

UDC 521.1:  
629.783.525

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-323

月と太陽の引力の作用下にある地球の  
人工衛星の運動に関する研究

武内澄夫・松島弘一

1973年7月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- |         |   |           |  |
|---------|---|-----------|--|
| T R-299 | 遷音速における二次元翼の抵抗発散<br>On the Drag Divergence of Two Dimensional Airfoils at Transonic Speeds  | 1973年 1 月 | 神 谷 信 彦  |
| T R-300 | そり角の小さい遷音速二重円弧二次元翼列<br>実験<br>Experimental Investigation of Two-Dimensional Cascade Performance with Thin and Low-Cambered Double-Circular-Arc Blade Sections at Transonic Inlet Mach Number Range | 1972年10月  | 坂 口 一, 近 藤 博<br>高 森 晋, 岩 下 敬 吾   |
| T R-301 | 観測系の評価に関するひとつの数学的理論<br>A Mathematical Theory on Evaluation of Observation Systems   | 1972年 9 月 | 木 村 武 雄  |
| T R-302 | Kalman-Bucy フィルターによる誘導誤差の推定<br>Estimation of Guidance Errors by Kalman-Bucy Filtering Technique   | 1972年10月  | 村 田 正 秋  |
| T R-303 | ジンバルエンジン駆動用油圧制御系に適した IDPF サーボバルブの研究<br>Studies of IDPF Servovalve Appropriate for Gimbaled Engine Positioning Hydraulic Control Systems   | 1972年11月  | 畑 山 茂 樹  |
| T R-304 | ドラッグカップ型ジャイロモータの同期化制御の研究<br>Study on a Synchronizing Control of a Drag-Cup Gyro Motor   | 1972年11月  | 山 田 博  |
| T R-305 | オイラー角表示による座標変換のアルゴリズム<br>Coordinate Transformation Algorithm by the Eulerian Angles Representation  | 1972年11月  | 狼 嘉 彰  |
| T R-306 | フライングテストベッド用付帯設備の計画<br>System Design of Facilities for VTOL Flying Test Bed at National Aerospace Laboratory  | 1972年11月  | 滝 澤 直 人, 渋谷 昭 義<br>小 川 敏 雄, 藤 枝 郭 俊<br>甲 斐 忠 夫, 宮 本 義 人<br>田 辺 義 一, 小 野 幸 一<br>竹 内 和 之 |
| T R-307 | プラズマ風洞アーク加熱器, ノズル流およびノズル噴流に対する諸考察<br>Some Characteristics of the Arc-Heater Nozzle Flow and the Underexpanded Jet in the NAL 60 kW Plasma Wind Tunnel   | 1972年12月  | 松 崎 利 一, 平 林 則 明   |
| T R-308 | 固体ロケット推進薬の超音波探傷<br>On the Ultrasonic Inspection of Separation in Solid Propellant Rocket Motors   | 1972年12月  | 清 水 盛 生, 野 口 義 男<br>種 村 利 春  |
| T R-309 | 複数翼をすぎる二次元, 非圧縮ポテンシャル流れの緩和法による計算<br>A Numerical Calculation of a Two-Dimensional Incompressible Potential Flow Around a Set of Airfoils Applying the Relaxation Method                            | 1973年 1 月 | 中 村 正 義  |
| T R-310 | 圧縮流体の Navier-Stokes 方程式に対する数種の差分法とその評価<br>An Evaluation of Several Difference Methods for Compressible Navier-Stokes Equations  | 1973年 3 月 | 石 黒 登 美 子  |
| T R-311 | 界面最大引張り応力基準での固体推進薬の降伏曲面 (三次元) について<br>On a Failure Criterion of a Solid Propellant under Tri-axial Stress Fields  | 1973年 3 月 | 遠 藤 修 司, 河 田 幸 三   |

# 月と太陽の引力の作用下にある地球の人工衛星 の運動に関する研究\*

武内 澄夫\*\* ・ 松島 弘 一\*\*

## The Study on the Motion of an Artificial Earth Satellite under the Gravitational Attractions of the Sun and Moon

By Sumio TAKEUCHI and Koichi MATSUSHIMA

### Abstract

The effects of the gravitational attractions of the sun and moon on the motion of an artificial earth satellite are investigated using Lagrange's planetary equations.

The complete gravitational disturbing function expressed in osculating elliptic elements is used.

As regards the orbital elements of the disturbing body, it is assumed that the semi-major axis, the eccentricity and the inclination of the orbital plane are constants and that the longitude of the ascending node, the argument of the perigee and the mean anomaly are linear functions of time.

Neglecting the coupling effects between the oblateness of the earth and the attraction of the disturbing body, perturbations of the first order are determined.

The theory is applied to the orbit of a geostationary satellite and the variations of orbital elements are calculated. On the basis of the results of computations, the initial conditions giving orbits that have inclination variations amounting to a few degrees for two or three years are determined.

### 1. 緒 言

地球の重力、月と太陽の引力、太陽輻射圧などの作用下にある地球の人工衛星の運動を決定することを目的とし、その第一段階として、地球の重力の作用下にある人工衛星の運動についての研究を先に報告した<sup>1)</sup>、<sup>2)</sup>。これに引き続いてここに月と太陽の引力の作用下にある地球の人工衛星の運動についての研究を行なった。

月と太陽の引力の作用下にある地球の人工衛星の運動に関する研究についても、地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究について既報<sup>2)</sup>に述べたと全く同じことがいえる。すなわち地心を原点とする極座標を変数とする運動方程式を用いれば、運動の見とおしを立てる点においては不便であるが数値積分によって所要の精度において運動を決定することは可

能である。しかしながらこのような研究は比較的に少ない<sup>3)</sup>。これに対して軌道要素を変数とする Lagrange's planetary equations を運動方程式にとれば、第一階の摂動あるいは線型摂動までを容易に求めることができ、また長周期摂動にもとづいて運動の見とおしを立てやすい。そしてこのような理論は数多く発表されている<sup>4)~11)</sup>。

ここで月と太陽の引力の potential を表わす harmonics についてみれば、これを一般項で表示しておくことが望ましいと思うがこのような理論で詳細に摂動の式まで明示して公表されたものは見当たらないようである。実際に地球の重力の作用下にある場合の摂動関数を表わす harmonics の  $J_{2,0}$  の項の最大値と月と太陽の引力の作用下にある場合の摂動関数を表わす二次の harmonics の最大値を比べてみれば、地表に近い人工衛星にあっては地球の作用によるものが月と太陽の作用によるものに対して圧倒的に大である。しかし静止衛星にあっては地球の作用によるものと月、太

\* 昭和48年4月19日受付

\*\* 宇宙研究グループ

陽の作用によるものが大体同じ大きさとなる。このため地球の重力の作用下にある場合の摂動関数において  $J_{2,0}$  をこえる項までを考慮するとき、これに対応するためには、月、太陽の引力の作用下にある場合の摂動関数についてはそれぞれ四次、二次の harmonics までを考慮する必要がある。

そこで本報告においては運動方程式として Lagrange's planetary equations をとり、月と太陽の引力の potential を表わす harmonics を一般項で表示した式を用いて第一階の摂動を求めた。ただし地球の扁平との相互作用については今後の報告において扱う予定であるので、これを除外して論じた。次いで harmonics の四次までをとり、離心率の七乗までを考慮した場合の計算式を出した。また月と太陽の軌道要素を求める計算式を示し、これによって要素を定数および時間の一次関数として表わすことにした。それから静止衛星を一例としてとり、これに関する計算を行なって軌道要素の変化を求めた。そしてこの結果に基づいて静止衛星の軌道面を長時間にわたって赤道面附近に留めるための条件を求めた。

## 2. 力学系

人工衛星は地球の重力ならびに月と太陽の引力の作用のみを受けるものとする。ここで地球の質量分布は球状であるとする。そして人工衛星の運動を地球の中心  $O$  を原点とし恒星系に対して並進運動のみをする座標系  $Oxyz$  に関して決定することとする。ここで  $x$  軸および  $z$  軸をそれぞれ春分点および天の北極に向けてとり、座標系は右手系直交座標系をなすものとする。ただし春分点の天球上における移動を無視する。このとき単位質量の人工衛星に対する地球の重力と月あるいは太陽の引力の potential は次式によって与えられる。

$$U = \frac{\mu}{r} + \frac{Gm_D}{r_D} \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_D} \right)^l P_l(\cos \theta) \quad \left\{ \begin{array}{l} \mu = GM_e \end{array} \right. \quad (2.1)$$

ここに

- $\mu$ : 地心重力定数
- $G$ : 万有引力の定数
- $M_e$ : 地球の質量
- $m_D$ : 月あるいは太陽の質量
- $r$ : 人工衛星の地心距離
- $r_D$ : 月あるいは太陽の重心の地心距離
- $\theta$ : 地心と人工衛星を結ぶ直線が地心と月あるいは太陽の重心を結ぶ直線に対してなす角

$P_l$ : Legendre 関数

である。ここで地球の質量に対して人工衛星の質量を無視してある。また添字  $D$  は月あるいは太陽に関する量を表わすものとする。なお以下において添字  $S, L$  によってそれぞれ太陽、月に関する量を表わすものとする。

## 3. 運動方程式

時刻として

$t$ : 平均太陽時あるいは常用時

をとる。また人工衛星の接触軌道要素として

$a$ : 軌道の半長軸

$e$ : 軌道の離心率

$i$ : 赤道面に対する軌道面の傾斜角

$\Omega$ : 昇交点の赤経

$\omega$ : 昇交点から近地点までの運動の向きにはかった角距離

$\chi$ : epoch  $t = t_{ep} = t_1 = 0$  平均太陽日における平均近点離角

をとる。ここで  $n$  を平均運動とすれば

$$\mu = n^2 a^3 \quad (3.1)$$

が成立し、平均近点離角は次のようになる。

$$M = \chi + nt = \chi^* + \int_0^t n dt \quad (3.2)$$

なお  $\chi^*$  は modified mean anomaly at epoch である。そして次式が成立する。

$$\frac{dM}{dt} = n + \frac{dn}{dt} t + \frac{d\chi}{dt} = n + \frac{d\chi^*}{dt} \quad (3.3)$$

また摂動関数  $R$  は次のように表わされる。

$$R = U - \frac{\mu}{r} \quad (3.4)$$

このとき Lagrange's planetary equations は次のようになる。<sup>12)</sup>

$$\left. \begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial \chi^*} \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2 e} \left\{ (1-e^2) \frac{\partial R}{\partial \chi^*} - \sqrt{1-e^2} \times \frac{\partial R}{\partial \omega} \right\} \\ \frac{di}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \left( \cot i \frac{\partial R}{\partial \omega} - \operatorname{cosec} i \frac{\partial R}{\partial \Omega} \right) \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \frac{\partial R}{\partial i} \\ \frac{d\omega}{dt} &= \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \times \frac{\partial R}{\partial i} \end{aligned} \right\} \quad (3.5)$$

$$\frac{d\chi^*}{dt} = -\frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{2}{na} \left( \frac{\partial R}{\partial a} \right) \quad \left. \vphantom{\frac{d\chi^*}{dt}} \right|$$

ここで  $\left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)$  は  $\left( \frac{\partial R}{\partial a} \right)_{n=\text{const.}}$  を示す。

#### 4. 摂動関数の軌道要素による表示式

(3.5) における摂動関数は軌道要素の関数として表わされるを要するが, (3.4) と (2.1) に示すようにそうになっていない。そこでこの摂動関数を軌道要素の関数である無限の項の和として表わす W.M. Kaula によって出された式を用いることとする。<sup>13)</sup> ここで月あるいは太陽の軌道要素として

- $a_D$ : 軌道の半長軸
- $e_D$ : 軌道の離心率
- $i_D$ : 赤道面に対する軌道面の傾斜角
- $\Omega_D$ : 昇交点の赤経
- $\omega_D$ : 昇交点から近地点までの運動の向きにはかった角距離

をとる。またその平均近点離角を  $M_D$  とする。このとき次式が成立する。

$$R = U - \frac{\mu}{r} = \sum_{l=2}^{\infty} R_l \quad (4.1)$$

$$R_l = \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} R_{l,m,p,h,q,j} \quad (4.2)$$

$$R_{l,m,p,h,q,j} = Gm_D \frac{a^l}{a_D^{l+1}} k_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \times F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \times S_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) \quad (4.3)$$

ここで  $k_m$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} k_0 &= 1 \\ k_m &= 2, \quad m \neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (4.4)$$

また  $F_{l,m,p}(i)$  と  $F_{l,m,h}(i_D)$  は傾斜角関数であり, 次式のようにになる。

$$F_{l,m,p}(i) = \sum_u \frac{(2l-2u)!}{u!(l-u)!(l-m-2u)! 2^{2l-2u}} \times \sin^{l-m-2u} i$$

$$\times \sum_{v=0}^m \binom{m}{v} \cos^v i \sum_w \binom{l-m-2u+v}{w} \binom{m-v}{p-u-w} \times (-1)^{w-K} \quad (4.5)$$

ここで  $u$  と  $w$  の属する区間を規定する式は次のようになる。<sup>1)</sup>

$$\begin{aligned} 0 &\leq u \leq \min(p, l-p, K) \\ \max(0, p-u-m-v) &\leq w \leq p-u \\ &- \{m - \min(l-p-u, m)\} \\ &+ \min\{v, m - \min(l-p-u, m)\} \\ K &= \left[ \frac{1}{2} (l-m) \right] \end{aligned}$$

ここに  $[ ]$  は整数部分を示す。次に  $H_{l,p,q}(e)$  と  $G_{l,h,j}(e_D)$  は離心率関数であり, 次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} H_{l,p,q}(e) &= X_{l-2p+q}^{l-2p} (e) \\ G_{l,h,j}(e_D) &= X_{j-2h+j}^{l-1, l-2h} (e_D) \end{aligned} \right\} \quad (4.6)$$

