

UDC 534.838:  
532.517:  
534.22

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-334

音波と乱流の干渉によるソニック・ブーム波形の変形

河野長正

1973年8月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

既 刊 報 告

- |         |   |           |  |
|---------|---|-----------|--|
| TR-316  | 推力中断型固体ロケット用プロペラントの組成と圧力指数の関係<br>Relation between the Compositional Variables and the Pressure Exponent of Controllable Solid Rocket Propellant   | 1973年4月   | 五代富文, 清水盛生<br>伊藤克弥, 西村久男<br>種村利春, 藤原勉                        |
| TR-317  | ファンエンジンの性能に関する考察<br>Some Considerations on the Performance of the Fan Jet Engine  | 1973年5月   | 鳥崎忠雄, 森田光男<br>関根静雄   |
| TR-318T | A Convergence theorem of nonlinear semi-groups and its application to first order quasilinear equations   | June 1973 | Tadayasu Takahashi   |
| TR-319  | フライングテストベッド全機作動実験<br>—予備・第一次・第二次実験—<br>Ground Operation Tests of Flying Test Bed for VTOL Aircraft at National Aerospace Laboratory   | 1973年6月   | 滝澤直人, 田辺義一<br>波谷昭義, 小川敏雄<br>藤枝敦俊, 甲斐忠夫<br>宮本義人, 鳥崎忠雄<br>小野幸一 |
| TR-320  | 地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究—運動が長期間にわたる場合—<br>The Study on the Motion of an Artificial Satellite in the Earth's Gravitational Field—in the Case of the Long Maneuver of Free Orbital Motion—               | 1973年6月   | 武内澄夫   |
| TR-321  | 空冷軸流タービンの空力性能に関する研究<br>(第1報 空冷タービンの設計および全体性能に関する実験研究)<br>Cold-Air Investigation of an Air-Cooled Axial-Flow Turbine (Part 1 Turbine Design and Overall-Stage Performance without Supply of Cooling Air) | 1973年12月  | 山本孝正, 高原北雄<br>能瀬弘幸, 井上重雄<br>臼井弘, 三村富嗣雄                       |
| TR-322  | IC 演算増幅器を利用した乱流頻度計<br>Application of Intergrated Circuit Operational Amplifiers on Turbulence Intermittency Meters  | 1973年6月   | 綿貫忠晴, 佐藤淳造   |
| TR-323  | 月と太陽の引力の作用下にある地球の人工衛星の運動に関する研究<br>The Study on the Motion of an Artificial Earth Satellite under the Gravitational Attractino of the Sun and Moon   | 1973年7月   | 武内澄夫, 松島弘一   |
| TR-324  | 偏揺れ振動するT型尾翼に働く, 非常常ローリングモーメントの測定<br>Measurement of Rolling Moments Acting on the Stabilizer of T-tails Oscillating in Yaw   | 1973年6月   | 市川輝雄, 磯貝紘二<br>安藤泰勝, 江尻宏                                      |
| TR-188T | 浮動型1自由度積分ジャイロの不等弾性誤差<br>Analysis of the Anisoelastic Errors of a Floated Single Degree of Freedom Integrating Gyro  | 1973年6月   | 大月正男, 新宮博公<br>田畑浄治, 鈴木孝雄<br>円居繁治                             |
| TR-325  | ロケットの分離特性に関する研究<br>Some Investigation on the Separation Characteristics of a Two-Stage Vehicle Model  | 1973年7月   | 宇宙研究グループ   |
| TR-326  | 電子衝撃型水銀イオンエンジンの研究<br>Experimental Investigation on 5cm Mercury Electron Bombardment Ion Engine  | 1973年7月   | 中村嘉宏, 東久雄<br>宮崎勝弘  |
| TR-326  | ガスタービン燃焼器のライナにおける伝熱<br>On the Liner Heat Transfer of Gas Turbine Combustor  | 1973年7月   | 相波哲朗   |

