \mathbf{a}_B - \mathbf{a}_B^*$, $\delta \boldsymbol{\omega}_{IB} = \boldsymbol{\omega}_{IB} - \boldsymbol{\omega}_{IB}^*$ である。

いま, Σ_B の Σ_B^* に関するドリフト角 (drift angle) を

$$\delta \boldsymbol{\epsilon} = (\delta \epsilon_x \ \delta \epsilon_y \ \delta \epsilon_z)'$$

と置くと (図 5 参照),

$$\delta T_{IB} = T_{IB}^* [\delta \boldsymbol{\epsilon} \times] \quad (5.19)$$

$$[\delta \boldsymbol{\epsilon} \times] \triangleq \begin{pmatrix} 0 & -\delta \epsilon_z & \delta \epsilon_y \\ \delta \epsilon_z & 0 & -\delta \epsilon_x \\ -\delta \epsilon_y & \delta \epsilon_x & 0 \end{pmatrix}$$

であるから, (5.18) 式に代入して

$$\begin{aligned} \delta \dot{T}_{IB} &= \dot{T}_{IB}^* [\delta \boldsymbol{\epsilon} \times] + T_{IB}^* [\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \times] \\ &= T_{IB}^* [\boldsymbol{\omega}_{IB}^* \times] [\delta \boldsymbol{\epsilon} \times] + T_{IB}^* [\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \times] \end{aligned}$$

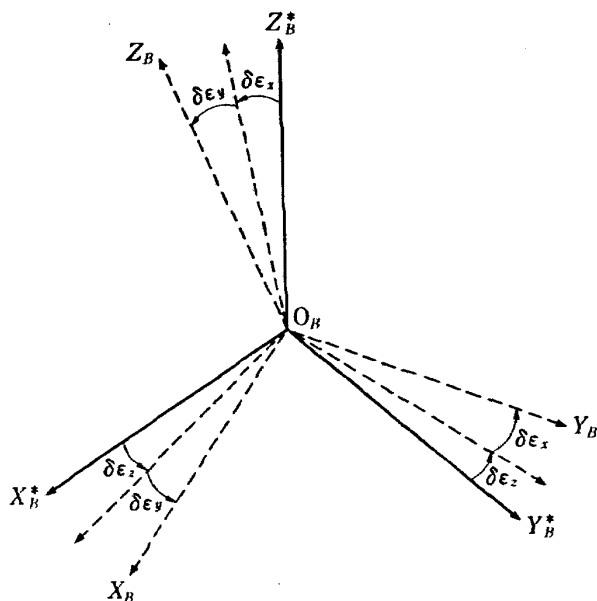


図 5 ドリフト角 $\delta \boldsymbol{\epsilon}$ の図形的意味

$$= T_{IB}^* [\delta \boldsymbol{\omega}_{IB} \times] + T_{IB}^* [\delta \boldsymbol{\epsilon} \times] [\boldsymbol{\omega}_{IB}^* \times]$$

すなわち

$$\begin{aligned} [\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} \times] &= [\delta \boldsymbol{\omega}_{IB} \times] + [\delta \boldsymbol{\epsilon} \times] [\boldsymbol{\omega}_{IB}^* \times] \\ &\quad - [\boldsymbol{\omega}^*_{IB} \times] [\delta \boldsymbol{\epsilon} \times] \end{aligned}$$

したがって

$$\delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \delta \boldsymbol{\omega}_{IB} + \delta \boldsymbol{\epsilon} \times \boldsymbol{\omega}_{IB}^* \quad (5.20)$$

を得る。右辺第 2 項はベクトル積を表わす。(5.17), (5.20) 式において $\delta \mathbf{a}_B$, $\delta \boldsymbol{\omega}_{IB}$ は次式で計算される。

$$\delta \mathbf{a}_B = (\mathbf{I} + \mathbf{E}_A^*)^{-1} \{ \delta \mathbf{a}_{BM} - \delta \mathbf{E}_A \mathbf{a}_B^* - \delta \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\xi}_A \} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} \delta \boldsymbol{\omega}_{IB} &= (\mathbf{I} + \mathbf{E}_O^*)^{-1} \{ \delta \boldsymbol{\omega}_{IBM} - \delta \mathbf{E}_O \boldsymbol{\omega}_{IB}^* \\ &\quad - \mathbf{F}_O \mathbf{a}_B^* - \mathbf{F}_O^* \delta \mathbf{a}_B - \delta \boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{\xi}_O \} \quad (5.22) \end{aligned}$$

次にトラッキング方程式に対しても同様に

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{y}_M(t_n) &= \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{R}} \right)^* \delta \mathbf{R} + \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{V}} \right)^* \delta \mathbf{V} \\ &\quad + \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{R}_T} \right)^* \delta \mathbf{R}_T + \delta \mathbf{b} + \boldsymbol{\eta}(t_n) \quad (5.23) \end{aligned}$$

を得る。ただし $\delta \mathbf{y}_M = \mathbf{y}_M - \mathbf{y}_M^*$, $\delta \mathbf{b} = \mathbf{b} - \mathbf{b}^*$, $\delta \mathbf{R}_T = \mathbf{R}_T - \mathbf{R}_T^*$ とする。

そこで今状態ベクトルとして

$$\delta \mathbf{x} = (\delta \mathbf{R}' \delta \mathbf{V}' \delta \boldsymbol{\epsilon}' \delta \mathbf{R}_T' \delta \mathbf{p}' \delta \mathbf{v}' \delta \boldsymbol{\mu}' \delta \mathbf{b}')' \quad (5.24)$$

を定義する。ここで

$$\delta \mathbf{v} = (e_{xx} e_{xy} \dots e_{zz} \alpha_x \alpha_y \alpha_z)' \quad (5.25)$$

$$\delta \boldsymbol{\mu} = (s_{xx} s_{xy} \dots s_{zz} \gamma_{xx} \gamma_{xy} \gamma_{yz})' \quad (5.26)$$

$$\delta \mathbf{b} = (\delta b^1 \dots \delta b^N)' \quad (5.27)$$

$$\delta \mathbf{R}_T = (\delta R_{T_1}' \dots \delta R_{T_N}')' \quad (5.28)$$

であり, 地球の自転角速度ベクトルを $\boldsymbol{\omega}_E$ とすると

$$\delta \dot{\mathbf{R}}_T = \boldsymbol{\omega}_E \times \delta \mathbf{R}_T \quad (5.29)$$

以上から (5.16), (5.17), (5.20), (5.23), (5.29)

式は簡単に

$$\delta \dot{\mathbf{x}}(t) = F(t)\delta \mathbf{x}(t) + \delta \phi(t) + G(t)\xi(t) \quad (5.31)$$

$$\delta \mathbf{y}_M(t_n) = H(t_n)\delta \mathbf{x}(t_n) + \eta(t_n) \quad (5.31)$$

と書ける。ここで

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{R}}\right)^* & 0 & \psi_{v_e} & 0 & \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{p}}\right)^* & \psi_{v_v} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_{i_e} & 0 & 0 & 0 & \psi_{i_v} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \psi_{RT} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & & & & & & & \end{pmatrix}$$

$$\delta \phi = \begin{pmatrix} 0 \\ T_{IB}(I + E_A^*)^{-1} \delta \alpha_{BM} \\ (I + E_G^*)^{-1} \delta \omega_{IBM} \\ \dots \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$G(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -T_{IB}^*(I + E_A^*)^{-1} & 0 \\ 0 & -(I + E_G^*)^{-1} \\ \dots & \dots \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_A \\ \xi_G \end{pmatrix},$$

$$H = \left(\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{R}} \right)^* \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{V}} \right)^* \quad 0 \quad \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{R}_T} \right)^* \quad 0 \dots 0 \quad I \right)$$

ただし

$$T_{IB}^*[\delta \mathbf{e} \times] \alpha_B^* = \psi_{v_e} \delta \mathbf{e}$$

$$T_{IB}^*(I + E_A)^{-1} \{-\delta E_A \alpha_B^* - \delta \alpha\} = \psi_{v_v} \delta \mathbf{v}$$

$$\delta \mathbf{e} \times \omega_{IB}^* = \psi_{i_e} \delta \mathbf{e}$$

$$(I + E_G^*)^{-1} \{-\delta E_G^* \omega_{IB}^* - \delta F_G \alpha_B^* - \delta \beta\} = \psi_{i_v} \delta \boldsymbol{\mu}$$

$$\omega_E \times \delta \mathbf{R}_T = \psi_{RT} \delta \mathbf{R}_T$$

また簡単のため IMU の不規則雑音 $\xi(t)$ および観測雑音 $\eta(t_k)$ を各々平均値 0, 共分散行列が次式で与えられる正規性の白色雑音と仮定する。すなわち

$$\varepsilon \{\xi(t)\xi(s)'\} = Q(t)\delta(t-s)$$

$$\varepsilon \{\eta(t_k)\eta(t_l)'\} = R(t_k)\delta_{kl}$$

ここで

$$Q(t) = \begin{pmatrix} \sigma_{AX}^2 & & & & & & & & 0 \\ & \sigma_{AY}^2 & & & & & & & \\ & & \sigma_{AZ}^2 & & & & & & \\ & & & \sigma_{GX}^2 & & & & & \\ 0 & & & & \sigma_{GY}^2 & & & & \\ & & & & & \sigma_{GZ}^2 & & & \end{pmatrix}$$

ただし $\sigma_{Aj}^2, \sigma_{Gj}^2 (j=X, Y, Z)$ はそれぞれ入力軸が j 方向の加速度計およびジャイロの出力における白色雑音成分の分散で既知とする。また

$$R(t_k) = \begin{pmatrix} R_1(t_k) & & & & & & & & 0 \\ & R_2(t_k) & & & & & & & \\ & & \dots & & & & & & \\ 0 & & & R_N(t_k) & & & & & \end{pmatrix}$$

$$R_j(t_k) = \begin{pmatrix} \sigma_{Rj}^2 & & & & & & & & 0 \\ & \sigma_{RRj}^2 & & & & & & & \\ & & \sigma_{Ej}^2 & & & & & & \\ 0 & & & \sigma_{Aj}^2 & & & & & \end{pmatrix}$$

ただし $R_j(t_k)$ はステーションの観測雑音 η^j の共分散行列を表わし, $\sigma_{Rj}^2, \sigma_{RRj}^2, \sigma_{Ej}^2$ および σ_{Aj}^2 は各レンジ, レンジレート, 仰角および方位角観測における白色雑音の既知の分散を表わす。

かくして誘導誤差解析の問題は線型化システム (5.30) 式の状態 $\delta \mathbf{x}$ を, 離散的な観測データ $\delta \mathbf{y}_M(t_n)$ から最小分散で推定する問題に帰着される。推定アルゴリズムは前節で見たように次式で与えられる。まず (5.30) 式の解は遷移行列 $\Phi(t_{n+1}, t_n)$ を使って,

$$\delta \mathbf{x}(t_{n+1}) = \Phi(t_{n+1}, t_n)\delta \mathbf{x}(t_n) + \delta \bar{\phi}(t_n) + \bar{\xi}(t_n)$$

と書ける。ここで

$$\delta \bar{\phi}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, s)\delta \phi(s)ds$$

$$\bar{\xi}(t_n) = \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, s)G(s)\xi(s)ds$$

