

UDC 521.4:  
530.145.7:  
629.783.525

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-320

地球の重力の作用下にある人工衛星の  
運動に関する研究

——運動が長期間にわたる場合——

武 内 澄 夫

1973年6月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- TR-297 Green 関数を二次元ラプラス方程式に適用した解法による冷却タービン翼の温度分布の計算 (境界条件として温度勾配を与える場合)  
A Calculation of Temperature Distribution by Applying Green's Function to a Two-Dimensional Laplace's Equations. (The Case in which the Temperature Gradients on the Boundary are Given) 1972年8月 西村英明, 白井 弘
- TR-255T The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field Aug. 1972 Sumio TAKEUCHI, Koichi MATSUSHIMA
- TR-298 航空機用対気速度計の位置誤差について  
Experiment on Airspeed Calibration Procedures 1973年1月 幸尾 治朗, 岡 遠一  
塚野雄吉, 矢沢健司  
小野孝次
- TR-299 遷音速における二次元翼の抵抗発散  
On the Drag Divergence of Two Dimensional Airfoils at Transonic Speeds 1973年1月 神谷信彦
- TR-300 そり角の小さい遷音速二重円弧二次元翼列実験  
Experimental Investigation of Two-Dimensional Cascade Performance with Thin and Low-Cambered Double-Circular-Arc Blade Sections at Transonic Inlet Mach Number Range 1972年10月 坂口 一, 近藤 博  
高 森 晋, 岩下敬吾
- TR-301 観測系の評価に関するひとつの数学的理論  
A Mathematical Theory on Evaluation of Observation Systems 1972年9月 木村武雄
- TR-302 Kalman-Bucy フィルターによる誘導誤差の推定  
Estimation of Guidance Errors by Kalman-Bucy Filtering Technique 1972年10月 村田正秋
- TR-303 ジンバルエンジン駆動用油圧制御系に適した IDPF サーボバルブの研究  
Studies of IDPF Servo Valve Appropriate for Gimbaled Engine Positioning Hydraulic Control Systems 1972年11月 畑山茂樹
- TR-304 ドラグカップ型ジャイロモータの同期化制御の研究  
Study on a Synchronizing Control of a Drag-Cup Gyro Motor 1972年11月 山田 博
- TR-305 オイラー角表示による座標変換のアルゴリズム  
Coordinate Transformation Algorithm by the Eulerian Angles Representation 1972年11月 狼 嘉彰
- TR-306 フライングテストベッド用付帯設備の計画  
System Design of Facilities for VTOL Flying Test Bed at National Aerospace Laboratory 1972年11月 滝沢直人, 洪谷昭義  
小川敏夫, 藤枝郭俊  
甲斐忠義, 宮本義人  
田辺義一, 小野幸  
竹内和之
- TR-307 プラズマ風洞アーク加熱器, ノズル流およびノズル噴流に対する諸考察  
Some Characteristics of the Arc-Heater Nozzle Flow and the Underexpanded Jet in the NAL 60kW Plasma Wind Tunnel 1972年12月 松崎利一, 平林則明
- TR-308 固体ロケット推進薬の超音波探傷  
On the Ultrasonic Inspection of Separation in Solid Propellant Rocket Motors 1972年12月 清水盛生, 野口義男  
種村利春

# 地球の重力の作用下にある人工衛星 の運動に関する研究\*

—運動が長期間にわたる場合—

武内 澄夫\*\*

## The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field

—In the Case of the Long Maneuver of Free Orbital Motion—

By Sumio TAKEUCHI

### Abstract

The motion of an artificial satellite in the gravitational field of the earth is investigated using Lagrange's planetary equations.

The complete gravitational disturbing function expressed in osculating Keplerian orbital elements is used.

Analytic formulae for the first order perturbations of the Keplerian orbital elements are derived.

In the case of satellites with periods commensurate with the earth's rotation period, by introducing the critical argument, the variations of orbital elements due to resonance terms are obtained. Then, integrating the resonance equation, the limits of the critical argument of the satellite are determined.

The theory is applied to the orbit of the geostationary satellite and variations of orbital elements are calculated. Further the stability of the satellite orbits in an earth-fixed reference frame is examined.

### 1. 緒 言

地球の重力の作用下にある人工衛星の運動を決定するために、運動方程式として Lagrange's planetary equations を用いて第一階の摂動を求める理論を先に報告した<sup>1)</sup>。そこでは commensurability の状態にある場合の運動については epoch から大体数十日以内の期間にある摂動をとりあつた。したがって摂動関数の resonance terms における三角関数で表示された因数の引数内にある平均運動は軌道の半長軸が変化しても最初の値をとりつづけて不変であるとした。しかしながら数十日の程度をこえる長期間にわたる運動をとりあつかう場合にはこの resonance terms における引数内にある平均運動も半長軸の変化に応じて変化す

して、このような変化をも顧慮した理論をたてることとした。

地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究についてみればすでに非常に数多くのものが報告されている。ここでその大部分を占めるものは地理学的な極座標を変数とする運動方程式を用いるものであり、これによれば運動の見とおしをたてる点においては不便であるが数値積分によって所要の精度において運動を決定することが可能である<sup>2)-13)</sup>。これに対して運動方程式として軌道要素を変数とする Lagrange's planetary equations を用いれば第一階の摂動あるいは線型摂動までを容易に求めることができ、また long range の摂動にもとづいて運動の見とおしをたてやすい。そこでこのようなもの割合に多い<sup>14)-17), 1)</sup>。ここでこの理論によるものの内の一部のもの<sup>18)-22)</sup> commensurability の状態にある場合には、critical argument を導入して長期間にわたる運動を決定するこ

\* 昭和48年4月5日受付

\*\* 宇宙研究グループ

とが可能である。またさらに第一階をこえる摂動あるいは非線型摂動までを求めて運動の詳細を決定しようとすれば別の変数によって論ずるのが得策であり、このような研究もいろいろと行なわれている。

そこで本報告においては運動方程式として Lagrange's planetary equations を用い、既報<sup>1)</sup>に完全に続行して地球の重力の potential を表わす harmonics の展開項を一般項で表示して第一階の摂動を求めた。そして特に commensurability の状態にある場合には critical argument を導入して resonance terms に起因する軌道要素の変化を出した。さらにまた resonance equation を解いて critical argument についての可動区間と運動の安定性を調べた。このようにして一般に長期間にわたり、long range の摂動にもとづいて運動の見とおしをたてることを可能とした。次いで harmonics の四次までをとり、離心率の七乗までを考慮した場合の計算式を既報<sup>1)</sup>から引用することによって示した。最後に例として静止衛星をとり、これに関する計算を行なった。そしてここにおいて軌道要素の変化および critical argument についての可動区間を求め、またこれによって地球に相対的な運動が安定となるための条件を出した。

## 2. 力学系

人工衛星は地球の重力の作用のみをうけるものとす

$$U = \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{m=0}^i \left( \frac{a_e}{r} \right)^i P_i^m(\sin \beta) J_{i,m} \cos m(\lambda - \lambda_{i,m}) \right\}$$

$$= \frac{\mu}{r} \left\{ 1 + \sum_{i=2}^{\infty} \sum_{m=0}^i \left( \frac{a_e}{r} \right)^i P_i^m(\sin \beta) (C_{i,m} \cos m\lambda + S_{i,m} \sin m\lambda) \right\} \quad (2.2)$$

$$\mu = k^2 M_e$$

ここで地球の質量に対して人工衛星の質量を無視してある。また

$k$ : Gaussian constant

$M_e$ : 地球の質量

$a_e$ : 地球の平均赤道半径

$r, \beta, \lambda$ : 地心距離, 地心緯度, 地理学的経度

$P_i^m(\sin \beta)$ : Legendre 陪関数

$J_{i,m}$ : 定数

$\lambda_{i,m}$ : 定数

$C_{i,m}$ : 定数

$S_{i,m}$ : 定数

である。さらに

$$J_{i,0} = C_{i,0}$$

であり、 $m \neq 0$  のときには

る。そしてその運動を地球の中心  $O$  を原点とし、恒星系に対して並進運動のみをする座標系  $Oxyz$  に関して決定することとする。ここで  $x$  軸および  $z$  軸をそれぞれ春分点および天の北極に向けてとり、座標系は右手系直交座標系をなすものとする。ただし春分点の天球上における移動を無視する。また平均太陽時あるいは常用時を  $t$  とする。そして epoch  $t = t_1 = t_{ep} = 0$  における Greenwich 平均恒星時を  $\theta_1$  とすれば  $t$  における Greenwich 平均恒星時は次式で表わされる。

$$\theta = \theta_1 + (1 + k')(t - t_1) \quad (2.1.T)$$

ここに  $k'$  は平均太陽時間を恒星時間に換算するときの定数である。 $\theta$  は時間の単位で表わされているがこれを角度で表わせば次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_1 + \nu(t - t_1) \\ \nu &= \frac{2\pi}{D_s} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.A.)$$

ここに  $D_s$  は 1 恒星日である。春分点の天球上における移動を無視するので  $D_s$  は地球の自転の周期  $T_E$  に等しいとみなせば

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \theta_1 + \tau(t - t_1) \\ \tau &= \frac{2\pi}{T_E} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.E)$$

となる。

このとき単位質量の人工衛星に対する地球の重力の potential は次式によって与えられる。

$$J_{i,m} = \pm \sqrt{C_{i,m}^2 + S_{i,m}^2}$$

$$\lambda_{i,m} = \frac{1}{m} \left\{ \tan^{-1} \frac{S_{i,m}}{C_{i,m}} + \left( 1 - \frac{C_{i,m} J_{i,m}}{|C_{i,m} J_{i,m}|} \right) \frac{\pi}{2} \right\}$$

となる。ここで  $J_{i,m}$  の複号の何れをとるかは、(2.2) における  $J_{i,m}$  の符号を正負の何れに定義するかにしたがって決定される。

## 3. 運動方程式

人工衛星の接触軌道要素として

$a$ : 軌道の半長軸

$e$ : 軌道の離心率

$i$ : 赤道面に対する軌道面の傾斜角

$\Omega$ : 昇交点の赤経

$\omega$ : 昇交点から近地点までの運動の向きにはかった

## 角距離

$\chi$ : epoch における平均近点離角

をとる。ここで  $n$  を平均運動とすれば

$$\mu = n^2 a^3 \quad (3.1)$$

が成立し、平均近点離角は次のようになる。

$$M = \chi + nt = \chi^* + \int_0^t n dt \quad (3.2)$$

なお  $\chi^*$  は modified mean anomaly at epoch である。そして次式が成立する。

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{dn}{dt} \cdot t + \frac{d\chi}{dt} = n + \frac{d\chi^*}{dt} \quad (3.3)$$

また摂動関数  $R$  は次のように表わされる。

$$R = U - \frac{\mu}{r} \quad (3.4)$$

このとき Lagrange's planetary equations は次のようになる<sup>23)</sup>。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi^*} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2 e} \left\{ (1-e^2) \frac{\partial R}{\partial \chi^*} - \sqrt{1-e^2} \frac{\partial R}{\partial \omega} \right\} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left\{ \cot i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \operatorname{cosec} i \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right\} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\chi^*}{dt} &= -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

