

UDC 532.517 :
532.526 :
517.9

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-333

非線型層流安定理論と数値計算

—— 第三報 平板境界層における有限攪乱の計算 ——

伊 藤 信 毅

1973年7月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- | | | | |
|---------|--|------------|--|
| TR-311 | 界面最大引張り応力基準での固体推進の降伏曲面 (三次元) について
On a Failure Criterion of a Solid Propellant under Tri-axial Stress Fields | 1973年 3月 | 遠藤修司, 河田幸三 |
| TR-312 | 最適制御理論を応用したフレア制御系について
Simulation Study on Flare Control System by Optimization Theory | 1973年 3月 | 渡辺 頤, 堀川勇壮 |
| TR-313 | BTE翼型の遷音速二次元翼列についての一実験
Experimental Investigation of Two-Dimensional Cascade Performances with Blunt Trailing Edge Blade Sections at Transonic Inlet Mach Number Range | 1973年 3月 | 坂口 一, 近藤 博
高森 晋, 岩下敬吾 |
| TR-314 | 低アスペクト比後退角平板翼の遷音速フラッタ特性におよぼす翼端付加質量の重心位置の影響
Some Effects of Center of Gravity Locations of Added Mass on Transonic Flutter Characteristics of Low Aspect Ratio and Sweptback Thin Cantilever Wing | 1973年 3月 | 中井 暎一, 森田甫之
菊池 孝男, 東久保正年
高橋 実 |
| TR-315T | Natural Vibration and Flutter of Cylindrically Curved Panels | April 1973 | Yuji MATSUZAKI |
| TR-316 | 推力中断型固体ロケット用プロペラントの組成と圧力指数の関係
Relation between the Compositional Variables and the Pressure Exponent of Controllable Solid Rocket Propellants | 1973年 5月 | 五代 富文, 清水盛生
伊藤克弥, 西村久男
種村利春, 藤原 勉 |
| TR-317 | ファンエンジンの性能に関する考察
Some Considerations on the Performance of the Fan Jet Engine | 1973年 5月 | 鳥崎 忠雄, 森田光男
関根 静雄 |
| TR-318T | A Convergence Theorem of Nonlinear Semigroups and its Application to First Order Quasilinear Equations | June 1973 | Tadayasu TAKAHASHI |
| TR-319 | フライングテストベッド全機作動実験
—予備・第一次・第二次実験—
Ground Operation Tests of Flying Test Bed for VTOL Aircraft at National Aerospace Laboratory | 1973年 6月 | 滝澤直人, 田辺 義一
洪昭義, 小川 敏夫
藤枝郭俊, 甲斐 忠雄
宮本義人, 鳥崎 忠雄
小野 幸一 |
| TR-320 | 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究
—運動が長期間にわたる場合—
The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field—in the Case of the Long Maneuver of Free Orbital Motion | 1973年 6月 | 武内澄夫 |
| TR-321 | 空冷軸流タービンの空力性能に関する研究 (第一報 空冷タービンの設計および全体性能に関する実験的研究)
Aerodynamic Investigation of an Air-Cooled Axial-Flow Turbine. (Part 1. Turbine Design and Overall Stage Performance without Supply of Cooling Air) | 1973年12月 | 山本孝正, 高原北雄
能瀬弘幸, 井上重雄
白井 弘, 三村富嗣雄 |
| TR-322 | IC演算増幅器を利用した乱流頻度計
Application of Integrated Circuit Operational Amplifiers on Turbulence Intermittency Meters | 1973年 6月 | 綿貫忠晴, 佐藤淳造 |

非線型層流安定理論と数値計算

—第三報 平板境界層における有限攪乱の計算*—

伊 藤 信 毅**

A Non-linear Hydrodynamic Stability Theory with Numerical Calculations

—Part 3. Numerical Results for the Flat Plate Boundary Layer—

By Nobutake ITOH

Abstract

The non-linear theory developed in Part 2 for parallel flows is applied to a nearly parallel flow in the boundary layer on a flat plate. Both the variation of the boundary-layer thickness with distance downstream and the normal component of the velocity of the basic steady flow are taken into consideration for solution of the equation for mean-flow distortion. Numerical calculations are carried out for a range of values of frequency and Reynolds number. The results are exhibited in the form of a stability diagram for finite disturbances, which is found to be similar to that for the plane Poiseuille flow. Moreover, a detailed investigation is made of the behaviour of disturbances in the vicinity of the upper branch of the neutral curve for infinitesimal disturbances, with a view to drawing comparison with the experimental investigation by Klebanoff, Tidstrom and Sargent.

1. 序 論

平行流についての有限攪乱理論および数値計算は多くの研究者によって行われているが、平板境界層流に関してはまだ十分な成果が得られていない。境界層流れにおける安定計算を行う際に問題となる点は、境界層が主流の方向に厚さを変えること、基本流が完全な平行流でなく、平板に垂直な方向の速度成分を持つこと、および境界層の外側における境界条件が簡単な形で与えられないこと等である。本論文は上記の困難を解決して境界層流れに対する有限攪乱の方程式を導き、数値計算を行うことを目的とする。

基礎方程式の Fourier 級数による展開法および各常微分方程式の解法については平行流に関する理論（第二報参照）をそのまま適用する。したがって、攪乱は主流の方向に大きさを変えるものとされ、時間に関する Fourier 級数展開の 3 次以上の項は省略される。な

お、第二報においては、平均流ゆがみ方程式の解に固有函数成分を含めて攪乱の発達の詳しい機構まで調べているが、ここでは、この固有函数成分を無視し、攪乱が十分下流に伝わったときの状態、すなわち漸近的振舞だけを考えることにする。攪乱の発達の詳しい機構は平行流の場合と同様な性質を示すものと思われるが、境界層流れでは、Reynolds 数が主流の方向の座標 x と共に増加するので、平行流の場合ほど簡単な形で示すことができない。しかし、有限攪乱の主要な特性、すなわち、安定線図あるいは限界振幅等は漸近的振舞を調べるだけで得られる。

2. 理 論

2.1. 方程式の展開

平板の前縁を座標系の原点とし、平板に沿う方向に x 軸、これと直角な方向に y 軸をとる。流れ函数を Ψ とすると二次元の渦度方程式は次式で表わされる。

$$\left\{ \Delta - \frac{1}{\nu} \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \Delta \Psi = 0 \quad (2.1.1)$$

* 昭和48年5月4日 受付

** 空気力学第二部

ただし, ν は動粘性係数, $\Delta \equiv \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ である。
いま, 全ての量をつぎのように無次元化する。

$$\left. \begin{aligned} x^* &= \frac{x}{L}, \quad y^* = \frac{y}{\delta}, \quad \Psi^* = \frac{\Psi}{\delta U_0}, \\ t^* &= \frac{t}{\delta/U_0}, \quad R = \frac{U_0 \delta}{\nu} \end{aligned} \right\} \quad (2.1.2)$$

ここで, L は平板の前縁から着目している点までの距離, U_0 は一様流の流速, δ は境界層の厚さで, つぎのように定義する。

$$\delta \equiv r \sqrt{\frac{\nu L}{U_0}} \quad (r=5) \quad (2.1.3)$$

また, R は境界層の厚さに基づく Reynolds 数である。着目点が前縁より十分遠い距離にあるときには, δ と L の比を ε とおくと

$$\varepsilon \equiv \delta/L \ll 1 \quad (2.1.4)$$

また,

$$\varepsilon R = \frac{\delta}{L} \cdot \frac{U_0 \delta}{\nu} = r^2 (=25) \quad (2.1.5)$$

の関係が成り立つ。以上の無次元量を用いて方程式 (2.1.1) を書き直すとつぎのようになる (* 印は省略する)。

$$\left. \begin{aligned} L_k[\phi] &\equiv \left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 - r^2 \left\{ \left(-\frac{1}{\varepsilon} ik\beta + \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right\} \right] \phi \quad (k=0,1,2), \\ M[\phi, \phi] &\equiv r^2 \left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \phi \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1.10)$$