それゆえ (5.11)~(5.15) 式に対応して,

$$\left. \begin{aligned} \delta \hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n) &= \Phi(t_{n+1}, t_n)\delta \hat{\mathbf{x}}(t_n|t_n) + \delta \bar{\phi}(t_n) \\ P(t_{n+1}|t_n) &= \Phi(t_{n+1}, t_n)P(t_n|t_n)\Phi'(t_{n+1}, t_n) + \rho(t_n) \end{aligned} \right\} (*)$$

$$\rho(t_n) = \varepsilon \{\bar{\xi}(t_n)\bar{\xi}(t_n)'\}$$

$$= \int_{t_n}^{t_{n+1}} \Phi(t_{n+1}, s)G(s)Q(s)G'(s)\Phi'(t_{n+1}, s)ds$$

$$\left. \begin{aligned} \delta \hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_{n+1}) &= \delta \hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n) + K(t_{n+1}) \\ &\quad \times \{\delta \mathbf{y}_M(t_{n+1}) - H(t_{n+1})\delta \hat{\mathbf{x}}(t_{n+1}|t_n)\} \\ P(t_{n+1}|t_{n+1}) &= (I - K(t_{n+1})H(t_{n+1}))P(t_{n+1}|t_n) \\ K(t_{n+1}) &= P(t_{n+1}|t_n)H'(t_{n+1}) \\ &\quad \times \{H(t_{n+1})P(t_{n+1}|t_n)H'(t_{n+1}) + R(t_{n+1})\}^{-1} \end{aligned} \right\} (**)$$

ただしを得る。初期データ $\delta \hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0), P(t_0|t_0)$ は既知とする。

以上では IMU データを推定理論という観測データではなく力学系に作用する一種の強制力のように取り扱った。元来ロケットのダイナミクスは慣性座標系で

$$\ddot{\mathbf{R}} = \mathbf{g}(\mathbf{R}, \mathbf{p}) + \mathbf{f}(\mathbf{R}, \mathbf{V}, \mathbf{U}, \mathbf{q}, \mathbf{w}) \quad (5.32)$$

$$\dot{T}_{IB} = T_{BI}[\omega_{IB} \times] \quad (5.33)$$

によって記述される。ここで $\mathbf{f}(\cdot)$ は空力抵抗, 推力による非重力加速度を, $\mathbf{U}(t)$ は推力ベクトルを, \mathbf{q} は空気力, プロパルジョンおよびオートパイロットシステムの未知定数を, $\mathbf{w}(t)$ はシステム雑音を表わす。

stable platform 方式では加速度計は直接に (5.32) 式の $\mathbf{f}(\cdot)$ の値を計測し, strapdown 方式の場合は厳密に

$$\mathbf{f}(\cdot) = T_{IB} \mathbf{a}_B \quad (5.34)$$

が成り立ち、機体に固定された加速度計はこの a_B を計測する。そこで IMU データをトラッキングデータと同様に観測データとみなすか、あるいは既に採用したように $f(\cdot)$ の項を IMU 出力で置換するという一種の強制力として取り扱うか、の 2 通りに別かれる。後者の利点は $f(\cdot)$ のモデリングを避けてその項を未知パラメータを含む IMU 出力だけで表現できることである。推力飛しょう時のように $f(\cdot)$ の表現が非常に複雑である場合にはこの取り扱いが有効であると言える。他方衛星または宇宙船の弾道飛行時とか、航空機の巡航時 (cruise phase) では IMU 出力を観測データと見なす使い方が普通である。IMU データのプロセッシングに関しては、H. W. Sorenson¹³⁾ が詳しい。

5.3 規準軌道の選択

前節では適当な規準軌道の近傍で線型化して得られる方程式に対して、Kalman-Bucy 理論を適用した。この規準軌道について考察しておこう。規準軌道として利用できる軌道は一般に次の 3 つである。

(1) 標準軌道 (nominal trajectory)

打ち上げ前にパラメータのノミナルな値を使って計算される軌道 (NOMINAL とも略記する)。

(2) GDT (guidance terived trajectory)

機上の誘導計算機が IMU 出力に基づき航法計算して造る軌道で、この軌道に従って実際の誘導が行なわれる。重力ポテンシャルの簡略化、誘導計算機のサイズおよび演算速度に関する酷しい制限 (記憶容量、1

語長、固定小数点演算) による切り捨てあるいは丸め誤差、時間遅れ等によって計算誤差を含む。

(3) GRT (guidance reconstructed trajectory)

テレメータによって伝送された IMU データに基づき、地上の大型電子計算機によって高次の重力項まで考慮した航法計算をして得られる軌道。GDT における計算誤差は回避できる。Greenstein¹⁶⁾ はこの GRT が総合的誘導誤差解析において極めて重要な役割を演じることを強調している。

規準軌道として、原理的にはこのうちいずれを採用することも可能である。しかし Kalman, Bucy の線型理論を応用する観点から、規準軌道はできる限り真の軌道に近いことが望ましく、ここでは (3) の GRT を使用することを提案する。実際 (1) はオフノミナル条件に対して通常大きな軌道誤差を生じる。(1) および (3) を規準軌道として採用した場合のシミュレーションによる推定結果については後に比較検討を加える。なお GRT を採用する時、(5.30) 式における $\delta\phi(t)$ は恒等的に 0 になることを注意しておこう。

6. シミュレーションの方法

前節までに述べたところの Kalman-Bucy フィルタによる誘導誤差解析の手法に対して、以下に述べるようなシミュレーションを実行することによって有効性を確認する。まずシミュレーションのためのブロック線図を図 6 にまとめておこう。さてシミュレーションに使用するモデルヴィークルは strapdown 方式によ

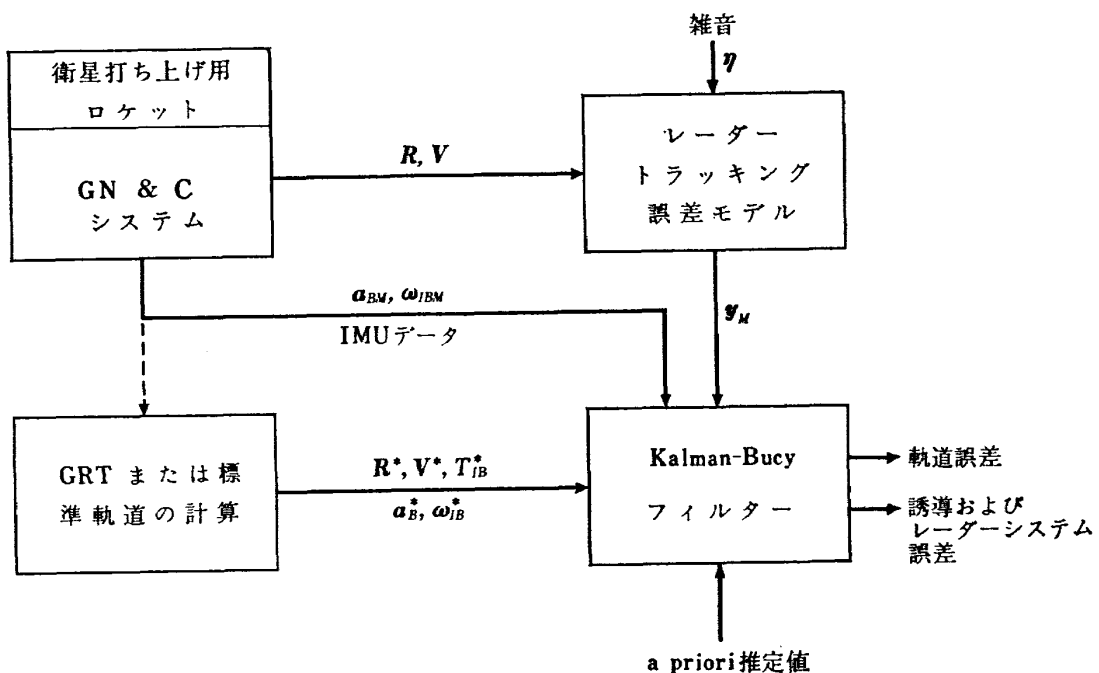


図 6 シミュレーションのブロック線図

表 2 モデルヴィークルの諸元

段	1	2	3	4
全重量 (トン)	51.53	15.07	4.27	1.03
構造重量 (トン)	21.13	5.42	1.71	0.39
推力 (トン)	146 ^注	44	5	5.2
比推力 (秒)	260	275	285	275
燃焼時間 (秒)	54	54	142	34
コースティング(秒)	1	1	524	0

注 大気中と真空中で異なるが平均値とみなす

る純慣性誘導の4段大型ロケットでその諸元を表2に示す。標準軌道は簡単のためピッチ面に限定され、推力方向はつねにロール軸に一致するものと仮定し適当なピッチレートを与えて生成される。また誘導は通常大気層を出てから開始されることを考慮し空気力の影響を無視する。また本手法はG & Cの誤差、例えば

推力軸のミスアラインメントなどの有無に直接的には関係しないから標準軌道および真の軌道の生成においてG & Cの誤差は考慮されていない。以上のごとき単純化によって最終的に衛星を高度およそ1000kmの円軌道に投入できる標準軌道を得た³⁹⁾。その概略図、ロール軸方向の推力加速度およびピッチレートをそれぞれ図7、図8、図9に示す。実際の軌道はノミナルなピッチレートに数%程度の変動を与えて計算した。

6.1 IMU 誤差モデル

IMU 誤差の数学的モデルについては既に詳しく述べた。推力飛しょう時では、ジャイロの各種誤差に比べて加速度計のスケールファクタおよびバイアスが航法計算における主要な誤差源になると考えられる。シミュレーションでは簡単のためバイアスのみを考慮し他の誤差は不規則雑音に繰り込む。すなわちIMU誤差モデルを

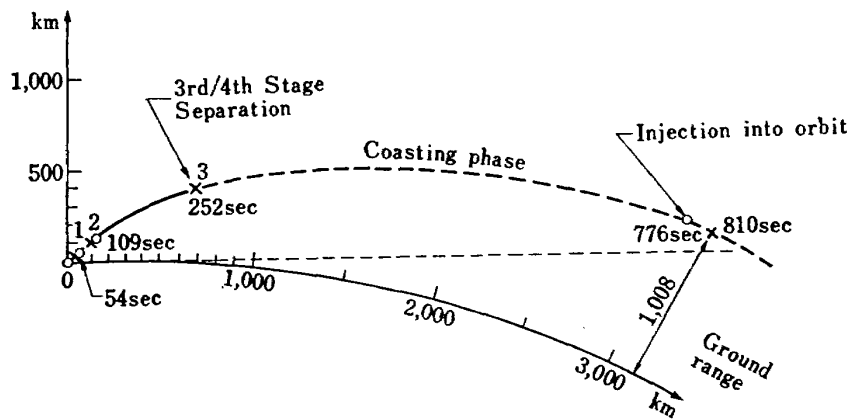


図 7 標準軌道の概略図

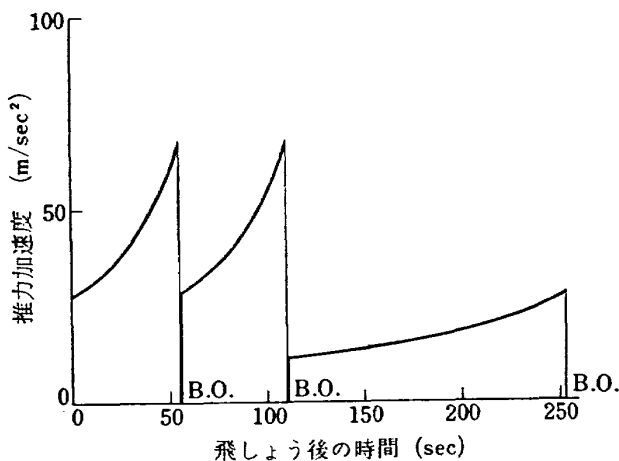


図 8 標準軌道の推力加速度 (機軸方向)