ここで  $\left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)$  は  $\left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)_{n=\text{const.}}$  を示す。

## 4. 摂動関数の軌道要素による表示式

(3.5) における摂動関数は (3.4) と (2.2) に示すように地理学的な極座標の関数として与えられているので、これを軌道要素の関数として表示する必要がある。その表示式は次のようになる<sup>24), 25)</sup>。

$$R = U - \frac{\mu}{r} = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l U_{l,m} \quad (4.1)$$

$$U_{l,m} = \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} U_{l,m,p,q} \quad (4.2)$$

$$\begin{aligned} U_{l,m,p,q} &= \frac{\mu a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) S_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \end{aligned} \quad (4.3)$$

$$S_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) = J_{l,m} \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) &= (l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega - \theta) - m\lambda_{l,m} \\ &\quad - [1 - (-1)^{l-m}] \frac{\pi}{4} \end{aligned} \quad (4.5)$$

ここに  $F_{l,m,p}(i)$  は傾斜角関数であり、また  $G_{l,p,q}(e)$  は離心率関数である。そしてこれらは既報<sup>1)</sup>の (4.3), (4.4), (4.5) および (4.6) に与えられている。

## 5. 軌道要素の変化率

前章における諸式を (3.5) に用いれば軌道要素の変化率を表わす式が求められる。これは次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2\mu}{na} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} (l-2p+q) J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \\ &\quad \times \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \\ \frac{de}{dt} &= \frac{\mu}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \\ &\quad \times \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \{ -(l-2p+q)(1-e^2) + (l-2p)\sqrt{1-e^2} \} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \\ &\quad \times \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \{ -(l-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \} \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{\mu}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \\ &\quad \times G_{l,p,q}(e) \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \\ \frac{d\omega}{dt} &= \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \\ &\quad \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} F_{l,m,p}(i) \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \right) \end{aligned} \right\} \quad (5.1)$$

$$\frac{d\chi^*}{dt} = \mu \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \\ \times \left\{ -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(l+1) \frac{1}{na^2} G_{l,p,q}(e) \right\}$$

## 6. 軌道要素の変化

(5.1) を解けば軌道要素が  $t$  の関数として求められ、運動が決定することになる。しかし (5.1) は非線形の連立常微分方程式であり、これを解くことはできない。しかし (5.1) の右辺における軌道要素は、その変化率が一般に小さいので、 $t=t_j$  から  $t=t_{j+1}$  までの短時間においては一定とみなし、 $t_j$  から  $t_{j+1}$  まで (5.1) を積分すれば第一階の摂動が求められる。以下においてはこのような第一階の摂動を求めることとする。ここで

$$\delta t_j = t_{j+1} - t_j$$

とし、また諸量における添字  $j$  は  $t_j$  における値を示すものとする。

$$\begin{aligned} \delta a_{z1,j} &= 0 \\ \delta e_{z1,j} &= \mu \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l (l-2p) J_{l,0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,0,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\ &\quad \left. \times \sin T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right\}_j \delta t_j \\ \delta i_{z1,j} &= -\mu \left\{ \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l (l-2p) J_{l,0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,0,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\ &\quad \left. \times \sin T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right\}_j \delta t_j \\ \delta \Omega_{z1,j} &= \mu \left\{ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l J_{l,0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \frac{dF_{l,0,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \right. \\ &\quad \left. \times \cos T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right\}_j \delta t_j \\ \delta \omega_{z1,j} &= \mu \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l J_{l,0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \cos T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\ &\quad \left. \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{l,0,p}(i) \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,0,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \right) \right\}_j \delta t_j \\ \delta \chi^*_{z1,j} &= \mu \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l J_{l,0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,0,p}(i) \cos T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\ &\quad \left. \times \left\{ -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(l+1) \frac{1}{na^2} G_{l,p,q}(e) \right\} \right\}_j \delta t_j \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

ここで

$$\left. \begin{aligned} T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) &= (l-2p)\omega - \{1 - (-1)^p\} \frac{\pi}{4} \\ q &= -l + 2p \end{aligned} \right\} \quad (6.1.3)$$

である。

(6.1.2) の各項は長年あるいは長周期の変化を表わ

この際 6.1 から 6.5 に示すように次の場合に分けて考えることにする。

- (1)  $l-2p+q=0, (l-2p+q)n-m\nu=0$
- (2)  $l-2p+q=0, (l-2p+q)n-m\nu \neq 0$
- (3)  $l-2p+q \neq 0, (l-2p+q)n-m\nu=0$
- (4)  $l-2p+q \neq 0, (l-2p+q)n-m\nu \neq 0, m=0$
- (5)  $l-2p+q \neq 0, (l-2p+q)n-m\nu \neq 0, m \neq 0$

ここで (3) 以外の場合において、要素の変化を表わす式は既報<sup>1)</sup>におけると全く同様である。

### 6.1 zonal harmonics の long range parts による要素の変化

(5.1) の右辺の各項の内て

$$l-2p+q=0, (l-2p+q)n-m\nu=0 \quad (6.1.1)$$

をみたす項による要素の変化は、添字  $zl$  をつけて、次のようになる。

す。

### 6.2 non-zonal harmonics の long range parts による要素の変化

(5.1) の右辺の各項の内て

$$l-2p+q=0, (l-2p+q)n-m\nu \neq 0 \quad (6.2.1)$$

をみたす項による要素の変化は、添字  $nl$  をつけて、次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \delta a_{ni,j}=0 \\
& \delta e_{ni,j}=\frac{\mu}{\nu} \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \frac{l-2p}{m} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\
& \quad \left. \times \delta \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right)_j \\
& \delta i_{ni,j}=\frac{\mu}{\nu} \left\{ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\
& \quad \left. \times \delta \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \left( -\frac{l-2p}{m} \cot i + \operatorname{cosec} i \right) \right\}_j \\
& \delta \Omega_{ni,j}=-\frac{\mu}{\nu} \left( \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \frac{1}{m} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \right. \\
& \quad \left. \times \delta \sin G_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right)_j \\
& \delta \omega_{ni,j}=\frac{\mu}{\nu} \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \frac{1}{m} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \delta \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\
& \quad \left. \times \left( -\frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{l,m,p}(i) \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \right) \right\}_j \\
& \delta \chi^*_{ni,j}=\frac{\mu}{\nu} \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \frac{1}{m} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) \delta \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\
& \quad \left. \times \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} - 2(l+1) \frac{1}{na^2} G_{l,p,q}(e) \right) \right\}_j
\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\delta_{\cos}^{\sin} T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) &= \frac{\sin}{\cos} \left[ (l-2p)\omega + m(\Omega - \theta - \nu \delta t) - m\lambda_{l,m} - \{1 - (-1)^{l-m}\} \frac{\pi}{4} \right] \\
&\quad - \frac{\sin}{\cos} \left[ (l-2p)\omega + m(\Omega - \theta) - m\lambda_{l,m} - \{1 - (-1)^{l-m}\} \frac{\pi}{4} \right] \\
&\quad q = -l + 2p
\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

である。

(6.2.2)の各項は短周期の変化を表わす。

### 6.3 resonance terms による要素の変化

軌道運動の周期  $T$  と 1 恒星日  $D_s$  (23 時間 56 分 4 秒 091) したがってまた地球の自転の周期  $T_E$  とが整数比をなすとみなされるとき、つまり commensurability の状態にあるときには (5.1) の右辺において

$$l-2p+q \neq 0, \quad (l-2p+q)n - m\nu = 0 \tag{6.3.1}$$

をみたすとみなされる項、つまり resonance terms がある。このときその項の引数においては  $M$  の項の変化率と  $\theta$  の項の変化率との和が無視されることとなり、resonance の状態の一つをなすことになる。このような項のみをとって (5.1) を積分すれば resonance terms による要素の変化がえられる。このときこの引数の時間の経過にともなう変化は極めて小さなものと

なるが、これを表わす量として critical argument

$$s = \Omega + \omega + M - \frac{m}{l-2p+q} \theta \tag{6.3.2}$$

をとってみる。また resonance terms における  $T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta)$  を  $V_{l,m,p,q}(\omega, s, \Omega)$  で表わせば次のようになる。

$$\begin{aligned}
& V_{l,m,p,q}(\omega, s, \Omega) \\
&= T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \\
&= -q\omega + (l-2p+q)s + \{m - (l-2p+q)\}\Omega - m\lambda_{l,m} \\
&\quad - \{1 - (-1)^{l-m}\} \frac{\pi}{4}
\end{aligned} \tag{6.3.3}$$

ここで  $s$  は、その変化率が一般に小さいので、 $\delta t_j$  の間においては一定とみなせば、要素の変化は、添字  $rv$  をつけて、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta a_{rv,j} &= -2\mu \left\{ \frac{1}{na} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l (l-2p+q) J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\
&\quad \left. \times \sin V_{l,m,p,q}(\omega, s, \Omega) \right\}_j \delta t_j
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\delta e_{rv,j} &= \mu \left[ \frac{1}{na^2 e} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\
&\quad \times \sin V_{l,m,p,q}(\omega, s, \Omega) \{ -(l-2p+q)(1-e^2) + (l-2p) \sqrt{1-e^2} \} \Big]_j \delta t_j \\
\delta i_{rv,j} &= \mu \left[ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\
&\quad \times \sin V_{l,m,p,q}(\omega, s, \Omega) \{ -(l-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \} \Big]_j \delta t_j \\
\delta \Omega_{rv} &= \mu \left( \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} \right. \\
&\quad \times G_{l,p,q}(e) \cos V_{l,m,p,q}(\omega, s, \Omega) \Big)_j \delta t_j \\
\delta \omega_{rv,j} &= \mu \left\{ \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \cos V_{l,m,p,q}(\omega, s, \Omega) \right. \\
&\quad \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} F_{l,m,p}(i) \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \right) \Big\} \delta t_j \\
\delta \chi^*_{rv,j} &= \mu \left[ \sum_l \sum_m \sum_{p=0}^l J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) \cos V_{l,m,p,q}(\omega, s, \Omega) \right. \\
&\quad \times \left. \left\{ -\frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(l+1) \frac{1}{na^2} G_{l,p,q}(e) \right\} \right]_j \delta t_j
\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

