

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-328

連 続 板 の 振 動

林 洋 一 ・ 川 井 忠 彦

1973 年 7 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|---------|---|------------|---|
| TR-302 | Kalman-Bucy フィルターによる誘導誤差の推定
Estimation of Guidance Errors by Kalman-Bucy Filtering Technique | 1972年10月 | 村田 正 秋 |
| TR-303 | ジンバルエンジン駆動用油圧制御系に適したIDPF サーボバルブの研究
Studies of IDPF Servovalve Appropriate for Gimballed Engine Positioning Hydraulic Control Systems | 1972年11月 | 畑 山 茂 樹 |
| TR-304 | ドラッグカップ型ジャイロモータの同期化制御の研究
Study on a Synchronizing Control of a Drag-Cup Gyro Motor | 1972年11月 | 山 田 博 |
| TR-305 | オイラー角表示による座標変換のアルゴリズム
Coordinate Transformation Algorithm by the Eulerian Angels Representation | 1972年11月 | 狼 嘉 彰 |
| TR-306 | フライングテストベッド用付帯設備の計画
System Design of Facilities for VTOL Flying Test Bed at National Aerospace Laboratory | 1972年11月 | 滝澤直人, 洪谷昭義
小川敏雄, 藤枝郭
甲斐忠夫, 官本義
田辺義一, 竹内和
小野幸一, 人之 |
| TR-307 | プラズマ風洞アーク加熱器, ノズル流およびノズル噴流に対する諸考察
Some Characteristics of the Arc-Heater Nozzle Flow, and the Underexpanded Jet in NAL 60 kW Plasma Wind Tunnel | 1972年12月 | 松崎利一, 平林則明 |
| TR-308 | 固体ロケット推進薬の超音波探傷
On the Ultrasonic Inspection in Solid Propellant Rocket Motors | 1972年12月 | 清水盛生, 野口義男
種村利春 |
| TR-309 | 複数翼をすぎる二次元, 非圧縮ポテンシャル流れの緩和法による計算
A Numerical Calculation of a Two-dimensional Incompressible Potential flow Around a Set of Airfoils by Applying the Relaxation Method | 1973年1月 | 中村正義 |
| TR-310 | 圧縮流体の Navier-Stokes 方程式に対する数種の差分法とその評価
An Evaluation of Several Difference Methods for Compressible Navier-Stokes Equations | 1973年3月 | 石黒登美子 |
| TR-311 | 界面最大引張り応力基準での固体推進薬の降伏曲面 (三次元) について
On a Failure Criterion of a Solid Propellant under Tri-axial Stress Fields | 1973年3月 | 遠藤修司, 河田幸三 |
| TR-312 | 最適制御理論を応用したフレア制御系について
Simulation Study on Flare Control System by Optimization Theory | 1973年3月 | 渡辺 顯, 堀川勇壮 |
| TR-313 | BTE 翼型の遷音速二次元翼列についての一実験
Experimental Investigation of Two-dimensional Cascade Performances with Blunt Trailing Edge Blade Sections at Transonic Inlet Mach Number Range | 1973年3月 | 坂口 一, 近藤 博
高森 晋, 岩下敬吾 |
| TR-314 | 低アスペクト比後退角平板翼の遷音速フラッタ特性におよぼす翼端付加質量の重心位置の影響
Some Effects of Center of Gravity Locations of Added Mass on Transonic Flutter Characteristics of Low Aspect Ratio and Sweptback Thin Cantilever Wing | 1973年3月 | 中井暎一, 森田甫之
菊池孝男, 東久保正年
高橋 実 |
| TR-315T | Natural Vibration and Flutter of Cylindrically Curved Panels | Apr., 1973 | Yuji MATSUZAKI |

連続板の振動*

林 洋 一**
川 井 忠 彦***

Natural Frequencies of Continuous Plate

By Yoichi HAYASHI and Tadahiko KAWAI

A practical method for the vibration analysis of continuous plates which have various boundary end conditions and internal supports, is proposed in this paper.

The analysis is carried out by means of the Rayleigh-Ritz procedure with an approximating deflection function $W(x, y)$.

Results of numerical examples show good agreement with experiment.

1. まえがき

航空機構造の中で補強材で囲まれたパネルが局部振動を起こすことは振動実験をおこなった際にしばしば経験してきた⁽¹⁾。そしてこれらの構造物ではパネルと補強材とはリベットで結合されている場合がほとんどであり、パネルの形状は補強材の位置に左右されて定まってくるので、必ずしも短形とは限らなくて一般には任意形状のものが多い。

平板の振動については古来から多くの人々により取扱われており、その解析も種々な境界条件のもとで解かれ組織的にまとめたものもある^{(1),(2)}。しかし中間に支持をもった連続板の振動についての研究はわずかなか見当らないようである⁽³⁾。

Rayleigh-Ritz あるいは Galerkin の方法によって構造物解析をおこなう場合、与えられた構造物のたわみ関数の合理的仮定法について、従来あまり組織的な考察をおこなったものが少ない。

この研究は平板の境界値、固有値問題のエネルギー原理にもとづく一般的解法の考え方を拡張して、任意な形状、任意な境界条件をもった連続板の振動について解析をおこなったもので、実験もあわせておこない解法の実用性を吟味したものである。

また例題としてたわみ関数 W が x だけの関数として、一次元の問題として扱った連続はりの振動解析についても示した。

2. 記号の説明

- x, y, z : 直角座標系
- a : 短形板の x 軸上の長さ
- b : 短形板の y 軸上の長さ
- D : 板の曲げ剛性 $= E_p h^3 / 12(1 - \nu^2)$
- E_p : 板の縦弾性係数
- ν : ポアソン比
- ρ_p : 板の密度
- h : 板の厚み
- p : 角振動数
- U_T : 板のひずみによるエネルギー
- U_{KT} : 板の慣性によるエネルギー
- II : 全系のポテンシャルエネルギー
- w : $w = w(x, y)$ 板の z 方向のたわみ
- G : $G = G(x, y)$
- F : $F = F(x, y)$
- λ_p : 板の振動固有値 $\lambda_p^2 = \rho h p^2 / g D$
- λ_B : はりの振動固有値 $\lambda_B^2 = \rho A p^2 / EI$