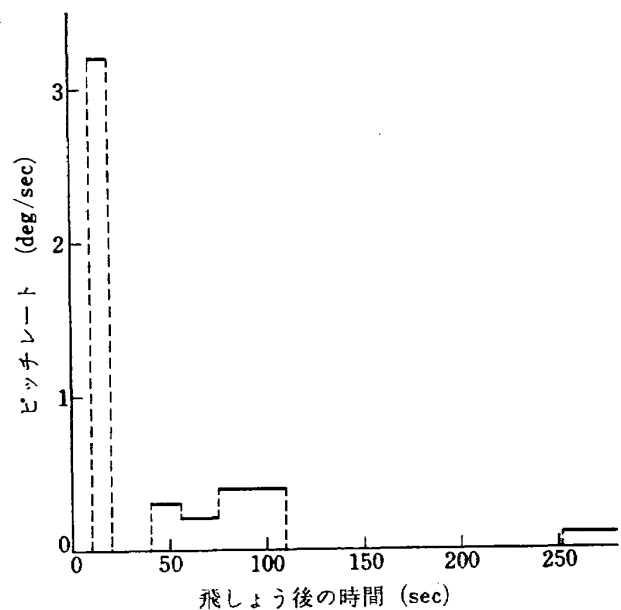


図 9 標準軌道のピッチレート

表 3 IMU のバイアス誤差

	真 値	規 準 値
$\alpha_x, \alpha_y, \alpha_z$	0.005 m/sec ²	0.001 m/sec ²
$\beta_x, \beta_y, \beta_z$	0.1×10^{-5} rad/sec	0.5×10^{-6} rad/sec

$$a_{BM} = a_B + \alpha + \xi_A \quad (6.1)$$

$$\omega_{IBM} = \omega_{IB} + \beta + \xi_G \quad (6.2)$$

とする。ここで ξ_A, ξ_G はその 3 成分がともに平均値 0, 標準偏差がそれぞれ $\sigma_{A_j} = 10^{-4}$ m/sec² および $\sigma_{G_j} = 10^{-6}$ rad/sec の正規白色雑音とする。またバイアス誤差 α, β のノミナルな値および真値を表 3 に示す。

6.2 トラッキングステーション

ロケットの追跡には地上の 4 ステーションによるレンジ、レンジレート、仰角および方位角の 1 秒毎のトラッキングデータが利用できるものと考え、その配置を図 10 に示す。ステーションの設置可能な範囲で最適な配置が存在するが、ここでは最適化はなされていない。トラッキングにおける各種誤差のうち、ここでは位置誤差と、観測バイアスのみを考慮する。そして計算時間の短縮を図るため、これらの誤差は B ステーションにのみ未知であって、他のステーションにおいては正確に知られているものと仮定する。B ステーションの位置誤差および観測バイアスを表 4 に示す。また観測雑音は各ステーション共通に

$\sigma_{R_j} = 100$ m, $\sigma_{RR_j} = 1$ m/sec, $\sigma_{E_j} = \sigma_{A_j} = 0.005$ rad とする。

表 4 Bステーションの誤差

	観測バイアス		位置誤差
δb_p	20 m	DR 方向	-162.26m
$\delta b_{\dot{p}}$	2 m/sec	CR 方向	261.69m
δb_E	0.001 rad	AL 方向	54.83m
δb_A	0.001 rad		

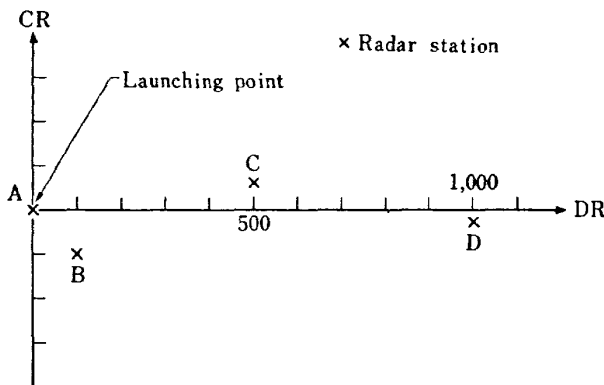


図 10 レーダーステーションの配置

6.3 座標変換

Kalman-Bucy フィルターによる軌道誤差の推定値は慣性座標系 Σ_I に関して得られるから、実用的意味を持たせるためその結果をいわゆる局所水平垂直座標系 Σ_L へ変換しておくのが便利である。

いま Σ_I におけるロケットの位置ベクトル R , 速度ベクトル V を使って、次のような直交座標系を作る。

$$\left. \begin{aligned} e_1 &= e_2 \times e_3 \\ e_2 &= \frac{R \times V}{|R \times V|} \\ e_3 &= \frac{R}{|R|} \end{aligned} \right\} \quad (6.3)$$

この座標系 Σ_L は地球の扁球性を無視するならば、 e_1 はダウンレンジ方向の、 e_2 はクロスレンジ方向の、 e_3 は高度方向の単位ベクトルを与える。 Σ_I から Σ_L への変換行列を T_{LI} と書くと

$$T_{LI} = \begin{pmatrix} e_1' \\ e_2' \\ e_3' \end{pmatrix} \quad (6.4)$$

であって、 Σ_I における任意のベクトル δx_I は、 Σ_L では

$$\delta x_L = T_{LI} \delta x_I \quad (6.5)$$

によって表現される。したがって T_{LI} を規準軌道(すなわち R^*, V^*) に関して計算するとすれば

$$\begin{aligned} \delta \hat{x}_L(s|t_n) &= T_{LI}^*(s) \delta \hat{x}_I(s|t_n) \quad (6.6) \\ P_L(s|t_n) &= \epsilon \{ \delta \tilde{x}_L \delta \tilde{x}_L' \} \\ &= \epsilon \{ T_{LI}^* \delta \tilde{x}_I \delta \tilde{x}_I' T_{LI}^{*'} \} \\ &= T_{LI}^*(s) P_I(s|t_n) T_{LI}^{*'}(s) \quad (6.7) \end{aligned}$$

となる。(6.6), (6.7) 式が Σ_I での推定値 Σ_L をへ変換する関係式である。

6.4 初期値の構成

Kalman-Bucy フィルターを起動させるためには初期データとして、a priori な推定値 $\hat{x}(t_0|t_0)$ と共分散行列 $P(t_0|t_0)$ の値が必要である。推定理論ではこれらの真値が既知と仮定されるが現実の問題に適用しようとする時には、まず先験分布を正規性と仮定した上で統計量は近似的に計算されるわけで、その意味では理論的には最適であっても実際の使用では常に準最適になっていることに注意しなければならない。初期値の誤差は推定精度を著しく劣化させるばかりか、既に述べたフィルターの発散現象のひとつの原因をなすわけで、その設定には十分注意する必要がある。初期値の構成法としては種々考えられて、生のトラッキングデータを用いて位置、速度ベクトルを計算し規準軌道との差をもって初期値とするとか、さらに進んで最初の

数データに（重みつき）最小自乗法を応用して第1近似的な初期値を得る方法，等が代表的である。しかしフィルターの安定性という見地から，分散の値は原則的にはかなり大き目に評価するのが普通である。

われわれのシミュレーションモデルにおける状態ベクトルは次の要素から構成される。

$$\Delta \hat{\mathbf{x}} = \begin{cases} \delta \mathbf{R} & \text{位置誤差 (4 km)} \\ \delta \mathbf{V} & \text{速度誤差 (20 m/sec)} \\ \delta \boldsymbol{\varepsilon} & \text{姿勢誤差 (0.1 rad)} \\ \delta \boldsymbol{\alpha} & \text{加速度計定常バイアス (0.01 m/sec)} \\ \delta \boldsymbol{\beta} & \text{ジャイロ定常バイアス (10^{-6} rad/sec)} \\ \delta \mathbf{R}_T & \text{ステーション位置誤差 (600m)} \\ \delta \mathbf{b} & \text{レーダー観測バイアス} \end{cases} \quad (6.8)$$

フィルターは打ち上げ後 60 秒経過してロケットが標準軌道で高度 36.6 km，ダウンレンジ 29.6 km に到達した時点から作動を開始する。その時点におけるフィルターの初期値は， $\delta \hat{\mathbf{x}}(t_0|t_0)$ に関してはすべて 0， $P(t_0|t_0)$ に関してはその標準偏差を (6.8) 式右辺の括弧内に示した。ただし $\delta \mathbf{b}$ に関してはレンジ 50 m，レンジレート 6 m/sec，仰角および方位角ともに 0.005 rad を与えて計算する。

7. 結果と検討

前節で述べたシミュレーションモデルに従って，デジタルシミュレーションを行なったのでその結果と検討を述べる。

Kalman-Bucy フィルターは 2 段ロケットに点火後 5 秒経過してから作動を開始して，3 段ロケット燃焼終了（打ち上げ後 252 秒）まで 1 秒毎のトラッキングデータをプロセッシングする。ただしフィルターは，ロケットが標準軌道で高度 349 km，ダウンレンジ 510 km の地点に到達する 220 秒まではステーション A, B, C のトラッキングデータをプロセスし，その後 3 段燃焼終了時まではステーション B, C, D のデータをプロセスするものと想定した。3 段ロケット燃焼終了時の高度およびダウンレンジは標準軌道でそれぞれ 423.5 km，654.0 km である。またロケットの運動はピッチ面に限られているからクロスレンジ方向は位置，速度とも 0 である。計算は規準軌道として標準軌道および GRT の 2 つの場合につき実行された。

規準軌道（この近傍で線型化される）として GRT を採用した場合のロケットの軌道の推定誤差，すなわち

$$\left. \begin{aligned} \delta \tilde{\mathbf{R}}_L(t_n) &= \mathbf{R}_L(t_n) - \hat{\mathbf{R}}_L(t_n|t_n) \\ \delta \tilde{\mathbf{V}}_L(t_n) &= \mathbf{V}_L(t_n) - \hat{\mathbf{V}}_L(t_n|t_n) \end{aligned} \right\} \quad (7.1)$$

の成分の絶対値を図 11，図 12 に示す*。この推定精度は $\delta \tilde{\mathbf{R}}_L$ ， $\delta \tilde{\mathbf{V}}_L$ の分散で規定されて，それは (6.7) 式で計算される共分散行列 $P_L(t_n|t_n)$ の対角要素で与えられる。図 13，図 14 に標準偏差の変動を示した。

まず図 11 は位置に関する推定誤差を示すが図から明らかなように第 3 段燃焼終了時において高度 1 km 以内，ダウンレンジ 0.5 km 以内の誤差で推定できる。他方クロスレンジに関しては推定誤差の増大してゆく傾向が見られる。この傾向は速度に関する推定誤差についても見られる。すなわち図 12 において高度方向の速度誤差は 10 m/sec 前後，ダウンレンジレートは 6 m/sec 以内で推定できるがクロスレンジレートの誤差は 20 m/sec 程度とかなり精度が悪くなる。その原因について考えてみるとまずヨー軸およびロール軸まわりのドリフト角 $\delta \varepsilon_y$ ， $\delta \varepsilon_z$ の推定誤差によって実際には推力加速度ベクトルは常にピッチ面にあるにもかかわらず，フィルターはヨー面にもその成分を持つと誤認することからクロスレンジ方向の推定誤差を生ずることに注意しよう。その誤差が発散する傾向は結局 $\delta \varepsilon_y$ ， $\delta \varepsilon_z$ の推定精度が悪いことに起因するわけで実際図 15 に $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$ の推定誤差の標準偏差を示したが $\delta \varepsilon_y$ ， $\delta \varepsilon_z$ の分散は $\delta \varepsilon_x$ のそれに比べて相当大きい。それはまたロケットの真の運動がピッチレートを除き 0 であることからヨージャイロ，ロールジャイロはドリフトレートだけを出力していること，しかもジャイロの不規則雑音の標準偏差が真のドリフトレートと同じ値に高く仮定されたことに起因すると思われる。これは後述するようにドリフトレートの推定を困難にした。