ここに  $\sum_l$  は (4.1) と (4.2) に示された区間にあると  
共に  $\nu'/n'$  を既約分数として

$$\frac{\nu}{n} = \frac{\nu'}{n'}$$

とするときに

$$\max(2, n') \leq l$$

をもみやすような値についての和をとることを示す。  
また  $\sum_m$  は (4.1) と (4.2) に示された区間にあると  
共にまた  $n'$  の倍数でもある値についての和をとるこ  
とを示す。さらに

$$q = -l + 2p + m \cdot \frac{\nu}{n}$$

である。ここで (6.3.1) から

$$\frac{n}{\nu} = \frac{m}{l-2p+q}$$

であり、これは整数比をなすが、次の制限がある。

$$0 \leq \frac{n}{\nu} \leq 16.997$$

ここに 16.997 となるのは半長軸が最小で

$$a = a_e$$

の場合である。そして半長軸が増大するにつれて  $n/\nu$   
は次第に小となって行く。特に静止衛星のときには

$$\frac{n}{\nu} = 1$$

とみなされる。

(6.3.4) の各項は長周期の変化を表わす。

#### 6.4 zonal harmonics の短周期部分による要素の 変化

(5.1) の右辺の各項の内て

$$l-2p+q \neq 0, \quad (l-2p+q)n - m\nu \neq 0, \quad m=0 \tag{6.4.1}$$

をみやす項による要素の変化は、添字  $zs$  をつけて、  
次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta a_{zs,j} &= 2\mu \left( \frac{1}{n^2 a} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l,0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,0,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\
&\quad \left. \delta \cos T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right)_j \\
\delta e_{zs,j} &= \mu \left\{ \frac{1}{n^2 a^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q J_{l,0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,0,p}(i) G_{l,p,q}(e) \right. \\
&\quad \left. \delta \cos T_{l,0,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \left( 1 - e^2 - \frac{l-2p}{l-2p+q} \sqrt{1-e^2} \right) \right\}_j \\
\delta i_{zs,j} &= \mu \left( \frac{\cot i}{n^2 a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{l-2p}{l-2p+q} J_{l,0} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,0,p}(i) \right.
\end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
& \times G_{l,p,q}(e) \delta \cos T_{l,o,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \Big\}_j \\
\delta \Omega_{zs,j} = & \mu \left( \frac{1}{n^2 a^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{1}{l-2p+q} J_{l,o} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \frac{dF_{l,o,p}(i)}{di} \right. \\
& \left. \times G_{l,p,q}(e) \delta \sin T_{l,o,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \Big\}_j \\
\delta \omega_{zs,j} = & \mu \left\{ \frac{1}{n^2 a^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{1}{l-2p+q} J_{l,o} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \delta \sin T_{l,o,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\
& \left. \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} F_{l,o,p}(i) \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,o,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \right) \Big\}_j \\
\delta \chi_{zs,j} = & \left[ \frac{1}{n^2 a^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{1}{l-2p+q} J_{l,o} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,o,p}(i) \delta \sin T_{l,o,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\
& \left. \times \left\{ -\frac{1-e^2}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(l+1)G_{l,p,q}(e) \right\} \right]_j
\end{aligned} \tag{6.4.2}$$

ここで

$$\begin{aligned}
\delta_{\cos}^{\sin} T_{l,o,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) = & \frac{\sin}{\cos} \left[ (l-2p)\omega + (l-2p+q)(M+n\delta t) - \{1-(-1)^l\} \frac{\pi}{4} \right] \\
& - \frac{\sin}{\cos} \left[ (l-2p)\omega + (l-2p+q)M - \{1-(-1)^l\} \frac{\pi}{4} \right]
\end{aligned} \tag{6.4.3}$$

である。また  $\sum_q$  は  $(-l+2p)$  を除く  $-\infty$  から  $\infty$  にいたるすべての整数についての和を表わすものとする。

(6.4.2) の各項は短周期の変化を表わす。

### 6.5 non-zonal harmonics の短周期部分による要素の変化

(5.1) の右辺の各項の中で

$$l-2p+q \neq 0, \quad (l-2p+q)n-m\nu \neq 0, \quad m \neq 0 \tag{6.5.1}$$

をみたす項による要素の変化は、添字  $ns$  をつけて、次のようになる。

$$\begin{aligned}
\delta a_{ns,j} = & \mu \left\{ \frac{2}{na} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{l-2p+q}{(l-2p+q)n-m\nu} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \right. \\
& \left. \times F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \delta \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \Big\}_j \\
\delta e_{ns,j} = & \mu \left[ \frac{1}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{1}{(l-2p+q)n-m\nu} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \right. \\
& \times F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \delta \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \\
& \left. \times \{(l-2p+q)(1-e^2) - (l-2p)\sqrt{1-e^2}\} \right]_j \\
\delta i_{ns,j} = & \mu \left[ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{1}{(l-2p+q)n-m\nu} J_{l,m} \right. \\
& \times \frac{a_e^l}{a^{l+1}} F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \delta \cos T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \\
& \left. \times \{(l-2p) \cot i - m \operatorname{cosec} i\} \right]_j \\
\delta \Omega_{ns,j} = & \mu \left\{ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{1}{(l-2p+q)n-m\nu} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \right. \\
& \left. \times \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \delta \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \Big\}_j \\
\delta \omega_{ns,j} = & \mu \left\{ \frac{1}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{1}{(l-2p+q)n-m\nu} J_{l,m} \frac{a_e^l}{a^{l+1}} \right. \\
& \times \delta \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \\
& \left. \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{e} F_{l,m,p}(i) \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} - \frac{\cot i}{\sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} G_{l,p,q}(e) \right) \Big\}_j
\end{aligned} \tag{6.5.2}$$

$$\delta\chi_{ns,j}^* = \mu \left[ \frac{1}{na^2} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=1}^l \sum_{p=0}^l \sum_q \frac{1}{(l-2p+q)n-m\nu} J_{l,m} \frac{ae^l}{a^{l+1}} \right. \\ \left. \times F_{l,m,p,q}(i) \delta \sin T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) \right. \\ \left. \times \left\{ -\frac{1-e^2}{e} \frac{dG_{l,p,q}(e)}{de} + 2(l+1)G_{l,p,q}(e) \right\} \right]_j$$

ここで

$$\delta_{\cos}^{\sin} T_{l,m,p,q}(\omega, M, \Omega, \theta) = \frac{\sin}{\cos} \left[ (l-2p)\omega + (l-2p+q)(M+n\delta t) + m(\Omega-\theta-\nu\delta t) - m\lambda_{l,m} - \{1-(-1)^{l-m}\} \frac{\pi}{4} \right] \\ - \frac{\sin}{\cos} \left[ (l-2p)\omega + (l-2p+q)M + m(\Omega-\theta) - m\lambda_{l,m} - \{1-(-1)^{l-m}\} \frac{\pi}{4} \right] \quad (6.5.3)$$

である。また  $\sum_q$  は  $(-l+2p)$  と第 6.3 節の  $l, m$  に対応する  $-l+2p+m \cdot (\nu/n)$  とを除く  $-\infty$  から  $\infty$  にいたるすべての整数についての和を表わすものとする。

(6.5.2) の各項は短周期の変化を表わす。

### 6.6 critical argument の変化

commensurability の状態にある場合に critical argument の変化は次のようになる。

$$\delta s_j = \left( \frac{ds}{dt} \right)_j \delta t_j + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2s}{dt^2} \right)_j (\delta t_j)^2 \quad (6.6.1)$$

ここで (3.3) と (2.1) を用いて (6.3.2) から

$$\frac{ds}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\chi^*}{dt} + n - \frac{m}{l-2p+q} \nu \quad (6.6.2)$$

となる。またこれから

$$\frac{d^2s}{dt^2} = \frac{d^2\Omega}{dt^2} + \frac{d^2\omega}{dt^2} + \frac{d^2\chi^*}{dt^2} - \frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt} \quad (6.6.3)$$

となる。さらにここで  $a, e, i, \Omega, \omega$  および  $\chi^*$  のそれぞれを  $El$  で表わし、またこの六要素についての和を  $\sum_{El}$  で表わすとする。それから  $El$  の内の三要素  $\Omega, \omega$  および  $\chi^*$  のそれぞれを  $Ael$  で表わすとする。そうすれば次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2Ael}{dt^2} &= \sum_{El} \frac{\partial}{\partial El} \frac{dAel}{dt} \cdot \frac{dEl}{dt} \\ \frac{dAel}{dt} &= \left( \frac{dAel}{dt} \right)_{zi} + \left( \frac{dAel}{dt} \right)_{ni} + \left( \frac{dAel}{dt} \right)_{rv} \\ &\quad + \left( \frac{dAel}{dt} \right)_{zs} + \left( \frac{dAel}{dt} \right)_{ns} \\ \frac{dEl}{dt} &= \left( \frac{dEl}{dt} \right)_{zi} + \left( \frac{dEl}{dt} \right)_{ni} + \left( \frac{dEl}{dt} \right)_{rv} \\ &\quad + \left( \frac{dEl}{dt} \right)_{zs} + \left( \frac{dEl}{dt} \right)_{ns} \end{aligned} \right\} \quad (6.6.4)$$

ここで要素の変化率における添字は要素の変化におけると同様に定義されるとする。また添字  $rv$  をもつものについては

$$\frac{\partial}{\partial \chi^*} \left( \frac{dAel}{dt} \right)_{rv} = \frac{\partial}{\partial s} \left( \frac{dAel}{dt} \right)_{rv}$$

となる。

### 6.7 任意の時刻における軌道要素

以上の結果から  $t_j$  と  $t_{j+1}$  における諸量の関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} El_{j+1} &= El_j + \delta El_j \\ s_{j+1} &= s_j + \delta s_j \\ \delta El_j &= \delta El_{zi,j} + \delta El_{ni,j} + \delta El_{rv,j} \\ &\quad + \delta El_{zs,j} + \delta El_{ns,j} \end{aligned} \right\} \quad (6.7.1)$$

したがって

$$t_N = t_1 + \Delta t = t_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \delta t_j \quad (6.7.2)$$

における諸量は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} El_N &= El_1 + \Delta El = El_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \delta El_j \\ s_N &= s_1 + \Delta s = s_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \delta s_j \end{aligned} \right\} \quad (6.7.3)$$

### 6.8 地理学的経度

地理学的経度は  $e^2$  と  $\tan^2 i$  の程度の微小量までを考慮すれば次式によって与えられる。

$$\begin{aligned} \lambda &= \Omega + \omega + M - \theta \\ &\quad + 2e \sin M \\ &\quad + \frac{5}{2} e^2 \sin 2M \\ &\quad - \frac{1}{4} \tan^2 i \sin(M + \omega) \\ &\quad - \frac{1}{2} e \tan^2 i \{ \sin(3M + 2\omega) - \sin(M + 2\omega) \} \end{aligned} \quad (6.8.1)$$

ここで  $e$  と  $i$  を無視すれば

$$\lambda = \Omega + \omega + M - \theta \quad (6.8.1')$$

となる。commensurability の状態にある場合には (6.8.1) と (6.3.2) から次式を得る。

$$\begin{aligned} \lambda &= s + \left( \frac{m}{l-2p+q} - 1 \right) \theta \\ &\quad + 2e \sin \left( s - \Omega - \omega + \frac{m}{l-2p+q} \theta \right) \\ &\quad + \frac{5}{2} e^2 \sin 2 \left( s - \Omega - \omega + \frac{m}{l-2p+q} \theta \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{1}{4} \tan^2 i \sin\left(s - \Omega + \frac{m}{l-2p+q} \theta\right) \\
& -\frac{1}{2} e \tan^2 i \left\{ \sin\left(3s - 3\Omega - \omega + \frac{3m}{l-2p+q} \theta\right) \right. \\
& \left. - \sin\left(s - \Omega + \omega + \frac{m}{l-2p+q} \theta\right) \right\}
\end{aligned} \tag{6.8.1.C}$$