方程式 (2.1.9) を解くには, 主攪乱の第1近似を適当に定め, 平均流ゆがみ方程式および倍振動攪乱方程式の右辺に代入し, 解 ϕ_0, ϕ_2 をそれぞれ求める。つぎに, これらと ϕ_1 の第1近似を主攪乱方程式の右辺に代入すれば, ϕ_1 の第2近似解を得ることができる。主攪乱の振幅が十分小さいときには, ϕ_1 の第1近似解として無限小攪乱方程式の解またはそれを補正したものをい用い, 第2近似解を求めれば, これは有限性の影響を含めた解として十分精度のよいものとなる。

2.2. 基本流の方程式

基本流の流れ函数 Ψ_0 はつぎの方程式をみたす必要がある。

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - r^2 \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi_0 = 0 \quad (2.2.1)$$

この方程式は非線型であるから厳密には解けないの

$$\left\{ \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) - r^2 \left(\frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{\partial \Psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \Psi = 0 \quad (2.1.6)$$

ここで Ψ を基本流 Ψ_0 と攪乱成分 ϕ に分けて

$$\Psi(x, y, t) = \Psi_0(x, y) + \phi(x, y, t) \quad (2.1.7)$$

とおき, Ψ_0 は方程式 (2.1.6) の定常解とする。攪乱成分 ϕ を時間 t に関する Fourier 級数に展開し, 3 次以上の Fourier 成分を省略する (第二報参照)。

$$\begin{aligned} \phi(x, y, t) &= \phi_0(x, y) + \phi_1(x, y)e^{-i\beta t} + \bar{\phi}_1(x, y)e^{i\beta t} \\ &\quad + \phi_2(x, y)e^{-2i\beta t} + \bar{\phi}_2(x, y)e^{2i\beta t} \end{aligned} \quad (2.1.8)$$

ただし, β は角速度を表わす実数, \sim 印は共役複素数を表わす。(2.1.7) 式と (2.1.8) 式を方程式 (2.1.6) に代入すれば, ϕ_1 (主攪乱), ϕ_0 (平均流ゆがみ), ϕ_2 (倍振動攪乱) に関する方程式が求まる。

$$\left. \begin{aligned} L_1[\phi_1] &= M[\phi_1, \phi_0] + M[\bar{\phi}_1, \phi_2], \\ L_0[\phi_0] &= M[\phi_1, \bar{\phi}_1], \\ L_2[\phi_2] &= \frac{1}{2} M[\phi_1, \phi_1] \end{aligned} \right\} \quad (2.1.9)$$

ただし, 作用素 L_k, M は以下で定義される。

で, 境界層近似を用いて近似解を求める。すなわち, 方程式に含まれる微小量 ε^2 を省略すると, つぎの境界層方程式が得られる。

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial y^2} - r^2 \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right\} \frac{\partial^2 \Psi_0}{\partial y^2} = 0 \quad (2.2.2)$$

さらに, 変数変換

$$\eta = \frac{y}{\sqrt{x}}, \quad F_0(\eta) = \frac{\Psi_0(x, y)}{\sqrt{x}} \quad (2.2.3)$$

を行い, η に関して一回積分して, 積分定数を 0 とおくと, 平板に沿う圧力勾配のない境界層に対する方程式 (Blasius の方程式) が得られる。

$$F_0'''(\eta) + \frac{r^2}{2} F_0''(\eta) F_0(\eta) = 0 \quad (2.2.4)$$

このときの境界条件はつぎのようになる。

$$F_0(0) = F_0'(0) = 0, \quad F_0''(0) = 1.660 \quad (2.2.5)$$

$F_0(\eta)$ が与えられると, 方程式 (2.2.1) の近似解は

$$\Psi_0(x, y) = \sqrt{x} F_0\left(\frac{y}{\sqrt{x}}\right) \quad (2.2.6)$$

の形で表わされる。

2.3. 平均流ゆがみ方程式

平均流ゆがみ ϕ_0 に関する方程式は、基本流 Ψ_0 および主攪乱の第1近似 ϕ_1 が与えられているとすれば、つぎの非同次型方程式で与えられる。

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right)^2 - r^2 \left(\frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} - \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \right) \right. \\ \times \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) + \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \Psi_0}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \\ \left. - \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \varepsilon^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \right) \frac{\partial \Psi_0}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \right] \phi_0 = M[\phi_1, \bar{\phi}_1] \quad (2.3.1)$$

ここで、右辺は主攪乱によって生じる Reynolds 応力の項である。

(2.1.2) 式において x を無次元化するとき用いた基準長さ L は平板の前縁から着目点までの距離であるから、 x 方向に対してゆるやかな変化を行う運動(例えば基本流)を調べるときに適する基準長さであ

るが、攪乱のように変化の激しい運動を調べる場合には別の基準長さを選ぶ必要がある。主攪乱の波長はほぼ境界層厚さ δ と同程度の大きさであるから、 δ を新しい基準長さにとると、攪乱成分の x 方向に対する変化の割合は1の程度になる。したがって、 x に対してつぎの変数変換を行う。

$$x = 1 + \varepsilon \xi \quad (2.3.2)$$

このとき、攪乱があまり大きくない段階では、主攪乱 ϕ_1 は無限小攪乱の理論で与えられる形

$$\phi_1 = A_1 \phi_1(y) e^{i \alpha_1 \xi} \quad (2.3.3)$$

で表わせる。ただし、 A_1 は主攪乱の振幅を表わす量で一般には複素数である。また、 $\phi_1(y)$ は適当な方法で正規化された函数、 α_1 は複素数で、実数部 α_{1r} が波数を与え、虚数部 α_{1i} が減衰率を表わす。

(2.3.3) 式を用いると、(2.3.1) 式の右辺はつぎの形で与えられる。

$$M[\phi_1, \bar{\phi}_1] = |A_1|^2 p_0(y) e^{-\tau_0 \xi} \quad (2.3.4)$$

ただし、

$$p_0(y) \equiv iR \left[\left(\alpha_1 \frac{d\bar{\phi}_1}{dy} + \bar{\alpha}_1 \bar{\phi}_1 \frac{d}{dy} \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha_1^2 \right) \phi_1 - \left(\bar{\alpha}_1 \frac{d\phi_1}{dy} + \alpha_1 \phi_1 \frac{d}{dy} \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \bar{\alpha}_1^2 \right) \bar{\phi}_1 \right], \quad (2.3.5)$$

$$\tau_0 \equiv \alpha_1 - \bar{\alpha}_1 = 2\alpha_{1i}$$

変数変換 (2.3.2) によって、方程式 (2.3.1) に含まれる基本流の流れ函数はつぎのように書ける。

$$\Psi_0(x, y) = \sqrt{1 + \varepsilon \xi} F_0\left(\frac{y}{\sqrt{1 + \varepsilon \xi}}\right) = F_0(y) + \varepsilon \frac{\xi}{2} \{F_0'(y) - y F_0''(y)\} + O(\varepsilon^2) \quad (2.3.6)$$

一方、平均流ゆがみは基本流に近い性質を持つと考えられるので、平均流ゆがみの流れ函数も \sqrt{x} と y/\sqrt{x} の函数の積の形を持つものと仮定し、方程式 (2.3.1) の特解をつぎのようにおく。

$$\phi_0(\xi, y) = |A_1|^2 \sqrt{1 + \varepsilon \xi} \frac{\gamma}{\tau_0 - k_0} g_0\left(\frac{y}{\sqrt{1 + \varepsilon \xi}}\right) e^{-\tau_0 \xi} = |A_1|^2 \frac{\gamma}{\tau_0 - k_0} \left[g_0(y) + \varepsilon \frac{\xi}{2} \{g_0'(y) - y g_0''(y)\} + O(\varepsilon^2) \right] e^{-\tau_0 \xi} \quad (2.3.7)$$