次に規準軌道として，標準軌道を採用して計算した場合の軌道誤差を位置 $|\delta \tilde{\mathbf{R}}_L|$ ，速度 $|\delta \tilde{\mathbf{V}}_L|$ で評価し GRT による誤差と比較したのが図 16，図 17 である。図 11，図 12 のクロスレンジ方向のグラフと類似しているがそれはクロスレンジ方向の誤差が他の方向の誤差に比べて著しく大きいことを意味する。両図から位置に関しては後半逆転しているものの総体的には規準軌道として GRT の方が優っていると結論できる。それはまた姿勢誤差の推定結果からも言える。すなわち図 18 で縦軸には

$$J_n = \text{trance} \{ (T_{IB}(t_n) - \hat{T}_{IB}(t_n|t_n)) \times (T_{IB}(t_n) - \hat{T}_{IB}(t_n|t_n)) \} \quad (7.2)$$

の値がとってある。いま Σ_B における任意の単位ベクトル \mathbf{r}_B が $T_{IB}(t_n)$ および $\hat{T}_{IB}(t_n|t_n)$ によってそれ

* 推定値は慣性座標系 Σ_I に関して得られるが前節で述べた変換 (6.4)，(6.5)，(6.7) 式によって座標系 Σ_L に移行しておくのが実用上便利である。