ここに  $X_{l-2p+q}^{l-2p}(e)$  と  $X_{j-2h+j}^{l-1, l-2h}(e_D)$  は Hansen 係数であり, 次式が成立する。

$$\begin{aligned} X_{l-2p+q}^{l-2p}(e) &= X_{2p-l-q}^{l, 2p-l}(e) \\ X_{j-2h+j}^{l-1, l-2h}(e_D) &= X_{2h-l-j}^{l-1, 2h-l}(e_D) \end{aligned}$$

この Hansen 係数の関数の一般形は F. Tisserand によって示されている。<sup>14)</sup> なおこの関数の個々の形についてはその一部分が A. Cayley によって与えられている。<sup>15)</sup>

さらに,  $\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D$  および  $\Omega_D$  の関数  $S_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D)$  は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} S_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) &= \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) \\ T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) &= (l-2p)\omega + (l-2p+q)M \\ &\quad - (l-2h)\omega_p - (l-2h+j)M_D \\ &\quad + m(\Omega - \Omega_D) \end{aligned} \right\} \quad (4.7)$$

#### 5. 軌道要素の変化率

前章において示された諸式を (3.5) に用いれば軌道要素の変化率を表わす式が求められる。これは次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -\frac{2}{na} Gm_D \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} (l-2p+q) \frac{a^l}{a_D^{l+1}} k_m \\ &\quad \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\ &\quad \times \sin T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) \\ \frac{de}{dt} &= \frac{1}{na^2e} Gm_D \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} k_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\ &\quad \times F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \times \sin T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) \\
& \times \{-(l-2p+q)(1-e^2) + (l-2p)\sqrt{1-e^2}\} \\
\frac{di}{dt} = & \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2}} Gm_D \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} k_m \\
& \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\
& \times \sin T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) \\
& \times \{-(l-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i\} \\
\frac{d\Omega}{dt} = & \frac{1}{na^2\sqrt{1-e^2} \sin i} Gm_D \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\
& \times k_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} F_{l,m,h}(i_D) H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\
& \times \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) \\
\frac{d\omega}{dt} = & Gm_D \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} k_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\
& \times F_{l,m,h}(i_D) G_{l,h,j}(e_D) \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) \\
& \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2e} F_{l,m,p}(i) \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2\sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} H_{l,p,q}(e) \right) \\
\frac{d\chi^*}{dt} = & -Gm_D \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_{q=-\infty}^{\infty} \sum_{j=-\infty}^{\infty} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} k_m \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \\
& \times F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) G_{l,h,j}(e_D) \\
& \times \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, M, \Omega, \omega_D, M_D, \Omega_D) \\
& \times \left( \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} + 2 \frac{l}{na^2} H_{l,p,q}(e) \right)
\end{aligned} \tag{5.1}$$

## 6. 軌道要素の変化

(5.1) は軌道要素に関する非線型連立常微分方程式である。もしこれが解ければ軌道要素が  $t$  の関数として決定されることになるが、これを解くことはできない。しかし (5.1) の右辺における軌道要素は、その変化率が一般に小さいので、 $t=t_j$  から  $t=t_{j+1}$  までの短時間においては一定とみなし、 $t_j$  から  $t_{j+1}$  まで (5.1) を積分すれば第一階の摂動が得られる。そこで以下にこのような第一階の摂動を求めることとする。ここで  $t_j$  から  $t_{j+1}$  までの時間を

$$\delta t_j = t_{j+1} - t_j \tag{6.1}$$

とする。そして諸量における添字  $j$  は  $t_j$  における値を示すものとする。また  $t_j$  から  $t_{j+1}$  にいたるまでの間において月と太陽の軌道要素と平均近点離角は第 8 章に示すように次のようになるとみなされる。

$$\left. \begin{aligned}
a_D &= a_{Dj} \\
e_D &= e_{Dj} \\
i_D &= i_{Dj} \\
\Omega_D &= \Omega_{Dj} + \dot{\Omega}_{Dj}(t-t_j) \\
\omega_D &= \omega_{Dj} + \dot{\omega}_{Dj}(t-t_j) \\
M_D &= M_{Dj} + n_{Dj}(t-t_j)
\end{aligned} \right\} \tag{6.2}$$

ここに  $n_D$  は月あるいは太陽の平均運動を表わす。

この際次の (1), (2), (3) および (4) の場合に分けて考えられる。

- (1)  $l-2p+q=0$   
 $-(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D = 0$
- (2)  $l-2p+q=0$   
 $-(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D \neq 0$
- (3)  $l-2p+q \neq 0, (l-2p+q)n$   
 $-(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D \neq 0$
- (4)  $l-2p+q \neq 0, (l-2p+q)n$   
 $-(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D = 0$

しかし (4) の場合における軌道要素の変化は、その変化を表わす式の因数である  $G_{l,h,j}(e_D)$  が微小となるために、無視しうる。したがってこの場合については考えないことにする。

### 6.1 摂動関数の長年および長周期項による要素の変化

- (5.1) の右辺の各項において “分類の (1) の場合”  
 $l-2p+q=0, -(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D = 0$  (6.1.1)

をみたすとみなされる項のみをとって (5.1) を積分すれば、摂動関数の展開項のうちで平均近点離角を含ま

ずまた要素を定数とみなしたときに変化率が無視されるような引数をもつ項, つまり長年および長周期項による要素の変化が得られる。これを添字  $r$  をつけて表

わすこととする。ここで  $\delta t_j$  の間の変化は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
 \delta a_{rj} &= 0 \\
 \delta e_{rj} &= Gm_D \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h (l-2p) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \right. \\
 &\quad \times \frac{a^l}{a_D^{l+1}} F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\
 &\quad \times \sin T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \Big\} \delta t_j \\
 \delta i_{rj} &= Gm_D \left[ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \right. \\
 &\quad \times \frac{a^l}{a_D^{l+1}} F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\
 &\quad \times \sin T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
 &\quad \times \{ -(l-2p) \cot i + m \operatorname{cosec} i \} \Big] \delta t_j \\
 \delta \Omega_{rj} &= Gm_D \left\{ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin i} \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \right. \\
 &\quad \times \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} F_{l,m,h}(i_D) H_{l,p,q}(e) G_{l,h,j}(e_D) \\
 &\quad \times \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \Big\} \delta t_j \\
 \delta \omega_{rj} &= Gm_D \left\{ \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} F_{l,m,h}(i_D) \right. \\
 &\quad \times G_{l,h,j}(e_D) \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
 &\quad \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} F_{l,m,p}(i) \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} - \frac{\cot i}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{dF_{l,m,p}(i)}{di} H_{l,p,q}(e) \right) \Big\} \delta t_j \\
 \delta \chi_{rj}^* &= -Gm_D \left\{ \sum_l \sum_m \sum_p \sum_h \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \right. \\
 &\quad \times F_{l,m,p}(i) F_{l,m,h}(i_D) G_{l,h,j}(e_D) \\
 &\quad \times \cos T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
 &\quad \times \left( \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{dH_{l,p,q}(e)}{de} + 2 \frac{l}{na^2} H_{l,p,q}(e) \right) \Big\} \delta t_j
 \end{aligned} \tag{6.1.2}$$

ここに

$$\begin{aligned}
 T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
 = (l-2p)\omega - (l-2h)\omega_D - (l-2h+j)\mathbf{M}_D + m(\Omega - \Omega_D)
 \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

となる。また  $\sum_l, \sum_m, \sum_p, \sum_h$  はそれぞれ  $l, m, p, h$  について (4.1), (4.2) に示された区間にあると共に (6.1.1) をもみたすような値についての和をとることを示す。それから  $q, j$  はこのような  $l, m, p, h$  の値において次のようになる。

$$\begin{aligned}
 q &= -l+2p \\
 j &= -l+2h + \frac{-(l-2h)\omega_D - m\dot{\Omega}_D}{n_D}
 \end{aligned} \tag{6.1.4}$$

(6.1.2) の各項は長年および長周期の変化を表わす。

## 6.2 摂動関数の長周期項による要素の変化

(5.1) の右辺の各項において “分類の (2) の場合”

$$\begin{aligned}
 l-2p+q=0, \quad -(l-2h)\omega_D - (l-2h+j)n_D \\
 -m\dot{\Omega}_D \neq 0
 \end{aligned} \tag{6.2.1}$$

をみたす項のみをとって (5.1) を積分すれば、摂動関数の展開項のうちで平均近点離角を含まずまた要素を定数とみなしたときに変化率があるような引数をもつ項, つまり長周期の変化をする項による要素の変化が得られる。これを添字  $l$  をつけて表わすこととする。ここで  $\delta t_j$  の間の変化は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
\delta a_{lj} &= 0 \\
\delta e_{lj} &= -Gm_D \left\{ \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \frac{(l-2p)}{(l+m)!} \right. \\
&\quad \times k_m \frac{1}{-(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)\mathbf{n}_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{\mathbf{a}^l}{\mathbf{a}_D^{l+1}} \\
&\quad \times \mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i}) \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \\
&\quad \left. \times \delta \cos \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \right\}_j \\
\delta i_{lj} &= -Gm_D \left[ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \right. \\
&\quad \times \frac{1}{-(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)\mathbf{n}_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{\mathbf{a}^l}{\mathbf{a}_D^{l+1}} \mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i}) \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \\
&\quad \times \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \delta \cos \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
&\quad \left. \times \{ -(l-2p) \cot \mathbf{i} + m \operatorname{cosec} \mathbf{i} \} \right]_j \\
\delta \Omega_{lj} &= Gm_D \left\{ \frac{1}{na^2 \sqrt{1-e^2} \sin \mathbf{i}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right. \\
&\quad \times k_m \frac{1}{-(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)\mathbf{n}_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{\mathbf{a}^l}{\mathbf{a}_D^{l+1}} \frac{d\mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i})}{d\mathbf{i}} \\
&\quad \times \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \\
&\quad \left. \times \delta \sin \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \right\}_j \\
\delta \omega_{lj} &= Gm_D \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \right. \\
&\quad \times \frac{1}{-(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)\mathbf{n}_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{\mathbf{a}^l}{\mathbf{a}_D^{l+1}} \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \\
&\quad \times \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \delta \sin \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
&\quad \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{na^2 e} \mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i}) \frac{d\mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e})}{d\mathbf{e}} - \frac{\cot \mathbf{i}}{na^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{d\mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i})}{d\mathbf{i}} \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \right) \Big\}_j \\
\delta \lambda_{lj}^* &= -Gm_D \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \right. \\
&\quad \times \frac{1}{-(l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)\mathbf{n}_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{\mathbf{a}^l}{\mathbf{a}_D^{l+1}} \mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i}) \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \\
&\quad \times \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \delta \sin \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
&\quad \times \left( \frac{1-e^2}{na^2 e} \frac{d\mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e})}{d\mathbf{e}} + 2 \frac{l}{na^2} \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \right) \Big\}_j
\end{aligned} \tag{6.2.2}$$

ここに

$$\begin{aligned}
&\delta_{\cos}^{\sin} \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
&= \frac{\sin}{\cos} \{ (l-2p)\omega - (l-2h)(\omega_D + \dot{\omega}_D \delta t) - (l-2h+j)(\mathbf{M}_D + \mathbf{n}_D \delta t) + m\Omega - m(\Omega_D + \dot{\Omega}_D \delta t) \} \\
&- \frac{\sin}{\cos} \{ (l-2p)\omega - (l-2h)\omega_D - (l-2h+j)\mathbf{M}_D + m\Omega - m\Omega_D \}
\end{aligned} \tag{6.2.3}$$

となる。また  $q$  は次のようになる。

$$q = -l + 2p \tag{6.2.4}$$

それから  $\sum_j$  は  $-\infty$  から  $\infty$  までのすべての整数についての和を表わす。ただし第 6.1 節の  $l, m, p, h$  の値における (6.1.4) に示した

$$-l + 2h + \{ -(l-2h)\dot{\omega}_D - m\dot{\Omega}_D \} / \mathbf{n}_D$$

についての和を除く。

(6.2.2) の各項は長周期の変化を表わす。

### 6.3 振動関数の短周期項による要素の変化

(5.1) の右辺の各項において “分類の(3)の場合”

$$l-2p+q \neq 0,$$

$$(l-2p+q)\mathbf{n} - (l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)\mathbf{n}_D$$

$$-m\dot{\Omega}_D \neq 0 \tag{6.3.1}$$

をみたす項のみをとって (5.1) を積分すれば、振動関数の展開項のうちで平均近点離角を含みまた要素を定数とみなしたときに変化率があるような引数をもつ項、つまり短周期項による要素の変化が得られる。これを添字 sp をつけて表わすこととする。ここで  $\delta t_j$  の間の変化は次式で表わされる。