ここで、 k_0 は同次方程式の固有値の中で最小のもので、この解は τ_0 が k_0 と一致するとき生じる特異性を考慮に入れたものである。

主攪乱の ξ に関する変化率 α_1 の実数部 α_{1r} は1の大きさであるが、虚数部 α_{1i} は1よりずっと小さな値である。したがって、 $\tau_0 (= 2\alpha_{1i})$ は ε と同じ程度の大きさを持つものと考えることができる。(2.3.6) と (2.3.7) 式を方程式に代入し、 ε で展開して最低次の項だけをとると、特解 $g_0(y)$ に関する方程式がつぎのように求まる。

$$\left\{ \frac{d^4}{dy^4} + \frac{r^2}{2} F_0(y) \frac{d^3}{dy^3} + \left(\frac{r^2}{2} + \tau_0 R \right) F_0'(y) \frac{d^2}{dy^2} + \frac{r^2}{2} F_0''(y) \frac{d}{dy} + \left(\frac{r^2}{2} - \tau_0 R \right) F_0'''(y) \right\} \frac{\gamma}{\tau_0 - k_0} g_0(y) = p_0(y) \quad (2.3.8)$$

また、上式の右辺を0とおき、 τ_0 を未知のパラメータと考えて固有値問題を解けば、固有値 k_0 が得られる。

つぎに方程式 (2.3.8) に対する境界条件を求める。厳密には方程式の右辺の項の影響を含めた境界条件を求めなければならないが、計算が複雑になることおよび境界層の外側では Reynolds 応力が小さいことなど

を考慮して、ここでは同次方程式に対する境界条件を求め、非同次方程式に対しても同じ条件を適用する。

境界条件としては、平板上で速度成分が0になることおよび平板から無限に離れた所で x 方向の速度が0になるという条件が課される。しかし Blasius の解が $y \rightarrow \infty$ で y 方向の速度成分を持つから、平均流ゆがみも同様の速度成分を持つことが許される。すなわ

ら、境界条件は次式で与えられる。

$$y=0 \text{ で } g_0=g'_0=0, \quad y \rightarrow \infty \text{ で } g'_0 \rightarrow 0 \quad (2.3.9)$$

境界層の外側 ($y > 1$) では基本流が一様流になるから、

$$F_0=y+a, \quad F'_0=1, \quad F''_0=F'''_0=0 \quad (2.3.10)$$

である。ここで、 a は $y \rightarrow \infty$ における y 方向の流速を V_∞ と書けば、つぎのように与えられる定数である。

$$a = -2 V_\infty L / (\delta U_0) = -0.344 \quad (2.3.11)$$

このとき方程式 (2.3.8) はつぎのように簡単化される。

$$\frac{d}{dy} \left\{ \frac{d^2}{dy^2} + \frac{r^2}{2}(y+a) \frac{d}{dy} + \tau_0 R \right\} g'_0(y) = 0 \quad (2.3.12)$$

この方程式の一般解は次式で与えられる。

$\tau_0 \neq 0$ のとき、

$$g'_0(y) = C_1 + \left\{ C_2 D_{-1+\sigma} \left(\frac{r}{\sqrt{2}}(y+a) \right) + C_3 D_{-\sigma} \left(i \frac{r}{\sqrt{2}}(y+a) \right) \right\} \exp \left\{ -\frac{r^2}{8}(y+a)^2 \right\},$$

$\tau_0 = 0$ のとき、

$$g'_0(y) = C_1 y + C_2 D_{-1} \left(\frac{r}{\sqrt{2}}(y+a) \right) \exp \left\{ -\frac{r^2}{8}(y+a)^2 \right\} + C_3 \quad (2.3.13)$$

ここで、 $D_\sigma(z)$ は Weber 関数で、 $\sigma = \tau_0 R / r^2$ である。 $y \rightarrow \infty$ において $g'_0 \rightarrow 0$ になる条件は

$$C_1 = C_3 = 0 \quad (2.3.14)$$

であるから、 $y=1$ において、解 $g_0(y)$ がみたすべき条件はつぎようになる。

$$\theta_1 g'_0(1) + g'_0(1) = 0, \quad \theta_2 g''_0(1) + g'_0(1) = 0 \quad (2.3.15)$$

ここで、

$$\theta_1 \equiv \frac{\sqrt{2} D_{-1+\sigma} \left(\frac{r}{\sqrt{2}}(a+1) \right)}{r D_\sigma \left(\frac{r}{\sqrt{2}}(a+1) \right)}, \quad \theta_2 \equiv \frac{\sqrt{2} D_\sigma \left(\frac{r}{\sqrt{2}}(a+1) \right)}{r D_{\sigma+1} \left(\frac{r}{\sqrt{2}}(a+1) \right)} \quad (2.3.16)$$

とくに、 $\sigma=0$ ($\tau_0=0$) のときは

$$\theta_1 \equiv \frac{2}{r} \frac{\int_{r(a+1)/2}^{\infty} e^{-t^2} dt}{\exp \left\{ -\frac{r^2}{4}(a+1)^2 \right\}}, \quad \theta_2 \equiv \frac{2}{r^2(a+1)} \quad (2.3.17)$$

となる。

以上より、平均流ゆがみ方程式の境界条件は結局次式で与えられる。

$$g_0(0) = g'_0(0) = \theta_1 g'_0(1) + g'_0(1) = \theta_2 g''_0(1) + g'_0(1) = 0 \quad (2.3.18)$$

2.4 攪乱方程式

主攪乱および倍振動攪乱の方程式 ((2.1.9) の第1式と第3式) に対しても、変数変換 (2.3.2) を行い、 ε に関して展開すると、 ε の最低次の係数から得られる方程式は線型理論に現われる非粘性方程式と同じ形になる。さらに、 ε の1次の係数まで含めた方程式を調べると、粘性項と境界層の厚さの変化を表わす項、基本流の y 方向成分の効果を与える項が同程度の影響を持つことがわかる。一方、攪乱の有限性の効果は、攪乱が十分小さいときには、1次の微小量であるから、攪乱方程式の1次の微小項が有限効果に与える影響は2次の微小量になる。したがって、有限攪乱を求める場合に、方程式の粘性項および境界層厚さの変化、基本流の y 方向成分等を無視しても大きな影響はない。しかし、非粘性方程式は微分階数が2階になることおよび定義域内に特異点を持ち、その近傍では粘性項が重要な役割を果たすことから、ここでは粘性項だけを含め、通常の Orr-Sommerfeld 型方程式を用いる。

倍振動攪乱の解を

$$\phi_2(\xi, y) = A_2 g_2(y) e^{i \tau_2 \xi} \quad (2.4.1)$$

とおくと、方程式はつぎようになる。

$$\left[\left(\frac{d^2}{dy^2} - \tau_2^2 \right)^2 - iR \left\{ \left(-2\beta + \tau_2 \frac{dF_0}{dy} \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \tau_2^2 \right) - \tau_2 \frac{d^2 F_0}{dy^2} \right\} \right] g_2(y) = p_2(y) \quad (2.4.2)$$

ただし、

$$p_2(y) \equiv i \alpha_1 R \left(\frac{d\phi_1}{dy} - \phi_1 \frac{d}{dy} \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha_1^2 \right) \phi_1, \quad \tau_2 \equiv 2 \alpha_1$$

境界条件は、境界層の外側で $p_2(y) \equiv 0$ を仮定すれば、無限小攪乱の場合と同様にして (第一報参照)、つぎのように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} g_2(0) &= g'_2(0) = 0, \\ g'_2(1) + (\tau_2 + \zeta_2) g'_2(1) + \tau_2 \zeta_2 g_2(1) &= 0, \\ g''_2(1) + (\tau_2 + \zeta_2) g''_2(1) + \tau_2 \zeta_2 g'_2(1) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.3)$$

ただし、

$$\zeta_2 = \sqrt{\tau_2^2 + i(\tau_2 - 2\beta)R}$$

以上より、主攪乱 $\phi_1(\xi, y)$ の第1近似が (2.3.3)