- c_1, c_2, c_3 :
 - d_1, d_2, d_3 :
 - e_1, e_2, e_3 :
- 四辺形の周辺の直線を表わす式の係数
- k_s, θ_s : s 番目の中間支持を表わす式の係数

* 昭和 48 年 6 月 4 日受付

** 機体第二部

*** 東京大学生産技術研究所

- s : 中間支持の番号
- $\alpha, \beta, \gamma, \delta$: (32)式で定義される指数
- A : はりの断面積
- θ : 中間支持が x 軸となす角度

3. 解 析

平板が微小たわみ自由振動を起こした場合、全系のポテンシャルエネルギーを π とすると、ポテンシャルエネルギーの停留原理により平衡状態の実現するのは

$$\delta\pi = 0 \quad (1)$$

の時に限る。曲げ振動における平板のひずみエネルギーおよび運動エネルギーは、今板厚を一定とし曲げ剛性も同様であるとすると各々 (2), (3) 式で表わされるものになる。

$$U_T = \frac{1}{2} D \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \quad (2)$$

$$U_{KT} = \frac{1}{2} \rho h p^2 \iint w^2 dx dy \quad (3)$$

したがって

$$\begin{aligned} \Pi &= U_T - U_{KT} \\ &= \frac{D}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + 2\nu \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \right. \\ &\quad \left. + 2(1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \lambda_p^2 w^2 \right] dx dy \quad (4) \end{aligned}$$

ここに

$$\lambda_p^2 = \frac{\gamma h}{g D} p^2$$

となる。

いま図 1 に示す系で、四辺形板とその四辺形板を任意角度 θ で拘束をする中間支持について考える。平板の四辺の境界では固定、単純支持、自由の 3 種類の境

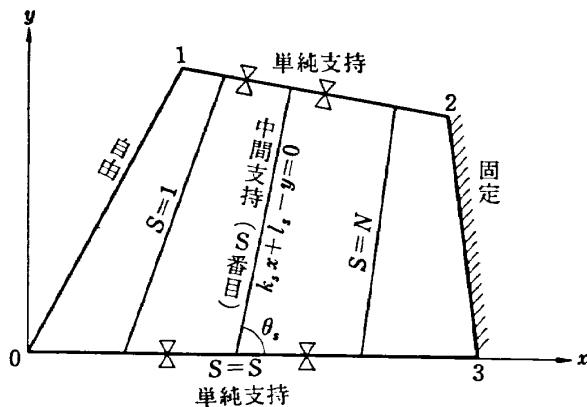


図 1 周辺が任意の境界条件をもつ中間支持のある四辺形板と座標系

界条件が考えられる。ここでおこなう解析では、この 3 種類の境界条件を各辺で別々に任意に選んで組合せたものが可能である。次に中間支持のところの境界条件であるが、ここでは板が紙面に垂直な z 方向の変位すなわちたわみが生じないような拘束だけをもつものである。

変分学から明らかのように、ここでおこなう直接解法による場合は、板のたわみ関数 $w(x, y)$ には束縛条件として幾何学的境界条件のみを入れておけばよいから、上で述べた境界をもつ平板のたわみ関数 $w(x, y)$ は (5) 式に示す形で仮定できる。

$$w(x, y) = F(x, y) \cdot G(x, y) \quad (5)$$

ここに $G(x, y)$ は平板のたわみ関数が満足すべき幾何学的境界条件をみたすようにするために導入されたある定まった関数であり、一般形として (6) 式のようにかきかえることもできるが、その決定法については後で述べることにする。

$$G(x, y) = \sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j \quad (6)$$

関数 $F(x, y)$ は平板のたわみ形 $w(x, y)$ の一般性を保証するために必要な任意の関数で、ここでは (7) 式に示すような x, y についてのべき級数で表わすことにする。

$$F(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} x^m y^n \quad (7)$$

(7) 式を (5) 式に代入すると (8) 式となる。

$$w(x, y) = \sum_m \sum_n a_{mn} \varphi_{mn}(x, y) \quad (8)$$

$$\text{ここに } \varphi_{mn}(x, y) = G(x, y) x^m y^n \quad (9)$$

さて (8) 式から

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \sum_m \sum_n a_{mn} \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial x^2} = \sum_m \sum_n a_{mn} \phi_{mn}^{xx} \quad (10)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \sum_m \sum_n a_{mn} \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial y^2} = \sum_m \sum_n a_{mn} \phi_{mn}^{yy} \quad (11)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = \sum_m \sum_n a_{mn} \frac{\partial^2 \varphi_{mn}}{\partial x \partial y} = \sum_m \sum_n a_{mn} \phi_{mn}^{xy} \quad (12)$$

$$w = \sum_m \sum_n a_{mn} \varphi_{mn} = \sum_m \sum_n a_{mn} \phi_{mn} \quad (13)$$

ここに

$$\begin{aligned} \phi_{mn}^{xx} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} (G(x, y) x^m y^n) \\ &\quad + 2m \frac{\partial}{\partial x} (G(x, y) x^{m-1} y^n) \\ &\quad + m(m-1) G(x, y) x^{m-2} y^n \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi_{mn}^{yy} &= \frac{\partial^2}{\partial y^2} (G(x, y) x^m y^n) \\ &\quad + 2n \frac{\partial}{\partial y} (G(x, y) x^m y^{n-1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & +n(n-1)G(x,y)x^m y^{n-2} \quad (15) \\
 \phi_{mn}^{xy} & = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} G(x,y)x^m y^n \\
 & +n \frac{\partial}{\partial x} (G(x,y)x^m y^{-1}) \\
 & +m \frac{\partial}{\partial y} (G(x,y)x^{m-1} y^n) \\
 & +m, n, G(x,y)x^{m-1} y^{n-1} \quad (16) \\
 \phi_{mn} & = \varphi_{mn} = G(x,y)x^m y^n \quad (17)
 \end{aligned}$$

となる。

ただし ϕ_{mn} の上つき添字 x, y は、 x および y についての偏微分を表わすものとする。

したがって (2), (3) 式は a_{mn} の二次形式として次の (18)~(21) 式のように簡単な形で表わすことができる。

$$U_T = \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s a_{mn} a_{rs} A_{mnrs} \quad (18)$$