$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{a}_{spj} &= 2 G m_D \left\{ \frac{1}{n a} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j (l-2p+q) \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right. \\
&\quad \times k_m \frac{1}{(l-2p+q)n - (l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\
&\quad \times \mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i}) \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \\
&\quad \left. \times \delta \cos \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \right\}_j \\
\delta \mathbf{e}_{spj} &= -G m_D \left[ \frac{1}{n a^2 \mathbf{e}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \right. \\
&\quad \times \frac{1}{(l-2p+q)n - (l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\
&\quad \times \mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i}) \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \\
&\quad \times \delta \cos \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
&\quad \left. \times \{ -(l-2p+q)(1-e^2) + (l-2p)\sqrt{1-e^2} \} \right]_j \\
\delta \mathbf{i}_{spj} &= -G m_D \left[ \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!} \right. \\
&\quad \times k_m \frac{1}{(l-2p+q)n - (l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\
&\quad \times \mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i}) \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \\
&\quad \times \delta \cos \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
&\quad \left. \times \{ -(l-2p) \cot \mathbf{i} + m \operatorname{cosec} \mathbf{i} \} \right]_j \\
\delta \Omega_{spj} &= G m_D \left\{ \frac{1}{n a^2 \sqrt{1-e^2} \sin \mathbf{i}} \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \right. \\
&\quad \times \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \frac{1}{(l-2p+q)n - (l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D} \\
&\quad \times \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \frac{d\mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i})}{d\mathbf{i}} \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \\
&\quad \left. \times \delta \sin \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \right\}_j \\
\delta \omega_{spj} &= G m_D \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \right. \\
&\quad \times \frac{1}{(l-2p+q)n - (l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\
&\quad \times \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \delta \sin \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
&\quad \left. \times \left( \frac{\sqrt{1-e^2}}{n a^2 \mathbf{e}} \mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i}) \frac{d\mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e})}{d\mathbf{e}} - \frac{\cot \mathbf{i}}{n a^2 \sqrt{1-e^2}} \frac{d\mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i})}{d\mathbf{i}} \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \right) \right\}_j \\
\delta \chi_{spj}^* &= -G m_D \left\{ \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \sum_{p=0}^l \sum_{h=0}^l \sum_q \sum_j \frac{(l-m)!}{(l+m)!} k_m \right. \\
&\quad \times \frac{1}{(l-2p+q)n - (l-2h)\dot{\omega}_D - (l-2h+j)n_D - m\dot{\Omega}_D} \frac{a^l}{a_D^{l+1}} \\
&\quad \times \mathbf{F}_{l,m,p}(\mathbf{i}) \mathbf{F}_{l,m,h}(\mathbf{i}_D) \mathbf{G}_{l,h,j}(\mathbf{e}_D) \\
&\quad \times \delta \sin \mathbf{T}_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
&\quad \left. \times \left( \frac{1-e^2}{n a^2 \mathbf{e}} \frac{d\mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e})}{d\mathbf{e}} + 2 \frac{l}{n a^2} \mathbf{H}_{l,p,q}(\mathbf{e}) \right) \right\}_j
\end{aligned} \tag{6.3.2}$$

ここに

$$\left. \begin{aligned}
& \delta_{\cos}^{\sin} T_{l,m,p,h,q,j}(\omega, \mathbf{M}, \Omega, \omega_D, \mathbf{M}_D, \Omega_D) \\
& = \frac{\sin}{\cos} \{ (l-2p)\omega + (l-2p+q)(\mathbf{M} + \mathbf{n}\dot{\omega}t) - (l-2h)(\omega_D + \dot{\omega}_D \dot{\omega}t) \\
& \quad - (l-2h+j)(\mathbf{M}_D + \mathbf{n}_D \dot{\omega}_D t) + m\Omega - m(\Omega_D + \dot{\Omega}_D \dot{\omega}t) \} \\
& - \frac{\sin}{\cos} \{ (l-2h)\omega + (l-2p+q)\mathbf{M} - (l-2h)\omega_D \\
& \quad - (l-2h+j)\mathbf{M}_D + m\Omega - m\Omega_D \}
\end{aligned} \right\} \quad (6.3.3)$$

となる。また  $\Sigma$  は  $-l+2p$  を除く  $-\infty$  から  $\infty$  までのすべての整数についての和を表わす。それから  $\Sigma$  は (4.1), (4.2) に示された区間にあると共に (4) の場合である

$$\begin{aligned}
l-2p+q \neq 0, (l-2p+q)\mathbf{n} - (l-2h)\dot{\omega}_D \\
- (l-2h+j)\mathbf{n}_D - m\dot{\Omega}_D = 0
\end{aligned} \quad (6.3.4)$$

をもみたすような  $l, m, p, h, q$  の値における

$$j = -l+2h + \frac{(l-2p+q)\mathbf{n} - (l-2h)\dot{\omega}_D - m\dot{\Omega}_D}{\mathbf{n}_D} \quad (6.3.5)$$

を除く  $-\infty$  から  $\infty$  までのすべての整数についての和を表わす。

(6.3.2) の各項は短周期の変化を表わす。

#### 6.4 任意の時刻における軌道要素

以上の結果から軌道要素を  $EL$  で表わせば  $t_j$  における要素と  $t_{j+1}$  における要素の関係は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
EL_{j+1} &= EL_j + \delta EL_j \\
\delta EL_j &= \delta EL_{r,j} + \delta EL_{l,j} + \delta EL_{sp,j}
\end{aligned} \right\} \quad (6.4.1)$$

したがって

$$\left. \begin{aligned}
t_N &= t_1 + \Delta t \\
&= t_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \delta t_j
\end{aligned} \right\} \quad (6.4.2)$$

における要素は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned}
EL_N &= EL_1 + \Delta EL \\
&= EL_1 + \sum_{j=1}^{N-1} \delta EL_j
\end{aligned} \right\} \quad (6.4.3)$$

#### 7. harmonics の四次までをとった場合の計算式

前章までの所論によれば理論的には harmonics として任意の次数までをとった場合における第一階の摂動が求められる。しかし月の引力の作用を考える場合には摂動関数としては harmonics の四次までをとれば十分と思われる。そしてこの際には  $G_{l,h,j}(\mathbf{e}_L)$  として二次の harmonics においては  $\mathbf{e}_L$  の二乗の項までを、三次の harmonics においては  $\mathbf{e}_L$  の項までを、四次の harmonics においては定数項までをとればよいことになる。そうすれば太陽の引力の作用を考える場合には摂動関数として二次までをとれば十分であり、 $G_{l,h,j}(\mathbf{e}_s)$  としては  $\mathbf{e}_s$  の項までをとればよいこととなる。それから  $H_{l,p,q}(\mathbf{e})$  としては  $\mathbf{e}$  の七乗までを考えて

おけば一般に十分と思われる。

以下にこのような場合における計算式を示すことにする。そこでまず計算式に表われる  $l, m, p, h, q, j$  の値を一括して示してみる。はじめに (6.1.2) と (6.2.2) の  $l, m, p, h, q, j$  の値を表 1 に示す。ここに (6.1.2) の  $l, m, p, h$  は (4.1), (4.2) に示された区間を表わす表 1 の内で特に (6.1.1) をもみたす値のみをとる。一方 (6.2.2) の  $l, m, p, h$  は (4.1), (4.2) に示された区間を表わす表 1 の値をすべてとり

表 1 (6.1.2) および (6.2.2) における  $l, m, p, h, q, j$  の値

$l$	$m$	$p$	$h$	$q$	$j$
2	$0 \leq m \leq 2$	0	0	-2	$-1 \leq j \leq 2$
			1		$-2 \leq j \leq 2$
			2		$-2 \leq j \leq 1$
		1	0	0	$-1 \leq j \leq 2$
			1		$-2 \leq j \leq 2$
			2		$-2 \leq j \leq 1$
		2	0	2	$-1 \leq j \leq 2$
			1		$-2 \leq j \leq 2$
			2		$-2 \leq j \leq 1$
3	$0 \leq m \leq 3$	0	0	-3	$-1 \leq j \leq 1$
			1		
			2		
			3		
		1	0	-1	$-1 \leq j \leq 1$
			1		
			2		
			3		
		2	0	1	$-1 \leq j \leq 1$
			1		
			2		
			3		
		3	0	3	$-1 \leq j \leq 1$
			1		
			2		
			3		

$l$	$m$	$p$	$h$	$q$	$j$
4	$0 \leq m \leq 4$	0	0	-4	0
			1		
			2		
			3		
			4		
		1	0	-2	0
			1		
			2		
			3		
			4		
		2	0	0	0
			1		
			2		
			3		
			4		
		3	0	2	0
			1		
			2		
			3		
			4		
		4	0	4	0
			1		
			2		
			3		
			4		

うる。また (6.1.2) の  $q$  は表1の  $q$  の内で(6.1.2)の  $l, m, p, h$  における  $q$  の値のみをとり, (6.2.2)の  $q$  は表1の  $q$  の値をすべてとる。それから (6.1.2) の  $j$  は表1の  $j$  の内で (6.1.2) の  $l, m, p, h$  に

表2 (6.3.2) における  $l, m, p, h, q, j$  の値

$l$	$m$	$p$	$h$	$q$	$j$
2	$0 \leq m \leq 2$	0	0	$-11 \leq q \leq -3$	$-1 \leq j \leq 2$
			1		$-2 \leq j \leq 2$
			2		$-2 \leq j \leq 1$
		1	0	$-7 \leq q \leq -1$	$-1 \leq j \leq 2$
			1		$-2 \leq j \leq 2$
			2		$-2 \leq j \leq 1$
		2	0	$-7 \leq q \leq 1$	$-1 \leq j \leq 2$
			1		$-2 \leq j \leq 2$
			2		$-2 \leq j \leq 1$

$l$	$m$	$p$	$h$	$q$	$j$	
3	$0 \leq m \leq 3$	0	0	$-13 \leq q \leq -4$	$-2 \leq q \leq 7$	$-1 \leq j \leq 1$
			1			
			2			
			3			
		1	0	$-9 \leq q \leq -2$	$0 \leq q \leq 7$	$-1 \leq j \leq 1$
			1			
			2			
			3			
		2	0	$-7 \leq q \leq 0$	$2 \leq q \leq 9$	$-1 \leq j \leq 1$
			1			
			2			
			3			
		3	0	$-7 \leq q \leq 2$	$4 \leq q \leq 13$	$-1 \leq j \leq 1$
			1			
			2			
			3			
4	$0 \leq m \leq 4$	0	0	$-15 \leq q \leq -5$	$-3 \leq q \leq 7$	0
			1			
			2			
			3			
		1	0	$-11 \leq q \leq -3$	$-1 \leq q \leq 7$	0
			1			
			2			
			3			
		2	0	$-7 \leq q \leq -1$	$1 \leq q \leq 7$	0
			1			
			2			
			3			
		3	0	$-7 \leq q \leq 1$	$3 \leq q \leq 11$	0
			1			
			2			
			3			
		4	0	$-7 \leq q \leq 3$	$5 \leq q \leq 15$	0
			1			
			2			
			3			
4	0					
	1					
	2					
	3					
4	0					
	1					
	2					
	3					
4	0					
	1					
	2					
	3					
4	0					
	1					
	2					
	3					
4	0					
	1					
	2					
	3					
4	0					
	1					
	2					
	3					
4	0					
	1					
	2					
	3					
4	0					
	1					
	2					
	3					

表 3  $H_{l,p,q}(e)$  の展開式の係数

$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$e^0$	$e^1$	$e^2$	$e^3$	$e^4$	$e^5$	$e^6$	$e^7$
2	0	-11	2	2	11								0
2	0	-10	2	2	10							0	
2	0	-9	2	2	9						0		0
2	0	-8	2	2	8					0		0	
2	0	-7	2	2	7				0		0		$-\frac{75}{7168}$
2	0	-6	2	2	6			0		0		$-\frac{11}{720}$	
2	0	-5	2	2	5		0		0		$-\frac{17}{640}$		$-\frac{7}{1024}$
2	0	-4	2	2	4	0		0		$-\frac{1}{16}$		$-\frac{11}{480}$	
2	0	-3	2	2	3		0		$-\frac{7}{24}$		$-\frac{47}{384}$		$-\frac{1091}{15360}$
2	0	-2	2	2	2	0		$\frac{5}{2}$					
2	0	-1	2	2	1		-3		$\frac{13}{8}$		$\frac{5}{192}$		$\frac{227}{3072}$
2	0	0	2	2	0	1		$-\frac{5}{2}$		$\frac{23}{16}$		$-\frac{65}{288}$	
2	0	1	2	2	-1		1		$-\frac{19}{8}$		$\frac{107}{64}$		$-\frac{479}{1024}$
2	0	2	2	2	-2			1		$-\frac{5}{2}$		$\frac{101}{48}$	
2	0	3	2	2	-3				$\frac{25}{24}$		$-\frac{1075}{384}$		$\frac{8425}{3072}$
2	0	4	2	2	-4					$\frac{9}{8}$		$-\frac{261}{80}$	
2	0	5	2	2	-5						$\frac{2401}{1920}$		$-\frac{12005}{3072}$
2	0	6	2	2	-6							$\frac{64}{45}$	
2	0	7	2	2	-7								$\frac{59049}{35840}$
2	1	-7	2	1	7								$-\frac{2401}{46080}$
2	1	-6	2	1	6						$-\frac{25}{384}$	$-\frac{9}{160}$	
2	1	-5	2	1	5								$\frac{625}{9216}$
2	1	-4	2	1	4					$-\frac{1}{12}$	$\frac{9}{128}$	$\frac{1}{15}$	
2	1	-3	2	1	3				$-\frac{1}{8}$				$-\frac{81}{5120}$
2	1	-2	2	1	2			$-\frac{1}{4}$		$\frac{1}{12}$		$-\frac{1}{96}$	
2	1	-1	2	1	1		-1		$\frac{1}{8}$		$-\frac{1}{192}$		$\frac{1}{9216}$
			2	1	0	1		$\frac{3}{2}$					
3	0	-13	3	3	13								0
3	0	-12	3	3	12							0	
3	0	-11	3	3	11						0		0
3	0	-10	3	3	10					0		0	
3	0	-9	3	3	9				0		0		0