ここで  $(l, m, p, q)$  は (6.3.1) をみたす値をとる。したがって  $m/(l-2p+q)$  は commensurability の状態にあるそれぞれの人工衛星に特定の値となる。なお  $e$  と  $i$  を無視すれば

$$\lambda = s + \left( \frac{m}{l-2p+q} - 1 \right) \theta \tag{6.8.1.C'}$$

となる。さらにここで静止衛星の場合には

$$\lambda = s \tag{6.8.1.C''}$$

となる。

## 7. commensurability の状態にある場合の可動区間

### 7.1 一般の場合

commensurability の状態にある場合に (6.6.3) に与えられる resonance equation

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{d^2 \chi^*}{dt^2} - \frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt} \tag{7.1.1}$$

を  $t_1$  から  $t_N$  まで積分すれば

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_N} 2 \frac{ds}{dt} \frac{d^2 s}{dt^2} dt &= 2 \int_{t_1}^{t_N} \left( \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{d^2 \chi^*}{dt^2} \right) \frac{ds}{dt} dt \\
&\quad - 3 \int_{t_1}^{t_N} \frac{n}{a} \frac{da}{dt} \frac{ds}{dt} dt
\end{aligned}$$

となる。これから近似的に次式が成立する。

$$\begin{aligned}
\left( \frac{ds}{dt} \right)_N^2 &= \left( \frac{ds}{dt} \right)_1^2 + 2 \sum_{j=1}^{N-1} \left( \frac{d^2 \Omega}{dt^2} + \frac{d^2 \omega}{dt^2} + \frac{d^2 \chi^*}{dt^2} \right)_j \delta s_j \\
&\quad - 3 \sum_{j=1}^{N-1} \left( \frac{n}{a} \frac{da}{dt} \right)_j \delta s_j
\end{aligned} \tag{7.1.2}$$

ここで

$$F = \left( \frac{ds}{dt} \right)_N^2 \geq 0 \tag{7.1.3}$$

でなければならない。なお  $s$  および  $\lambda$  はそれぞれ (6.3.2) および (6.8.1) に示すように軌道要素と  $\theta$  の関数であり、さらに軌道要素と  $\theta$  は  $t$  の関数として決定される。したがって  $s$  と  $t$  の関係および  $\lambda$  と  $t$  の関係を求めることができる。そこで  $F$  は  $t$  の関数  $F = F(t)$  とみなせると同時に  $s$  あるいは  $\lambda$  の関数とみなしてもよく、これらをそれぞれ  $F'(s)$  あるいは  $F''(\lambda)$  と書けば

$$F = F(t) = F'(s) = F''(\lambda) \geq 0 \tag{7.1.4}$$

である。そしてこの式によって commensurability の状態にある人工衛星の  $s$  あるいは  $\lambda$  に関する可動区

間の様子が示されることとなる。

### 7.2 省略を行なった場合

(7.1.1) の右辺の第四項は摂動関数の微小な因数を持つが、同じく右辺の第一、二および三項はそれぞれさらに微小な因数をもつ。それでこの第四項に対して他の三項を無視できる場合をとってみる。ただし  $e$  あるいは  $i$  が極めて小であればこのような無視をすることはできなくなる。次に  $a, e$  および  $i$  は時間と共に変化するがこれを無視して epoch における値をとりつづけるものとみなす。それから  $da/dt$  として (5.1) の第一式の右辺において (6.3.1) をみたす項、つまり resonance terms に起因する項の中で  $s$  の項だけからなる引数をもつもののみをとることにする。したがって時間と共に変化するのは  $s$  のみとするわけである。

#### 7.2.1 多数の項をとるとき

以上のような省略は一般的に可能であるから、これを行なった場合において、 $s$  の項だけからなる引数をもつ項を多数とるときについて論ずることにする。

このとき次のようになる。

$$\frac{d^2 s}{dt^2} = -\frac{3}{2} \frac{n}{a} \frac{da}{dt} \tag{7.2.1.1}$$

この式の  $da/dt$  は (5.1) の第一式の右辺における諸項の中で、 $l, m, p, q$  が次の値をとるような項のみから成る。まず resonance terms に起因することから  $l, m, p, q$  は (4.1) と (4.2) に示した区間にあると共に (6.3.1) つまり (6.3.4) の次に示す区間にある。次に引数が  $s$  の項のみから成ることから  $l, m, p, q$  は  $I$  を負ではない整数とするときに

$$l - m = 2 \cdot I \quad p = \frac{l - m}{2} \quad q = 0 \tag{7.2.1.2}$$

をみたすものである。以下においてこのような項のみについての和をつくることを  $\sum_l \sum_m$  によって示すことにする。そうすれば (7.2.1.1) を積分して次式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
\left( \frac{ds}{dt} \right)^2 &= E - W \\
W &= 6\mu \left\{ \frac{1}{a^3} \sum_l \sum_m \frac{l-2p+q}{m} J_{l,m} \frac{a e^l}{a^l} \right. \\
&\quad \times F_{l,m,p}(i) G_{l,p,q}(e) \\
&\quad \times \cos(ms - m\lambda_{l,m}) \left. \right\}_{e,s} \\
E &= \left( \frac{ds}{dt} \right)_1^2 + W_{s_1} \\
\left( \frac{ds}{dt} \right)_1^2 &= \left( \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\chi^*}{dt} + n - \frac{m}{l-2p+q} \nu \right)_1^2
\end{aligned} \right\} \tag{7.2.1.3}$$

ここに添字  $e, s$  は  $\alpha, e$  および  $i$  が epoch における値をとり、 $s$  のみが時間と共に変化するとみなすことを表わす。そしてこの  $s$  が  $s_1$  となるときの添字  $s_1$  で表わす。ここで

$$F = \left( \frac{ds}{dt} \right)^2 \geq 0 \quad (7.2.1.4)$$

でなければならない。したがって

$$F = F(s) = E - W \geq 0 \quad (7.2.1.5)$$

となる。そしてこれによって commensurability の状態にある人工衛星の  $s$  に関する可動区間の大体の様子を知ることができる。この運動は回転運動、不安定平衡点に近づく運動および安定平衡点まわりの運動つまり秤動のいずれかとなる。

次に  $s$  に関する運動が安定であって秤動をする場合について考えてみる。ここで秤動が最大あるいは最小となるときのそれぞれ添字  $Li \max$  と  $Li \min$  によって表わすことにする。そうすれば

$$E_{1, Li \max} = W_{\max}$$

$$E_{1, Li \min} = W_{s_1}$$

となる。したがってこれらを (7.2.1.3) に用い、さらに (3.1) によれば次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{1, Li \max} &= \left( \frac{\mu}{n_{1, Li \max}^2} \right)^{1/3} \\ \alpha_{1, Li \min} &= \left( \frac{\mu}{n_{1, Li \min}^2} \right)^{1/3} \\ n_{1, Li \max} &= - \left( \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\chi^*}{dt} - \frac{m}{l-2p+q} \nu \right)_1 \\ &\quad \pm \sqrt{W_{\max} - W_{s_1}} \\ n_{1, Li \min} &= - \left( \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} + \frac{d\chi^*}{dt} - \frac{m}{l-2p+q} \nu \right)_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.2.1.6)$$

### 7.2.2 一つの項のみをとるとき

次に摂動関数として harmonics の二次までをとった場合、つまり地球の形を一般楕円体とみなした場合について考える。そうすれば (7.2.1.2) をみたとす  $s$  の項だけから成る引数をもつ項は

$$l=2, \quad m=2, \quad p=0, \quad q=0$$

となる一つの項のみとなる。ここで

$$2s - 2\lambda_{2,2} = S \pm \pi \quad (7.2.2.1)$$

とすれば (7.2.1.3) から次式が成立する。

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{2} \left( \frac{dS}{dt} \right)^2 - A \cos S &= E' \\ A &= 12\mu J_{2,2} a e^2 \left( \frac{1}{a^3} F_{2,2,2}(\tilde{t}) G_{2,0,0}(e) \right)_1 \\ E' &= \frac{1}{2} \left( \frac{dS}{dt} \right)_1^2 \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} -12\mu J_{2,2} a e^2 \left( \frac{1}{a^3} F_{2,2,2}(\tilde{t}) G_{2,0,0}(e) \cos S \right)_1 \end{aligned} \right\} \quad (7.2.2.2)$$

ここに  $A \cos S$  は、 $J_{2,2}$  を正負の何れに定義しても同じ値となる。そこで  $J_{2,2}$  は正值であるとして定義すれば、 $A > 0$  となる。

またこのとき (7.2.1.1) によれば次式が成立する。

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -A \sin S \quad (7.2.2.3)$$

それから第 7.2 節においては  $\alpha$  の変化を無視するとして論じてきたが、ここで改めて  $\alpha$  の変化について考えてみる。そこで (7.2.1.1), (7.2.2.1) および (7.2.2.3) によれば次式が成立するとみなされる。

$$\frac{d\alpha}{dt} = B \sin S \quad B = \frac{1}{3} \frac{\alpha_1}{n_1} A \quad (7.2.2.4)$$

このようにして (7.2.2.2) あるいは (7.2.2.3) によって  $S$  したがって  $s$  に関する可動区間の極めて概略の様子を知ることができる。またこれによって  $S(t)$  したがって  $s(t)$  を求め得る。さらにこの  $S$  を用いて (7.2.2.4) によって  $\alpha$  が決定される。以下に三つの場合

- (1)  $|E'| < A$
- (2)  $E' > A$
- (3)  $E' = A$

に分けて運動を求めてみる。これは単振子と同様に論じられる<sup>26)</sup>。

(1)  $|E'| < A$ :  $S$  に関する運動が安定平衡点まわりの運動つまり秤動となる場合である。

$$\cos \varepsilon = -\frac{E'}{A}$$

とすれば  $S$  に関する可動区間は (7.2.2.2) によって

$$-\varepsilon \leq S \leq \varepsilon$$

となる。同じく (7.2.2.2) によれば

$$t = \pm \frac{1}{2\sqrt{A}} \int \frac{dS}{\sqrt{\sin^2 \frac{\varepsilon}{2} - \sin^2 \frac{S}{2}}}$$

となる。ここで

$$\sin \frac{S}{2} = \sin \frac{\varepsilon}{2} \sin \varphi = \kappa \sin \varphi$$

とおき、また

$$t' = \text{const.} + t$$

とし、 $t'=0$  において  $\varphi=0$ ,  $\varphi>0$  とすれば楕円関数を用いて次のようになる。

$$\begin{aligned} \varphi &= \text{am}(\sqrt{A} t') \\ \sin \frac{S}{2} &= \kappa \text{sn}(\sqrt{A} t') \end{aligned}$$

さらに  $S$  に関する運動の周期は

$$T_R = 4 \frac{1}{\sqrt{A}} K(\kappa)$$

となる。ここに  $K(\kappa)$  は完全楕円積分である。

もし  $|S|$  が小であるならば (7.2.2.3) から次式が成立するとみなし得る。

$$\frac{d^2 S}{dt^2} = -AS$$

したがって  $S$  に関する運動は単振動と同様に論じ得ることとなる。このとき可動区間は

$$-\sigma \leq S \leq \sigma$$

のように表わされる。また初期位相を  $\tau$  とすれば

$$S = \sigma \cos(\sqrt{A} t + \tau)$$

となる。ここで

$$\tau = \tan^{-1} \left( -\frac{\dot{S}_1}{\sqrt{A} S_1} \right)$$

$$\sigma = \frac{S_1}{\cos \tau}$$

となる。この  $S$  を用いて (7.2.2.4) によれば

$$a = \frac{B\sigma}{\sqrt{A}} \sin(\sqrt{A} t + \tau) + \left( a_1 - \frac{B\sigma}{\sqrt{A}} \sin \tau \right)$$