ここに

$$\begin{aligned}
 A_{mnrs} & = \iint [2\phi_{mn}^{xx}\phi_{rs}^{xx} + 2\phi_{mn}^{yy}\phi_{rs}^{yy} \\
 & + 2\nu\{\phi_{mn}^{xx}\phi_{rs}^{yy} + \phi_{mn}^{yy}\phi_{rs}^{xx}\} \\
 & + 4(1-\nu)\phi_{mn}^{xy}\phi_{rs}^{xy}] dx dy \quad (19)
 \end{aligned}$$

$$U_{KT} = \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s a_{mn} a_{rs} B_{mnrs} \quad (20)$$

ここに

$$B_{mnrs} = \iint \phi_{mn} \phi_{rs} dx dy \quad (21)$$

したがって平板の全ポテンシャルエネルギーは (18), (20) 式から (22) 式で与えられる。

$$\Pi = \frac{D}{2} \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s a_{mn} a_{rs} (A_{mnrs} - \lambda_p^2 B_{mnrs}) \quad (22)$$

これを停留値とする条件 $\delta\Pi = 0$ より a_{mn} に関して偏微分し、次のような a_{rs} に関する無限次元斉一次連立方程式 (23) 式が得られる。

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = \sum_r \sum_s a_{rs} (A_{mnrs} - \lambda_p^2 B_{mnrs}) = 0 \quad (23)$$

この (23) 式から a_{rs} を消去すれば振動数方程式が得られ固有値 λ_p^2 が求まる。

ここで (5) 式において導入した関数 $G(x, y)$ の決定法について述べる。図 1 でパネルの形状を示す四辺形の各辺を表わす直線は各々 (24)~(27) 式に示すような x, y の一次式で表わすことにする。

また中間の支持を表わす直線も x, y に関して (28) 式で示すものとする。

$$\overline{01} : c_1 x + c_2 y + c_3 = 0 \quad (24)$$

$$\overline{12} : d_1 x + d_2 y + d_3 = 0 \quad (25)$$

$$\overline{23} : e_1 x + e_2 y + e_3 = 0 \quad (26)$$

$$\overline{30} : y = 0 \quad (27)$$

$$k_s x + l_s - y = 0 \quad (s=1, 2, \dots, N) \quad (28)$$

ここに添字 s は中間支持の第 s 番目のものを表すものである。また k_s は第 s 番目の中間支持を表わす直線の傾斜である。

いま平板の周辺の部分を除いて考えると第 s 番目の中間支持上では板のたわみが零でなければならないから

$$w(x, y)_{on s} = 0 \quad (29)$$

したがって関数 $G(x, y)$ は少なくとも (28) 式で示す因数の相乗積を含んでいる必要がある。

すなわち (30) 式で示すものとなる。

$$\prod_{s=1}^N (k_s x + l_s - y) \quad (30)$$

次に平板の周辺の境界条件として (i) 固定 (ii) 単純支持 (iii) 自由 の 3 種類の場合を考えると、それらの幾何学的境界条件を満たすためには (24)~(27) 式は (31) 式の因数を含むことが必要である。

$$\begin{aligned}
 & (c_1 x + c_2 y + c_3)^\alpha (d_1 x + d_2 y + d_3)^\beta \times \\
 & (e_1 x + e_2 y + e_3)^\gamma y^\delta \quad (31)
 \end{aligned}$$

ここに

$$\alpha, \beta, \gamma, \delta \begin{cases} = 2 & \text{固定} \\ = 1 & \text{単純支持} \\ = 0 & \text{自由} \end{cases} \quad (32)$$

以上述べてきたことから、平板に課せられた幾何学的境界条件を満足させるための関数 $G(x, y)$ の形は (33) 式のように決定できる。

$$\begin{aligned}
 G(x, y) & = \sum_{ij} b_{ij} x^i y^j = (c_1 x + c_2 y + c_3)^\alpha \\
 & (d_1 x + d_2 y + d_3)^\beta (e_1 x + e_2 y + e_3)^\gamma \\
 & \times y^\delta \prod_{s=1}^N (k_s x + l_s - y) \quad (33)
 \end{aligned}$$

ここに $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は (32) 式で与えられる法則にしたがってとるべき指数である。

4. 数値計算例および実験

4.1 中間支持をもった短形板の振動計算

航空機構造に関しては板の周辺の境界条件が単純支持と考えられる場合が比較的多いことから、平板の幾何学的境界条件を満足させる (33) 式で表わされる関数で、式の中に含まれる指数 $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ は (32) 式の法則から単純支持の条件すなわち $\alpha = \beta = \gamma = \delta = 1$ の場合に相当する。そこで図 2 に示す系を選び数値計算をおこなった。平板のたわみ形の一般性を保証する任意関数 $F(x, y)$ は (7) 式から x, y のべき級数で理

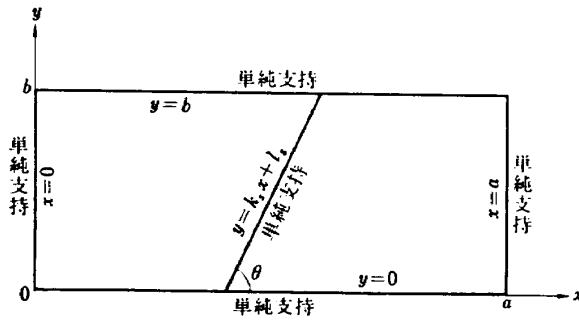


図 2 数値解析に用いた中間支持のある短形板 (周辺単純支持)

論上項数は無限大までとることができ項数が増すにしたがって次第に厳密解に近づくことになる⁽⁹⁾。ここでは計算の都合上有限項で打ち切ることにして 20 項を (34) 式に示す関数で近似した。

$$\begin{aligned}
 F(x, y) = & a_{00} + a_{01}y + a_{02}y^2 + a_{03}y^3 + a_{04}y^4 + a_{05}y^5 \\
 & + a_{10}x + a_{11}xy + a_{12}xy^2 + a_{13}xy^3 + a_{14}xy^4 \\
 & + a_{20}x^2 + a_{21}x^2y + a_{22}x^2y^2 + a_{23}x^2y^3 \\
 & + a_{30}x^3 + a_{31}x^3y + a_{32}x^3y^2 \\
 & + a_{40}x^4 + a_{41}x^4y \quad (34)
 \end{aligned}$$