$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$e^0$	$e^1$	$e^2$	$e^3$	$e^4$	$e^5$	$e^6$	$e^7$
3	0	-8	3	3	8			0		0		0	$\frac{57}{4480}$
3	0	-7	3	3	7							$\frac{137}{5120}$	$\frac{1}{30}$
3	0	-6	3	3	6						$\frac{13}{160}$	$\frac{179}{640}$	
3	0	-5	3	3	5					$\frac{75}{128}$			
3	0	-4	3	3	4				$-\frac{35}{8}$	$-\frac{65}{16}$		$-\frac{19}{1024}$	
3	0	-3	3	3	3			$\frac{57}{8}$			$-\frac{133}{32}$		$\frac{11}{16}$
3	0	-2	3	3	2		$-\frac{9}{2}$		$\frac{33}{4}$	$\frac{591}{64}$		$-\frac{349}{64}$	
3	0	-1	3	3	1	1		-6					
3	0	0	3	3	0								
3	0	1	3	3	-1		$\frac{3}{2}$		$-\frac{57}{8}$		11		$-\frac{2905}{384}$
3	0	2	3	3	-2			$\frac{15}{8}$		$-\frac{135}{16}$		$\frac{13975}{1024}$	
3	0	3	3	3	-3				$\frac{9}{4}$		$-\frac{81}{8}$	$\frac{7889}{640}$	$\frac{2781}{160}$
3	0	4	3	3	-4					$\frac{343}{128}$			$-\frac{76}{5}$
3	0	5	3	3	-5						$\frac{16}{5}$	$\frac{19683}{5120}$	
3	0	6	3	3	-6								$\frac{3125}{672}$
3	0	7	3	3	-7								
3	1	-9	3	2	9								0
3	1	-8	3	2	8							0	$\frac{27}{2240}$
3	1	-7	3	2	7						0	$\frac{155}{9216}$	$-\frac{73}{5760}$
3	1	-6	3	2	6					0	$\frac{13}{480}$	$-\frac{9}{640}$	
3	1	-5	3	2	5				0	$\frac{7}{128}$			$\frac{7}{960}$
3	1	-4	3	2	4			0	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{48}$	$-\frac{1}{96}$	$\frac{265}{3072}$	
3	1	-3	3	2	3	0	0	$\frac{11}{8}$	$-\frac{15}{8}$		0		0
3	1	-2	3	2	2		$-\frac{5}{2}$			$-\frac{41}{64}$		$-\frac{37}{576}$	
3	1	-1	3	2	1	1		2			$-\frac{35}{96}$		$\frac{23}{576}$
3	1	0	3	2	0		$-\frac{1}{2}$		1			$-\frac{351}{1024}$	
3	1	1	3	2	-1			$-\frac{3}{8}$		$\frac{11}{16}$	$\frac{55}{96}$		$-\frac{701}{1920}$
3	1	2	3	2	-2				$-\frac{7}{24}$	$-\frac{95}{384}$		$\frac{205}{384}$	
3	1	3	3	2	-3						$-\frac{9}{40}$	$-\frac{9947}{46080}$	$\frac{171}{320}$
3	1	4	3	2	-4								$-\frac{68}{315}$
3	1	5	3	2	-5								
3	1	6	3	2	-6								
3	1	7	3	2	-7								

$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$e^0$	$e^1$	$e^2$	$e^3$	$e^4$	$e^5$	$e^6$	$e^7$
4	0	-15	4	4	15								0
4	0	-14	4	4	14							0	
4	0	-13	4	4	13						0		0
4	0	-12	4	4	12					0		0	
4	0	-11	4	4	11				0		0		0
4	0	-10	4	4	10			0		0		0	
4	0	-9	4	4	9		0		0		0		0
4	0	-8	4	4	8	0		0		0		0	
4	0	-7	4	4	7		0		0		0		$-\frac{459}{17920}$
4	0	-6	4	4	6			0		0		$-\frac{71}{720}$	
4	0	-5	4	4	5				0		$-\frac{1091}{960}$		$-\frac{13571}{23040}$
4	0	-4	4	4	4					$\frac{63}{8}$		0	
4	0	-3	4	4	3				$-\frac{187}{12}$		$\frac{1769}{192}$		$-\frac{311}{7680}$
4	0	-2	4	4	2			14		$-\frac{137}{6}$		$\frac{171}{16}$	
4	0	-1	4	4	1		-6		$\frac{93}{4}$		$-\frac{933}{32}$		$\frac{7929}{512}$
4	0	0	4	4	0	1		-11		$\frac{253}{8}$		$-\frac{346}{9}$	
4	0	1	4	4	-1		2		$-\frac{63}{4}$		$\frac{3989}{96}$		$-\frac{239275}{4608}$
4	0	2	4	4	-2			3		-21		$\frac{435}{8}$	
4	0	3	4	4	-3				$\frac{49}{12}$		$-\frac{5243}{192}$		$\frac{548261}{7680}$
4	0	4	4	4	-4					$\frac{16}{3}$		$-\frac{176}{5}$	
4	0	5	4	4	-5						$\frac{2187}{320}$		$-\frac{115911}{2560}$
4	0	6	4	4	-6							$\frac{625}{72}$	
4	0	7	4	4	-7								$\frac{1771561}{161280}$
4	1	-11	4	3	11								0
4	1	-10	4	3	10							0	
4	1	-9	4	3	9						0		0
4	1	-8	4	3	8					0		0	
4	1	-7	4	3	7				0		0		$-\frac{41}{16128}$
4	1	-6	4	3	6			0		0		$-\frac{17}{2880}$	
4	1	-5	4	3	5		0		0		$-\frac{3}{160}$		$\frac{3}{640}$
4	1	-4	4	3	4	0		0		$-\frac{5}{48}$		0	
4	1	-3	4	3	3		-4		$-\frac{13}{6}$		$-\frac{13}{24}$		$-\frac{989}{3840}$
4	1	-2	4	3	2			$\frac{21}{4}$		$\frac{21}{8}$		0	
4	1	-1	4	3	1		-4		-3		$\frac{79}{48}$		$\frac{233}{1152}$

$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$e^0$	$e^1$	$e^2$	$e^3$	$e^4$	$e^5$	$e^6$	$e^7$
4	1	0	4	3	0	1		1		$-\frac{43}{16}$		$\frac{35}{16}$	
4	1	1	4	3	-1		0		$\frac{3}{2}$		$-\frac{9}{4}$		$\frac{267}{256}$
4	1	2	4	3	-2			$-\frac{1}{4}$		$\frac{37}{24}$		$-\frac{139}{64}$	
4	1	3	4	3	-3				$-\frac{1}{3}$		$\frac{151}{96}$		$-\frac{877}{384}$
4	1	4	4	3	-4					$-\frac{3}{8}$		$\frac{33}{20}$	
4	1	5	4	3	-5						$-\frac{49}{120}$		$\frac{20531}{11520}$
4	1	6	4	3	-6							$-\frac{4}{9}$	
4	1	7	4	3	-7								$-\frac{2187}{4480}$
4	2	-7	4	2	7								$\frac{1421}{23040}$
4	2	-6	4	2	6							$\frac{3}{40}$	
4	2	-5	4	2	5						$\frac{19}{192}$		$-\frac{725}{4608}$
4	2	-4	4	2	4					$\frac{7}{48}$		$-\frac{1}{5}$	
4	2	-3	4	2	3				$\frac{1}{4}$		$-\frac{19}{64}$		$\frac{261}{2560}$
4	2	-2	4	2	2			$\frac{1}{2}$		$-\frac{7}{12}$		$\frac{1}{8}$	
4	2	-1	4	2	1		-2		$-\frac{9}{4}$		$\frac{19}{96}$		$-\frac{29}{4608}$
			4	2	0	1		5		$\frac{15}{8}$		0	

表 4  $\frac{dH_{l,p,q}(e)}{de}$  の各項の係数

$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$e^0$	$e^1$	$e^2$	$e^3$	$e^4$	$e^5$	$e^6$
2	0	-11	2	2	11							0
2	0	-10	2	2	10						0	
2	0	-9	2	2	9					0		0
2	0	-8	2	2	8				0		0	
2	0	-7	2	2	7			0		0		$-\frac{75}{1024}$
2	0	-6	2	2	6		0		0		$-\frac{11}{120}$	
2	0	-5	2	2	5	0		0		$-\frac{17}{128}$		$-\frac{49}{1024}$
2	0	-4	2	2	4		0		$-\frac{1}{4}$		$-\frac{11}{80}$	
2	0	-3	2	2	3	0		$-\frac{7}{8}$		$-\frac{235}{384}$		$-\frac{7637}{15360}$
2	0	-2	2	2	2		5					
2	0	-1	2	2	1	-3		$\frac{39}{8}$		$\frac{25}{192}$		$\frac{1589}{3072}$
2	0	0	2	2	0		-5		$\frac{23}{4}$		$-\frac{65}{48}$	
2	0	1	2	2	-1	1		$-\frac{57}{8}$		$\frac{535}{64}$		$-\frac{3353}{1024}$

$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$e^0$	$e^1$	$e^2$	$e^3$	$e^4$	$e^5$	$e^6$
2	0	2	2	2	-2		2		-10		$\frac{101}{8}$	
2	0	3	2	2	-3			$\frac{25}{8}$		$-\frac{5375}{384}$		$\frac{58975}{3072}$
2	0	4	2	2	-4				$\frac{9}{2}$		$-\frac{783}{40}$	
2	0	5	2	2	-5					$\frac{2401}{384}$		$-\frac{84035}{3072}$
2	0	6	2	2	-6						$\frac{128}{15}$	
2	0	7	2	2	-7							$\frac{59049}{5120}$
2	1	-7	2	1	7							$-\frac{16807}{46080}$
2	1	-6	2	1	6						$-\frac{27}{80}$	
2	1	-5	2	1	5					$-\frac{125}{384}$		$\frac{4375}{9216}$
2	1	-4	2	1	4				$-\frac{1}{3}$		$\frac{2}{5}$	
2	1	-3	2	1	3			$-\frac{3}{8}$		$\frac{45}{128}$		$-\frac{567}{5120}$
2	1	-2	2	1	2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$-\frac{1}{16}$	
2	1	-1	2	1	1	-1		$\frac{3}{8}$		$-\frac{5}{192}$		$\frac{7}{9216}$
			2	1	0		3					
3	0	-13	3	3	13							0
3	0	-12	3	3	12						0	
3	0	-11	3	3	11					0		0
3	0	-10	3	3	10				0		0	
3	0	-9	3	3	9			0		0		0
3	0	-8	3	3	8		0		0		0	
3	0	-7	3	3	7	0		0		0		$\frac{57}{640}$
3	0	-6	3	3	6		0		0		$\frac{411}{2560}$	
3	0	-5	3	3	5	0		0		$\frac{13}{32}$		$\frac{7}{30}$
3	0	-4	3	3	4		0		$\frac{75}{32}$		$\frac{537}{320}$	
3	0	-3	3	3	3	0		$-\frac{105}{8}$				
3	0	-2	3	3	2		$\frac{57}{4}$		$-\frac{65}{4}$		$-\frac{57}{512}$	
3	0	-1	3	3	1	$-\frac{9}{2}$		$\frac{99}{4}$		$-\frac{665}{32}$		$\frac{77}{16}$
3	0	0	3	3	0		-12		$\frac{591}{16}$		$-\frac{1047}{32}$	
3	0	1	3	3	-1	$\frac{3}{2}$		$-\frac{171}{8}$		55		$-\frac{20335}{384}$
3	0	2	3	3	-2		$\frac{15}{4}$		$-\frac{135}{4}$		$\frac{41925}{512}$	
3	0	3	3	3	-3			$\frac{27}{4}$		$-\frac{405}{8}$		$\frac{19467}{160}$
3	0	4	3	3	-4				$\frac{343}{32}$		$-\frac{23667}{320}$	
3	0	5	3	3	-5					16		$-\frac{532}{5}$



$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$e^0$	$e^1$	$e^2$	$e^3$	$e^4$	$e^5$	$e^6$
3	0	6	3	3	-6						$\frac{59049}{2560}$	
3	0	7	3	3	-7							$\frac{3125}{96}$
3	1	-9	3	2	9							0
3	1	-8	3	2	8						0	
3	1	-7	3	2	7					0		$\frac{27}{320}$
3	1	-6	3	2	6				0		$\frac{155}{1536}$	
3	1	-5	3	2	5			0		$\frac{13}{96}$		$-\frac{511}{5760}$
3	1	-4	3	2	4		0		$\frac{7}{32}$		$-\frac{27}{320}$	
3	1	-3	3	2	3	0		$\frac{1}{2}$		$-\frac{5}{96}$		$\frac{49}{960}$
3	1	-2	3	2	2		$\frac{11}{4}$		$\frac{7}{12}$		$\frac{265}{512}$	
3	1	-1	3	2	1	$-\frac{5}{2}$		$-\frac{45}{8}$		0		0
3	1	0	3	2	0		4		$-\frac{41}{16}$		$-\frac{37}{96}$	
3	1	1	3	2	-1	$-\frac{1}{2}$		3		$-\frac{175}{96}$		$\frac{161}{576}$
3	1	2	3	2	-2		$-\frac{3}{4}$		$\frac{11}{4}$		$-\frac{1053}{512}$	
3	1	3	3	2	-3			$-\frac{7}{8}$		$\frac{275}{96}$		$-\frac{4907}{1920}$
3	1	4	3	2	-4				$-\frac{95}{96}$		$\frac{205}{64}$	
3	1	5	3	2	-5					$-\frac{9}{8}$		$\frac{1197}{320}$
3	1	6	3	2	-6						$-\frac{9947}{7680}$	
3	1	7	3	2	-7							$-\frac{68}{45}$
4	0	-15	4	4	15							0
4	0	-14	4	4	14						0	
4	0	-13	4	4	13					0		0
4	0	-12	4	4	12				0		0	
4	0	-11	4	4	11			0		0		0
4	0	-10	4	4	10		0		0		0	
4	0	-9	4	4	9	0		0		0		0
4	0	-8	4	4	8		0		0		0	
4	0	-7	4	4	7	0		0		0		$-\frac{459}{2560}$
4	0	-6	4	4	6		0		0		$-\frac{71}{120}$	
4	0	-5	4	4	5	0		0		$-\frac{1091}{192}$		$-\frac{94997}{23040}$
4	0	-4	4	4	4		0		$\frac{63}{2}$		0	
4	0	-3	4	4	3	0		$-\frac{187}{4}$		$\frac{8845}{192}$		$-\frac{2177}{7680}$
4	0	-2	4	4	2		28		$-\frac{274}{3}$		$\frac{513}{8}$	