式の形で与えられたとき、平均流ゆがみ $\phi_0(\xi, y)$ と倍振動攪乱 $\phi_2(\xi, y)$ がそれぞれ (2.3.8) 式と (2.4.2) 式の解として得られるので、これらを (2.1.9) の第1式の右辺に代入すれば、主攪乱に関する方程式が次式で表わされる。

$$\left[\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right)^2 - R \left(-i\beta + \frac{dF_0}{dy} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) - \frac{d^3 F_0}{dy^3} \frac{\partial}{\partial \xi} \right] \phi_1(\xi, y) = A|A_1|^2 \left[\frac{\gamma}{\tau_0 - k_0} q_0(y) + q_2(y) \right] e^{i\tau_1 \xi} \quad (2.4.4)$$

ここで、

$$\left. \begin{aligned} q_0(y) &\equiv R \left\{ \left(i\alpha_1 \frac{dg_0}{dy} + \tau_0 g_0 \frac{d}{dy} \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \alpha_1^2 \right) \phi_1 - \left(\tau_0 \frac{d\phi_1}{dy} + i\alpha_1 \phi_1 \frac{d}{dy} \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} + \tau_0^2 \right) g_0, \right. \\ q_2(y) &\equiv iR \left\{ \left(\tau_2 \frac{d\bar{\phi}_1}{dy} + \bar{\alpha}_1 \bar{\phi}_1 \frac{d}{dy} \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \tau_2^2 \right) g_2 - \left(\bar{\alpha}_1 \frac{dg_2}{dy} + \tau_2 g_2 \frac{d}{dy} \right) \left(\frac{d^2}{dy^2} - \bar{\alpha}_1^2 \right) \bar{\phi}_1 \right\}, \\ \tau_1 &\equiv 2\alpha_1 - \bar{\alpha}_1 = \alpha_1 + 2i\alpha_{1i} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.5)$$

方程式 (2.4.4) の右辺を 0 とおいた同次方程式が無限小攪乱の方程式である。解の形を (2.3.3) 式のおくと同次型 Orr-Sommerfeld 方程式が得られ、境界条件が同次型になるので、無限小攪乱は α_1 に関する固有値問題を解くことによって得られる。いま、この固有値のうち虚数部 (減衰率) が最小になるものを $\alpha_1^{(0)}$ 、対応する固有函数を $\phi_1^{(0)}(y)$ と書くことにすれば、方程式 (2.4.4) の解はつぎのように表わせる (第二報参照)。

$$\phi_1(\xi, y) = A_1 \left[\left\{ \exp(i\alpha_1^{(0)} \xi) + |A_1|^2 \left(\frac{\gamma}{\tau_0 - k_0} \lambda_0 + \lambda_2 \right) \frac{\exp(i\tau_1 \xi) - \exp(i\alpha_1^{(0)} \xi)}{\tau_1 - \alpha_1^{(0)}} \right\} \phi_1^{(0)}(y) + |A_1|^2 \left\{ \frac{\gamma}{\tau_0 - k_0} f_0(y) + f_2(y) \right\} \exp(i\tau_1 \xi) \right] \quad (2.4.6)$$

ここで A_1 は主攪乱の大きさを表わす量で、つぎのように定義する。

$$A_1 \equiv \frac{\partial^2 \phi_1(\xi, y)}{\partial y^2} \Big|_{\xi=y=0} \quad (2.4.7)$$

これに対応して、固有函数 $\phi_1^{(0)}(y)$ が正規化されるので、 $\phi_1^{(0)}$ 、 $f_0(y)$ 、 $f_2(y)$ はつぎの条件をみたしていなければならぬ。

$$\phi_1^{(0)''''}(0) = 1, \quad f_0''(0) = f_2''(0) = 0 \quad (2.4.8)$$

境界条件は、境界層の外側で (2.4.4) 式の右辺が無視できると仮定すれば、(2.4.3) 式と同様になる。

$$\left. \begin{aligned} \phi_1^{(0)} &= \phi_1^{(0)'}(0) = f_0(0) = f_0'(0) = f_2(0) = f_2'(0) = 0, \\ \phi_1^{(0)''''}(1) + (\alpha_1^{(0)} + \zeta_1^{(0)}) \phi_1^{(0)'}(1) + \alpha_1^{(0)} \zeta_1^{(0)} \phi_1^{(0)}(1) &= 0 \\ \phi_1^{(0)''''''}(1) + (\alpha_1^{(0)} + \zeta_1^{(0)}) \phi_1^{(0)''''}(1) + \alpha_1^{(0)} \zeta_1^{(0)} \phi_1^{(0)''}(1) &= 0 \\ f_0''(1) + (\tau_1 + \zeta_1) f_0'(1) + \tau_1 \zeta_1 f_0(1) &= f_0'''(1) + (\tau_1 + \zeta_1) f_0''(1) + \tau_1 \zeta_1 f_0'(1) = 0 \\ f_2''(1) + (\tau_1 + \zeta_1) f_2'(1) + \tau_1 \zeta_1 f_2(1) &= f_2'''(1) + (\tau_1 + \zeta_1) f_2''(1) + \tau_1 \zeta_1 f_2'(1) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (2.4.9)$$

ただし、 $\zeta_1^{(0)} = \sqrt{\alpha_1^{(0)2} + i(\alpha_1^{(0)} - \beta)R}$ 、 $\zeta_1 = \sqrt{\tau_1^2 + i(\tau_1 - \beta)R}$

(2.4.6) 式を方程式 (2.4.4) に代入し、条件 (2.4.8) および (2.4.9) を用いれば、 $\lambda_0, \lambda_2, f_0(y), f_2(y)$ が定まる。

以上より、主攪乱の解が得られたので、これを無限小攪乱の解と同じ形

$$\phi_1(\xi, y) = A_1 \phi_1(y) e^{i\alpha_{1i} \xi} \quad (2.4.10)$$

で表わすため、(2.4.6) 式と (2.4.10) 式を比べ、 $\tau_0 = 2\alpha_{1i}$ (ここで α_{1i} は有限攪乱の減衰率である——第二報参照) に注意すると、

$$\left. \begin{aligned} \phi_1(y) &= \frac{1}{A_1} \lim_{\xi \rightarrow 0} \phi_1(\xi, y) = \phi_1^{(0)}(y) + |A_1|^2 \left\{ \frac{\gamma}{2\alpha_{1i} - k_0} f_0(y) + f_2(y) \right\}, \\ \alpha_{1i} &= \frac{1}{iA_1} \lim_{\substack{\xi \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\partial^3 \phi_1(\xi, y)}{\partial \xi \partial^2 y} = \alpha_1^{(0)} + |A_1|^2 \left\{ \frac{\gamma}{2\alpha_{1i} - k_0} \lambda_0 + \lambda_2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (2.4.11)$$

とくに、減衰率については、 α_1 の虚数部をとればつぎのようになる。

$$\alpha_{1i} = \alpha_1^{(0)} + |A_1|^2 \left\{ \frac{\gamma}{2\alpha_{1i} - k_0} \lambda_{0i} + \lambda_{2i} \right\} \quad (2.4.12)$$

ただし、添字 i は虚数部を表わす。これを α_{1i} の 2 次方程式として解けば、有限攪乱の減衰率と振幅の関係が得られる。また、平衡状態 $\alpha_{1i}=0$ に対する主攪乱振幅は

$$|A_{1i}|_e = -\frac{\alpha_{1i}^{(0)}}{\lambda_i}, \quad \left(\lambda_i = -\frac{\gamma}{k_0} \lambda_{0i} + \lambda_{2i} \right) \quad (2.4.13)$$

で与えられる。したがって、 $\alpha_{1i}^{(0)}$ と λ_i の符号によって攪乱の発達状況はつぎの 4 つの場合に分けられる。

(I) $\alpha_{1i}^{(0)} > 0, \lambda_i < 0$ のとき、無限小攪乱は減衰するが、有限攪乱に対しては不安定平衡点が存在する。すなわち、(2.4.13) 式で与えられる平衡振幅より大きい振幅を持つ攪乱は増幅し、これ以下の攪乱は減衰する。