また関数 $G(x, y)$ は (33) 式から決定され、(35) 式で示す。

$$\begin{aligned}
 G(x, y) = & \sum_i \sum_j b_{ij} x^i y^j \\
 = & x(x-a)y(y-b)(y-k_s x + l_s) \quad (35)
 \end{aligned}$$

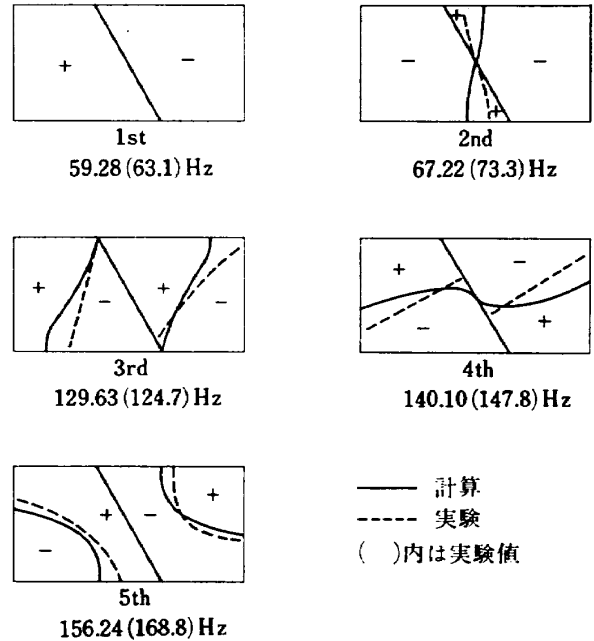


図 3-(2) 連続板の振動計算結果 ($\theta=60^\circ$, $a/b=2$)

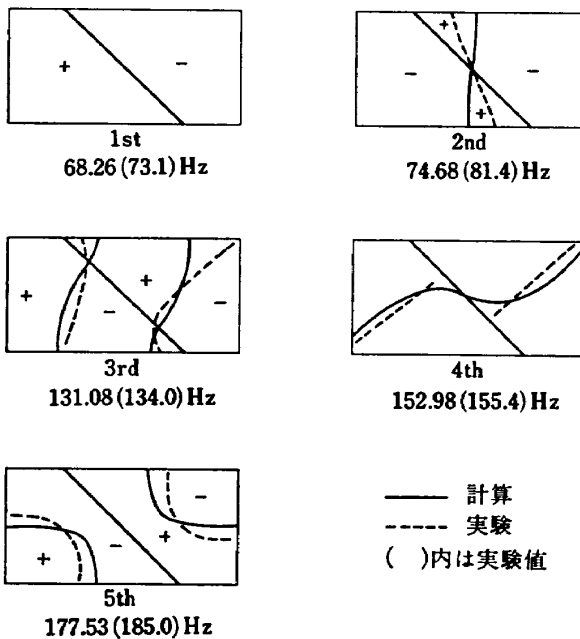


図 3-(1) 連続板の振動計算結果 ($\theta=45^\circ$, $a/b=2$)

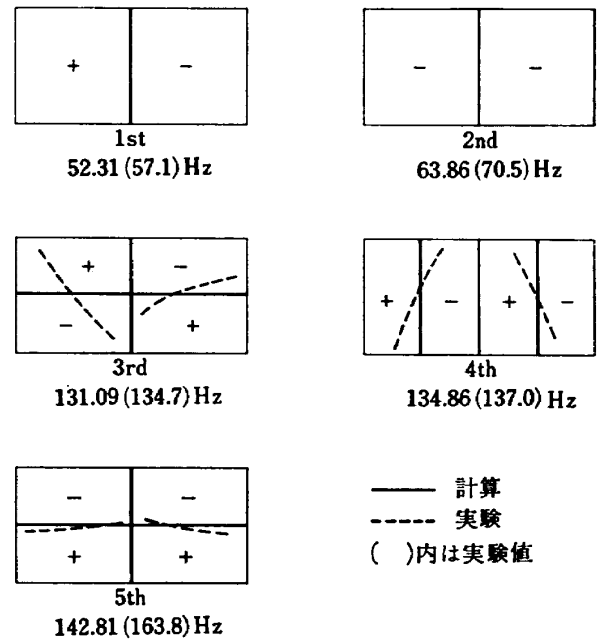


図 3-(3) 連続板の振動計算結果 ($\theta=90^\circ$, $a/b=2$)