$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$e^0$	$e^1$	$e^2$	$e^3$	$e^4$	$e^5$	$e^6$
4	0	-1	4	4	1	-6		$\frac{279}{4}$		$-\frac{4665}{32}$		$\frac{55503}{512}$
4	0	0	4	4	0		-22		$\frac{253}{2}$		$-\frac{692}{3}$	
4	0	1	4	4	-1	2		$-\frac{189}{4}$		$\frac{19945}{96}$		$-\frac{1674925}{4608}$
4	0	2	4	4	-2		6		-84		$\frac{1305}{4}$	
4	0	3	4	4	-3			$\frac{49}{4}$		$-\frac{26215}{192}$		$\frac{3837827}{7680}$
4	0	4	4	4	-4				$\frac{64}{3}$		$-\frac{1056}{5}$	
4	0	5	4	4	-5					$\frac{2187}{64}$		$-\frac{811377}{2560}$
4	0	6	4	4	-6						$\frac{625}{12}$	
4	0	7	4	4	-7							$\frac{1771561}{23040}$
4	1	-11	4	3	11							0
4	1	-10	4	3	10						0	
4	1	-9	4	3	9					0		0
4	1	-8	4	3	8				0		0	
4	1	-7	4	3	7			0		0		$-\frac{41}{2304}$
4	1	-6	4	3	6		0		0		$-\frac{17}{480}$	
4	1	-5	4	3	5	0		0		$-\frac{3}{32}$		$\frac{21}{640}$
4	1	-4	4	3	4		0		$-\frac{5}{12}$		0	
4	1	-3	4	3	3	-4		$-\frac{13}{2}$		$-\frac{65}{24}$		$-\frac{6923}{3840}$
4	1	-2	4	3	2		$\frac{21}{2}$		$\frac{21}{2}$		0	
4	1	-1	4	3	1	-4		-9		$\frac{395}{48}$		$\frac{1631}{1152}$
4	1	0	4	3	0		2		$-\frac{43}{4}$		$\frac{105}{8}$	
4	1	1	4	3	-1	0		$\frac{9}{2}$		$-\frac{45}{4}$		$\frac{1869}{256}$
4	1	2	4	3	-2		$-\frac{1}{2}$		$\frac{37}{6}$		$-\frac{417}{32}$	
4	1	3	4	3	-3			-1		$\frac{755}{96}$		$-\frac{6139}{384}$
4	1	4	4	3	-4				$-\frac{3}{2}$		$\frac{99}{10}$	
4	1	5	4	3	-5					$-\frac{49}{24}$		$\frac{143717}{11520}$
4	1	6	4	3	-6						$-\frac{8}{3}$	
4	1	7	4	3	-7							$-\frac{2187}{640}$
4	2	-7	4	2	7							$\frac{9947}{23040}$
4	2	-6	4	2	6						$\frac{9}{20}$	
4	2	-5	4	2	5					$\frac{95}{192}$		$-\frac{5075}{4608}$
4	2	-4	4	2	4				$\frac{7}{12}$		$-\frac{6}{5}$	
4	2	-3	4	2	3			$\frac{3}{4}$		$-\frac{95}{64}$		$\frac{1827}{2560}$

$l$	$p$	$q$	$l$	$p$	$q$	$e^0$	$e^1$	$e^2$	$e^3$	$e^4$	$e^5$	$e^6$
4	2	-2	4	2	2		1		$-\frac{7}{3}$		$\frac{3}{4}$	
4	2	-1	4	2	1	-2		$-\frac{27}{4}$		$\frac{95}{96}$		$-\frac{203}{4608}$
			4	2	0		10		$\frac{15}{2}$		0	

おける (6.1.4) の値のみをとり, (6.2.2) の  $j$  は表 1 のそれ以外の  $j$  の値をすべてとる。表 1 によれば  $a$  を除く各要素の変化は 434 項から成っている。さらに (6.3.2) における  $l, m, p, h, q, j$  の値を表 2 に示す。ただし  $j$  については (4.1), (4.2) をみたと共に (6.3.4) をもみたとような  $l, m, p, h, q$  の値における (6.3.5) の  $j$  を除くものとする。次に  $F_{l,m,p}(i)$  と  $F_{l,m,h}(i_D)$  の関数形は既報<sup>1)</sup>の表 4 に示されている。また  $\frac{dF_{l,m,p}(i)}{di}$  および  $G_{l,h,j}(e_D)$  の関数形も同報告<sup>1)</sup>の表 5 および表 6 に示されている。それから  $e$  に関する展開式として与えられる  $H_{l,p,q}(e)$  とこれを項別微分して得られる  $\frac{dH_{l,p,q}(e)}{de}$  を表 3 と表 4 に示す。

ここで以上の諸表を前章までの諸式に適用すれば計算式が得られることとなる。

## 8. 太陽および月の軌道要素

以上の理論において人工衛星の運動を決定するためには太陽および月の軌道要素が与えられるを要するので次にこれを求めることにする。

まず

$T$ : 1900 年 1 月 0.5 日 E.T. (J.D. 2415020.0) からの時間の経過を 36525.0 暦表日を単位として  
はかった数値

とし  $t = t_{ep} = t_1, \quad t = t_j$

においてそれぞれ

$$T = T_1, \quad T = T_j$$

をとるものとする。次に図 1 に示す様に太陽に関して

$a_\odot$ : 軌道の半長軸

$e_\odot$ : 軌道の離心率

$\varepsilon$ : 平均黄道傾角

$\Omega_\odot$ : 昇交点の赤経

$g$ : 平均近点離角

とし, また瞬時の平均春分点に基準して

$\Gamma$ : 近地点の平均黄経

とする。それから月に関して

$a_\zeta$ : 軌道の半長軸

$e_\zeta$ : 軌道の離心率

$i_{EC}$ : 黄道面に対する月の軌道面の傾斜角

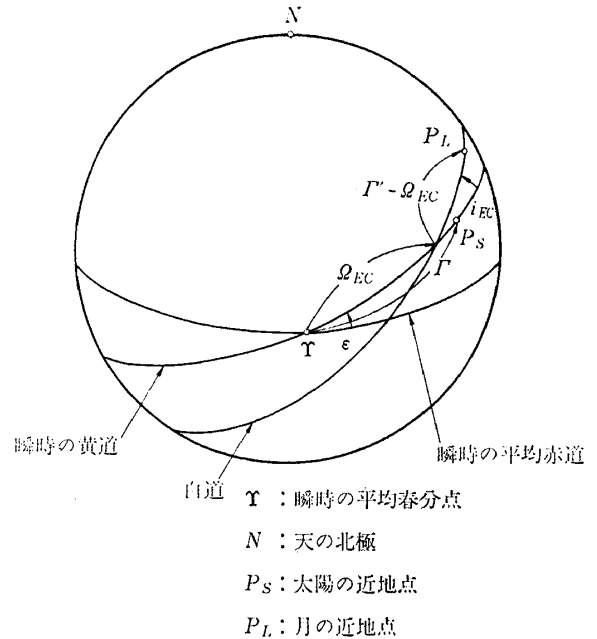


図 1 天球上に示した太陽および月の軌道

とし, さらに瞬時の平均春分点に基準して

( $\zeta$ : 平均黄経

$\Gamma'$ : 近地点の平均黄経

$\Omega_{EC}$ : 昇交点の平均黄経

とする。このとき天体暦によれば次のようになる。

16)17)

$$a_\odot = 149600 \times 10^6 \text{ m}$$

$$e_\odot = 0.01675104 - 0.00004180 T - 0.000000126 T^2$$

$$\varepsilon = 23^\circ 27' 8''.26 T - 46''.845 T^2$$

$$-0''.0059 T^2$$

$$+0''.00181 T^3$$

$$= 23^\circ 45' 22.94 - 0^\circ 01' 30.125 T$$

$$-0''.00000164 T^2$$

$$+0''.000000503 T^3$$

$$\Omega_\odot = 0^\circ$$

$$\Gamma = 281^\circ 13' 15''.0 + 6189''.03 T + 1''.63 T^2$$

$$+0''.012 T^3$$

$$= 281^\circ 22' 08.3 + 1^\circ 71' 18 T + 0^\circ 00' 45 T^2$$

$$+0''.0000003 T^3$$

$$\begin{aligned}
 g &= 358^\circ 28' 33''.0 + 129596579''.10 T \\
 &\quad - 0''.54 T^2 - 0''.012 T^3 \\
 &= 358^\circ 47' 58.3 + 35999^\circ 04' 97.5 T \\
 &\quad - 0''.000150 T^2 - 0''.0000003 T^3 \quad (8.1) \\
 a_q &= 384400 \times 10^3 \text{ m} \\
 e_q &= 0.054900489 \\
 i_{EC} &= 5^\circ 14' 53.964 \\
 (\Gamma &= 270^\circ 26' 2''.99 + 1336^\circ 307' 52'' 59.31 T \\
 &\quad - 4''.08 T^2 + 0''.0068 T^3 \\
 &= 270^\circ 43' 41.6 + 481267^\circ 883.14 T \\
 &\quad - 0''.00113 T^2 + 0.000002 T^3 \\
 \Gamma' &= 334^\circ 19' 46''.40 + 11^\circ 109' 2' 2''.52 T \\
 &\quad - 37''.17 T^2 - 0''.045 T^3 \\
 &= 334^\circ 32' 95.6 + 4069^\circ 03' 40.3 T \\
 &\quad - 0''.01033 T^2 - 0''.00001 T^3 \\
 \Omega_{EC} &= 259^\circ 10' 59''.79 - 5^\circ 134' 8' 31''.23 T \\
 &\quad + 7''.48 T^2 + 0''.008 T^3 \\
 &= 259^\circ 18' 32.8 - 1934^\circ 14' 20.1 T \\
 &\quad + 0''.00208 T^2 + 0''.000002 T^3
 \end{aligned}$$

また以上から

$$\begin{aligned}
 M_q &= (-\Gamma' \\
 &= -63^\circ 89' 54.0 + 477198^\circ 849.11 T \\
 &\quad + 0''.00920 T^2 + 0''.00001 T^3 \quad (8.2)
 \end{aligned}$$

となる。ここに  $r$  は  $2\pi$  radian を示すものとし、また  $M_q$  は月の平均近点離角を表わす。なお瞬時の平均春分点と平均赤道に基準したときの月の軌道要素として次のものをとる。

$i_q$ : 軌道面の傾斜角

$\Omega_q$ : 昇交点の赤経

$\omega_q$ : 昇交点から近地点まで運動の向きにはかった角距離

このとき図 2 に示すような球面三角形が得られ、次式が成立する。

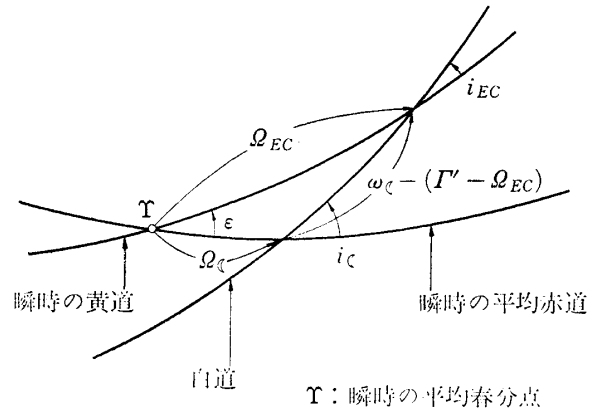


図 2 月の軌道要素

$$\begin{aligned}
 \cos i_q &= \cos i_{EC} \cos \varepsilon - \sin i_{EC} \sin \varepsilon \cos \Omega_{EC} \\
 \sin \Omega_q &= \frac{\sin i_{EC} \sin \Omega_{EC}}{\sin i_q} \\
 \sin \{\omega_q - (\Gamma' - \Omega_{EC})\} &= \frac{\sin \varepsilon \sin \Omega_{EC}}{\sin i_q} \quad (8.3)
 \end{aligned}$$

そしてこれらの式から  $i_q$ ,  $\Omega_q$ ,  $\omega_q$  などが求められる。ここで以上に示した諸量から次のような変化率を求めうる。

$$\begin{aligned}
 \frac{d\varepsilon}{dT} &= -0''.0130125 - 0''.00000328 T + 0''.000001509 T^2 \\
 \frac{d\Gamma}{dT} &= 1^\circ 71' 19.18 + 0''.000090 T + 0''.000009 T^2 \\
 \frac{dg}{dT} &= 35999^\circ 04' 97.5 - 0''.000300 T - 0''.000009 T^2 \\
 \frac{d\Gamma'}{dT} &= 4069^\circ 03' 40.3 - 0''.02066 T - 0''.000003 T^2 \\
 \frac{d\Omega_{EC}}{dT} &= -1934^\circ 14' 20.1 + 0''.00416 T + 0''.00001 T^2 \\
 \frac{di_q}{dT} &= \left\{ \frac{d\varepsilon}{dT} (\cos i_{EC} \sin \varepsilon + \sin i_{EC} \cos \varepsilon \cos \Omega_{EC}) - \frac{d\Omega_{EC}}{dT} \sin i_{EC} \sin \varepsilon \sin \Omega_{EC} \right\} / \sin i_q \\
 \frac{d\Omega_q}{dT} &= \frac{\sin i_{EC}}{\sin i_q \cos \Omega_q} \left( \frac{d\Omega_{EC}}{dT} \cos \Omega_{EC} - \frac{\cos i_q \sin \Omega_{EC}}{\sin i_q} \frac{di_q}{dT} \right) \\
 \frac{d\omega_q}{dT} &= \frac{d\Gamma'}{dT} - \frac{d\Omega_{EC}}{dT} + \frac{1}{\sin i_q \cos \{\omega_q - (\Gamma' - \Omega_{EC})\}} \\
 &\quad \times \left( \frac{d\varepsilon}{dT} \cos \varepsilon \sin \Omega_{EC} + \frac{d\Omega_{EC}}{dT} \sin \varepsilon \cos \Omega_{EC} - \frac{\sin \varepsilon \cos i_q \sin \Omega_{EC}}{\sin i_q} \frac{di_q}{dT} \right) \\
 \frac{dM_q}{dT} &= 477198^\circ 849.11 + 0''.01840 T + 0''.000003 T^2 \quad (8.4)
 \end{aligned}$$