# 音波と乱流の干渉によるソニック・ブーム波形の変形\*

河野長正\*\*

## Distortions of Sonic Boom Pressure Signature by Sound and Turbulence Interaction

By Nagamasa KONO

In order to estimate the effect of large eddies in atmospheric turbulence near the earth surface upon a sonic boom pressure signature, an experimental and theoretical investigation concerning the scattering of sound by a nonisotropic turbulence has been performed. An ultrasonic sound beam with frequencies in the range 15-300 kHz is transmitted and allowed to traverse the wake of a circular cylinder. The amplitude-modulated sound signal due to turbulence interaction is separated into mean and fluctuating components, and the sound attenuation and the scattering energy spectrum are obtained over the ratio of the incident sound wave length to the scale of eddies from unity to about a hundred. This result was compared with Lighthill's general theory of sound and turbulence interaction applied to three types of a large eddy model, and distortions of a normal N-wave are calculated employing these models.

### 1. 序 論

乱流と音波の干渉の現象は空力的騒音の発生、伝播の基礎的な問題と共に、実用面では非均質大気中を飛行する航空機からの騒音やソニック・ブーム等の問題においても重要な関係をもっている。この問題の一般的な取扱いは光や電磁波の非均質媒質中の伝播に関連して、多くの人々によって研究されている。この方法を発展させ、Mintzer<sup>1)</sup>等は気流中の乱れによる伝播速度が均質なものより僅かに異なるとして、Born型の波動方程式を解いた。ここで音波の屈折率の場所による変化は、その相関係数が指数関数で与えられるとして解を求めている。これに対し、空気力学的な立場に立った理論的取扱いはLighthill<sup>2)</sup>、Kraichnan<sup>3)</sup>、Plotkin<sup>4)</sup>等によって行なわれ、音波と流体運動の相互干渉を考慮した運動方程式を解き、解をえている。これらの取扱いでは乱流を等方性乱流に限定している点と、入射波の波長と乱れの代表的な渦の大きさの比をパラメータとして、この値が1より大きい場合と小さい場合に分け、それぞれ音波の減衰率が入射波の周

波数の2乗と5乗に比例することが示されている。この結果は大気中の音波の伝播の測定や、Schmidt<sup>5)</sup>等によって風洞実験により格子の後の等方性乱流による超音波の減衰の測定によって確かめられている。また、Müller, Matschat<sup>6)</sup>は単一の渦糸と平面波との干渉を理論的に取扱い、音波の各散乱角に対する減衰量を求め、このような渦が分布している場合の減衰量を計算した。この方法では渦に対し、内径と外径を決めてそれ以外の所で流れがないとし、不連続面をダブルレット層として処理している。この場合も渦の分布は等方性で、音波の波長と渦の大きさの比が1より大きい場合と小さい場合が求められ、これが同程度の場合あまり論じられていない。

このように、これまでの研究は主として乱流による音波の平均的な減衰量を求めることに関心があり、乱流の時間的変動による散乱波の応答については、ほとんど考慮が払われていなかった。本報告の目的は非等方性乱流場として、最も簡単な流れ場の一つである円柱後流による音波の干渉を超音波によって実験的に調べ、干渉の時間的変動量を解析して、単独の渦による減衰量や音波の散乱スペクトルの入射音波の波長と渦の大きさの比に対する関係等を調べ、乱流と音波の干

\* 昭和48年6月6日受付

\*\* 空気力学第一部

渉の諸特性を明らかにすること、および、これらの結果を Lighthill の理論を用い、簡単な渦モデルによる理論的な結果と比較する。さらに実用的な問題として、高々度を超音速飛行する航空機からのソニック・ブームが、かなり強い風速の地面境界層付近で、正常な N 波形が変形<sup>(7),(8)</sup>をうけることの理論的評価にこれらの渦モデルによる結果を適用する。これはソニック・ブームについて、これまでの飛行実験の結果をみると圧力波形で比較的波長の長い低周波成分で乱れの干渉による影響をうけていること、この実験により乱流場の大きな渦が、渦のスケールと同程度の波長の音波と強く干渉し、散乱波の時間的変動に大きく寄与していることに基づくものである。また、音波の散乱効果を利用すればジェット・ノイズ等の空力的 4 重極子による騒音の発生に対し、音源となる全乱流エネルギー・スペクトルが測定され、これを波数空間で積分すると等価音源の強さ、分布等の性質が判り、この面での研究に有益であると考えられる。