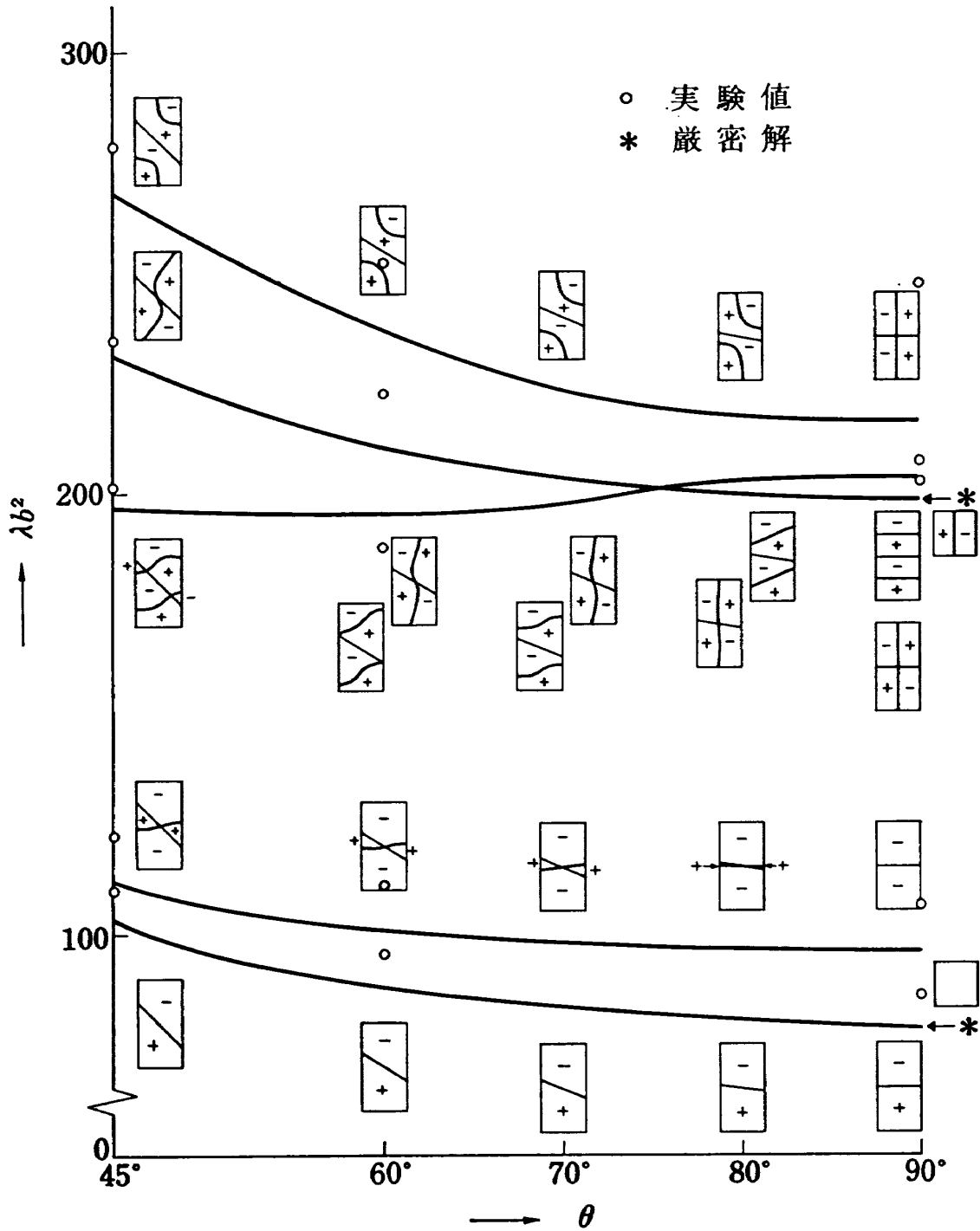


図 4 周辺支持連続板の計算によるパラメータ(θ)—固有値 (λb^2) の図 $a/b=2$

したがって平板のたわみを表わす (8) 式の試験関数の形が決まり (23) 式を計算することによって固有振動数と固有モードが得られる。(28) 式に含まれる k_s の値は $\tan \theta = k_s$ の関係から θ をパラメータとしてここでは 45° , 60° , 70° , 80° , 90° の 5 種類について計算をおこなった。

以上の計算結果を表 1 に示す。またモードを図 3-(1)~(3) の中に実線で示した。パラメータ θ の変化するにしたがって固有値 $\lambda_p b^2$ の値が変化していく様子を図 4 に示す。

表 1 周辺支持連続板の振動固有値の表 $a/b=2$

次数 θ	1	2	3	4	5
45°	103.03 (110.3)	112.72 (122.9)	197.85 (202.3)	230.91 (234.6)	267.95 (279.2)
60°	89.48 (95.3)	101.46 (110.7)	195.67 (188.3)	211.46 (223.2)	235.83 (254.9)
70°	83.63	98.09	198.97	204.08	224.33
80°	80.13	96.72	199.54	202.30	217.82
90°	78.96 78.96* (86.2)	96.39 (106.4)	197.97 197.39* (203.4)	203.66 (206.9)	215.67 (247.3)

() 内の数字は実験値からの換算 * 印厳密解

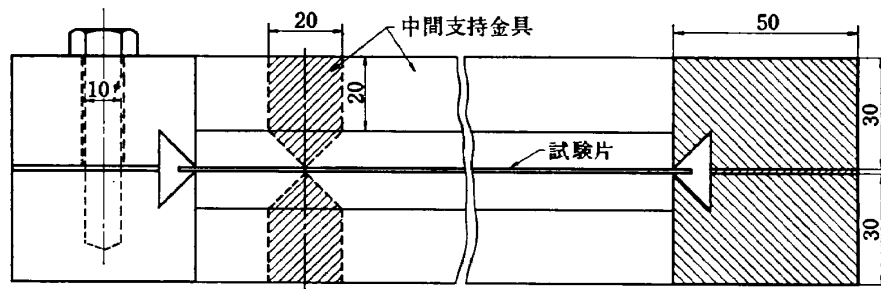


図 5 振動実験に用いた治具

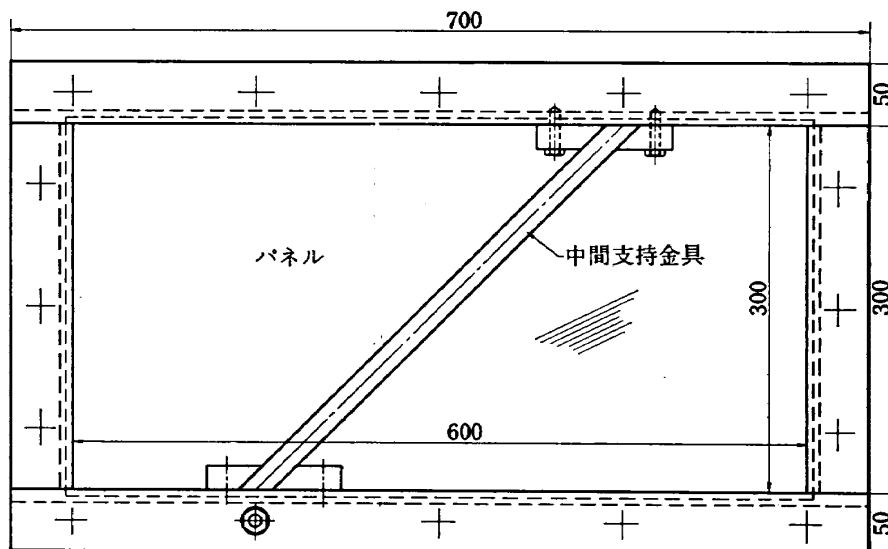


図 6 振動実験設定状況

4.2 実験

この実験に用いた試験片は、たてよこの寸法が 600 mm×300 mm、板厚が 1 mm のアルミ合金 7075 材である。周辺単純支持の境界条件を満たすように設計した。図 5 に示す治具を使って振動実験をおこなった。試験片の設定状況を図 6 に示す。

4.3 実験結果および計算値との比較

実験の結果は表 1 に示した。ここで用いているエネルギー法による近似解法では、平板のたわみを表わす関数を近似式で仮定しているため、どうしても実際のたわみに対して拘束が余計に入ってしまうことになり、したがってこの方法で求まる固有値は厳密解よりも高い値で出てくることになる。本報告ではこの平板のたわみの試験関数を (8) 式のように x, y のベキ級数で近似したのであるが、項数を増すことによって近似の精度が上がるのが予想される。