以上の諸式によって  $t_j$  から  $t_{j+1}$  にいたるまでの間において近似的に次式が成立するとみなすことができる。

$$\left. \begin{aligned}
 a_s &= a_{sj} = a_\odot \\
 e_s &= e_{sj} = e_{\odot j} \\
 i_s &= i_{sj} = i_j \\
 \Omega_s &= \Omega_{sj} = \Omega_\odot \\
 \omega_s &= \omega_{sj} + \dot{\omega}_{sj}(t - t_j) \\
 &= \Gamma_j + \left\{ \frac{1}{36525} \left( \frac{d\Gamma}{dT} \right)_j \right\} (t - t_j) \\
 M_s &= M_{sj} + n_{sj}(t - t_j) \\
 &= g_j + \left\{ \frac{1}{36525} \left( \frac{dg}{dT} \right)_j \right\} (t - t_j) \\
 a_L &= a_{Lj} = a_\oplus \\
 e_L &= e_{Lj} = e_\oplus \\
 i_L &= i_{Lj} = i_{\oplus j} \\
 \Omega_L &= \Omega_{Lj} + \dot{\Omega}_{Lj}(t - t_j) \\
 &= \Omega_{\oplus j} + \left\{ \frac{1}{36525} \left( \frac{d\Omega_\oplus}{dT} \right)_j \right\} (t - t_j) \\
 \omega_L &= \omega_{Lj} + \dot{\omega}_{Lj}(t - t_j) \\
 &= \omega_{\oplus j} + \left\{ \frac{1}{36525} \left( \frac{d\omega_\oplus}{dT} \right)_j \right\} (t - t_j) \\
 M_L &= M_{Lj} + n_{Lj}(t - t_j) \\
 &= M_{\oplus j} + \left\{ \frac{1}{36525} \left( \frac{dM_\oplus}{dT} \right)_j \right\} (t - t_j)
 \end{aligned} \right\} \quad (8.5)$$

ここに  $t$  は平均太陽日を単位として表わされている。

## 9. 静止衛星の運動の計算

以上の計算式によって静止衛星の運動の計算を行うことにする。ここで長期間にわたっての運動を考えると、摂動としてはその主要部分を占める (6.1.2) と (6.2.2) の両式によって与えられる長年および長周期摂動のみを求めることにする。この場合の  $l$ ,

$m, p, h, q, j$  の値は表1に示されている。それから harmonics の四次までをとって計算をする際の式が第7章に与えられてはいるが、ここでは省略して二次のもののみをとることにし、また  $G_{l,h,j}(e_D)$  としては定数項のみに限定をした。さらに静止衛星においては  $e$  が小であるから以下の計算において表われる  $H_{l,p,q}$  および  $\frac{dH_{l,p,q}(e)}{de}$  については  $e$  の二次の項までのみをとることにする。このとき  $t_N$  における軌道要素は (6.4.3) によって与えられる。

なお  $Gm_D$  は次式によって計算される。

$$Gm_D = GM_e \frac{m_D}{M_e}$$

次に計算に用いられる定数を以下のようにとる。<sup>16)</sup>

$$GM_e = 398603 \times 10^9 \frac{m^3}{sec^2}$$

$$\frac{m_s}{M_e} = 332958$$

$$\frac{m_L}{M_e} = \frac{1}{81.30}$$

ここで日本時の1973年1月1日の正午を epoch  $t = t_{ep} = t_1 = 0$  平均太陽日とする。このとき

$$T_1 = \frac{26663.625}{36525}$$

となる。また epoch における  $n$  の値を

$$n_1 = \frac{2\pi}{D_s}$$

とする。ここに  $D_s$  は1平均恒星日であり、次の値をとる。<sup>17)</sup>

$$D_s = 0.997269566371 \text{ 平均太陽日} \\ \approx 23^h 56^m 04^s.09054$$

この  $n_1$  を用いて軌道の半長軸を求めれば

$$a_1 = 42164.260 \text{ km}$$

となる。この  $a_1$  と共に epoch における他の軌道要素の値を表5に示すようにとる。

次に  $\delta t_j$  を1平均太陽日とし、 $\Delta t$  を4年にして摂動の計算を行なった。

表5 epoch における軌道要素の値

		(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)
$a_1$	km	42164.26	42164.26	42164.26	42164.26	42164.26	42164.26	42164.26	42164.26
$e_1$		0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
$i_1$	deg	1	1	1	1	2	2	2	2
$\Omega_1$	deg	0	120	240	265	0	120	240	265
$\omega_1$	deg	10	10	10	10	10	10	10	10
$\chi_1^*$	deg	0	0	0	0	0	0	0	0