## 2. 記号

- $A$ : 定数  
 $a$ : 音速  
 $F_{ij}(k)$ : 乱流のエネルギー・スペクトル関数  
 $I$ : 音場の強さ  
 $I_s$ : 散乱波の音場の強さ  
 $\Delta I$ : 音場の強さの変動成分  
 $J_0(x)$ : 第一種零次ベッセル関数  
 $J_1(x)$ : 第一種一次ベッセル関数  
 $k$ : 散乱ベクトル  
 $k$ : 散乱ベクトルの絶対値  
 $L$ : 乱流場の大きさ  
 $l, m$ : (64) 式で定義  
 $p, q$ : (55) 式で定義  
 $p(t)$ : 圧力変動  
 $p_s$ : ソニック・ブームの圧力上昇  
 $P(\omega)$ : 音波の圧力スペクトル関数  
 $(r, \theta), (r', \theta')$ : 乱流場の座標  
 $s, s'$ : 変換された時間  
 $t$ : 時間  
 $T$ : ソニック・ブームの持続時間  
 $v_i$ : 速度変動成分  
 $x$ : 原点より観測者までの距離  
 $x_i$ : 観測点の座標  
 $(y_i, z_i), (y'_i, z'_i)$ : 乱流場の座標  
 $W$ : 乱流場の大きさ

- $R_a$ : 渦系の外径  
 $R_i$ : 渦系の内径  
 $\alpha$ : 定数  
 $\beta$ : 渦のスケール  
 $\epsilon$ : 無次元振幅  
 $\kappa$ : 入射音波の波数  
 $\Gamma$ : 渦系の強さ  
 $\rho$ : 密度  
 $\varphi$ : 観測点の角度

## 3. 実験装置および方法

音波と乱流の干渉の実験において、もっとも重要なパラメータは音波の波長と渦の大きさの比であろう。ここで目的とする対象は音波の波長と渦の大きさが同程度の場合の干渉であり、可聴領域の周波数の音波を用いると乱れのスケールは数メートルから数センチメートルのものを必要とし、これを風洞で実現するためには、かなり大きなものが必要となる。また、可聴領域の音波となると音源の大きさや、周囲の反射、雑音等が問題となり、実験上の困難さが非常に大きい。そこで、このような困難さを避けるため、非常に小型の風洞でスケールの小さい乱れを作り、これと同程度の波長の超音波を用いて実験を行なった。相似性の問題点として、波長が短かくて大振幅の超音波は線形範囲を起し、非線形な効果が生じること、および空気構成分子による異常吸収が特定の波長で生じることが考えられるが、前者はソニック・ブーム等の強い音波の類似のためには好都合であるが、現在の装置では超音波の強度は微弱でほとんど問題とならない。また、後者については、このような異常吸収の生じない波長を選ぶことによってこの影響を避けることができる。

実験装置のブロック・ダイアグラムを第 1 図に示す。実験に使用した風洞は開放型で吸口が 20 cm×15 cm、風速は 10 m/sec を標準とした。風洞測定部は音波の反射をさけるため自由な空間とし、吹口に 4~20 mmφ の直径の異なる 1 本の円柱をおき、その後流中に流れ方向と円柱の軸にそれぞれ直角な方向に超音波を通過させた。超音波の送信、受信はコンデンサー・マイクロホン型式のものを使用した。この構造は第 2 図に示す如く、数ミクロンの厚さのストレッチフィルムに金属を蒸着させ、これに張力を加え、ホーニング加工あるいは同心円状の溝のある電極上に密着させたもので、電極面は球面状をして広い指向性をもたせてある。送信の場合は偏極電圧を加え、必要な周波数の高周波電圧を重畳すればよい。また、受信の場合は