表 1 からわかるように計算値と実験値とを比較してみると、全般にわたって実験値の方が高い値になっていて、上で述べたことと矛盾する結果になっている。このような結果を導いた原因は何であるかを考察してみると、まず平板の周辺および中間の支持点において計算で扱った単純支持の境界条件が実験では完全には満たされていないであることが予想される。そこで支持条件を吟味するため、この実験で用いたものをそのまま使い試験片設定の際のアライメントで一番困難な中間支持を取り除いて、周辺単純支持の境界条件をも

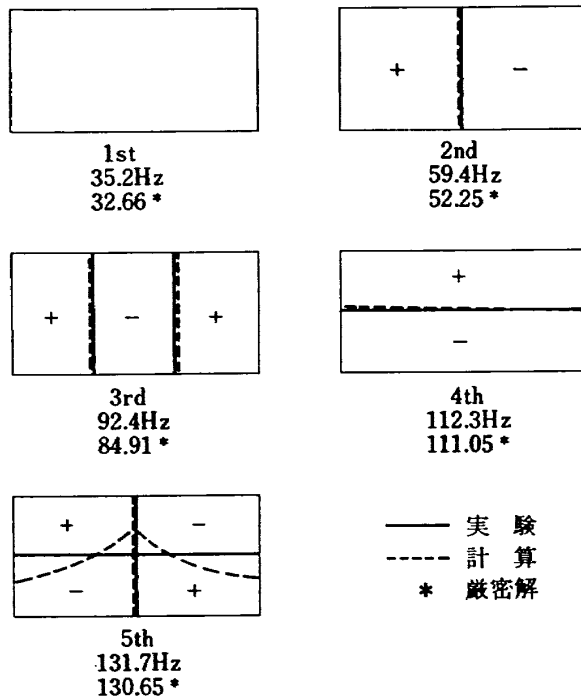


図 7 周辺支持板の振動実験結果, a/b=2

つ矩形板の振動実験を行なった。その結果は図 7 に示す通りである。計算値は高橋⁽⁷⁾の式から求めたもので厳密解である。

図 7 からわかるように全般にわたっていくらか実験値が高めに出てきている。すなわち実験での単純支持の境界条件は治具自体または設定の不完全さのために余分な拘束が加わりいくぶん固定の条件が加味されたものになっていることが推察できる。したがって表 1 に示す実験値と計算値の対応も十分理解できるもので、比較的よい一致を示しているものといえるであろう。

5. 連続はりの振動

連続はりの自由振動は連続板の振動を取扱う以前にすでに解析と実験をおこなった⁽⁸⁾のものであるが、3 節で述べた解析法の例題としてまとめて本節にあげておく。

5.1 解析

図 8 に示す系について考えると、すでに 3 節で述べてきた平板についての解析法を x 座標だけについて扱えば、連続はりの振動の解析ができる。それ故たわみ形 w の一般性を保証するために必要な任意関数 F は (36) 式のように x だけについてのベキ級数で表わすことになる。

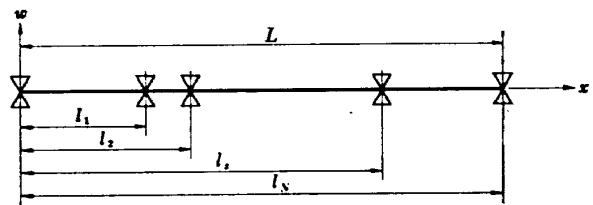


図 8 連続はりと座標系

$$F(x) = \sum_m a_m x^m \quad (36)$$

$$w(x) = F(x) \cdot G(x) = \sum a_{mn} \phi_m^n(x) \quad (37)$$

$$\text{ここに } \phi_m(x) = G(x) \cdot x^m \quad (38)$$

以下導われる各々の式はかなり簡単になり

$$U_T = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 dx = \frac{EI}{2} \sum \sum a_m a_n A_{mn} \quad (39)$$

ここに

$$A_{mn} = \int_0^L \phi_m(x) \phi_n(x) dx \quad (40)$$

$$\begin{aligned} \phi_m(x) &= \frac{d^2 \phi_m(x)}{dx^2} \\ &= \frac{d^2}{dx^2} (G(x)) x^m + 2m \frac{d}{dx} (G(x)) x^{m-1} \\ &\quad + m(m-1) G(x) \cdot x^{m-2} \end{aligned} \quad (41)$$

$$U_{KT} = \frac{\rho A p^2}{2} \int_0^L w^2 dx = \frac{EI}{2} \lambda_B^2 \sum \sum a_m a_n B_{mn} \quad (42)$$

ここに

$$B_{mn} = \int_0^L \Psi_m(x) \Psi_n(x) dx \quad (43)$$

$$\Psi_m(x) = \varphi_m(x) \quad (44)$$

$$\lambda_B^2 = \frac{\rho A p^2}{EI} \quad (45)$$

したがって (4) 式から全系のポテンシャルエネルギーは (46) 式の形で示される。

$$\Pi = \frac{EI}{2} \sum \sum a_m a_n (A_{mn} - \lambda_B^2 B_{mn}) \quad (46)$$

(46) 式から $\partial \Pi / \partial a_m = 0$ を計算し係数 a_n を消去すれば振動数方程式が得られ、固有値 λ_B^2 が求まる。