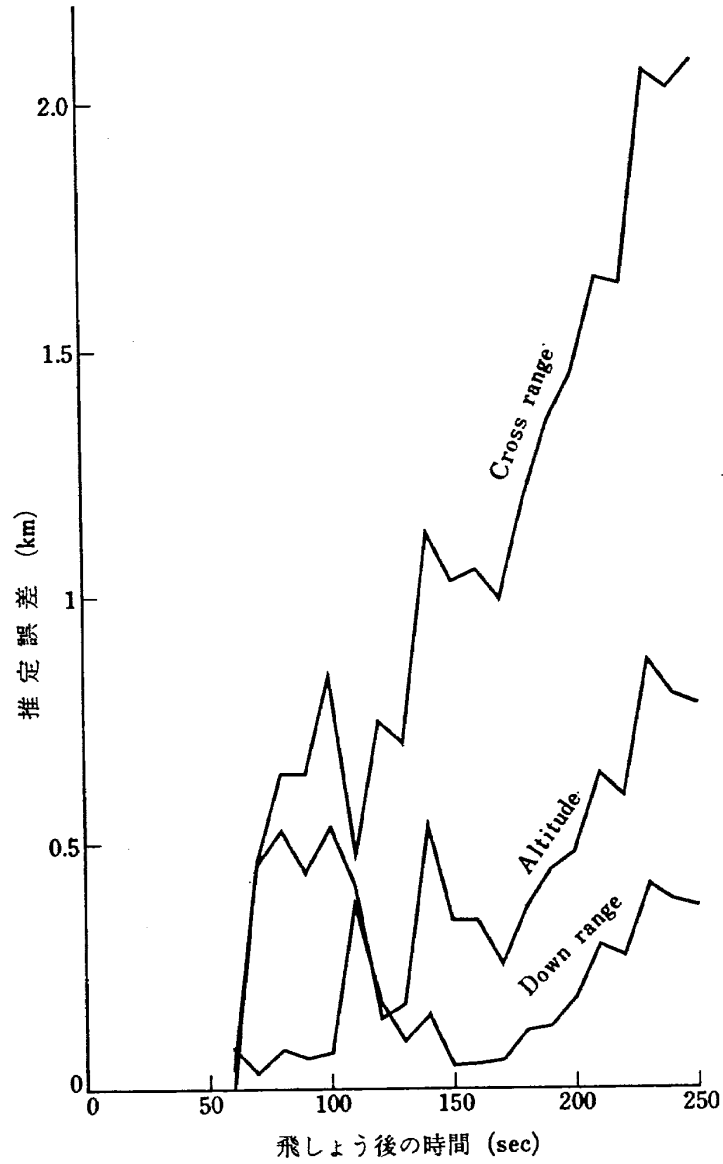


図 11 規準軌道として GRT を用いた場合の位置ベクトルの推定誤差

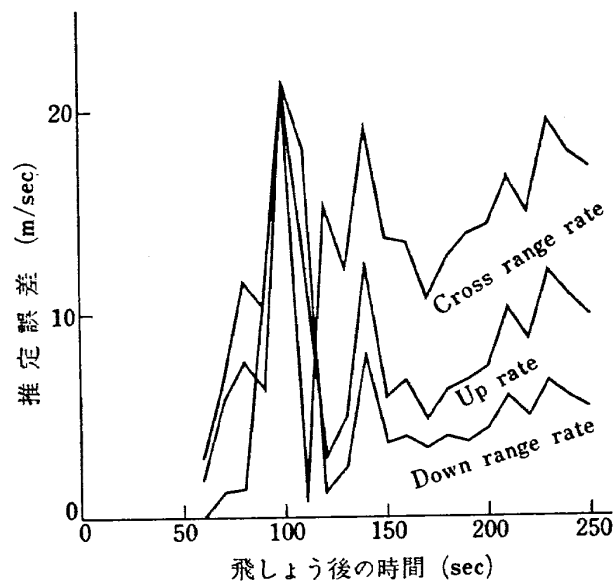


図 12 規準軌道として GRT を用いた場合の速度ベクトルの推定誤差

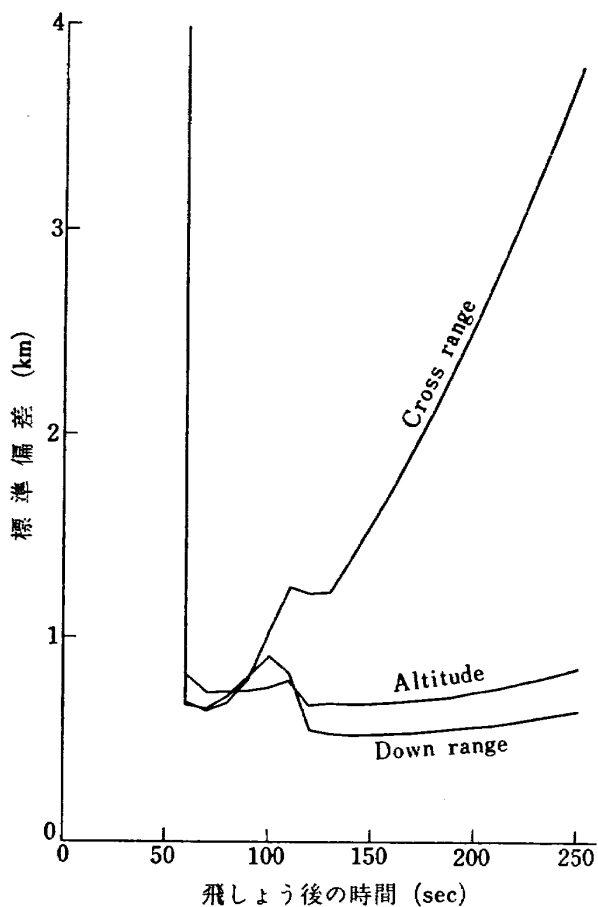


図 13 規準軌道として GRT を用いた場合の位置ベクトル推定の標準偏差

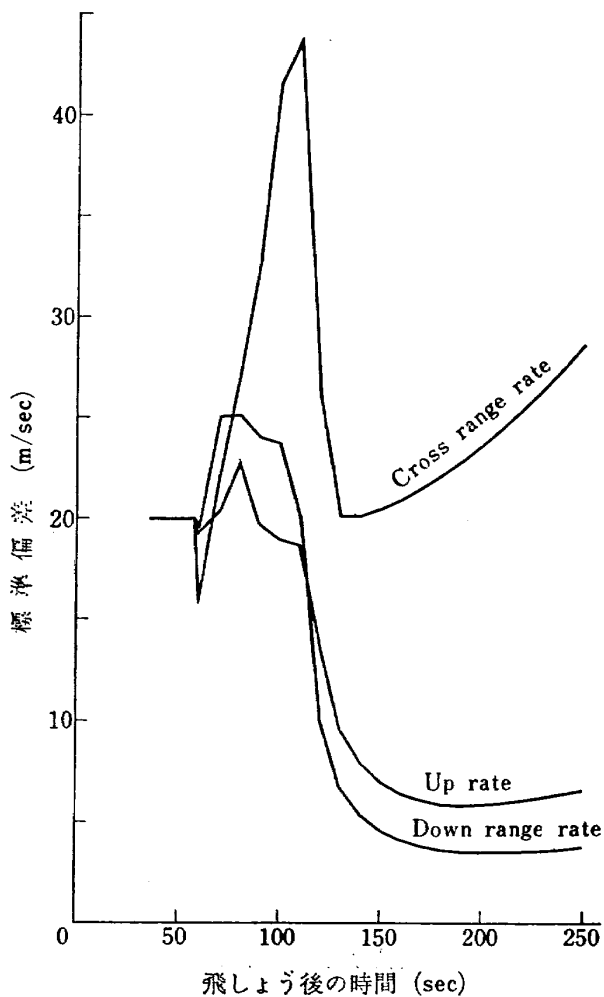


図 14 規準軌道として GRT を用いた場合の速度ベクトル推定の標準偏差

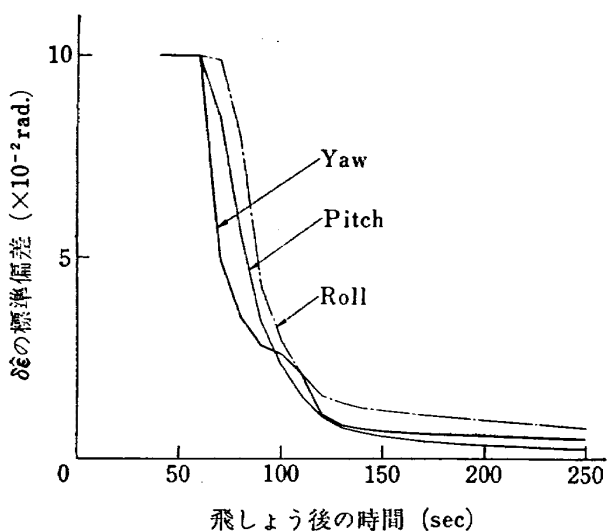


図 15 規準軌道として GRT を用いた場合のドリフト角推定誤差の標準偏差

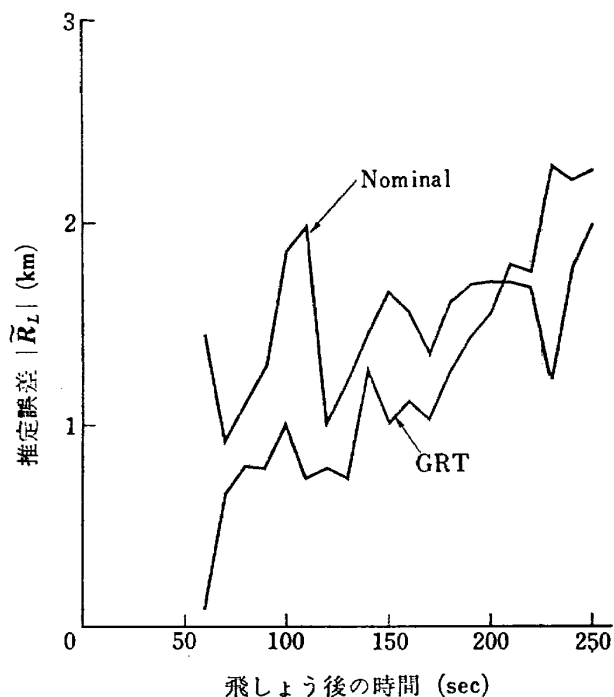


図 16 規準軌道として GRT および NOMINAL を用いた場合の位置ベクトルの推定誤差の比較

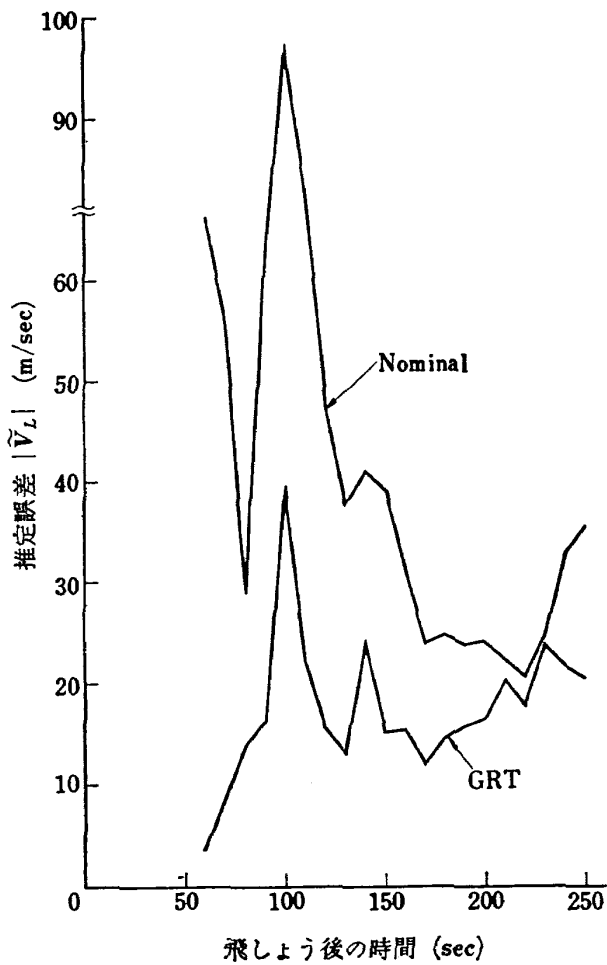


図 17 規準軌道として GRT および NOMINAL を用いた場合の速度ベクトルの推定誤差の比較

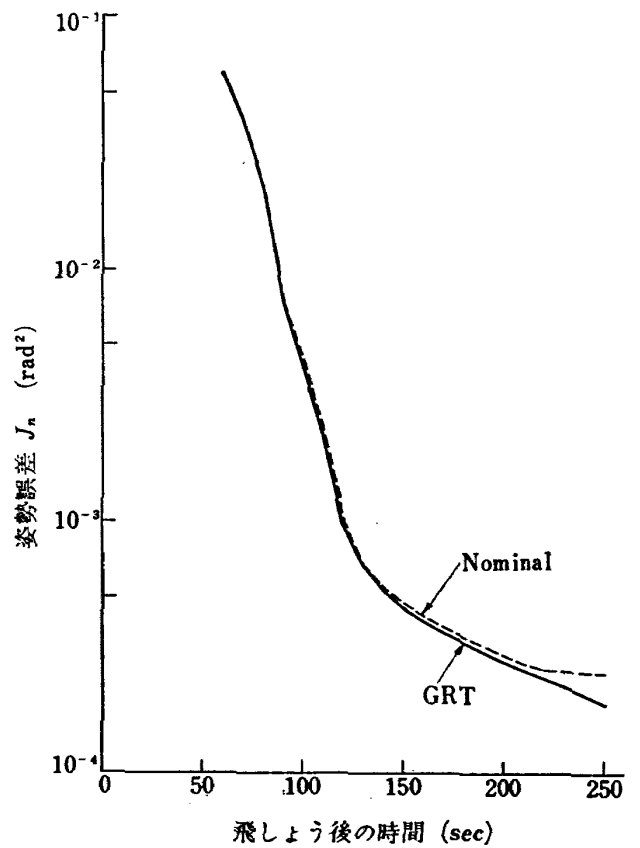


図 18 規準軌道として GRT および NOMINAL を用いた場合の姿勢誤差推定の比較

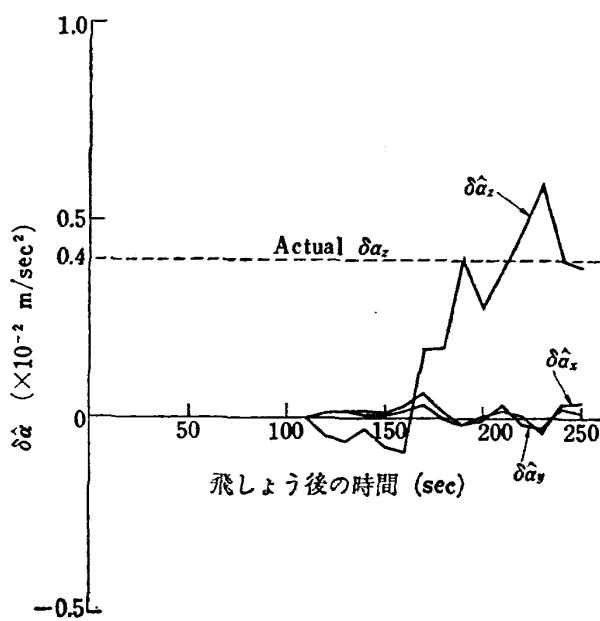


図 19 規準軌道として GRT を用いた場合の加速度計のバイアス誤差 δa の推定

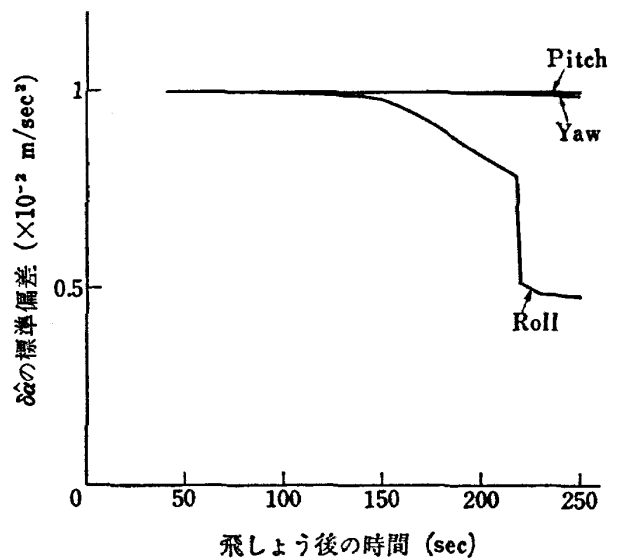


図 20 加速度計バイアス誤差の推定値 δa の標準偏差

表 5 IMU 誤差およびレーダーシステム誤差の推定結果 (時間 250 秒)。
上段は推定値, 下段はその標準偏差を表わす

$\delta\alpha$ (m/sec ²)		$\delta\beta$ (raa/sec)		δR_T (m)		δb (m, m/sec, rad)		
$\delta\hat{\alpha}_x$	0.401×10^{-2}	$\delta\hat{\beta}_x$	-0.494×10^{-8}	$\delta\hat{X}_T$	-162.86	$\delta\hat{b}_\rho$	29.24	
	0.991×10^{-2}		0.99985×10^{-6}		1.774		45.87	
$\delta\hat{\alpha}_y$	0.132×10^{-3}	$\delta\hat{\beta}_y$	0.103×10^{-7}	$\delta\hat{Y}_T$	20.35	$\delta\hat{b}_\rho$	3.44	
	0.989×10^{-2}		0.99994×10^{-6}		581.1		0.164	
$\delta\hat{\alpha}_z$	0.326×10^{-2}	$\delta\hat{\beta}_z$	-0.345×10^{-9}	$\delta\hat{Z}_T$	16.50	$\delta\hat{b}_E$	0.127×10^{-2}	
	0.481×10^{-2}		0.99999×10^{-6}		587.9		0.935×10^{-3}	
							$\delta\hat{b}_A$	0.151×10^{-2}
								1.71×10^{-3}

ぞれ Σ_I のベクトル r_I, r_I' に移されたとしよう。そのとき J_n は変換誤差

$$|r_I - r_I'|^2 = |(T_{IB}(t_n) - T_{IB}(t_n|t_n))r_B|^2$$

の期待値を表わす。ただし r_B は空間的に一様分布していると仮定する。図 18 で初めは殆んど差はないが後半にかけて次第に差の開いてゆくことが観察される。

以上見たように軌道誤差に関しては GRT が標準軌道に比して精度の一層よい推定値を与える。またその推定精度を考慮すると軌道再構成の目的では十分に実用的であると言える。

次に誘導誤差, レーダーシステム誤差の推定結果を見よう。表 5 に 3 段目燃焼終了時における GRT による計算結果をまとめておく。誘導誤差に関してわれわれの設定したシミュレーションモデルではピッチジャイロのドリフトレート, ロール軸方向の加速度計のバイアスを除く他の誤差の不確実性 (uncertainty, 標準偏差で評価) を十分減少させることは困難であると言える。ここでは典型的な計算例として各軸方向の加速度計のバイアス $\delta\alpha$ の推定値 $\delta\hat{\alpha}$ と分散の変化を図 19, 図 20 に示す。両図から明らかなようにロール軸方向の加速度計のバイアス α_z については精度よく推定できて最終的に

$$\delta\hat{\alpha}_z = 0.326 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2$$

$$\sigma_{\alpha_z} = 0.481 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2$$

を得た。なお $\delta\alpha_z$ の真値は $0.4 \times 10^{-2} \text{ m/sec}^2$ である。残りのバイアス $\delta\alpha_x, \delta\alpha_y$ の不確実度はあまり減少せず, トラッキングデータの中にそれらに関する情報は殆んど含まれていないと考えられる。ジャイロのドリフトレート β については殆んど推定できずこの原因

もまたトラッキングデータに β の情報が殆んど含まれていないことに帰する。

次にレーダーシステム誤差について見よう。図 21 は B ステーションの位置誤差 δx_T の推定結果であるが著しい収束性を示している。130 秒前後で推定値

$$\delta\hat{x}_T = -162.86 \text{ m}$$

$$\sigma_{x_T} = 1.77 \text{ m}$$

に達しその後の変動は極めて微小である。なお δx_T の真値は -162.26 m である。 δx_T はわれわれの場合ステーションのダウンレンジ方向の位置誤差を表わすがこの δx_T の推定値が急速な収束性を示す傾向はパラメータを変えた他のいずれの計算でも確認された。ステーションのダウンレンジ方向の位置誤差は軌道の推定過程において極めてセンシティブであると言える。図 22 はレーダーの仰角観測におけるバイアス δb_E の