(II) $\alpha_{1i}^{(0)} < 0, \lambda_i > 0$ のとき、無限小攪乱は増幅するが、有限攪乱になると安定平衡点が存在し、攪乱振幅は $|A_{1i}|_e$ に向って収束する。

(III) $\alpha_{1i}^{(0)} < 0, \lambda_i < 0$ のときは、無限小攪乱、有限攪乱ともに常に増幅する場合（絶対増幅）である。

(IV) $\alpha_{1i}^{(0)} > 0, \lambda_i > 0$ のときは、反対に常に減衰する場合（絶対減衰）になる。

なお、以上 4 つの場合についての詳細な説明は平均流ゆがみ方程式の解に固有函数成分を含めることによって得られるが、これについては第二報に述べられているので、ここでは省略する。

3. 計算結果

数値計算はべき級数展開法（第一報参照）を用い、航空宇宙技術研究所の計算機 HITACHI-HITAC

5020 F を使用して行った。

通常、境界層流れに対する無次元化は排除厚 δ^* を用いて行われるので、境界層厚さに基づく無次元量 R, β, α の代りに、つぎのように定義された R^*, β^*, α^* を用いて計算結果を表示する。

$$R^* = \frac{U_0 \delta^*}{\nu} = \frac{\delta^*}{\delta} R, \quad \beta^* = \frac{\delta^*}{\delta} \beta, \quad \alpha^* = \frac{\delta^*}{\delta} \alpha, \quad \left(\text{ただし, } \frac{\delta^*}{\delta} = 0.344 \right) \quad (3.1)$$

また、この変換によって、主攪乱の振幅 $|A_{1i}|$ もつぎのように変換される。

$$|A_{1i}^*| = \frac{\delta^*}{\delta} |A_{1i}| = \left| \frac{\delta^*}{U_0} \frac{du(0)}{dy} \right|$$

ただし、 $u(y)$ は主攪乱の x 方向の速度成分である。

ここで、実際の計算を行うにあたって、簡単化のために与えた仮定を述べておく。(i) 主攪乱の第 1 近似 (2.3.3) において、 $\phi_1(y)$ には無限小攪乱の固有函数 $\phi_1^{(0)}(y)$ を用い、 α_1 には無限小攪乱の固有値 $\alpha_1^{(0)}$ を用いた。ただし、 $\alpha_1^{(0)}$ の虚数部が正の値をとるときは、 α_1 の虚数部を 0 とおいた。(ii) 平均流ゆがみに対する境界条件 (2.3.18) における θ_1, θ_2 は $\tau_0=0$ の場合の値 (2.3.17) を用いた。

計算結果は第 1 表に与えられている。第 1 図には $R^* - \beta^*$ 平面に対して、無限小攪乱に対する中立安定曲線 ($\alpha_{1i}^{(0)}=0$) ABC と $\lambda_i=0$ の曲線 DBE が示されている。この二曲線によって $R - \beta^*$ 平面は 4 つの領域に分けられる。(I) は不安定平衡点が存在する領域、(II) は安定平衡点が存在する領域、(III) は絶対

第 1 表 数値計算の結果

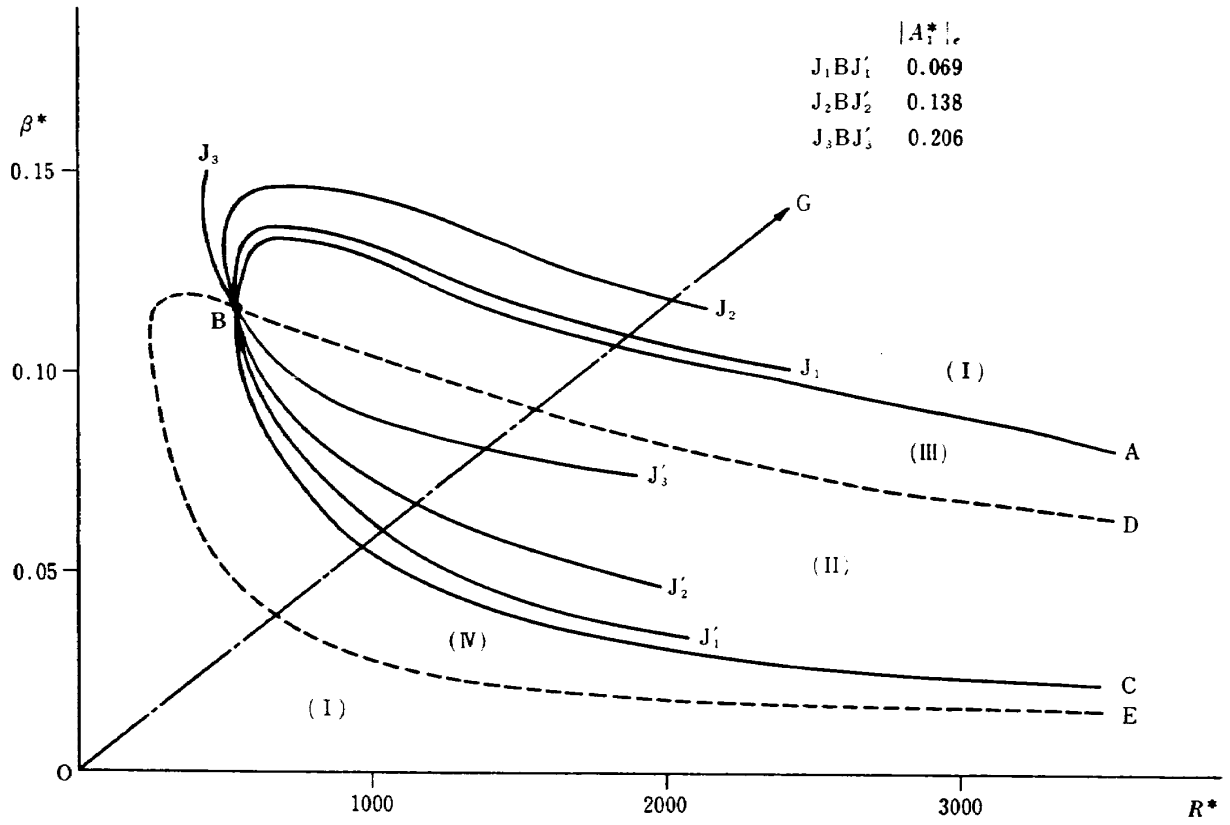
R	β	$\alpha_1^{(0)}$	k_0	γ	λ_0	λ_2	λ	(%) $ A_{1i} _e$
1000	0.10	0.2878+0.0727 <i>i</i>	0.05332	0.0212	0.0770+0.2063 <i>i</i>	-0.0489-0.0433 <i>i</i>	-0.0795-0.1252 <i>i</i>	76.3
	0.15	0.4094+0.0606 <i>i</i>		0.0156	0.2499+0.3269 <i>i</i>	-0.0701+0.0349 <i>i</i>	-0.1433-0.0610 <i>i</i>	99.7
	0.20	0.5206+0.0468 <i>i</i>		0.0086	0.5653+0.5050 <i>i</i>	-0.0598+0.0709 <i>i</i>	-0.1510-0.0106 <i>i</i>	210.5
	0.25	0.6263+0.0382 <i>i</i>		0.0033	1.5176+0.9837 <i>i</i>	-0.0652+0.0797 <i>i</i>	-0.1598+0.0184 <i>i</i>	—
	0.30	0.7296+0.0304 <i>i</i>		-0.0001	-83.439-37.844 <i>i</i>	-0.0800+0.0655 <i>i</i>	-0.1765+0.0217 <i>i</i>	—
	0.35	0.8316+0.0252 <i>i</i>		-0.0019	-2.7940-0.9898 <i>i</i>	-0.0876+0.0336 <i>i</i>	-0.1858-0.0012 <i>i</i>	460.1
	0.40	0.9293+0.0210 <i>i</i>		-0.0025	-2.1438-0.7395 <i>i</i>	-0.0803-0.0020 <i>i</i>	-0.1816-0.0369 <i>i</i>	75.4
2000	0.10	0.3108+0.0381 <i>i</i>	0.02666	0.0073	0.2525+0.3036 <i>i</i>	-0.0655+0.0616 <i>i</i>	-0.1361-0.0221 <i>i</i>	131.4
	0.15	0.4365+0.0208 <i>i</i>		0.0011	2.1821+1.1225 <i>i</i>	-0.0295+0.0961 <i>i</i>	-0.1155+0.0518 <i>i</i>	—
	0.20	0.5557+0.0058 <i>i</i>		-0.0022	-1.0802-0.0780 <i>i</i>	-0.0399+0.0989 <i>i</i>	-0.1290+0.0924 <i>i</i>	—
	0.25	0.6723-0.0043 <i>i</i>		-0.0041	-0.6925+0.0821 <i>i</i>	-0.0712+0.0570 <i>i</i>	-0.1781+0.0697 <i>i</i>	24.8
	0.30	0.7874-0.0092 <i>i</i>		-0.0052	-0.6488+0.0802 <i>i</i>	-0.0630+0.0066 <i>i</i>	-0.1886+0.0221 <i>i</i>	64.5
	0.35	0.9006-0.0068 <i>i</i>		-0.0043	-0.7543-0.0153 <i>i</i>	-0.0448-0.0204 <i>i</i>	-0.1655-0.0229 <i>i</i>	—
	0.40	1.0123+0.0047 <i>i</i>		-0.0023	-1.0934-0.3400 <i>i</i>	-0.0254-0.0361 <i>i</i>	-0.1193-0.0654 <i>i</i>	26.8