となる。

(2)  $E' > A$ :  $S$  に関する運動が回転運動となる場合である。

(7.2.2.2) と  $E' > A$  とによれば  $\dot{S}$  は 0 となることにならぬ。つまり  $S$  は常に増大または減少する。ここで

$$t' = \text{const.} + t$$

とし、 $t' = 0$  において  $S = 0$ ,  $\dot{S} = \gamma$  とする、それから

$$\frac{4A}{\gamma^2} = \kappa^2$$

とおけば (7.2.2.2) から次式をうる。

$$\gamma t' = \pm \int \frac{dS}{\sqrt{1 - \kappa^2 \sin^2 \frac{S}{2}}}$$

これから

$$S = \pm 2 \text{am} \left( \frac{\gamma}{2} t' \right)$$

となる。また  $S$  に関する運動の周期は

$$T_R = \frac{4}{\gamma} K(\kappa)$$

となる。

(3)  $E' = A$ :  $S$  に関する運動が不安定平衡点に近づく運動となる場合である。

$$t' = \text{const.} + t$$

として、 $t' = 0$  において  $S = 0$  とする。そして (7.2.2.2) を積分すれば

$$\sin \frac{S}{2} = \pm \tanh \sqrt{A} t'$$

をうる。ここで  $\pm$  は  $t' = 0$  における  $\dot{S} \geq 0$  に対応する。 $S \rightarrow \pm \pi$  となるには  $t \rightarrow \infty$  なるを要する。

## 8. harmonics の四次までをとった場合の計算式

前章までの諸式によれば、摂動関数として任意の次数までの harmonics をとった場合における第一階の摂動と commensurability の状態にあるときの  $s$  あるいは  $\lambda$  に関する可動区間が理論的には決定されることとなる。ここでは摂動関数として harmonics の四次までを取り、また  $G_{l,p,q}(e)$  を  $e$  に関して展開したときに  $e$  の七乗までを考えたときの計算式を示してみる。

まず計算式に表われる  $l, m, p, q$  の値については既報<sup>1)</sup>の第7章の表1, 2および3に与えられている。ここで表3に関しては次のようになる。初めに (6.3.4) において、 $l, m$  は (6.3.1) をみたくのものであり、 $q = -l + 2p + m \cdot (\nu/n)$  である。また (6.4.2) においては  $m = 0$  である。さらに (6.5.2) においては  $m \neq 0$  であり、 $q$  については (6.3.4) の  $l, m$  に対応する  $q = -l + 2p + m \cdot (\nu/n)$  を除く。

次に  $F_{l,m,p}(i)$ ,  $dF_{l,m,p}(i)/di$ ,  $G_{l,p,q}(e)$  および  $dG_{l,p,q}(e)/de$  が同じく既報<sup>1)</sup>の表4, 5, 6 および7に与えられている。

ここで以上の諸表を前章までの諸式に適用すれば計算式が得られることになる。

## 9. 静止衛星の運動の計算

以上の計算式によって静止衛星の運動の計算を次に行なう。ここで長期間にわたっての摂動を考えることにする。したがってその主要部分は摂動関数の zonal harmonics の long range parts による (6.1.2) および resonance terms による (6.3.4) によって表わされる。またこのとき critical argument の変化は (6.6.1), (6.6.2) および (6.6.3) ならびに (6.6.4) において添字  $zl$  と  $rv$  のついた項のみをとった式によって与えられる。ここで静止衛星であるから commensurability の状態にあるわけで

$$n \approx \nu$$

となる。したがって (6.3.1) は

$$l - 2p + q = m \quad (9.1)$$

となり、また critical argument は (6.3.2) によれば

$$s = \Omega + \omega + M - \theta \quad (9.2)$$

となる。それから (6.1.2) と (6.3.4) における  $l, m, p, q$  の値はそれぞれ既報<sup>1)</sup>の表 1 と表 8 のようになる。また静止衛星においては  $e$  は小であるから既報<sup>1)</sup>の表 6 および 7 に示した  $G_{l,p,q}(e)$  および  $dG_{l,p,q}(e)/de$  については  $e$  の二次の項までをとることとする。次に  $t_N$  における諸量は (6.7.3) によって表わされる。また地理学的経度は (6.8.1.C) によって与えられる。それから  $\lambda$  に関する可動区間の様子が (7.1.4) によって明らかとなる。また  $s$  に関する可動区間の大体の様子を (7.2.1.5) から知ることができる。それから  $s$  の極めて概略の値が第 7.2.2 節の諸式によって求められる。最後に  $s$  に関する運動が安定であって秤動をするときの  $\alpha_1$  の領域を (7.2.1.6) から  $s_1$  に対して決定しうる。以上において (6.8.1.C'') によれば  $s$  はほとんど  $\lambda$  に等しいとみられる。

なお

$T_s$ : epoch における日本中央標準時つまり日本時

$L_s$ : 日本時の場合の標準子午線の経度

$\theta_0$ : 世界時 0<sup>h</sup> における Greenwich 平均恒星時とすれば

$$\theta_1 = \theta_0 + (T_s - L_s) + k'(T_s - L_s) \quad (9.3)$$

となる。

次に計算に用いられる時間と定数を次のようにとる<sup>27)~30)</sup>。

$$D_s = 0.997269566371 \text{ 平均太陽日}$$

$$= 23^h 56^m 04^s 09054$$

$$\mu = 398603 \times 10^9 \text{ m}^3/\text{sec}^2$$

$$a_e = 6378160 \text{ m}$$

$$J_{2,0} = -1082.639 \times 10^{-6}$$

$$J_{3,0} = 2.538 \times 10^{-6}$$

$$J_{4,0} = 1.593 \times 10^{-6}$$

$$\bar{C}_{2,2} = 2.4254 \times 10^{-6}$$

$$\bar{S}_{2,2} = -1.3886 \times 10^{-6}$$

$$\bar{C}_{3,1} = 1.8890 \times 10^{-6}$$

$$\bar{S}_{3,1} = 2.4283 \times 10^{-7}$$

$$\bar{C}_{3,2} = 7.7442 \times 10^{-7}$$

$$\bar{S}_{3,2} = -6.9232 \times 10^{-7}$$

$$\bar{C}_{3,3} = 6.8595 \times 10^{-7}$$

$$\bar{S}_{3,3} = 1.4175 \times 10^{-6}$$

$$\bar{C}_{4,1} = -6.2146 \times 10^{-7}$$

$$\bar{S}_{4,1} = -4.5668 \times 10^{-7}$$

$$\bar{C}_{4,2} = 3.2637 \times 10^{-7}$$

$$\bar{S}_{4,2} = 6.6172 \times 10^{-7}$$

$$\bar{C}_{4,3} = 8.9192 \times 10^{-7}$$

$$\bar{S}_{4,3} = -1.5576 \times 10^{-7}$$

$$\bar{C}_{4,4} = -1.3290 \times 10^{-7}$$

$$\bar{S}_{4,4} = 3.6881 \times 10^{-7}$$

なお

$$T_E = 0.997269663242 \text{ 平均太陽日} \\ = 23^h 56^m 04^s 098904$$

である。また  $\bar{C}_{l,m}, \bar{S}_{l,m}$  は normalized harmonic coefficients であり, normalized coefficient  $N_{l,m}$  を用いて

$$C_{l,m} = N_{l,m} \bar{C}_{l,m}$$

$$S_{l,m} = N_{l,m} \bar{S}_{l,m}$$

と表わされる。ここに

$$N_{l,0} = (2l+1)^{1/2}$$

$$N_{l,m} = \left\{ \frac{2(2l+1)(l-m)!}{(l+m)!} \right\}^{1/2}, \quad m \neq 0$$

となる。そしてこれは次の値をとる<sup>31)</sup>。

$$N_{2,2} = 0.64550$$

$$N_{3,1} = 1.0801$$

$$N_{3,2} = 0.34157$$

$$N_{3,3} = 0.13944$$

$$N_{4,1} = 0.94868$$

$$N_{4,2} = 0.22361$$

$$N_{4,3} = 0.059761$$

$$N_{4,4} = 0.021129$$

なお

$$J_{2,1} = \bar{C}_{2,1} = \bar{S}_{2,1} = 0$$

である。

ここで日本時の 1973 年 1 月 1 日の正午を epoch  $t = t_1 = t_{ep} = 0$  平均太陽日とする。そうすれば epoch において

$$T_s = 12^h 0^m 0^s 000$$

となり, また天文暦<sup>27)</sup>によれば

$$L_s = 9^h 0^m 0^s 000$$

$$\theta_0 = 6^h 41^m 59^s 740$$

$$k' = 0.0027379093$$

である。次に epoch における軌道要素の値を表 1 の (1) から (10) までの場合のようにとってみる。ここに (3) と (8) の場合には軌道運動の周期が 1 恒星日となるように半長軸をとってある。

それから  $\delta t_j$  として 1 平均太陽日をとり,  $\Delta t$  を 4 年として計算を行なった。

このようにして表 1 の (3) の場合について軌道要素の変化と  $\lambda$  を計算した結果を図 1 から図 7 までに示す。また同じくこの場合の  $\lambda$  と  $F$  との関係を図 8 に示す。次に表 1 の各場合についての  $s$  つまり  $\lambda$  と  $W, E$  との関係を図 9.1 から図 9.10 までに示す。ここで  $\lambda$

表 1 epoch における軌道要素の値

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)
$a_1$	Km	42146	42147	42164.260	42185.5	42187	42133	42134	42164.260	42198	42199
$e_1$		0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$i_1$	deg	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
$\Omega_1$	deg	265	265	265	265	265	265	265	265	265	265
$\omega_1$	deg	10	10	10	10	10	10	10	10	10	10
$\chi_1^*$	deg	0	0	0	0	0	-30	-30	-30	-30	-30