境界条件を満たすための関数 $G(x)$ については、はりは両端を除いて中間の任意の支持点でたわみが零でなければならないので

$$\prod_{s=1}^N (x - l_s)$$

の形の因数の相乗積を含んでいなければならない。また、はりの両端では

$$x^\alpha (x - L)^\beta$$

の因数が必要である。ここに α, β はそれぞれ (32) 式で示した法則にしたがってとる値である。

したがって関数 $G(x)$ の形は次の (47) 式のように決定できる。

$$G(x) = x^\alpha (x - L)^\beta \prod_{s=1}^N (x - l_s) \quad (s \geq 1) \quad (47)$$

$$= x^\alpha (x - L)^\beta \quad (s = 0)$$

5.2 数値解析例

数値解析例として、等間隔 s スパン連続はりで両端の境界条件が (1) 支持——支持 (2) 固定——支持の場合について解析をおこなった。

この場合、等間隔であるということから l_s の値は (48) 式のようにおける。

$$l_s = sl \quad (48)$$

ここに s : スパン数, l : スパン間隔

座標系および解析に用いた連続はりを図 9 に示した。(37) 式であらわす級数は m をいくらでも多くとることができるが、ここでは最初の 4 項 ($m=0, 1, 2, 3$) までで打ち切って計算をおこなった。

$$F(x) = a_1 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \quad (49)$$

5.3 実験結果および計算値との比較

試験片は断面が 19 mm × 5 mm で長さ L はスパンの数が 1 の場合は 900 mm、またスパンの数が 2, 3 の場合は 1800 mm である。

試験片には抵抗線ひずみゲージを貼付して、そこからの出力と、発振器からの出力でブラウン管オシロスコープ上にリサージュの図形を描かせ、共振点の判定をした。モードの判定には圧電型ピックアップを試験片上に長さ方向に全体にわたって移動しながら接触させて、ノードルポイントを決めた。

実験結果は表 2 に示す通りである。計算値と比較すると 2 次ぐらいまではよく合っていると云える。たわみの試験関数の項数を増すと解析の精度も上がることが知られているので、さらに高い次数のところでも比較的良好な結果が期待できる。

ここでは、この程度の比較的簡単な計算でも十分に

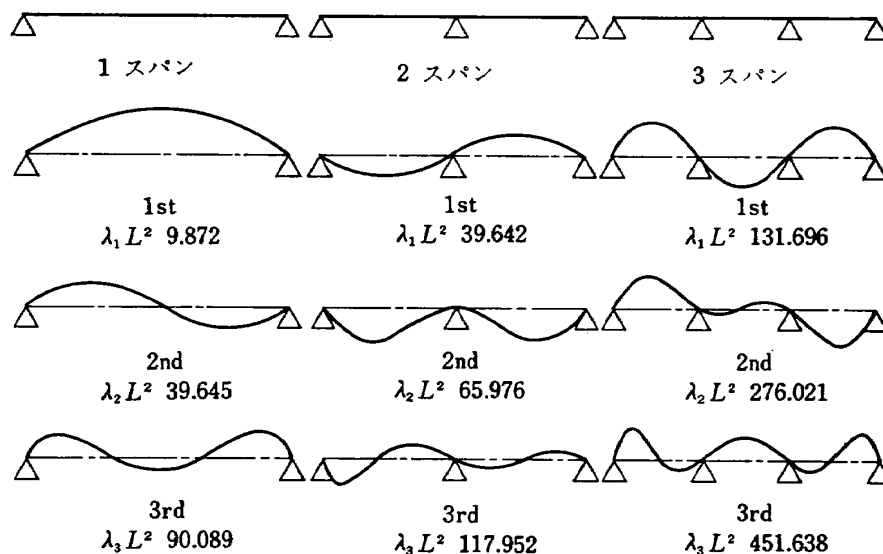


図 9 両端支持連続梁の自由振動モード

表 2 連続はりの固有値 ($\lambda_B L^2$) の値

端末境界条件		固定——支持			
固有値 $\lambda_B L^2$		1 次	2 次	3 次	
ス パ ン 数	1	計算	15.43	50.72	181.19
		実験	10.38 15.42*	36.76 49.97*	81.78 105.24*
	2	計算	46.24	70.42	333.27
実験		69.81 —	110.77 —	192.96 —	
3	計算	99.46	152.27	586.76	
	実験	107.20 —	147.61 —	193.24 —	

端末境界条件		支持——支持			
固有値 $\lambda_B L^2$		1 次	2 次	3 次	
ス パ ン 数	1	計算	9.87	39.64	131.69
		実験	11.75 (9.87)	41.36 (39.48)	90.43 (88.83)
	2	計算	39.64	65.98	176.02
実験		41.02 (61.69)	61.02 (61.69)	241.29 (157.91)	
3	計算	90.09	117.95	451.64	
	実験	95.65 (88.83)	117.38 (113.83)	166.03 (166.23)	

* 印……厳密解
() 内は AYRE & JACOBSEN (4) の値

よい結果が得られることを示すにとどめておいた。

図 9, 10 は計算によるモードの様子を示したものである。

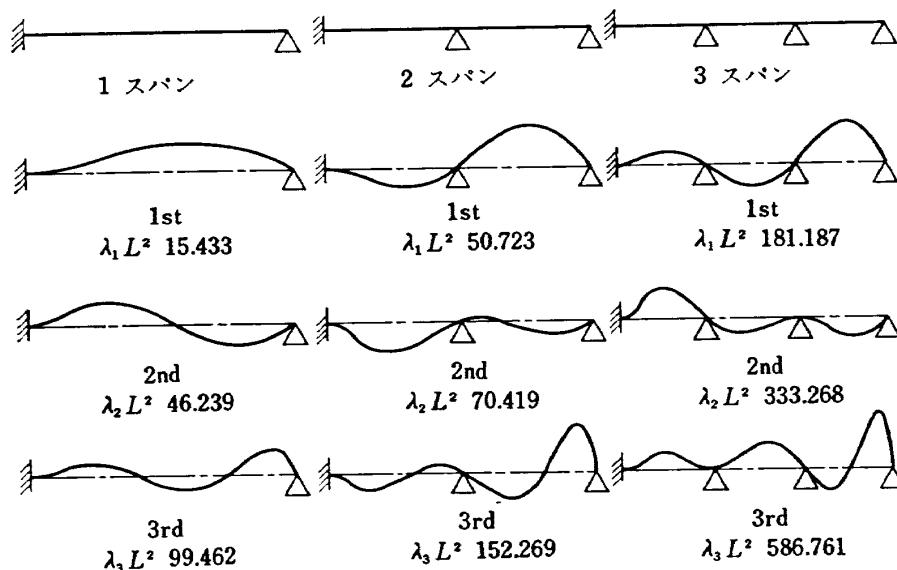


図 10 一端固定他端支持連続梁の自由振動モード

6. 結 語

本報告では中間支持をもった任意形状の四辺形板で周辺の境界条件が固定, 単純支持, 自由およびそれら3種類の組合わさった場合の連続板の振動解析をエネルギー法によって近似式を与えた。そして航空機構造の中でパネルの振動として境界条件の比較的近い周辺単純支持の場合について数値解析と実験をあわせておこない, その実用性を吟味した。結果を要約すると,