R	β	$\alpha_1^{(0)}$	k_0	γ	λ_0	λ_2	λ	$ A_1 _e$ (%)
3000	0.10	0.3229+0.0206i	0.01777	0.0020	0.7050+0.5124i	-0.0289+0.0906i	-0.1064+0.0343i	—
	0.15	0.4543+0.0008i		-0.0019	-0.7982-0.0020i	-0.0100+0.0982i	-0.0943+0.0980i	—
	0.20	0.5809-0.0136i		-0.0055	-0.4897+0.1340i	-0.0508+0.0560i	-0.2011+0.0972i	37.4
	0.25	0.7050-0.0203i		-0.0067	-0.4532+0.1371i	-0.0461+0.0079i	-0.2177+0.0598i	58.2
	0.30	0.8272-0.0182i		-0.0058	-0.5387+0.0542i	-0.0306-0.0150i	-0.2059+0.0026i	262.4
	0.35	0.9463-0.0065i		-0.0028	-0.8682-0.2418i	-0.0142-0.0301i	-0.1498-0.0678i	—
	0.40	1.0518+0.0158i		-0.0006	-3.0446-2.7149i	0.0094-0.0351i	-0.0994-0.1321i	34.6
5000	0.10	0.3399+0.0001i	0.01066	-0.0011	-0.7597-0.0494i	0.0096+0.0847i	-0.0690+0.0796i	—
	0.15	0.4811-0.0199i		-0.0056	-0.3865+0.1531i	-0.0333+0.0524i	-0.2349+0.1323i	38.8
	0.20	0.6179-0.0291i		-0.0070	-0.3440+0.1595i	-0.0310+0.0066i	-0.2554+0.1106i	51.3
	0.25	0.7518-0.0257i		-0.0059	-0.4324+0.0583i	-0.0182-0.0121i	-0.2579+0.0202i	112.7
	0.30	0.8798-0.0075i		-0.0021	-0.8688-0.4056i	-0.0011-0.0254i	-0.1688-0.1037i	—
	0.35	0.9982+0.0264i		-0.0001	-9.3486-12.728i	0.0232-0.0241i	-0.0886-0.1764i	38.7
	0.40	1.0983+0.0752i		0.0008	1.9665+5.6025i	0.0455-0.0006i	-0.0964-0.4049i	43.1
7000	0.10	0.3528-0.0116i	0.00762	-0.0032	-0.4722+0.0897i	-0.0010+0.0722i	-0.1996+0.1099i	32.5
	0.15	0.5015-0.0294i		-0.0059	-0.3192+0.1777i	-0.0288+0.0200i	-0.2779+0.1586i	43.1
	0.20	0.6458-0.0319i		-0.0061	-0.3439+0.1162i	-0.0177-0.0047i	-0.2936+0.0885i	60.0
	0.25	0.7826-0.0161i		-0.0033	-0.5952-0.1982i	-0.0035-0.0182i	-0.2584-0.1031i	—
	0.30	0.9063+0.0193i		-0.0001	-6.2558-8.5519i	0.0228-0.0196i	-0.0802-0.1604i	34.7
	0.35	1.0037+0.0697i		0.0006	1.4855+5.4277i	0.0406+0.0107i	-0.0781-0.4231i	40.6
	0.40	1.0700+0.1053i		0.0012	-0.0250+5.0181i	0.0135+0.0393i	0.0173-0.7249i	38.1
10000	0.10	0.3704-0.0328i	0.00533	-0.0013	-1.4175+0.4064i	-0.0174+0.0319i	-0.3619+0.1307i	50.1
	0.15	0.5253-0.0347i		-0.0052	-0.3065+0.1640i	-0.0179+0.0034i	-0.3170+0.1634i	46.1
	0.20	0.6744-0.0246i		-0.0042	-0.4225-0.0450i	-0.0064-0.0115i	-0.3354-0.0465i	—
	0.25	0.8042+0.0099i		-0.0001	-3.4650-4.4557i	0.0202-0.0162i	-0.0700-0.1327i	27.3
	0.30	0.9041+0.0589i		0.0004	1.1252+5.3502i	0.0311+0.0158i	-0.0558-0.3973i	38.5
	0.35	0.9762+0.0832i		0.0007	-0.1519+4.7430i	0.0016+0.0256i	0.0215-0.5965i	37.3
	0.40	1.0559+0.0957i		0.0008	-0.4372+4.8868i	-0.0089+0.0128i	0.0575-0.7296i	36.2