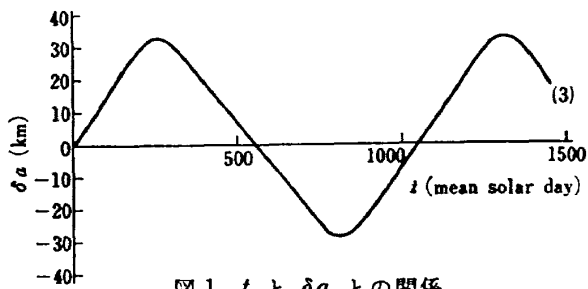


図 1  $t$  と  $\delta a$  との関係

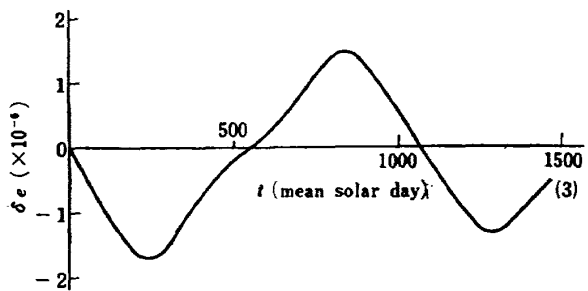


図 2  $t$  と  $\delta e$  との関係

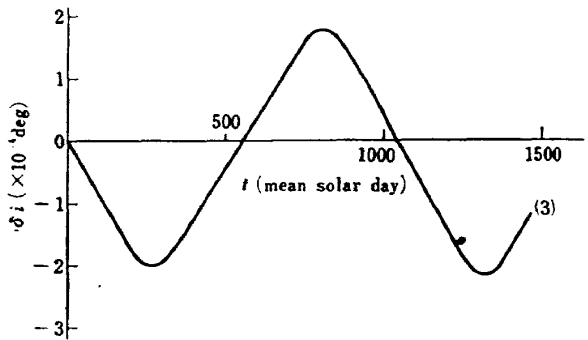


図 3  $t$  と  $\delta i$  との関係

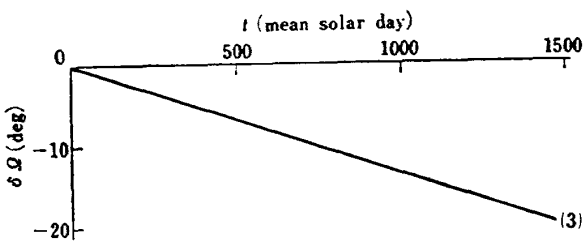


図 4  $t$  と  $\delta \Omega$  との関係

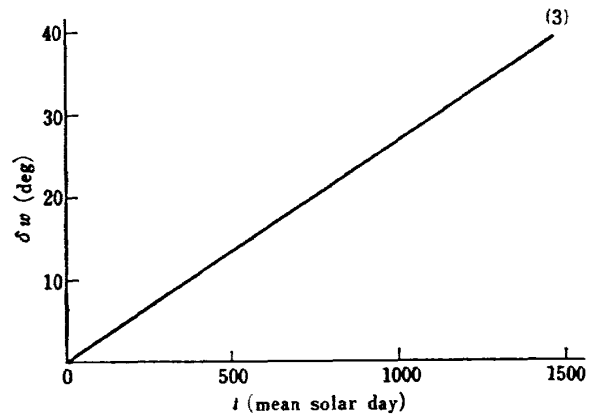


図 5  $t$  と  $\delta \omega$  との関係

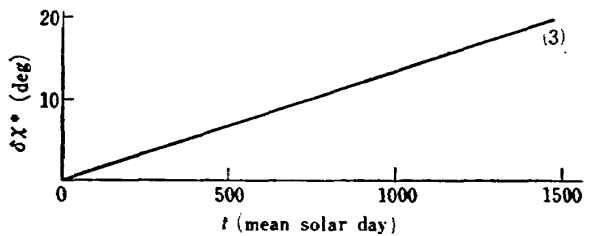


図 6  $t$  と  $\delta \chi^*$  との関係

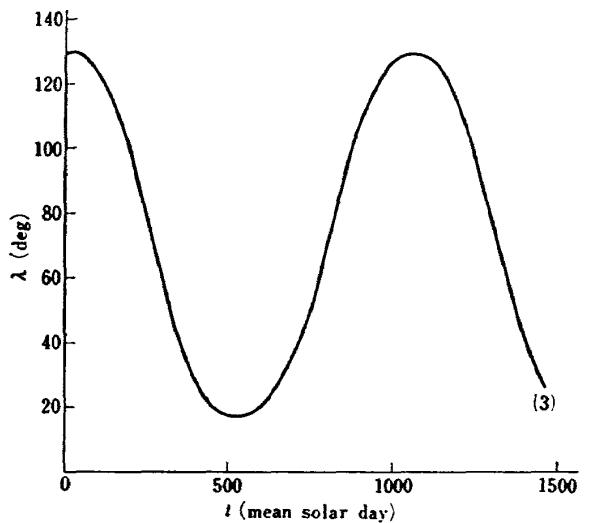


図 7  $t$  と  $\lambda$  との関係

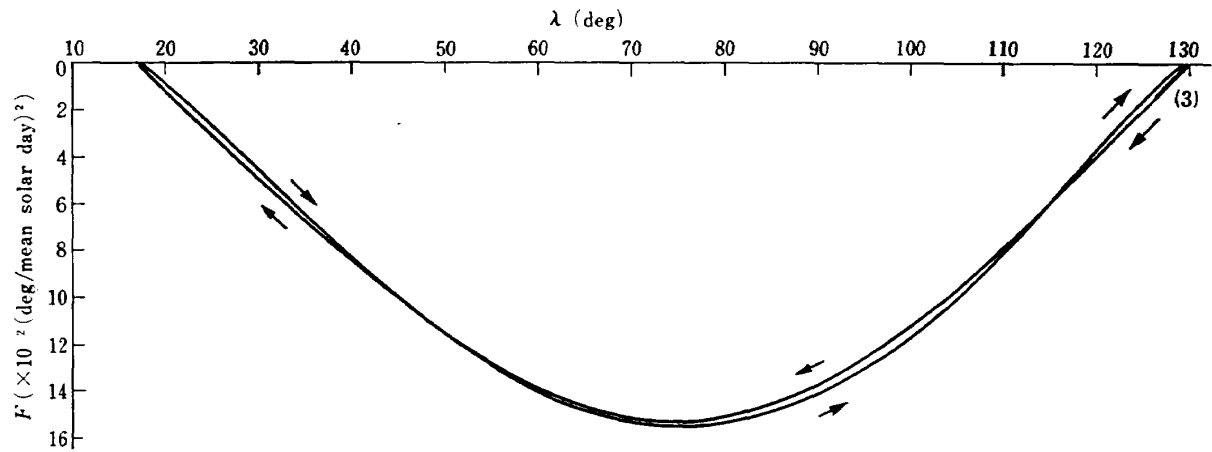


図 8  $\lambda$  と  $F$  との関係

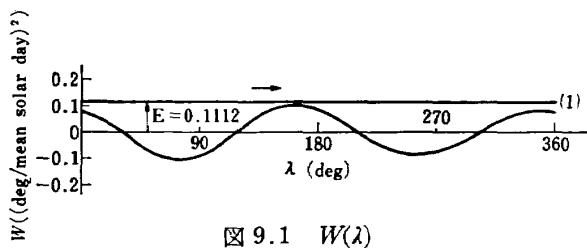


図 9.1  $W(\lambda)$

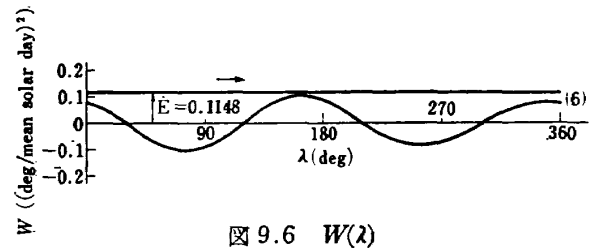


図 9.6  $W(\lambda)$

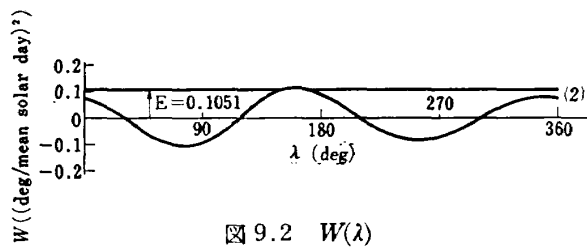


図 9.2  $W(\lambda)$

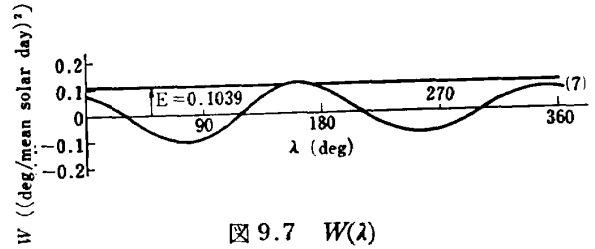


図 9.7  $W(\lambda)$

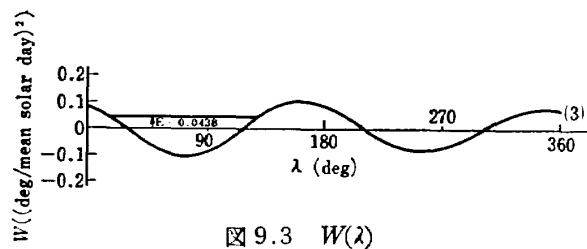


図 9.3  $W(\lambda)$

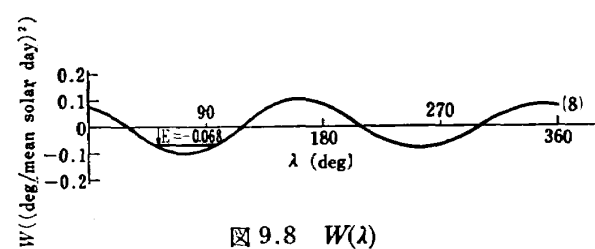


図 9.8  $W(\lambda)$

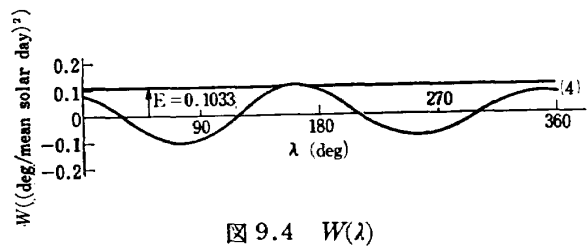


図 9.4  $W(\lambda)$

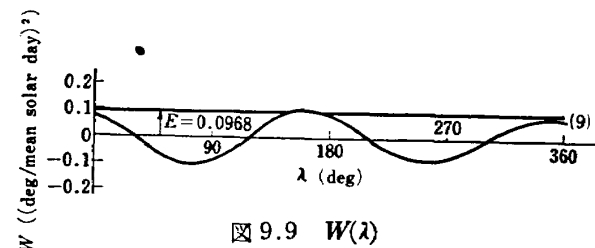


図 9.9  $W(\lambda)$

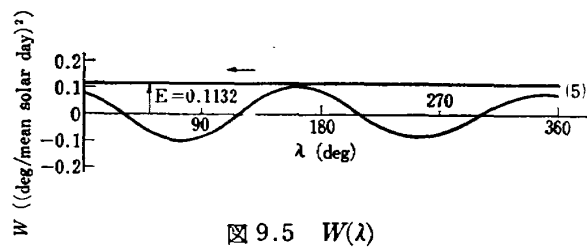


図 9.5  $W(\lambda)$

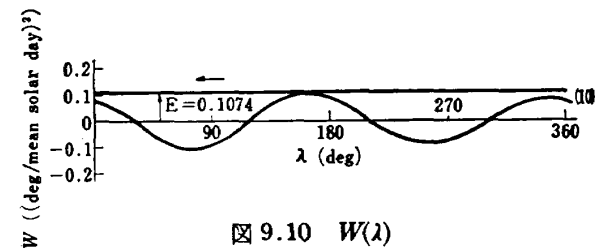
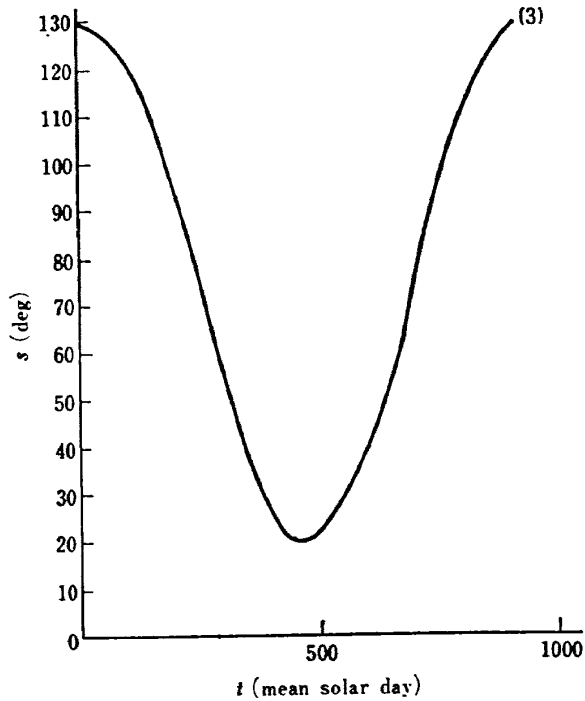
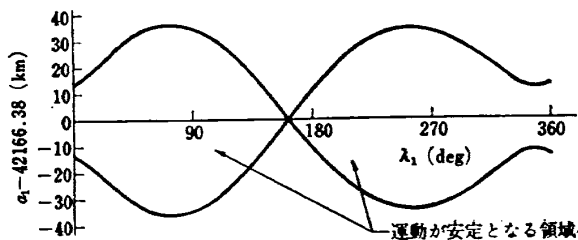


図 9.10  $W(\lambda)$



図10  $t$  と  $S$  との関係図11 静止衛星の地球に相対的な運動が安定となる  $a_1$  の領域

の増減が一方向きのときにはその向きを矢印によって示してある。それから表1の(3)の場合に  $s$  の値の極めて概略を計算した結果を図10に示す。最後に地球に相対的な運動が安定であって秤動をするときの  $a_1$  の領域を  $\lambda_1$  について図11に示す。

## 10. 考 察

第8章までの所論によれば、第一階摂動理論の範囲内において所要の精度に応ずる次数までの摂動関数の harmonics をとり、長期間にわたっての摂動の計算をすることが可能である。そして commensurability の状態にある場合には critical argument に関する運動の可動区間と安定性について調べることができる。

次にこの理論によって、静止衛星に関し表1の(1)から(10)までの場合に行なわれた計算の結果を示す図1から図11までについて調べてみる。

ここで図1から図6までは(3)の場合について long range の摂動つまり zonal harmonics の long range parts と resonance terms による摂動を示すものである。ただし  $a$  に関しては zonal harmonics の long range parts によるものはないので resonance terms によるものしか存在しない。まず図1, 2および3の  $\delta a$ ,  $\delta e$  および  $\delta i$  は何れも大体1000日程度の周期をもち極値をとる部分の他の部分において大体直線状の変化をしている。それから図4, 5および6の  $\delta \Omega$ ,  $\delta \omega$  および  $\delta \chi^*$  は何れも直線状の変化をし、その大きさの比は大体  $-1:2:1$  となっている。これは摂動関数の zonal harmonics における  $l=2, m=0$  の長年項による摂動の大きさの比に大体等しい。また(3)の場合における図7の  $\lambda$  を図1の  $\delta a$  と組み合わせて考えることによって直ちにわかるが、大体において  $\lambda$  の変化率と  $\delta a$  の符号は逆になっている。 $\lambda(t)$  は epoch において  $129^\circ 4$  であり、12日目に  $129^\circ 5$  となり、その後は減少して508日目に  $17^\circ 3$  となり、それから再び増大して1042日目に  $129^\circ 4$  となる。これから  $\lambda(t)$  の周期つまり地球に相対的な運動における秤動の周期は1042.1日となる。さらに(3)の場合における図8の  $\lambda$  と  $F$  との関係において、図7に示した  $\lambda$  の変化に応ずる  $F$  の変化の向きを図上において矢印で示してある。ここで運動は  $F \geq 0$  においてのみ実現することから  $\lambda$  についての可動区間の様子が図に示されていることになる。