- 1) 中間の支持が斜めに入った場合についても, ここでおこなった解析法を用いることによって容易に実用的な解が得られる。
- 2) フランジとストリンカーで拘束されたパネルを連続板として考えることによって, より複雑なパネルの振動を容易に調べることができる。
- 3) 中間支持が入ることによって, そのところの境界条件が幾何学的に単純支持になっていた場合でも, モードによって物理的に固定条件となることがある。(図 3-(3) 2nd)
- 4) 周辺の境界条件は (32) 式からわかるように指数を変えてやるだけで計算が組織的に処理できる。
- 5) パネルの防振ということで中間に支持を用いる場合は, 短形板に関しては長辺に平行に短辺の中間を通るように支持を設定すれば一番効果が大きい(基本振動数が上がる)。

6. あとがき

式の変形の中で一番煩雑な部分（例えば (14) 式～(17) 式）で関数の微分とか関数どうしの積が何らかの方法で簡単に遂行できうれば、かなり複雑な条件をもったものについても容易にかつ組織的に解くことができると考えている。目下それらのことについて検討を加えつつある。

また実際の航空機構造に多く見られるフレーム、ストリンガー、パネルの組み合わせでは振動はフレームの部分すなわち中間支持に相当するところが剛ではなく弾性的な支持条件に近いもので起こっているであろうことが十分予想されるので、このような条件を考慮した解析も現在進めつつある。

終りに本報告を作るにあたって有益な御討論をたまわった機体部 2 の藤森義典氏に感謝の意を表わす次第である。

参考文献

- (1) DANA YOUNG, "Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method" Journal of Applied Mechanics Vol. 1950
- (2) G. A. Warburton, M. A., Ph. D "The Vibration of Rectangular Plates"
- (3) Timoshenko, "Plate and Shells"
- (4) R. S. AYRE & L. S. JACOBSEN "Natural frequencies of Continuous beams of uniform span length" JAM. Dec. 1950
- (5) 埴 武敏, 林 洋一: 構造翼と胴体結合系の振動解析例について, 日本機械学会第49期全国大会前刷, 1971
- (6) 坂田敏行: 連続板の強制振動解析, 日本機械学会第50期全国大会前制, 1972
- (7) 高橋利衛: 機械振動とその防止, オーム社
- (8) 川井忠彦, 多田保夫, 林 洋一: 連続板の自由振動について (第一報), 日本機械学会第43期全国大会前制集, 1965
- (9) 川井忠彦, 埴 武敏, 越出慎一, 戸川隼人, 落合 薫: 変分法による平板翼の撓み, 振動解析における自然境界条件の数値的吟味 (片持板翼の場合), 航技研報告 TR-66. 1964
- (10) 林 毅, 村外志夫: 変分法, コロナ社
- (11) 林 洋一, 川井忠彦: 連続板の振動について, 第15回 構造強度に関する講演会講演集, 1973

TR-316	推力中断型固体ロケット用プロペラントの組成と圧力指数の関係 Relation Between the Compositional Variables and the Pressure Exponent of Controllable Solid Rocket Propellant	1973年4月	五代富文, 清水盛生 伊藤克弥, 西村久男 種村利春, 藤原勉
TR-317	ファンエンジンの性能に関する考察 Some Considerations on the Performance of the Fan Jet Engine	1973年5月	鳥崎忠雄, 森田光男 関根静雄
TR-318T	A Convergence Theorem of Nonlinear Semigroups and Its Application to First Order Quasilinear Equations	1973年6月	Tadayasu TAKAHASHI
TR-319	フライングテストベッド全機作動実験—予備・第一次・第二次実験— Ground Operation Tests of Flying Test Bed for VTOL Aircraft at National Aerospace Laboratory	1973年6月	滝澤直人, 田辺義一 波谷昭義, 小川敏雄 藤枝郭俊, 甲斐忠夫 小野幸一, 鳥崎忠雄
TR-320	地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究—運動が長期間にわたる場合— The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field—in the Case of the Long Maneuver of Free Orbital Motion—	1973年6月	武内澄夫
TR-321	空冷軸流タービンの空力性能に関する研究 (第一報 空冷タービンの設計および全体性能に関する実験的研究) Cold-Air Investigation of an Air-Cooled Axial-Flow Turbine (Part 1 Turbine Design and Overall-Stage Performance without Supply of Cooling Air)	1973年12月	山本孝正, 高原北雄 能瀬弘幸, 井上重雄 臼井弘, 三村富嗣雄
TR-322	IC 演算増幅器を利用した乱流頻度計 Application of Intergrated Circuit Operational Amplifiers on Turbulence Intermittency Meters	1973年6月	綿貫忠晴, 佐藤淳造
TR-323	月と太陽の引力の作用下にある地球の人工衛星の運動に関する研究 The Study on the Motion of an Artificial Earth Satellite under the Gravitational Attractions of the Sun and Moon	1973年7月	武内澄夫, 松島弘一
TR-324	偏揺れ振動するT型尾翼の水平尾翼に働く, 非定常ローリングモーメントの測定 Measurement of Rolling Moments Acting on the Stabilizer of T-tails Oscillating in Yaw	1973年6月	市川輝雄, 磯貝紘二 安藤泰勝, 江尻宏
TR-188T	浮動型1自由度積分ジャイロの不等弾性誤差 Analysis of the Anisoelastic Errors of a Floated Single Degree of Freedom Intergrating Gyro	1973年6月	大月正男, 新宮博公 田畑浄治, 鈴木孝雄 円居繁治
TR-325	ロケットの分離特性に関する研究 Some Investigation on the Separation Characteristics of a Two-Stage Vehicle Model	1973年7月	宇宙研究グループ
TR-326	電子衝撃型水銀イオンエンジンの研究 Experimental Investigation on 5cm Mercury Electron Bombardment Ion Engine	1973年7月	中村嘉宏, 東久雄 宮崎勝弘
TR-327	ガスタービン燃焼器のライナにおける伝熱 On the Liner Heat Transfer of Gas Turbine Combustor	1973年7月	相波哲朗

航空宇宙技術研究所報告328号

昭和48年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)☎182

印刷所 日新図書印刷株式会社
東京都港区芝3-33-5