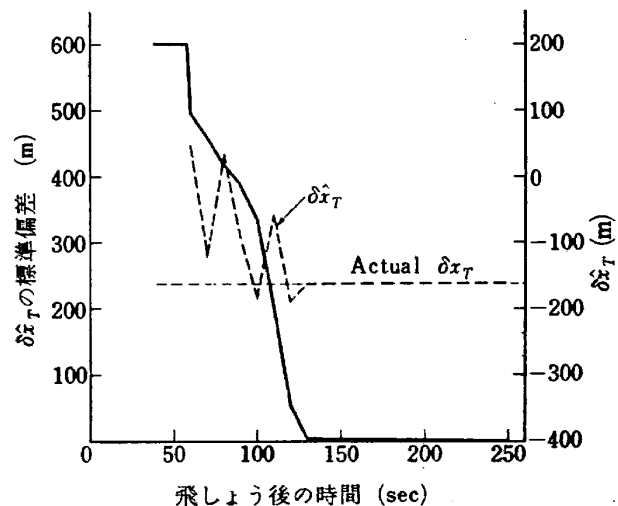


図 21 ステーションの位置誤差 δx_T の推定とその標準偏差

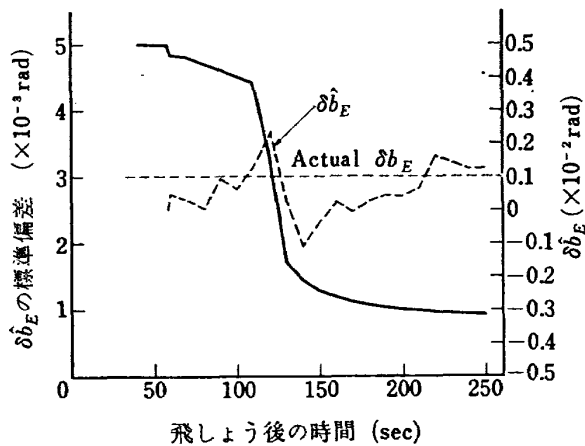


図 22 仰角観測のバイアス誤差 δb_E の推定とその標準偏差

推定結果である。最終的に推定値

$$\hat{\delta b}_E = 0.127 \times 10^{-2} \text{ rad}$$

$$\sigma_{\delta b_E} = 0.935 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

を得た。 δb_E の真値は 0.1×10^{-2} rad である。レーダーシステムの他の誤差については不確定性の顕著な減少は見られなかった。

以上前節で述べたわれわれのシミュレーションモデルに従って軌道誤差、誘導誤差およびレーダーシステム誤差の Kalman-Bucy フィルターによる推定結果を述べた。もとより計算結果はシミュレーション条件に大きく依存するわけで、われわれの結果から一般的な結論を導くことはできない。シミュレーション条件のうちで結果に最も大きな影響を及ぼすものはステーションの配置と位置誤差、IMU およびレーダーシステムの不規則雑音をシミュレートするための擬似乱数の randomness である。特に計算時間の節約のため 1 回の run だけで一般的な傾向を把握しようとする場合、その結果は擬似乱数の標本軌道 (sample path) によって大きく変化するものであることを認識しなければならない。因にわれわれの計算に要した時間は擬似乱数および軌道発生も含めて HITAC 5020 F で約 120 分であった。

8. 結論およびあとがき

strapdown 方式の航法システムをもつロケットに対して、Kalman-Bucy の推定理論を応用した誘導誤差解析の手法を確立した。すなわち、まず事後解析はテレメータによって伝送された IMU データとレーダートラッキングデータに基づきなされることを述べ、初めに IMU 入出力およびレーダーシステムの誤差モデルにつき詳しく説明した。特に IMU 誤差のモデリン

グは実用的にも数学的にも極めて興味あることを注意した。次に Kalman-Bucy フィルターの構造を離散系につき概観し応用上の諸問題に言及した。続いて IMU データを力学系に働く一種の強制力と考えることによって、空気抵抗、プロパルジョンおよびオートパイロットシステムから成る非重力加速度の項の複雑なモデリングを避けた。その項は IMU 誤差モデルの未知パラメータを含むより簡単なモデルで表現された。トラッキングデータはフィルターの利用し得る唯一の観測データと見なした。

Kalman-Bucy の線型推定理論を応用するため適当な規準軌道の近傍で展開し、線型化方程式を得た。規準軌道の選択については標準軌道、GDT および GRT 等のオプションのあることを指摘し、中でも GRT が有望であることを強調した。最後にここで提案された手法の有効性を確認するためデジタルシミュレーションを実行した。規準軌道として標準軌道、GRT の 2 つについて計算を行ない比較検討した結果、軌道誤差に関しては予想通り GRT が不確定性をより減少させることが確認され、軌道構成の目的では本手法は極めて有望であることがわかる。各種システム誤差の推定については両者で大きな差異は見られなかった。われわれのシミュレーションではロール軸方向の加速度計のバイアス、ステーションの位置誤差および仰角観測のバイアス誤差以外は不確定性を大して減少させられず、それら誤差に関する情報は殆んど含まれていないと解釈された。しかしながら推定結果はシミュレーションモデルの設定、特にレーダーステーションの配置および不規則雑音の標本軌道に非常に敏感であるから、シミュレーション結果から一般的結論を導き出すことはできない。

本報告は大規模なデータリダクションプログラムあるいはシミュレーションプログラム作製のための理論的資料を提供するものである。ここでは filtering に限定したが、本来事後解析では smoothing の概念が中心になると考えられる。smoothing は filtering よりも高精度な推定値を与えることを付録でも指摘したが実データによる誘導誤差解析においては本報告で述べたような手法に基づき、filtering, smoothing およびモデルの修正を繰り返すことによって推定精度を高めることができる。既に述べているように、推定理論の応用上最も問題となる点は、モデリングと状態ベクトルの構成である。実際推力飛しょう時におけるロケットの GN & C を精密に記述するためには数百の未知パラメータを必要とするが相互に highly correlated

であり、観測データの中にそれに関する情報が殆んど含まれていない場合があるから、これら全てを状態ベクトルに繰り込み分離することは非常に難しい。感度解析、モンテカルロ法等による事前解析に基づいて、誘導性能に最もセンシティブな影響を与えるパラメータのみを適切に選択すべきである。Kalman-Bucy フィルターを電子計算機で作動させるために必要な記憶容量は大抵状態ベクトルの次元の2乗のオーダーで増大し、さらに所要計算時間は、次元の3乗のオーダーで増加することからも上記2点には細心の配慮が必要であろう。

本報告では、擬似観測データによる事後解析に焦点をあてて説明した。ここで述べた考え方は、まえがきで触れたように事前解析にもそのまま適用できることに注意したい。事前解析は、入手できると想定されるIMU データ、トラッキングデータに基づいてなされるわけでその推定結果はミッション達成のための要求精度を規定するものである。本研究で作製したシミュレーションプログラムは事前解析にも利用できる。

残された課題としては、既に断片的に述べたように

- (1) IMU データ、トラッキングデータが有色雑音に汚される場合
- (2) IMU 誤差のモデリングと地上試験の実データによる比較検討
- (3) モデル化されないパラメータの統計的処理
- (4) フィルターの初期値の決定と、初期値誤差およびモデリング誤差が推定過程に及ぼす影響
- (5) smoothing を含む高精度な推定
- (6) 非線型フィルターの応用
- (7) 実データに基づく総合的誘導誤差解析

を挙げることができる。これらの話題に関しては次の機会に譲る。

終りに本研究を進めるに際して、樋口一雄計測部部长、計測研究室奥石肇室長、志甫徹主任研究官、松島弘一技官そして機器研究室大月正男室長による有益なご討論を得たことを記し、筆者は深甚の謝意を表したい。

付録 A Kalman-Bucy の線型推定理論

Kalman, Bucy による線型推定理論のうち、離散系につき基本的な性質とフィルターのアルゴリズムを5節で説明した。ここでは連続系の場合に最近の確率微分方程式に基づく理論の展開を概観しておこう。

対象とする物理系が確率過程である場合に、その系を記述する数学モデルとして確率微分方程式 (stochas-

tic differential equation) を用いるのが自然な方法であると、最近の確率制御過程論では認めている。すなわち確率微分方程式を導入することによって Markov 過程論に基盤を置く数学的に厳密な議論が可能になる。

従来工学では確率過程を表わす数学モデルとして

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t, \omega) = F(t) \mathbf{x}(t, \omega) + C(t) \mathbf{u}(t, \omega) + G(t) \boldsymbol{\xi}(t, \omega) \quad (\text{A.1})$$

という n 次元ベクトル常微分方程式を使って来た。ここで

- $\mathbf{x}(t, \omega)$: n 次元ベクトル確率過程
- $F(t)$: $n \times n$ 次元システム行列
- $C(t)$: $n \times l$ 次元制御ゲイン行列
- $G(t)$: $n \times d$ 次元雑音強度行列
- $\mathbf{u}(t, \omega)$: l 次元制御ベクトル
- $\boldsymbol{\xi}(t, \omega)$: d 次元正規白色雑音で $\varepsilon\{\boldsymbol{\xi}(t, \omega)\} = 0$,
 $\varepsilon\{\boldsymbol{\xi}(t, \omega) \boldsymbol{\xi}'(s, \omega)\} = Q(t) \delta(t-s)$
- ω : 確率空間 Ω の生成点

既に指摘されているように (A.1) 式に対する厳密な数学モデルは次の伊藤型の確率微分方程式である。

$$d\mathbf{x}(t, \omega) = F(t) \mathbf{x}(t, \omega) dt + C(t) \mathbf{u}(t, \omega) dt + G(t) d\mathbf{B}(t, \omega) \quad (\text{A.2})$$

ただし

$$\mathbf{B}(t, \omega) = \int_{t_0}^t \boldsymbol{\xi}(s, \omega) ds$$

は d 次元 Brown 運動過程であり、明らかに

$$\varepsilon\{\mathbf{B}(t, \omega)\} = 0,$$

$$\varepsilon\{\mathbf{B}(t, \omega) \mathbf{B}'(s, \omega)\} = \int_{t_0}^{\min(t, s)} Q(t) dt$$

を満たす。なお (A.2) 式は確率積分方程式

$$\mathbf{x}(t, \omega) = \mathbf{x}(t_0, \omega) + \int_{t_0}^t F(s) \mathbf{x}(s, \omega) ds + \int_{t_0}^t C(s) \mathbf{u}(s, \omega) ds + \int_{t_0}^t G(s) d\mathbf{B}(s, \omega)$$

の象徴式と解釈されるのであるが、非線型まで含めた確率微分方程式の詳細は本稿の範囲を超えるので別稿で論じたい。

さて観測過程も次の伊藤型の確率微分方程式に従うものとする。

$$d\mathbf{y}(t, \omega) = H(t) \mathbf{x}(t, \omega) dt + R(t) d\mathbf{B}_1(t, \omega) \quad (\text{A.4})$$

$$\mathbf{y}(t_0, \omega) = 0$$

ただし

- $\mathbf{y}(t, \omega)$: $m (\leq n)$ 次元観測ベクトル
- $H(t)$: $m \times n$ 次元観測感度行列
- $R(t)$: $m \times d_1$ 次元観測雑音強度行列

$B_1(t, \omega)$: d_1 次元 Brown 運動過程で $\varepsilon\{B_1(t, \omega)\} = 0$, $\varepsilon\{B_1(t, \omega)B_1(s, \omega)'\} = I|t-s|$ とする。

(A.4) 式の工学的な意味は、

$$\frac{dy}{dt}(t, \omega) = b(t, \omega) = H(t)x(t, \omega) + R(t)\eta(t, \omega) \quad (A.5)$$