次に図9.1から図9.10まではそれぞれ(1)から(10)までの場合についての  $s$  つまり  $\lambda$  と  $W, E$  したがって  $\lambda$  と  $F=E-W$  との大体の関係を示す。ここで運動は図8におけると同じく  $F \geq 0$  においてのみ実現することから  $\lambda$  についての可動区間の大体の様子が図に示されていることになる。まず(1), (2), (3), (4)および(5)の場合は  $a_1$  つまり  $T_1$  のみが異なり、epoch における他の軌道要素は等しい。したがってまた  $\lambda_1$  もすべて等しく  $129^\circ 4$  である。ここで(1)と(5)の場合には常に  $F > 0$  であり  $\lambda$  についての可動区間は  $0^\circ$  から  $360^\circ$  までにわたっている。そして(1)の場合には  $\lambda$  は常に増加し、(5)の場合には常に減少する。つまり(1)と(5)の場合には地球に相対的な運動は不安定である。以上に対して(2), (3)および(4)の場合には  $F \geq 0$  となる  $\lambda$  は限定されることとなる。ここで(2)の場合においては  $\lambda$  は約  $154^\circ$  まで増大し、それから減少して約  $-190^\circ$  に達し、再び増大する。また(3)の場合における  $\lambda$  については図7に詳細を示してあるが、図9.3からもその大体がわかる。それから(4)の場合においては  $\lambda$  は

減少し約  $-193^\circ$  に達し、それから増大して約  $155^\circ$  となり、再び減少をする。このように(2), (3)および(4)の場合には地球に相対的な運動は秤動をして安定である。次に(6), (7), (8), (9)および(10)の場合も epoch において  $\alpha$  のみが異なり、他の軌道要素は等しい。したがって  $\lambda_1$  もすべての場合について等しく  $98:8$  である。そして(6)から(10)の場合も(1)から(5)の場合にそれぞれ対応して同様の運動が行なわれる。つまり(6)と(10)の場合にはそれぞれ東と西への一方向きの運動が起こり、(7), (8)および(9)の場合には秤動となる。静止衛星の地球に相対的な運動の安定性に関する図9について論じたような考察は先きに東京大学の古在教授によって行なわれた<sup>22)</sup>。

それから図10は(3)の場合に  $s(t)$  の極めて概略の値を示すものである。ここで  $s$  は  $\lambda$  に等しいとみられる故に図10は図7と同じものとなる。しかし図7は摂動関数の harmonics の四次までをとった場合のものであり、図10はさらに省略して二次までに限定し地球の形を一般楕円体とみなした際の摂動関数の展開項の内  $s$  の項だけから成る引数をもつ一項のみをとった場合のものである。図10において  $s$  つまり  $\lambda$  の周期したがって地球に相対的な運動における秤動の周期は 911.5 日となり、これは図7における周期 1042.1 日の約 87% となっている。

さらに図11は  $s$  つまり  $\lambda$  についての、したがってまた地球に相対的な運動が安定であって秤動をするような場合における  $\alpha_1$  の領域を  $s_1$  つまり  $\lambda_1$  について示すものである。図によれば  $\alpha_1$  が 42166.38 km となる直線をはさむ二本の曲線の間に  $\alpha_1$  があるときに運動は安定である。一方において  $\lambda=129:4$  である(1)から(5)までの場合において(6.8.1.C)によって計算された  $\lambda(t)$  の値によれば運動は(1)と(5)の場合に不安定である。そして(2), (3)および(4)の場合に安定である。したがって  $\lambda=129:4$  において安定となる  $\alpha_1$  の領域の境界は 42146 km と 42147 km の間および 42185.5 km と 42187 km の間にある。同様にして  $\lambda_1=98:8$  となる(6)から(10)までの場合から境界は 42133 km と 42134 km の間および 42198 km と 42199 km の間にあるといえる。これらのことから運動が安定となる  $\alpha_1$  の領域は(7.2.1.6)によって図11に示すように概括的にその大体が決定されるが、この結果は epoch におけるいろいろの場合に際しての軌道要素の値にもとづいて(6.8.1.C)から求められる  $\lambda(t)$  によって安定性を判別した結果と一致することが確認されたことになる。

最後に以上の所論によって静止衛星の地球に相対的な運動が安定であって秤動を行ないまたその秤動が可及的に小であるための力学的条件を以下に考察する。まず  $\lambda_1$  を決定すればこれに応じて  $\alpha_1$  が図11に示される二曲線の間にある値をとるを要する。次に epoch をきめれば  $\theta_1$  が決定する。そこで、(6.8.1.C')と(9.2)によって  $\lambda_1=\Omega_1+\omega_1+\chi_1^*-\theta_1$  となるので、 $\Omega_1+\omega_1+\chi_1^*$  が決定されたことになる。さらにここで月と太陽の引力による  $i$  における摂動から  $\Omega_1$  が制限をうけるとすれば、 $\omega_1+\chi_1^*$  が決定されたこととなる。それから太陽輻射圧による摂動を考えれば  $e$  におけるものは  $\omega_1$  に大きく依存している。なお残る  $e_1$  と  $i_1$  については静止衛星であればおのづから限定をされることになる。ここで  $i_1$  については月と太陽の引力による  $i$  における摂動からも局限される。このようにすれば静止衛星は安定であって秤動を行なうことにはなるが、この秤動の振幅をできるだけ小とするためには  $\alpha_1$  を 42166 km に近づけて図11の二本の曲線の中央付近の値にするを要する。そうすれば図9における  $W=E$  の直線は  $\lambda=\lambda_1$  において  $W$  曲線に近接することとなり秤動の振幅は小となる。しかしこのようにしても決定された  $\lambda_1$  の値によって秤動の振幅を小とすることには限度がある。たとえば  $\lambda_1$  が  $130^\circ$  付近にあれば振幅は  $55^\circ$  位よりも小とはならない。また  $\lambda_1$  が  $160^\circ$  付近にあれば振幅はほとんど  $180^\circ$  に達する。

## 11. 結 論

地球の重力の作用下にある人工衛星の運動を決定するために運動方程式として Lagrange's planetary equations を用い、地球の重力の potential を表わす harmonics を一般項で表示し、commensurability の状態にある場合には critical argument を変数にとり入れて理論をたてた。