このようにして表5の各場合についての軌道要素の変化が求められるが、その結果を図3.1から図7.8までに示す。

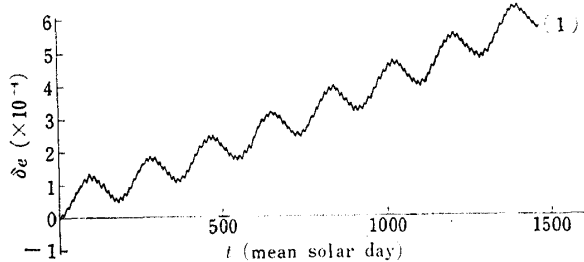


図 3.1  $t$  と  $\delta e$  との関係

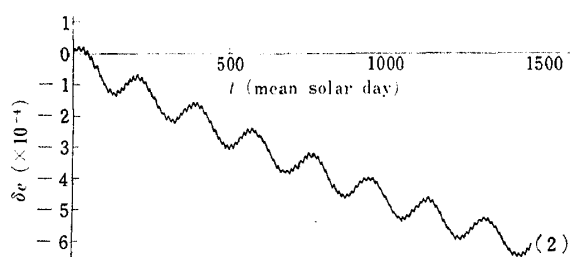


図 3.2  $t$  と  $\delta e$  との関係

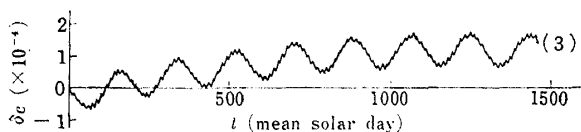


図 3.3  $t$  と  $\delta e$  との関係

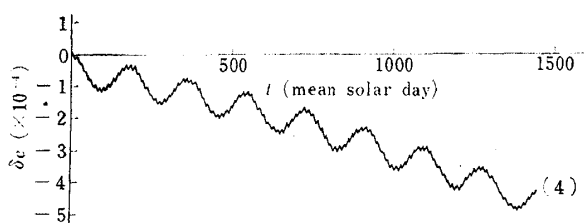


図 3.4  $t$  と  $\delta e$  との関係

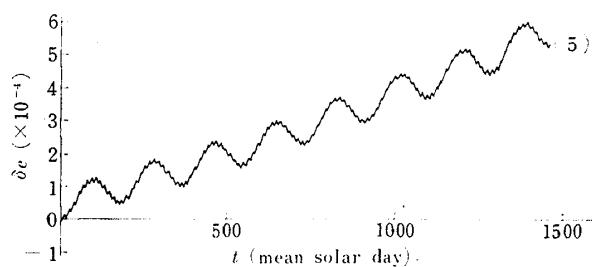


図 3.5  $t$  と  $\delta e$  との関係

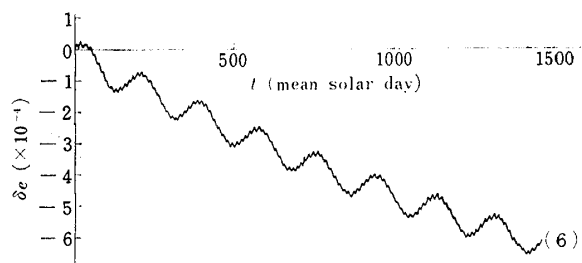


図 3.6  $t$  と  $\delta e$  との関係

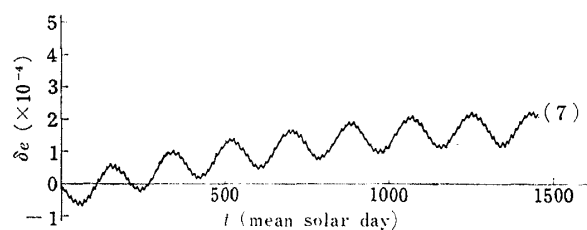


図 3.7  $t$  と  $\delta e$  との関係

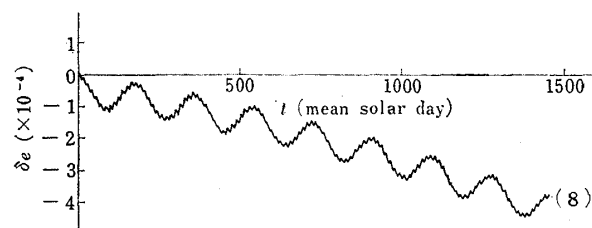


図 3.8  $t$  と  $\delta e$  との関係

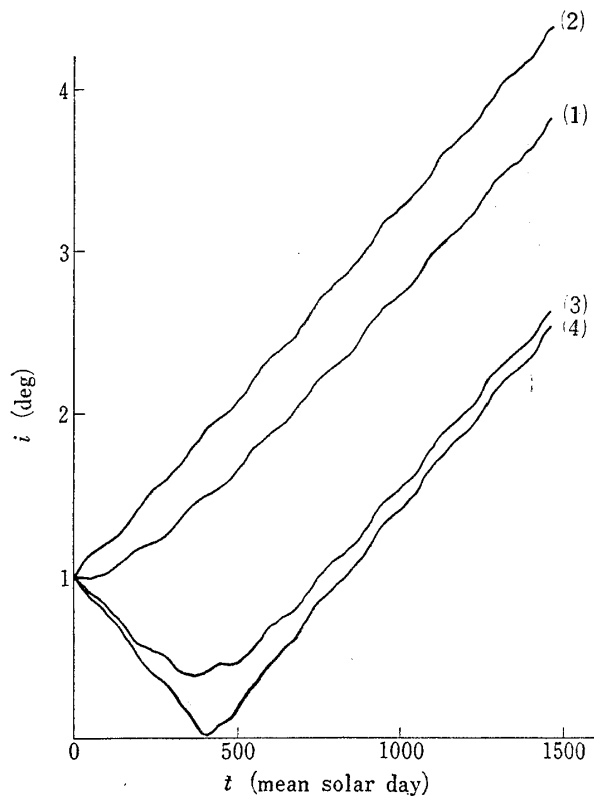


図 4.1  $t$  と  $i$  との関係

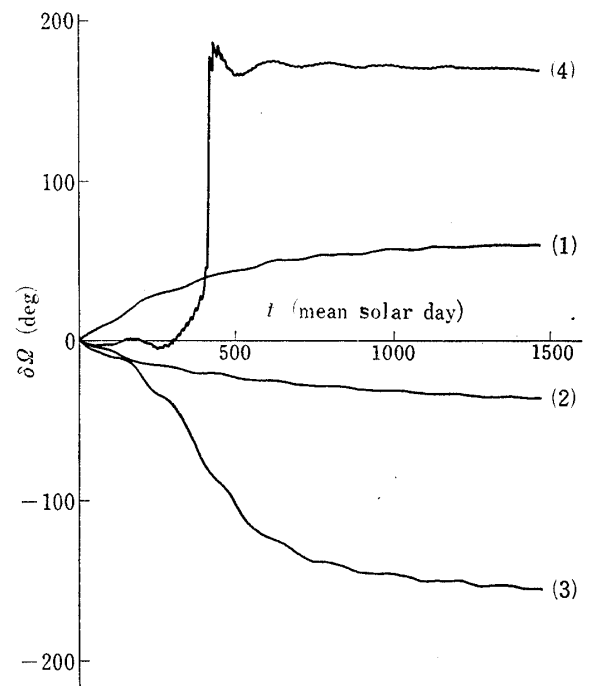


図 5.1  $t$  と  $\delta Q$  との関係

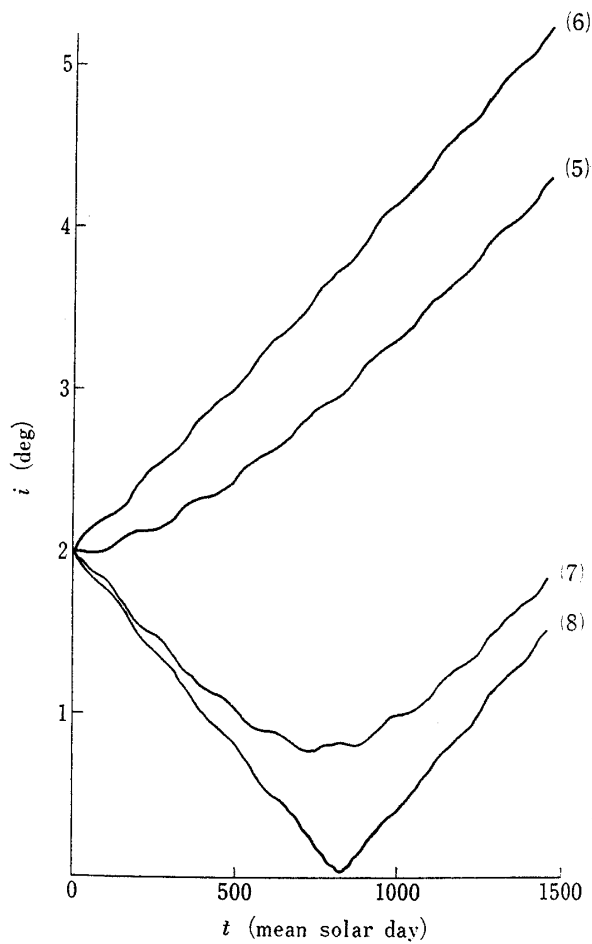


図 4.2  $t$  と  $i$  との関係

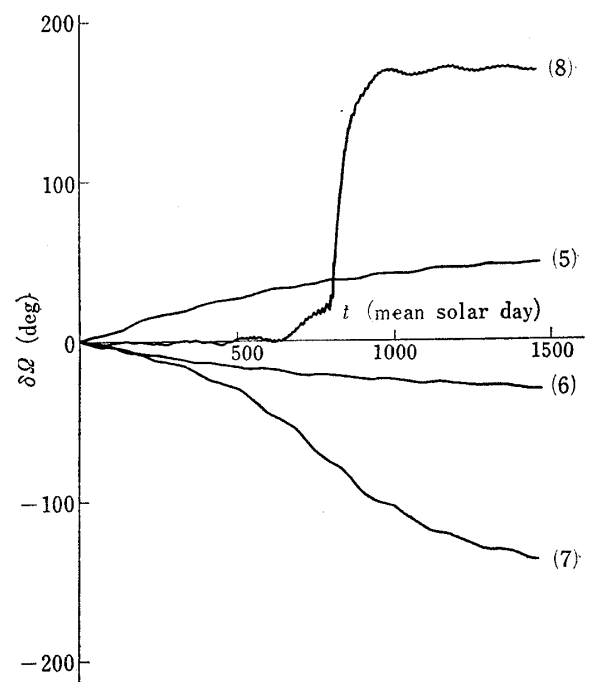
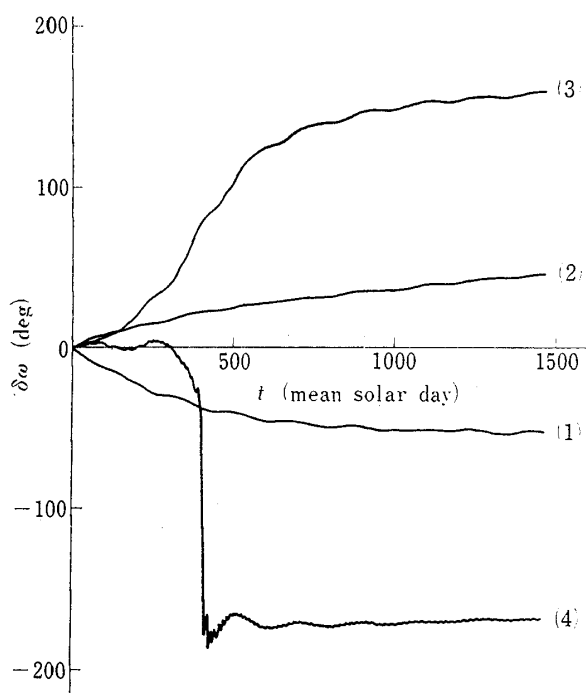
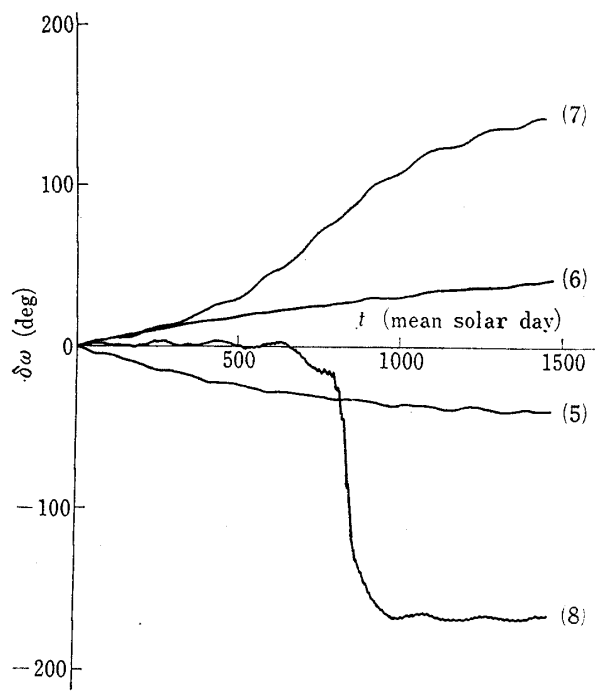
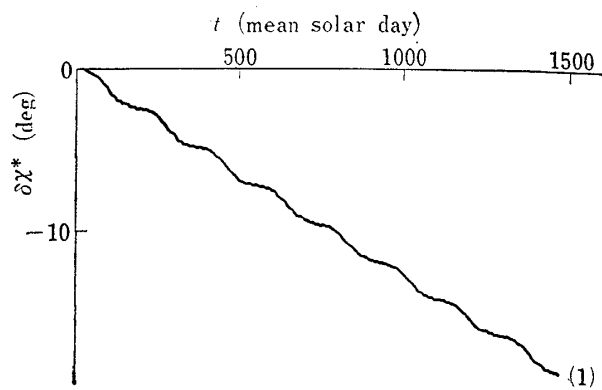
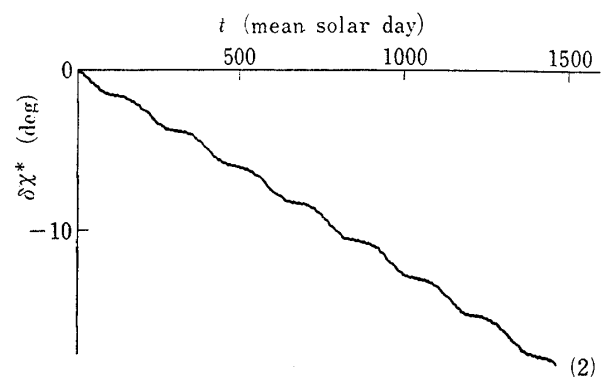
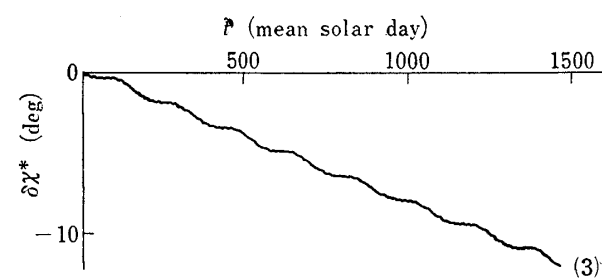
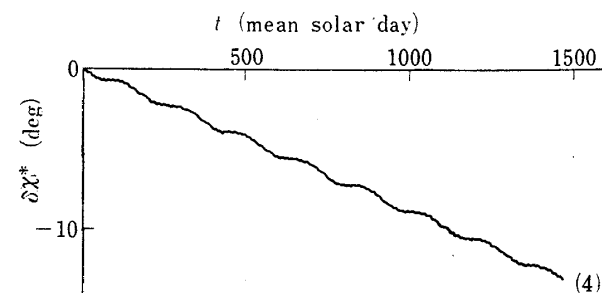
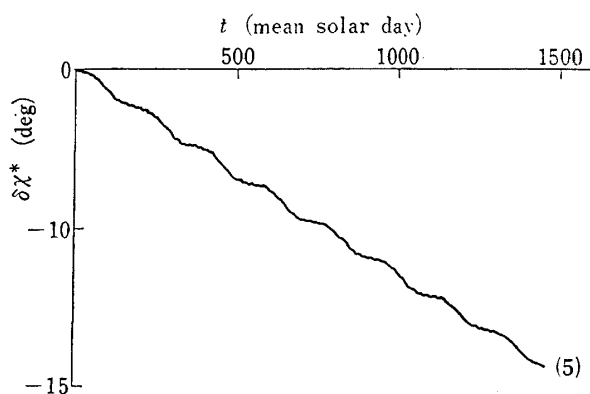
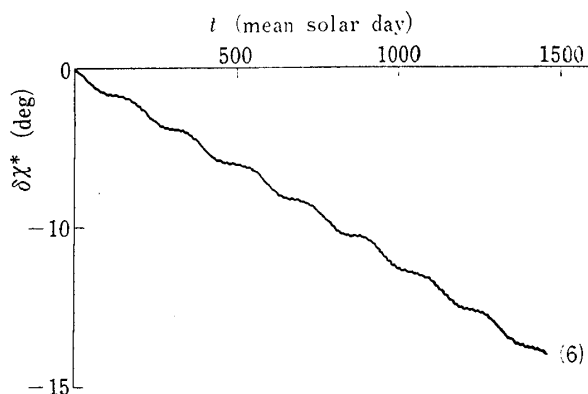
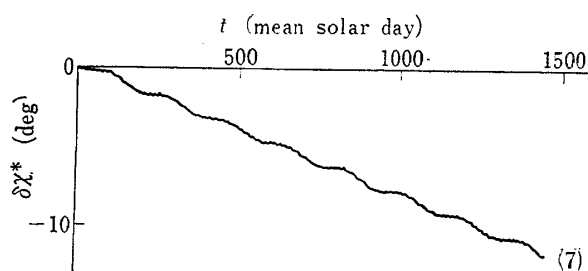
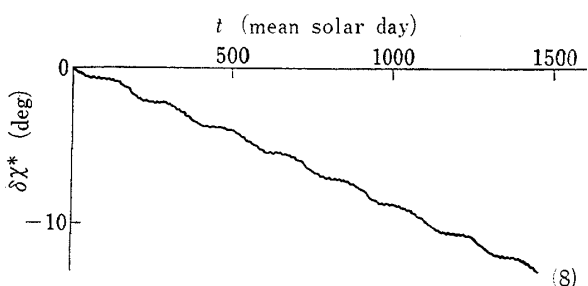


図 5.2  $t$  と  $\delta Q$  との関係

図 6.1  $t$  と  $\delta\omega$  との関係図 6.2  $t$  と  $\delta\omega$  との関係図 7.1  $t$  と  $\delta\chi^*$  との関係図 7.2  $t$  と  $\delta\chi^*$  との関係図 7.3  $t$  と  $\delta\chi^*$  との関係図 7.4  $t$  と  $\delta\chi^*$  との関係



図 7.5  $t$  と  $\delta\chi^*$  との関係図 7.6  $t$  と  $\delta\chi^*$  との関係図 7.7  $t$  と  $\delta\chi^*$  との関係図 7.8  $t$  と  $\delta\chi^*$  との関係

## 10. 考 察

第8章までの理論によれば摂動関数の harmonics において、運動の決定に対する所要の精度に対応する次数までをとって摂動の計算を実行することが可能となった。

次に以上の理論に基づいて、表5の(1)から(8)までの場合に静止衛星に関して行なわれた第9章における計算についてみれば、長年および長周期摂動のみを取り、短周期摂動については考えていないので  $\alpha$  は変化しない。そしてその他の軌道要素の変化が図によって与えられている。

まず図3.1から図3.8までは(1)から(8)までの場合における  $\delta e$  の時間的変化を示し、これらはどれも極めて微小である。ここで長年摂動の変化率は  $\Omega_1$  によって多少の差を生じている。また約13.5日と約180日の周期の長周期摂動がみられるが、これらは摂動関数の展開項における三角関数の引数内にある  $2M_L$  と  $2M_S$  に基づくものである。

図4.1と図4.2はそれぞれ(1)から(4)までおよび(5)から(8)までの場合における  $i$  の時間的変化を示し、これらの摂動はどれも大である。ここで各場合の長年的な変化率をみれば、epochの直後数百日にわたっては、その大きさに差があり、またその符号は(1), (2), (5)および(6)の場合には正であり、他の場合には負となっている。そしてその後は何れの場合においても大差はない。このことは  $\delta i$  を表わす(6.1.2)の第三式右辺と(6.2.2)の第三式右辺の各項の中で最大である(6.2.2)の第三式右辺の月の引力による場合における  $(l, m, p, h, q, j)$  が  $(2, 1, 1, 1, 0, 0)$  となる項の変化率によって説明される。すなわち  $i$  の変化率は大体においてこの項の変化率に等しいと考えられる。そしてこの項の変化率は  $\sin(\Omega - \Omega_L)$  を因数として持っている。ここでこの因数は(1)から(8)までの各場合において epoch の直後数百日にわたっては大きさに差があり、また(1), (2), (5)および(6)の場合に正となり、他の場合には負となる。そしてその後において(3), (4), (7)および(8)の場合にのみ後で図5に関して指摘するように  $\Omega$  が大きく変化し他の場合には変化は小であり、この  $\Omega$  の値を用いれば各場合においてこの因数の大きさはほぼ等しくまたその符号はすべて正となる。したがって  $i$  の変化率の様相が説明されたことになる。なお図において約180日の周期の長周期摂動がみられる。

以上の所論から、静止衛星の軌道面を赤道面附近に

長く保つための条件は  $i_1$  を  $1^\circ$  から  $2^\circ$  とし, epoch において  $\sin(\Omega - \Omega_L)$  が約  $-1$  となるように, つまり  $\Omega - \Omega_L$  を約  $270^\circ$  とすることである。例えば epoch が 1973 年の初めの場合には  $\Omega_{L1}$  は  $-11.5^\circ$  となるので  $\Omega_1$  を  $258.5^\circ$  位にすればよいこととなる。ここで表 5 の各場合とそれ以外の場合をも含む多くの場合についての摂動の計算結果を比較してみれば  $\Omega_1$  を  $265^\circ$  にすればよいことがわかる。このようにすれば  $i$  は epoch の直後において次第に減少して  $0^\circ$  附近に達し, それから増大し, 軌道面は数百日にわたって赤道面附近に留まることになる。