と置くことにより明確になる。ここで $\eta(t, \omega)$ は規格化された正規白色雑音で Brown 運動 $B_1(t, \omega)$ とは

$$B_1(t, \omega) = \int_{t_0}^t \eta(s, \omega) ds$$

で結ばれている。 $b(t, \omega)$ が通常の意味の m 次元観測ベクトルである。以上物理系 (A.1) および (A.5) 式に対する数学モデルは厳密には (A.2), (A.4) 式のような確率微分方程式で記述されるべきことを述べた。

次に観測データ

$$\mathfrak{Y}(t) = \{y(\tau, \omega); t_0 \leq \tau \leq t\} \quad (A.6)$$

(厳密にはその σ -algebra) に基づく $x(t, \omega)$ の最小分散不偏推定値

$$\hat{x}(t|y(t)) = \varepsilon\{x(t, \omega)|y(t)\} \quad (A.7)$$

の満足する確率微分方程式を記しておこう。記述の簡略のため以後 ω を省略し, (A.7) 式を単に $\hat{x}(t|t)$, またその推定誤差の共分散行列を $P(t|t)$ と書く。そのとき Kalman, Bucy, Kushner⁴⁴⁾ によれば

$$d\hat{x}(t|t) = F(t)\hat{x}(t|t)dt + C(t)\hat{u}(t|t) + P(t|t)H'(t)(R(t)R'(t))^{-1} \times (dy(t) - H(t)\hat{x}(t|t)dt) \quad (A.8)$$

$$\frac{d}{dt} P(t|t) = P(t|t)F'(t)F(t)P(t|t) - P(t|t)H'(t)(R(t)R'(t))^{-1}H(t)P(t|t) + G(t)Q(t)G'(t) \quad (A.9)$$

が成立する。上式が線型連続系に対する Kalman, Bucy フィルターのダイナミックスである。離散系の場合と同様に $t_1 < t < t_2$ に対して

$$\hat{x}(t_1|t) = \varepsilon\{x(t_1)|\mathfrak{Y}(t)\}$$

$$\hat{x}(t_2|t) = \varepsilon\{x(t_2)|\mathfrak{Y}(t)\}$$

をそれぞれ平滑および予測による推定値と呼ぶ。予測の方程式は容易に得られて, 形式的には (A.8), (A.9) 式で $|R(t)| \rightarrow \infty$ と置けばよい。すなわち

$$\frac{d\hat{x}}{dt_2}(t_2|t) = F(t_2)\hat{x}(t_2|t) + C(t_2)\hat{u}(t_2|t) \quad (A.10)$$

$$\frac{d}{dt_2} P(t_2|t) = P(t_2|t)F'(t_2)F(t_2)P(t_2|t) + G(t_2)Q(t_2)G'(t_2) \quad (A.11)$$

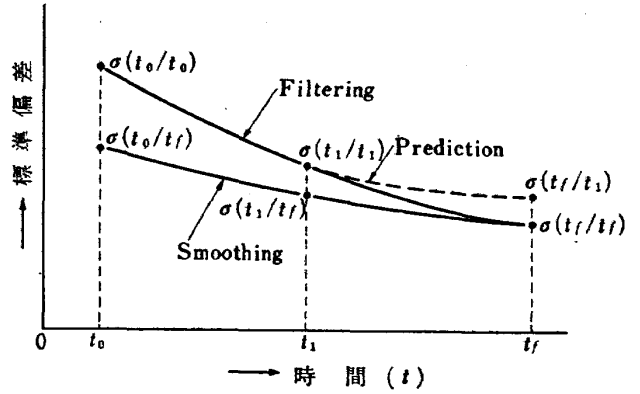


図 23 予測, フィルター, 平滑化の推定精度の比較

で初期値はそれぞれ $\hat{x}(t|t)$, $P(t|t)$ である。平滑化のダイナミックスは省略するが Meditch¹²⁾ に詳しい。

次に平滑, フィルター, 予測という各推定値の精度に触れておこう。容易にわかるように

$$\mathfrak{Y}(t_1) \subset \mathfrak{Y}(t) \subset \mathfrak{Y}(t_2)$$

であるから, 推定精度を規定する分散に関してスカラ一系の場合一般的に図 23 のような順序づけが可能である。平滑化が最も精度よい推定値を与えることは当然である。ただし図 23 で $\sigma(s|t)$ は推定値 $\hat{x}(s|t)$ の標準偏差を表わす。

付録 B 観測感度行列 H の計算

(5.31) 式における H 行列は

$$H(t_k) = \left(\frac{\partial y}{\partial R} \right)^* \left(\frac{\partial y}{\partial V} \right)^* \quad 0 \quad \left(\frac{\partial y}{\partial R_T} \right)^* \quad 0 \cdots 0 \quad I$$

で与えられることを見た。ここでは利用者のために, H 行列の各要素の表現を記しておこう。いまステーション T_i に対応する H 行列の部分行列を $H^i(t_k)$ とすると

$$H^i(t_k) = \left(\left(\frac{\partial y^i}{\partial R} \right)^* \left(\frac{\partial y^i}{\partial V} \right)^* \quad 0 \quad \left(\frac{\partial y^i}{\partial R_{T_i}} \right)^* \quad 0 \cdots 0 \quad I_i \right)$$

である。すなわち

$$H_1^i(t_k) = \left(\left(\frac{\partial y^i}{\partial R} \right)^* \left(\frac{\partial y^i}{\partial V} \right)^* \right)$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_i}{\partial X} & \frac{\partial \rho_i}{\partial Y} & \frac{\partial \rho_i}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial X} & \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial Y} & \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial Z} & \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{X}} & \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{Y}} & \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial \dot{Z}} \\ \frac{\partial E_i}{\partial X} & \frac{\partial E_i}{\partial Y} & \frac{\partial E_i}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\partial A_i}{\partial X} & \frac{\partial A_i}{\partial Y} & \frac{\partial A_i}{\partial Z} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$H_2^i(t_k) = \frac{\partial y^i}{\partial R_{T_i}}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{\partial \rho_i}{\partial X_{Ti}} & \frac{\partial \rho_i}{\partial Y_{Ti}} & \frac{\partial \rho_i}{\partial Z_{Ti}} \\ \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial X_{Ti}} & \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial Y_{Ti}} & \frac{\partial \dot{\rho}_i}{\partial Z_{Ti}} \\ \frac{\partial A_i}{\partial X_{Ti}} & \frac{\partial A_i}{\partial Y_{Ti}} & \frac{\partial A_i}{\partial Z_{Ti}} \end{pmatrix}$$

記述の簡略のため

$$\rho_i = \begin{pmatrix} X_{ip} \\ Y_{ip} \\ Z_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} X - X_{Ti} \\ Y - Y_{Ti} \\ Z - Z_{Ti} \end{pmatrix}$$

$$\dot{\rho}_i = \begin{pmatrix} \dot{X}_{ip} \\ \dot{Y}_{ip} \\ \dot{Z}_{ip} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{X} + \omega_E Y_{Ti} \\ \dot{Y} - \omega_E X_{Ti} \\ \dot{Z} \end{pmatrix}$$

と置き以後では i を省略する。そのとき

$$\rho = |\rho| = (X_p^2 + Y_p^2 + Z_p^2)^{1/2}$$

$$\dot{\rho} = (\rho, \dot{\rho}) / \rho$$

$$\sin E = (\rho, \mathbf{h}) / \rho$$

$$\rho \cos E \cos A = Y'$$

$$\rho \cos E \sin A = X'$$

ただしロケットの Σ_T に関する位置ベクトルを (X', Y', Z') とすると (4.4) 式に基づき

$$X' = -X_p \sin \lambda + Y_p \cos \lambda$$

$$Y' = -X_p \cos \lambda \sin \phi - Y_p \sin \lambda \sin \phi + Z_p \cos \phi$$

$$Z' = X_p \cos \lambda \cos \phi + Y_p \sin \lambda \cos \phi + Z_p \sin \phi$$

以上から

$$\frac{\partial \rho}{\partial X} = -\frac{\partial \rho}{\partial X_T} = \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{X}} = \frac{X_p}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial Y} = -\frac{\partial \rho}{\partial Y_T} = \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{Y}} = \frac{Y_p}{\rho}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial Z} = -\frac{\partial \rho}{\partial Z_T} = \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{Z}} = \frac{Z_p}{\rho}$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\rho X} = \dot{X}_p \left[\frac{1}{\rho} - \frac{X_p^2}{\rho^3} \right] - \dot{Y}_p \frac{X_p Y_p}{\rho^3} - \dot{Z}_p \frac{X_p Z_p}{\rho^3}$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\rho Y} = -\dot{X}_p \frac{Y_p X_p}{\rho^3} + \dot{Y}_p \left[\frac{1}{\rho} - \frac{Y_p^2}{\rho^3} \right] - \dot{Z}_p \frac{Y_p Z_p}{\rho^3}$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\rho Z} = -\dot{X}_p \frac{Z_p X_p}{\rho^3} + \dot{Y}_p \frac{Z_p Y_p}{\rho^3} + \dot{Z}_p \left[\frac{1}{\rho} - \frac{Z_p^2}{\rho^3} \right]$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial X_T} = -\omega_E \frac{Y_p}{\rho} - \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial X}$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y_T} = \omega_E \frac{X_p}{\rho} - \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Z_T} = -\frac{\partial \dot{\rho}}{\partial Z}$$

$$\frac{\partial E}{\partial X} = \frac{\left\{ X_T \left(\frac{1}{\rho} - \frac{X_p^2}{\rho^3} \right) - Y_T \frac{X_p Y_p}{\rho^3} - Z_T \frac{X_p Z_p}{\rho^3} \right\}}{R_T \cos E}$$

$$\frac{\partial E}{\partial Y} = \frac{\left\{ -X_T \frac{Y_p X_p}{\rho^3} + Y_T \left(\frac{1}{\rho} - \frac{Y_p^2}{\rho^3} \right) - Z_T \frac{Y_p Z_p}{\rho^3} \right\}}{R_T \cos E}$$

$$\frac{\partial E}{\partial Z} = \frac{\left\{ -X_T \frac{Z_p X_p}{\rho^3} - Y_T \frac{Z_p Y_p}{\rho^3} + Z_T \left(\frac{1}{\rho} - \frac{Z_p^2}{\rho^3} \right) \right\}}{R_T \cos E}$$

$$\frac{\partial E}{\partial X_T} = -\frac{\partial E}{\partial X} + \left(\frac{X_p}{\rho} - \frac{X_T}{R_T} \sin E \right) / R_T \cos E$$

$$\frac{\partial E}{\partial Y_T} = -\frac{\partial E}{\partial Y} + \left(\frac{Y_p}{\rho} - \frac{Y_T}{R_T} \sin E \right) / R_T \cos E$$

$$\frac{\partial E}{\partial Z_T} = -\frac{\partial E}{\partial Z} + \left(\frac{Z_p}{\rho} - \frac{Z_T}{R_T} \sin E \right) / R_T \cos E$$

$$\frac{\partial A}{\partial X} = \frac{1}{Y'} \frac{\partial X'}{\partial X} - \frac{X'}{Y'} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial X} - \frac{\sin E}{\cos E} \frac{\partial E}{\partial X} \right]$$

$$\frac{\partial A}{\partial Y} = \frac{1}{Y'} \frac{\partial X'}{\partial Y} - \frac{X'}{Y'} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial Y} - \frac{\sin E}{\cos E} \frac{\partial E}{\partial Y} \right]$$

$$\frac{\partial A}{\partial Z} = \frac{1}{Y'} \frac{\partial X'}{\partial Z} - \frac{X'}{Y'} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial Z} - \frac{\sin E}{\cos E} \frac{\partial E}{\partial Z} \right]$$

$$\frac{\partial A}{\partial X_T} = \frac{1}{Y'} \frac{\partial X'}{\partial X_T} - \frac{X'}{Y'} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial X_T} - \frac{\sin E}{\cos E} \frac{\partial E}{\partial X_T} \right]$$

$$\frac{\partial A}{\partial Y_T} = \frac{1}{Y'} \frac{\partial X'}{\partial Y_T} - \frac{X'}{Y'} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial Y_T} - \frac{\sin E}{\cos E} \frac{\partial E}{\partial Y_T} \right]$$

$$\frac{\partial A}{\partial Z_T} = \frac{1}{Y'} \frac{\partial X'}{\partial Z_T} - \frac{X'}{Y'} \left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial Z_T} - \frac{\sin E}{\cos E} \frac{\partial E}{\partial Z_T} \right]$$