この理論によれば長期間にわたっての第一階の摂動を決定し、long range の摂動にもとづいて運動の見とおしをたてるのが可能である。

また commensurability の状態にある場合には critical argument に関しての可動区間を求めて運動の安定性を調べる。

特に静止衛星のときには地理学的経度に関する可動区間を求めて地球に相対的な運動が安定となるような打上げの力学的条件を決定しうる。

最後に本研究を行なうに当たっていろいろと教示をし

て頂いた東京大学の古在由秀教授、青木信仰教授および堀源一郎教授に謝意を表明する。

## 参 考 文 献

- 1) 武内澄夫, 松島弘一: 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究, 航技研報告, TR-255, 1971.
- 2) L. Blitzer: Synchronous and Resonant Satellite Orbits Associated with Equatorial Ellipticity, *A.R.S.J.*, 32, 1962, 7, 1016-1019.
- 3) L. Blitzer, E. M. Boughton, G. Kang and R. M. Page: Effect of Ellipticity of the Equator on 24-Hour Nearly Circular Satellite Orbits, *J. of Geophysical Research*, 67, 1962, 1, 329-335.
- 4) R. H. Frick and T. B. Garber: Perturbations of a Synchronous Satellite, R-399-NASA, 1962.
- 5) L. Blitzer, G. Kang and J. B. McGuire: The Perturbed Motion of 24-Hour Satellites Due to Equatorial Ellipticity, *J. of Geophysical Research*, 68, 1963, 3, 950-952.
- 6) F. M. Perkins: Flight Mechanics of 24-Hour Satellite, *A.I.A.A.J.*, 1, 1963, 4, 848-851.
- 7) R. R. Allan: Perturbations of a Geostationary Satellite by the Longitude-Dependent Terms in the Earth's Gravitational Field, *Planetary Space Science*, 11, 1963, 1325-1334.
- 8) C. A. Wagner: The Drift of a 24-Hour Equatorial Satellite Due to an Earth Gravity Field Through 4th Order, NASA TN D-2103, 1964.
- 9) L. Blitzer: Equilibrium Positions and Stability of 24-Hour Satellite Orbits, *J. of Geophysical Research*, 70, 1965, 16, 3987-3992.
- 10) L. Blitzer: Satellite Resonances and Librations Associated with Tesserall Harmonics of the Geopotential, *J. of Geophysical Research*, 71, 1966, 14, 3557-3565.
- 11) C. A. Wagner: The Drift of an Inclined-Orbit 24-Hour Satellite in an Earth Gravity Field through Fourth Order, NASA TN D-3316, 1966.
- 12) R. E. Balsam and B. M. Anzel: Determination of the Pacific Equilibrium Point for a Stationary Orbit, *J. of Spacecraft and Rockets*, 4, 1967, 10, 1289-1294.
- 13) C. H. Zee: Effect of Earth Oblateness and Equator Ellipticity on a Synchronous Satellite, *Astronautica Acta*, 16, 1971, 3, 143-152.
- 14) G. V. Groves: Motion of a Satellite in the Earth's Gravitational Field, *Proc. Roy. Soc. A*, 254, 1960, 48-65.
- 15) A. H. Cook: Resonant Orbits of Artificial Satellites and Longitude Terms in the Earth's External Gravitational Potential, *Geophysical J.*, 4, 1961, 53-72.
- 16) G. E. Cook: Perturbations of Satellite Orbits by Tesserall Harmonics in the Earth's Gravitational Potential, *Planetary Space Science*, 11, 1963, 797-815.
- 17) S. C. Zhuravlev: Perturbation of the Orbital Elements of a Synchronous Satellite Moving in the Earth's Non-Central Gravity Field, *Vestnik Moskovskogo Universiteta, Series 111*, 1969, 2, 105-110.
- 18) W. M. Kaula: Theory of Satellite Geodesy, 1966, Blaisdell Publishing Company.
- 19) R. R. Allan: Resonance Effects Due to the Longitude Dependence of the Gravitational Field of a Rotating Primary: *Planetary Space Science*, 15, 1967, 53-76.
- 20) R. R. Allan: Satellite Resonance with Longitude-Dependent Gravity-II, *Planetary Space Science*, 15, 1967, 1829-1845.
- 21) G. S. Gedeon: Tesserall Resonance Effects on Satellite Orbits, *Celestial Mechanics*, 1, 1969, 167-189.
- 22) 古在由秀: 人工衛星の軌道, 1972, 東京大学東京天文台天体掃索部資料.
- 23) W. M. Smart: *Celestial Mechanics*, 1953, Longmans.
- 24) W. M. Kaula: Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, *Geophysical J.*, 5, 1961, 104-133.
- 25) F. Tisserand: *Traité de Mécanique Céleste*, Tome 1, 1889, Gauthier-Villars.
- 26) 山内恭彦: 一般力学, 岩波書店.
- 27) 海上保安庁: 昭和48年天体位置表.
- 28) Y. Kozai: Revised Values for Coefficients of Zonal Spherical Harmonics in the Geopotential, *Dynamics of Satellites*, (ed. B. Morando), 1970, 104-108, Springer-Verlag.
- 29) E. M. Gaposchkin: Improved Values for the Tesserall Harmonics of the Geopotential and Station Coordinates, *Dynamics of Satellites*, (ed. B. Morando), 1970, 109-118, Springer-Verlag.
- 30) Nautical Almanac Office: Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, 1961.
- 31) I. G. Izsak: Tesserall Harmonics of the Geopotential and Corrections to Station Coordinates, *J. of Geophysical Research*, 69, 1964, 2621-2630.

## 付録 記 号

使用した主な記号を以下に示す。

$a$ : 軌道の半長軸  
 $a_e$ : 地球の平均赤道半径  
 $C_{l,m}$ : harmonic coefficient  
 $\bar{C}_{l,m}$ : normalized harmonic coefficient  
 $D_s$ : 1 恒星日  
 $E$ : critical argument に関する運動において単位質量の質点の全エネルギーの 2 倍に相当する量  
 $e$ : 軌道の離心率  
 $F$ : critical argument の変化率の平方  
 $F_{l,m,p}$ : 傾斜角関数  
 $G_{l,p,q}$ : 離心率関数  
 $i$ : 赤道面に対する軌道面の傾斜角  
 $J_{l,m}$ : 地球の重力ポテンシャルの定数  
 $k$ : Gaussian constant  
 $k'$ : 平均太陽時間を恒星時間に換算するときの定数  
 $L_s$ : 日本時の場合の標準子午線の経度  
 $M$ : 平均近点離角  
 $M_e$ : 地球の質量  
 $N_{l,m}$ : normalized coefficient'  
 $n$ : 平均運動  
 $O$ : 地心  
 $R$ : 摂動関数  
 $r$ : 地心距離  
 $S_{l,m}$ : harmonic coefficient  
 $\bar{S}_{l,m}$ : normalized harmonic coefficient  
 $S_{l,m,p,q}$ :  $J_{l,m}$  と  $T_{l,m,p,q}$  の積  
 $s$ : critical argument  
 $T_E$ : 地球の自転の周期  
 $T_i$ : epoch における日本時  
 $T_{l,m,p,q}$ :  $U_{l,m,p,q}$  における三角関数の因数の引数  
 $t$ : 平均太陽時あるいは常用時  
 $t_j$ :  $t$  で表わされたある時刻

$U$ : 単位質量の人工衛星に対する地球の重力の potential

$U_{l,m}$ : degree  $l$ , order  $m$  の harmonic term

$U_{l,m,p,q}$ :  $U_{l,m}$  を構成する各項

$V_{l,m,p,q}$ : resonance terms における  $T_{l,m,p,q}$

$W$ : critical argument に関する運動において単位質量の質点の位置エネルギーの 2 倍に相当する量

$x, y, z$ : 直交座標

$\beta$ : 地心緯度

$\theta$ : Greenwich 平均恒星時

$\theta_0$ : 世界時  $0^h$  における  $\theta$

$\lambda$ : 地理学的経度

$\lambda_{l,m}$ : 地球の重力ポテンシャルの定数

$\mu$ : 地心重力定数

$\nu$ : 春分点を通る子午線に相対的な地球の自転の回転ベクトルの  $z$  成分

$\tau$ : 地球の自転の回転ベクトルの  $z$  成分

$\chi$ : epoch における平均近点離角

$\chi^*$ : modified mean anomaly at epoch

$\Omega$ : 昇交点の赤経

$\omega$ : 昇交点から近地点まで運動の向きにはかった角距離

## 添 字

ep: epoch における値を示す

$j$ :  $t_j$  における値を示す

nl: non-zonal harmonics の long range parts による要素の変化あるいは変化率を示す

ns: non-zonal harmonics の短周期部分による要素の変化あるいは変化率を示す

rv: resonance terms による要素の変化あるいは変化率を示す

zl: zonal harmonics の long range parts による要素の変化あるいは変化率を示す

zs: zonal harmonics の短周期部分による要素の変化あるいは変化率を示す

- TR-309 複数翼をすぎる二次元, 非圧縮, ポテンシャル流れの緩和法による計算  
A Numerical Calculation of a Two-Dimensional Incompressible Potential Flow Around a Set of Airfoils Applying the Relaxation Method 1973年1月 中村正義
- TR-310 圧縮流体の Navier-Stokes 方程式に対する数種の差分法とその評価  
An Evaluation of Several Difference Methods for Compressible Navier-Stokes Equations 1973年3月 石黒登美子
- TR-311 界面最大引張り応力基準での固体推進の降伏曲面 (三次元) について  
On a Failure Criterion of a Solid Propellant under Tri-axial Stress Fields 1973年3月 遠藤修司, 河田幸三
- TR-312 最適制御理論を応用したフレア制御系について  
Simulation Study on Flare Control System by Optimization Theory 1973年3月 渡辺 頭, 堀川勇壮
- TR-313 BTE翼型の遷音速二次元翼列についての一実験  
Experimental Investigation of Two-Dimensional Cascade Performances with Blunt Trailing Edge Blade Sections at Transonic Inlet Mach Number Range 1973年3月 坂口 一, 近藤 博  
高森 晋, 岩下敬吾
- TR-314 低アスペクト比後退角平板翼の遷音速フラッタ特性におよぼす翼端付加質量の重心位置の影響  
Some Effects of Center of Gravity Locations of Added Mass on Transonic Flutter Characteristics of Low Aspect Ratio and Sweptback Thin Cantilever Wing 1973年3月 中井 暎一, 森田 甫之  
菊池 孝男, 東久保正年  
高橋 実
- TR-315T Natural Vibration and Flutter of Cylindrically Curved Panels 1973年4月 Yuji MATSUZAKI
- TR-316 推力中断型固体ロケット用プロペラントの組成と圧力指数の関係  
Relation between the Compositional Variables and the Pressure Exponent of Controllable Solid Rocket Propellants 1973年5月 五代 富文, 清水 盛生  
伊藤 克弥, 西村 久  
種村 利春, 藤原 勉
- TR-317 ファンエンジンの性能に関する考察  
Some Considerations on the Performance of the Fan Jet Engine 1973年5月 鳥崎 忠雄, 森田 光男  
関根 静雄
- TR-318T A Convergence Theorem of Nonlinear Semigroups and its Application to First Order Quasilinear Equations 1973年6月 Tadayasu TAKAHASHI
- TR-319 フライングテストベッド全機作動実験  
—予備・第一次・第二次実験—  
Ground Operation Tests of Flying Test Bed for VIOL Aircraft at National Aerospace Laboratory 1973年5月 滝澤 直人, 田辺 義一  
渋谷 昭義, 小川 敏夫  
藤枝 郭俊, 甲斐 忠雄  
宮本 義人, 鳥崎 忠  
小野 幸一

## 航空宇宙技術研究所報告320号

昭和48年6月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)●182

印刷所 有限会社啓文堂松本印刷  
東京都文京区水道2-7-5