図 5.1 と図 5.2 はそれぞれ (1) から (4) までおよび (5) から (8) までの場合における  $\delta\Omega$  の時間的変化を示し, 何れも摂動は大であり, 特に (3), (4), (7) および (8) の場合には  $i$  が  $0^\circ$  に接近する際に急激な変化をしている。なお約 13.5 日と約 180 日の周期の長周期摂動がみられる。

図 4 と図 5 からわかるように  $i$  と  $\Omega$  は互に密接に関連して変化をしている。そこで  $i$  と  $\Omega$  の代りにこの両方の関数を変数にとることが考えられる。古在教授は  $\sin i \cos \Omega$  と  $\sin i \sin \Omega$  を変数とし, harmonics を展開した諸項の内の主要なものをとり,  $i$  と  $\Omega$  の極めて長周期の摂動を解析的に論じている。そしてこの結果から静止衛星を軌道面附近に長く保つためには  $\Omega_1$  を  $270^\circ$  にすればよいとしている。<sup>18)</sup>

図 6.1 と図 6.2 はそれぞれ (1) から (4) までおよび (5) から (8) までの場合における  $\delta\omega$  の時間的変化を示している。ここで  $\delta\omega$  は大体において  $-\delta\Omega$  に等しい。つまり昇交点の位置が大きく変動しても近地点の *Oxyz* 座標系における位置はあまり変わらないことを示している。

図 7.1 から図 7.8 まではそれぞれ (1) から (8) までの場合における  $\delta\chi^*$  の時間的変化を示し, 何れも摂動は大である。そして長年摂動ならびに約 13.5 日と約 180 日の周期をもつ長周期摂動がみられる。

最後に力学系について考察する。第 2 章でとった力学系においては人工衛星に対する potential は (2.1) 式ようになる。しかし実際には (2.1) にさらに zonal harmonics, non-zonal harmonics, 太陽輻射圧に基づく力の potential などをも加える必要がある。そしてこのような potential の下での人工衛星の運動は, 第 8 章までの理論から出された要素の変化に (2.1) 以外の potential の各項による要素の変化および相互作用による要素の変化を加えたものを求めることによって決定される。ここで相互作用による要素の変化は一

般的にはあまり大きくないが, 相当の大きさになる場合もありうる。しかしこのような場合にも静止衛星の軌道面を赤道面附近に長期間にわたって保つための条件にはほとんど変化はない。

## 11. 結 論

月と太陽の引力の作用下にある地球の人工衛星の運動を決定するために運動方程式として Lagrange's planetary equations を用い, 引力の potential を表わす harmonics を一般項で表示した理論をたてた。

この理論によって, 第一階の摂動を求め, その長年および長周期摂動に基づいて運動の見とおしをたてることが可能である。

また静止衛星の高度までの人工衛星を対象として harmonics の四次までをとった場合の計算式を示した。

なお静止衛星の場合には, その軌道面を赤道面附近に長期間にわたって保つための条件を決定しうる。例えば epoch を 1973 年の初めとすれば, epoch における昇交点経度を  $265^\circ$  にすればよい。

本研究を行なうに当たって東京大学の古在由秀教授および堀源一郎教授からいろいろの教示を受けた。ここに謝意を表明する。

## 引 用 文 献

- 1) 武内澄夫・松島弘一: 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究, 航技研報告, TR-255, 1971.
- 2) 武内澄夫: 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究——運動が長期間にわたる場合, 航技研報告, TR-320, 1973.
- 3) R.H. Frick and T.B. Garber: Perturbations of a Synchronous Satellite, R-399-NASA, 1962.
- 4) Y. Kozai: On the Effects of the Sun and the Moon upon the Motion of a Close Earth Satellite, Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report No. 22, 1959.
- 5) M.M. Moe: Solar-Lunar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite, A.R.S.J., 30, 1960, 485-487.
- 6) P. Musen, A. Bailie and E. Upton: Development of the Lunar and Solar Perturbations in the Motion of an Artificial Satellite, NASA TN D-494, 1961.
- 7) G.E. Cook: Luni-Solar Perturbations of the Orbit of an Earth Satellite, Geophysical J., 6, 1962, 3, 271-291.
- 8) A.V. Egorova: Motion of an Artificial Earth Satellite under the Influence of the Sun and

- Moon, AIAA J., 1, 1963, 2, 522-526.
- 9) M.L. Lidov: Evolution of the Orbits of Artificial Satellites of Planets as Affected by Gravitational Perturbation from External Bodies; AIAA J., 1, 1963, 8, 1985-2002.
- 10) J.P. Murphy and T.L. Felsentregger; Analysis of Lunar and Solar Effects on the Motion of Close Earth Satellites, NASA TN D-3559, 1966.
- 11) Y. Kozai: Lunisolar Perturbations with Short Periods, Smithsonian Astrophysical Observatory Special Report No. 235, 1966.
- 12) W.M. Smart: Celestial Mechanics, 1953, Longmans.
- 13) W.M. Kaula: Development of the Lunar and Solar Disturbing Functions for a Close Satellite, Astronomical J., 67, 1962, 5, 300-303.
- 14) F. Tisserand: Traité de Mécanique Céleste, Tome 1, 1889, Gauthier-villars.
- 15) A. Cayley: Tables of the Developments of Functions in the Theory of Elliptic Motion, Mem. Roy. Astron. Soc., 29, 1861, 191-306.
- 16) 海上保安庁水路部: 昭和48年天体位置表, 海上保安庁.
- 17) Nautical Almanac Offices: Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, 1961, Her Majesty's Stationary Office.
- 18) 古在由秀: 人工衛星の軌道, 1972, 東京大学東京天文台天体掃索部資料.

### 付録 記号

使用した主な記号を以下に示す。

- $a$ : 軌道の半長軸
- $a_L$ : 月の軌道の半長軸
- $a_S$ : 太陽の軌道の半長軸
- $a_\zeta$ : 月の軌道の半長軸
- $a_\odot$ : 太陽の軌道の半長軸
- $D_S$ : 1 平均恒星日
- $El$ : 軌道要素
- $e$ : 軌道の離心率
- $e_L$ : 月の軌道の離心率
- $e_S$ : 太陽の軌道の離心率
- $e_\zeta$ : 月の軌道の離心率
- $e_\odot$ : 太陽の軌道の離心率
- $F_{l,m,p}$ : 傾斜角関数
- $F_{l,m,h}$ : 傾斜角関数
- $G$ : 万有引力の定数
- $G_{l,h,j}$ : 離心率関数
- $g$ : 太陽の平均近点離角
- $H_{l,p,q}$ : 離心率関数

- $i$ : 赤道面に対する軌道面の傾斜角
- $i_{EC}$ : 黄道面に対する月の軌道面の傾斜角
- $i_L$ : 赤道面に対する月の軌道面の傾斜角
- $i_S$ : 赤道面に対する太陽の軌道面の傾斜角
- $i_\zeta$ : 瞬時の平均赤道に基準した, 月の軌道面の傾斜角
- $M$ : 平均近点離角
- $M_e$ : 地球の質量
- $M_L$ : 月の平均近点離角
- $M_S$ : 太陽の平均近点離角
- $M_\zeta$ : 月の平均近点離角
- $m_D$ : 月あるいは太陽の質量
- $n$ : 平均運動
- $n_L$ : 月の平均運動
- $n_S$ : 太陽の平均運動
- $0$ : 地心
- $R$ : 摂動関数
- $R_i$ :  $R$  の harmonic term
- $R_{l,m,p,h,q,j}$ :  $R_i$  を構成する各項
- $r$ : 地心距離
- $S_{l,m,p,h,q,j}$ :  $R_{l,m,p,h,q,j}$  の三角関数で表示された関数
- $T$ : 暦表時の1900年1月0.5日からの時間経過を36525 暦表日を単位としてはかった数値
- $T_{l,m,p,h,q,j}$ :  $S_{l,m,p,h,q,j}$  の引数
- $t$ : 平均太陽時あるいは常用時
- $U$ : 単位質量の人工衛星に対する質量分布が球状とみなした地球の重力ならびに月と太陽の引力の potential
- $x, y, z$ : 直交座標
- $\Gamma$ : 瞬時の平均春分点に基準した, 太陽の近地点の平均黄経
- $\Gamma'$ : 瞬時の平均春分点に基準した, 月の近地点の平均黄経
- $\epsilon$ : 平均黄道傾角
- $\theta$ : 地心と人工衛星を結ぶ直線が地心と月あるいは太陽の重心を結ぶ直線に対してなす角
- $k_m$ :  $m=0$  のとき1,  $m \neq 0$  のとき2となる定数
- $\mu$ : 地心重力定数
- $\chi$ : epoch における平均近点離角
- $\chi^*$ : modified mean anomaly at epoch
- $\Omega$ : 昇交点の赤経

$\Omega_{EO}$ : 瞬時の平均春分点に基準した, 月の昇  
 交点の平均黄経  
 $\Omega_L$ : 月の昇交点の赤経  
 $\Omega_S$ : 太陽の昇交点の赤経  
 $\Omega_d$ : 瞬時の平均春分点と平均赤道に基準し  
 た, 月の昇交点の赤経  
 $\Omega_\odot$ : 太陽の昇交点の赤経  
 $\omega$ : 昇交点から近地点までの運動の向きに  
 はかった角距離  
 $\omega_L$ : 月の昇交点から近地点までの運動の向  
 きにはかった角距離  
 $\omega_S$ : 太陽の昇交点から近地点までの運動の  
 向きにはかった角距離  
 $\omega_d$ : 瞬時の平均赤道に基準した, 月の昇交  
 点から近地点までの運動の向きにはか

った角距離

(: 瞬時の平均春分点に基準した, 月の平  
 均黄経

添字

$D$ : 月あるいは太陽に関する量を示す。  
 $ep$ : epoch における値を示す。  
 $j$ :  $t_j$  における値を示す。  
 $L$ : 月に関する量を示す。  
 $l$ : 摂動関数の長周期項による要素の変化  
 を示す。  
 $r$ : 摂動関数の長年および長周期項による  
 要素の変化を示す。  
 $S$ : 太陽に関する量を示す。  
 $sp$ : 摂動関数の短周期項による要素の変化  
 を示す。

TR-312	最適制御理論を応用したフレア制御系について Simulation Study on Flare Control System by Optimization Theory	1973年 3 月	渡 辺 顯, 堀 川 勇 壮
TR-313	BTE翼型の遷音速二次元翼列についての一実験 Experimental Investigation of Two-Dimensional Cascade Performances with Blunt Trailing Edge Blade Sections at Transonic Inlet Mach Number Range	1973年 3 月	坂 口 一, 近 藤 博 高 森 晋, 岩 下 敬 吾
TR-314	低アスペクト比後退角平板翼の遷音速フラッタ特性におよぼす翼端付加質量の重心位置の影響 Some Effects of Center of Gravity Locations of Added Mass on Transonic Flutter Characteristics of Low Aspect Ratio and Sweptback Thin Cantilever Wing	1973年 3 月	中 井 暎 一, 森 田 甫 之 菊 池 孝 男, 東 久 保 正 年 高 橋 実
TR-315T	Natural Vibration and Flutter of Cylindrically Curved Panels	April 1973	Yuji MATSUZAKI
TR-316	推力中断型固体ロケット用プロペラントの組成と圧力指数の関係 Relation between the Compositional Variables and the Pressure Exponent of Controllable Solid Rocket Propellants	1973年 5 月	五 代 富 文, 清 水 盛 生 伊 藤 克 弥, 西 村 久 男 種 村 利 春, 藤 原 勉
TR-317	ファンエンジンの性能に関する考察 Some Considerations on the Performance of the Fan Jet Engine	1973年 5 月	鳥 崎 忠 雄, 森 田 光 男 関 根 静 雄
TR-318T	A Convergence Theorem of Nonlinear Semigroups and its Application to First Order Quasilinear Equations	June 1973	Tadayasu TAKAHASHI
TR-319	フライングテストベッド全機作動実験 一予備・第一次・第二次実験一 Ground Operation Tests of Flying Test Bed for VTOL Aircraft at National Aerospace Laboratory	1973年 6 月	滝 澤 直 人, 田 辺 義 一 渋谷 昭 義, 小 川 敏 雄 藤 枝 郭 俊, 甲 斐 忠 夫 宮 本 義 人, 鳥 崎 忠 雄 小 野 幸 一
TR-320	地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究 一運動が長期間にわたる場合一 The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field—in the Case of the Long Maneuver of Free Orbital Motion	1973年 6 月	武 内 澄 夫
TR-321	空冷軸流タービンの空力性能に関する研究 (第一報 空冷タービンの設計および全体性能に関する実験的研究) Aerodynamic Investigation of an Air-Cooled Axial-Flow Turbine. (Part 1. Turbine Design and Overall Stage Performance without Supply of Cooling Air)	1973年12月	山 本 孝 正, 高 原 北 雄 能 瀬 弘 幸, 井 上 重 雄 臼 井 弘, 三 村 富 嗣 雄
TR-322	IC演算増幅器を利用した乱流頻度計 Application of Integrated Circuit Operational Amplifiers on Turbulence Intermittency Meters	1973年 6 月	綿 貫 忠 晴, 佐 藤 淳 造

## 航空宇宙技術研究所報告 323 号

昭和 48 年 7 月 発行

発 行 所 航 空 宇 宙 技 術 研 究 所  
東 京 都 調 布 市 深 大 寺 町 1880  
電 話 武 蔵 野 三 鷹 (0422) 47-5911 (大 代 表) 電 182  
印 刷 所 有 限 会 社 啓 文 堂 松 本 印 刷  
東 京 都 文 京 区 水 道 2-7-5

**Printed in Japan**