ここで

$$\frac{\partial X'}{\partial X} = -\sin \lambda, \quad \frac{\partial X'}{\partial Y} = \cos \lambda, \quad \frac{\partial X'}{\partial Z} = 0$$

$$\frac{\partial X'}{\partial X_T} = \sin \lambda + (X_p \cos \lambda + Y_p \sin \lambda) Y_T / (X_T^2 + Y_T^2)$$

$$\frac{\partial X'}{\partial Y_T} = -\cos \lambda - (X_p \cos \lambda + Y_p \sin \lambda) X_T / (X_T^2 + Y_T^2)$$

$$\frac{\partial X'}{\partial Z_T} = 0$$

参考文献

- 1) A. N. Kolmogorov; Interpolation and Extrapolation von Stationären Zufälligen Folgen, Bull. Acad. Sci. USSR, Ser. Math, 5, 1941, pp. 3-14.
- 2) N. Wiener; Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications, Wiley, New York, 1949.
- 3) R. E. Kalman; A new Approach to Linear Filtering and Prediction Problems, J. Basic Eng., ASME, 82, 1960, pp. 35-45.
- 4) R. S. Bucy & R. E. Kalman; New Results in Linear Filtering and Prediction Theory, J. Basic Eng., ASME, Ser. D, 83, 1961, pp. 95-108.
- 5) R. L. Stratonovich; Conditional Markov Processes, Theory of Probability and its Appli-

- cations, Vol. 5, No. 2, 1960, pp. 172-195 (in russian).
- 6) R. K. Smyth; Guidance and Control 1968, AIAA Paper No. 69-72, 1969.
 - 7) R. S. Bucy and P. D. Joseph; Filtering for Stochastic Processes with Applications to Guidance, Interscience Publishers, 1968.
 - 8) A. H. Jazwinski; Stochastic Processes and Filtering Theory, Academic Press, 1970.
 - 9) A. E. Bryson Jr. & L. J. Henrikson; Estimation Using Sampled Data Containing Sequentially Correlated Noise, J. Spacecraft, Vol. 5, No. 6, June 1968, pp. 662-665.
 - 10) A. E. Bryson Jr. & D. E. Johansen; Linear Filtering for Time-Varying Systems Using Measurements Containing Colored Noise, IEEE Trans. Autom. Control, Vol. AC-10, 1965, p. 4-10.
 - 11) R. S. Bucy; Optimal Filtering for Correlated Noise, J. Math. Anal. Appl., Vol. 20, 1967, p. 1-8.
 - 12) J. S. Meditch; Stochastic Optimal Linear Estimation and Control, McGraw-Hill, 1969.
 - 13) H. W. Sorenson; On the Treatment of IMU data in Optimal Linear Navigation Policies, IEEE Vol. AES-5, No. 3, 1969, pp. 429-440.
 - 14) W. Eisner & A. F. Goodman; Determination of Dominant Error Sources in an Inertial Navigation System by Iterative Weighted Least Squares, AIAA J., Vol. 2, No. 4, 1964, pp. 722-727.
 - 15) W. F. Trench; A Data Combination Method for Postflight Trajectory Analysis, J. Spacecraft, Vol. 4, No. 4, 1967, pp. 424-427.
 - 16) J. L. Greenstein; Postflight Guidance Accuracy Analysis of Atlas/Centaur/Surveyor Flights, J. Spacecraft, Vol. 6, No. 9, 1969, pp. 971-977.
 - 17) J. S. Tyler Jr. & J. V. Brown; The Estimation of Inertial Guidance Errors, AIAA Paper No. 68-885, 1968.
 - 18) J. V. Brown & J. S. Tyler Jr.; Estimation of Inertial Platform Errors, NASA CR-61645, 1967.
 - 19) K. L. Remmler & R. T. Theobald; An Error Analysis of Navigation Using Inertial Guidance and Radar Tracking, J. Spacecraft, Vol. 4, No. 4, 1967, pp. 417-423.
 - 20) R. C. Rodems; The Problems of Using Real Data in Statistical Filtering, 第1回サンディエゴシンポジウム予稿集 (非線型推定理論とその応用), 1970.
 - 21) H. S. Braham & L. J. Skidmore; Guidance-Error Analysis of Satellite Trajectories, J. Aerospace Science, 1962, pp. 1091-1101.
 - 22) W. Wrigley, W. M. Hollister and W. G. Denhard; Gyroscopic Theory, Design, and Instrumentation, The M.I.T. Press, 1968.
 - 23) A. S. Oravetz & H. J. Sandberg; Stationary and Nonstationary Characteristics of Gyro Drift Rate, AIAA Paper No. 69-838, 1969.
 - 24) A. Dushman; On Gyro Drift Models and Their Evaluation, IRE Trans on ANE, Dec. 1962, pp. 230-234.
 - 25) C. F. Price; Minimum Variance Estimates of Gyroscopic Drift Parameters, J. Spacecraft, Vol. 5, No. 6, 1968, pp. 747-749.
 - 26) R. A. Nash, Jr., S. A. Levine & K. J. Roy; Error Analysis of Space-Stable Inertial Navigation Systems, IEEE Vol. AES-7, No. 4, 1971, pp. 617-629.
 - 27) C. Broxmeyer; Inertial Navigation Systems, McGraw-Hill, 1964.
 - 28) R. A. Nash, Jr. et al; Application of Optimal Smoothing to the Testing and Evaluation of Inertial Navigation Systems and Components, IEEE Vol. AC-16, No. 6, 1971, pp. 806-816.
 - 29) J. L. Farrell; Performance of Strapdown Inertial Attitude Reference Systems, J. Spacecraft, Vol. 3, No. 9, Sept. 1966, pp. 1340-1347.
 - 30) C. B. Geosch; Simulation Test for an Inertial Navigation System, ARS Journal, Sept. 1962, pp. 1350-1353.
 - 31) J. F. Bellantoni & E. J. Koenke; Launch Pad Alignment of a Strapdown Navigator by the Kalman Filter, AIAA Paper No. 68-831, 1968.
 - 32) E. B. Crocker & L. Rabins; Application of Kalman Filtering Techniques to Strapdown System Initial Alignment, Chap. 19, AGAR Dograph 139, Theory and Applications of Kalman Filtering (edited by C. T. Leondes), Feb. 1970, pp. 491-512.
 - 33) G. T. Schmidt & L. D. Brock; Statistical Estimation in Inertial Navigation Systems, J. Spacecraft, Vol. 5, No. 2, 1968, pp. 146-153.
 - 34) F. J. Mullin; Digital Simulation of Space missions for Monte Carlo analysis, Simulation, 1968, pp. 133-144.
 - 35) S. L. Fagin; A Unified Approach to the Error Analysis of Augmented Dynamically Exact Inertial Navigation Systems, IEEE on ANE, 1964, pp. 234-248.
 - 36) C. F. O'Donnell; Inertial Navigation, Analysis and Design, McGraw-Hill, 1964.
 - 37) C. T. Leondes (Ed.); Guidance and Control of Aerospace Vehicle, McGraw-Hill, 1963.
 - 38) R. C. Duncan & A. S. Gunnensen Jr.; Inertial Guidance, Navigation, and Control Systems, J. Spacecraft, Vol. 1, No. 6, Nov.-Dec. 1964, pp. 577-587.

- 39) 大月正男他; ストラップダウン方式における慣性機器誤差による飛しょう経路誤差の一考察, 第14回宇宙科学技術講演会講演集, Feb. 1971.
- 40) P. R. Escobal; *Methods of Orbit Determination*, John Wiley & Sons, Inc., 1965.
- 41) I. I. Gikhman & A. V. Skorokhod; *Introduction to the Theory of Random Processes*, W. B. Saunders Company, 1969.
- 42) 伊藤 清; 確率論 (現代数学 14), 岩波書店, 1952.
- 43) Y. C. Ho & R. C. K. Lee; *A Bayesian Approach to Problems in Stochastic Estimation and Control*, IEEE Trans. on AC, Oct. 1964, pp. 333-339.
- 44) H. J. Kushner; *On the Differential Equations Satisfied by Conditional Probability Distributions of Markov Processes, with Applications*, SIAM Jour on Control, Ser. A, Vol. 2, No. 1, 1962, pp. 106-119.
- 45) K. R. Britting, Sc. D.; *Inertial Navigation Systems Analysis*, Wiley-Interscience, 1971.

- | | | | |
|---------|---|-----------|--------------------------------------|
| TR-295 | 自機搭載型軌道保持システムのための軌道決定と制御
Orbit Determination and Control Method for Self-Contained Station-Keeping Systems | 1972年8月 | 松島 弘一 |
| TR-296 | 航空用ガスタービン燃焼器のライナ壁面の冷却
Liner Cooling of the Aeronautical Gas Turbine Combustor | 1972年8月 | 相波 哲朗 |
| TR-297 | Green関数を二次元ラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算
(境界条件として温度勾配を与える場合)
A Calculation of Temperature Distribution by Applying Green's Function to a Two-Dimensional Laplace's Equations.
(The Case in which the Temperature Gradients on the Boundary are given) | 1972年8月 | 西村 英明, 白井 弘 |
| TR-255T | The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field | Aug. 1972 | Sumio TAKEUCHI
Koichi Matsushima |
| TR-298 | 航空機用対気速度計の位置誤差について
Experiments on Airspeed Calibration Procedures | 1973年1月 | 幸尾 治朗, 岡 遠一
塚野 雄吉, 矢沢 健司
小野 孝次 |
| TR-299 | 遷音速における二次元翼の抵抗発散
On the Drag Divergence of Two-Dimensional Airfoils at Transonic Speeds | 1973年1月 | 神谷 信彦, 西 武徳
伊藤 忠, 瀬川 晋策
小此木 時雄 |
| TR-300 | そり角の小さい遷音速二重円弧二次元翼列実験
Experimental Investigation of Two-Dimensional Cascade Performances with Thin and Low-Cambered Double-circular Arc Blade Sections at Transonic Inlet Mach Number Range | 1972年10月 | 坂口 一, 近藤 博
高森 晋, 岩下 敬吾 |
| TR-301 | 観測系の評価に関するひとつの数学的理論
A Mathematical Theory on Evaluation of Observation Systems | 1972年9月 | 木村 武雄 |

航空宇宙技術研究所報告302号

昭和47年10月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)☎182

印刷所 日新図書印刷株式会社
東京都港区芝3-33-5