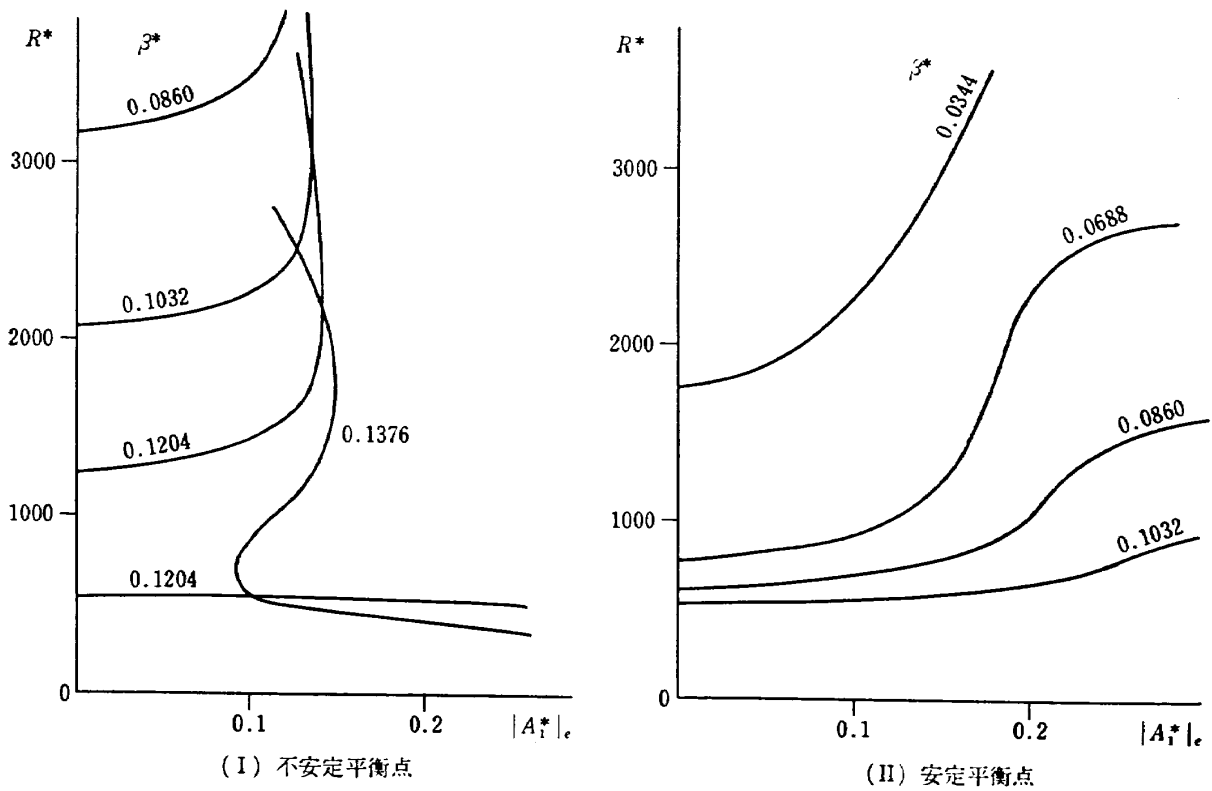
増幅領域, (IV) は絶対減衰領域である。いま, 振動数一定の攪乱が境界層の前縁から下流に向かって進む場合を考えると, x と共に, 直線 OG で示されるような経路をたどる (OG 直線はのちに示めす Klebanoff 等の実験に対応した一様流速と振動数の場合である)。初期攪乱が極端に大きくないかぎり, 領域 (I) では, 不安定平衡点の限界振幅以下の振幅を持つ攪乱になるから, 初期攪乱は減衰しながら領域 (IV) に入る。この領域では, 攪乱がいかに大きくても減衰される性質があるので, 攪乱はさらに小さくなって BC 曲線を横切る。領域 (II) では, 安定平衡点の平衡振幅が x と共に大きくなり, この領域に入った攪乱は平衡振幅を追うように大きくなる。絶対増幅領域 (III) でさらに増幅された攪乱は AB 曲線を横切って, 再び領域 (I) に入る。これ以後の攪乱の発達状況は

AB 曲線を横切るときの振幅の大きさによって異なる。すなわち, すでに十分大きな攪乱は, x と共にさらに増幅されて, 最終的には乱流へ遷移する。これに対して AB 曲線上で, 比較的小さな振幅を持つ攪乱は領域 (I) に入ってから最大値を取り, 再び減衰する。この附近での振幅の変化については, のちに Klebanoff 等の実験結果と比較しながら詳しく述べる。

第 2 図には, 攪乱の大きさ $|A^*|$ に対して平衡点 Reynolds 数 ($\alpha_{11}=0$ に対応する R^*) がどのように変化するかを, β^* をパラメータとして図示した。(i) 図は不安定平衡点に対するもので, (ii) 図は安定平衡点に対するものである。この図から, 平衡点振幅 $|A^*|_e$ を一定にしたときの $R^* \sim \beta^*$ の関係を求め, 第 1 図に示したものが曲線 $J_1BJ'_1, J_2BJ'_2, J_3BJ'_3$ である。これらの曲線は, 攪乱が有限の振幅を持つときの中立



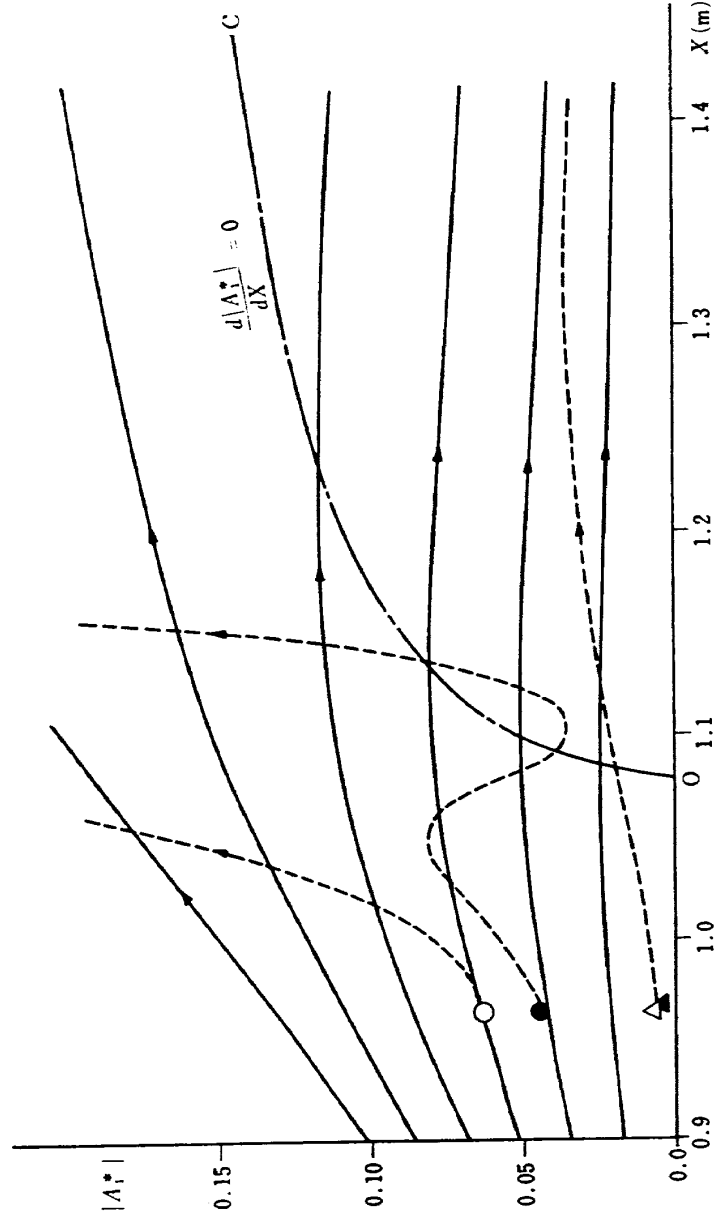
第 1 図 有限攪乱の安定線図



第 2 図 平衡点振幅と平衡点 Reynolds 数の関係

第2表 Klebanoff 等の実験に対応する計算結果 (一様流速 15.24 m/s, 振動数 145 Hz)

x (m)	R	β	$\alpha_1^{(0)}$	k_0	γ	λ_0	λ_2	λ	$ A_1 e$ (%)
0.907	4800	0.282	0.8303 - 0.0172 i	0.01111	-0.00414	-0.5860 - 0.0992 i	-0.0106 - 0.0201 i	-0.2289 - 0.0570 i	-
0.985	5000	0.294	0.8646 - 0.0104 i	0.01066	-0.00264	-0.7611 - 0.2948 i	-0.0038 - 0.0239 i	-0.1921 - 0.0969 i	-
1.065	5200	0.306	0.8984 - 0.0017 i	0.01025	-0.00095	-1.1939 - 0.7439 i	0.0049 - 0.0275 i	-0.1060 - 0.0966 i	-
1.105	5300	0.312	0.9141 + 0.0031 i	0.01006	-0.00057	-1.6117 - 1.2421 i	0.0095 - 0.0276 i	-0.0821 - 0.0983 i	17.8
1.150	5400	0.318	0.9275 + 0.0081 i	0.00987	-0.00041	-2.3624 - 2.2246 i	0.0142 - 0.0264 i	-0.0838 - 0.1188 i	26.1
1.190	5500	0.323	0.9420 + 0.0136 i	0.00969	-0.00030	-3.2682 - 3.5669 i	0.0176 - 0.0252 i	-0.0845 - 0.1366 i	31.6
1.280	5700	0.336	0.9690 + 0.0260 i	0.00935	0.00002	48.191 + 70.651 i	0.0270 - 0.0198 i	-0.0922 - 0.1946 i	36.6
1.420	6000	0.352	1.0102 + 0.0508 i	0.00885	0.00035	3.301 + 7.308 i	0.0373 - 0.0090 i	-0.0916 - 0.2945 i	41.5



第3図 擾乱の主流方向の発達 (一様流速 15.2 m/s, 振動数 145 Hz, 点線は Klebanoff 等 (1962) の実験結果, O, Δ: peak, ●, ▲: valley)

曲線（減衰率が 0 になる曲線）である。

4. Klebanoff 等の実験結果との比較

Klebanoff, Tidstrom および Sargent¹⁾ は、一様流速 15.2 m/s, 平板の前縁から 0.89 m の位置においた振動リボンによって周波数 145 Hz の攪乱を発生させ、平板表面から一定の距離 $y=1.14$ mm における速度変動の x 成分 $u'=\sqrt{u'^2}$ が下流方向に変化する様子を測定した。この実験は第 1 図における直線 OG に沿って攪乱の発達を調べたことになる。

この実験と本理論を比較するため、実験に対応する Reynolds 数と角速度に対して数値計算を行った。計算結果は第 2 表に示した。第 2 表の結果から、攪乱振幅 $|A^*|$ が x 方向に変化する様子を図示したものが第 3 図である。この図で曲線 OC は $|A^*|$ の勾配が 0 になる点を結んだもので、有限中立状態を表わしている。 x 軸上の O 点より左が無限小攪乱の増幅する領域、右側が減衰する領域である。 $x=0.9$ m において、振幅 $|A^*|$ が約 0.076 より小さい場合は攪乱は一時的に増幅するが、曲線 OC と交わり、その後再び減少する。反対に、 $x=0.9$ m において $|A^*|$ が 0.076 より大きい攪乱は x とともに単調に増大する。

一方、実験結果は同図中に点線で示されている。Klebanoff 等の実験では、振動リボンの位置に三次元粗さがおかれ、人工的に三次元性を含んだ攪乱がつくられている。このため、攪乱は z 方向(平板のスパン方向)に周期性を持ち、山の部分 (peak) と谷の部分 (valley) で、 x 方向の増幅率が異なる。初期攪乱が小さいときには、peak と valley における発達の差は非常に小さいが、初期攪乱が大きい場合には、 x 方向の発達状況に大きな差が現われる。

実験結果と計算結果を比べると、初期攪乱が小さいときには、かなりよい一致を示し、ほぼ OC 曲線を境として、増幅状態から減衰状態に移ってゆくが、初期攪乱が大きいところでは、実験結果の方がはやく増幅する傾向を示し、両者はあまりよい一致を示していない。これは、実験における攪乱が三次元性の影響によって、純粋な二次元攪乱より強い増幅性を持っているためと思われる。

5. 結 論

本論文では、平板に沿う境界層の中に現われる二次元攪乱が主流の方向に発達する状況を有限攪乱理論によって調べた。境界層に対して有限攪乱理論を適用する場合に問題となる点は、主として、境界層が主流の方向に厚さを変えることおよび基本流が完全な平行流でないことである。ここでは、この二点の影響を適当な方法で見積り、最も主要な効果だけを含めた理論を導びいた。この結果、主攪乱および倍振動攪乱の方程式は平行流の場合と同様に、Orr-Sommerfeld 型方程式を用いればよいが、平均流ゆがみ方程式に対しては、境界層の厚さの変化および基本流の y 方向速度成分をとともに考慮に入れる必要があることが明らかになった。

数値計算の結果得られた有限攪乱の安定線図(第 1 図)は二次元 Poiseuille 流れの場合と似た形になり、不安定平衡点存在領域、安定平衡点存在領域、絶対増幅領域、絶対減衰領域の 4 つの領域が得られた。また、無限小攪乱の中立安定曲線が有限振幅の影響によってずれてゆく様子(有限中立曲線)を示すことができた。

Klebanoff 等が行った実験に対応して計算を行い、実験結果と本理論による計算結果を比較した。これから、中立曲線の上分枝を横切って発達する攪乱の状況を示めす図(第 3 図)が得られた。計算結果は実験と十分一致しているとは言えないが、その主要な特性を表わしている。両者の差の主な理由は実験における攪乱が三次元性を持っているためと思われる。

最後に、本研究を進めるにあたって、東京大学名誉教授谷一郎博士には、多くの有益なご助言を頂き、とくに、境界層流れに対して有限攪乱理論を適用し数値結果を得るよう御指摘下さったことには深く感謝いたします。また、東京大学工学部佐藤淳造博士には研究の過程でたえず熱心な討議をして下さったことに感謝の辞を表します。

参 考 文 献

- 1) Klebanoff, P.S., Tidstrom, K.D. and Sargent, L.M.: The three-dimensional nature of boundary-layer instability. J. Fluid Mech. 12, 1 (1962)

- | | | | |
|---------|--|-----------|---|
| TR-323 | 月と太陽の引力の作用下にある地球の人工衛星の運動に関する研究
The Study on the Motion of an Artificial Earth Satellite under the Gravitational Attraction of the Sun and Moon | 1973年7月 | 武内澄夫, 松島弘一 |
| TR-324 | 偏揺れ振動するT型尾翼の水平尾翼に働らく, 非定常ローリングモーメントの測定
Measurement of Rolling Moments Acting on the Stabilizer of T-tails Oscillating in Yaw | 1973年6月 | 市川輝雄, 磯貝紘二
安藤泰勝, 江尻 宏 |
| TR-188T | Analysis of the Anisoelastic Errors of a Floated Single Degree of Freedom Integrating Gyro | June 1973 | Masao OHTSUKI,
Hirokimi SHINGU,
Jyoji TABATA,
Takao SUZUKI,
Shigeharu ENKYO |
| TR-325 | ロケットの分離特性に関する研究
Some Investigation on the Separation Characteristics of a Two-Stage Vehicle Model | 1973年7月 | 宇宙研究グループ |
| TR-326 | 電子衝撃型水銀イオンエンジンの研究
Experimental Investigation on 5 cm Mercury Electron Bombardment Ion Engine | 1973年7月 | 中村嘉宏, 東 久雄
宮崎勝弘 |
| TR-327 | ガスタービン燃焼器のライナにおける伝熱
On the Liner Heat Transfer of Gas Turbine Combustor | 1973年7月 | 相波哲朗 |
| TR-328 | 連続板の振動
Natural Frequencies of Continuous Plate | 1973年7月 | 林 洋一, 川井忠彦 |
| TR-329 | ジェットエンジン用薄肉組立ロータの曲げ剛性(静荷重試験と振動試験による測定と有限要素法による計算)
Flexural Rigidity of the Thin Walled Build-up Rotor for the Jet Engine (Measurement by Static Load Test and Calculation by Finite Element Method) | 1973年7月 | 宮地敏雄, 小河昭紀
星谷昌二, 祖父江 靖 |
| TR-330T | On the Linear Theory of Thin Elastic Shells | July 1973 | Tatsuzo KOGA,
Susumu TODA |
| TR-331 | 非線型層流安定理論と数値計算 (第一報 べき級数展開による Orr-Sommerfeld 方程式の数値解法)
A Non-linear Hydrodynamic Stability Theory with Numerical Calculations. (Part 1. A Power Series Method for the Numerical Treatment of the Orr-Sommerfeld Equation) | 1973年7月 | 伊藤信毅 |
| TR-332 | 非線型層流安定理論と数値計算 (第二報 平行流における有限攪乱理論と二次元 Poiseuille 流れへの適用)
A Non-linear Hydrodynamic Stability Theory with Numerical Calculations. (Part 2. Theoretical Analysis and the Numerical Results for Plane Poiseuille Flow) | 1973年7月 | 伊藤信毅 |

航空宇宙技術研究所報告333号

昭和48年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)●182

印刷所 有限会社啓文堂松本印刷
東京都文京区水道2-7-5