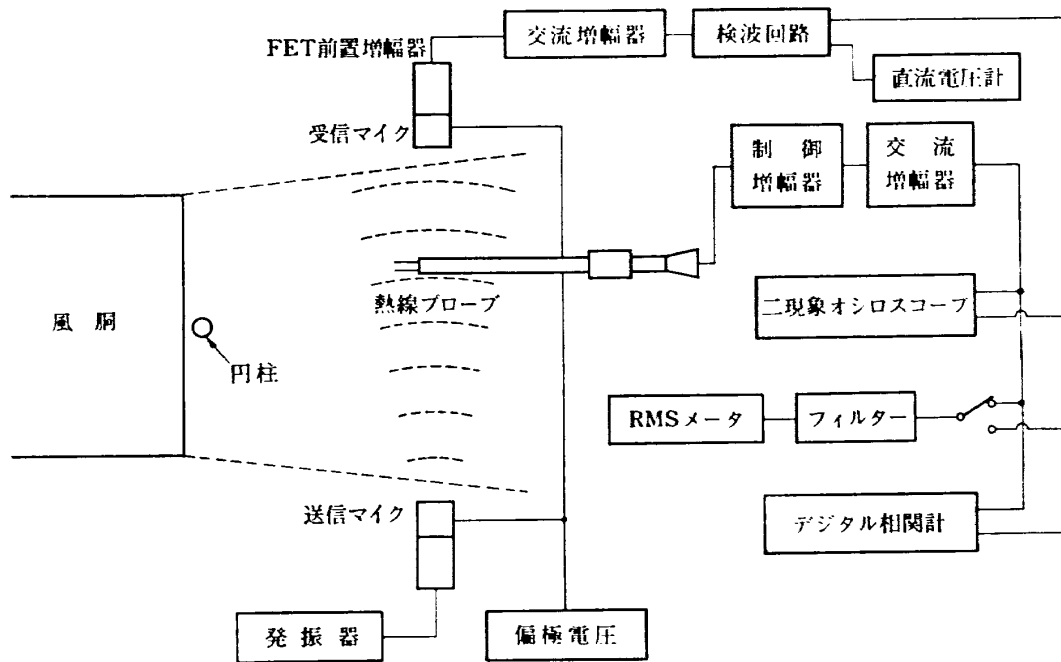


図1 実験装置ブロックダイヤグラム

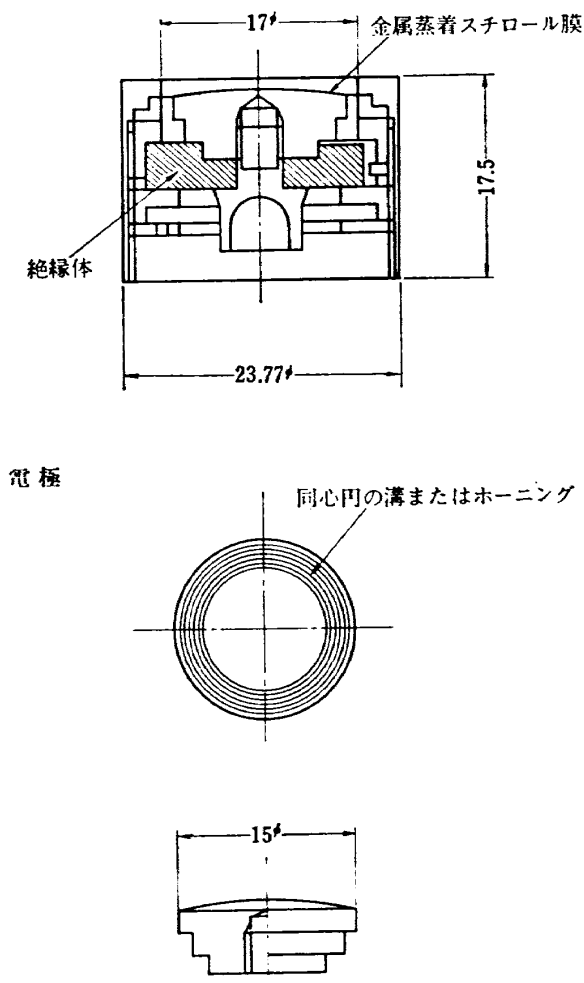


図2 超音波コンデンサー・マイクロホン

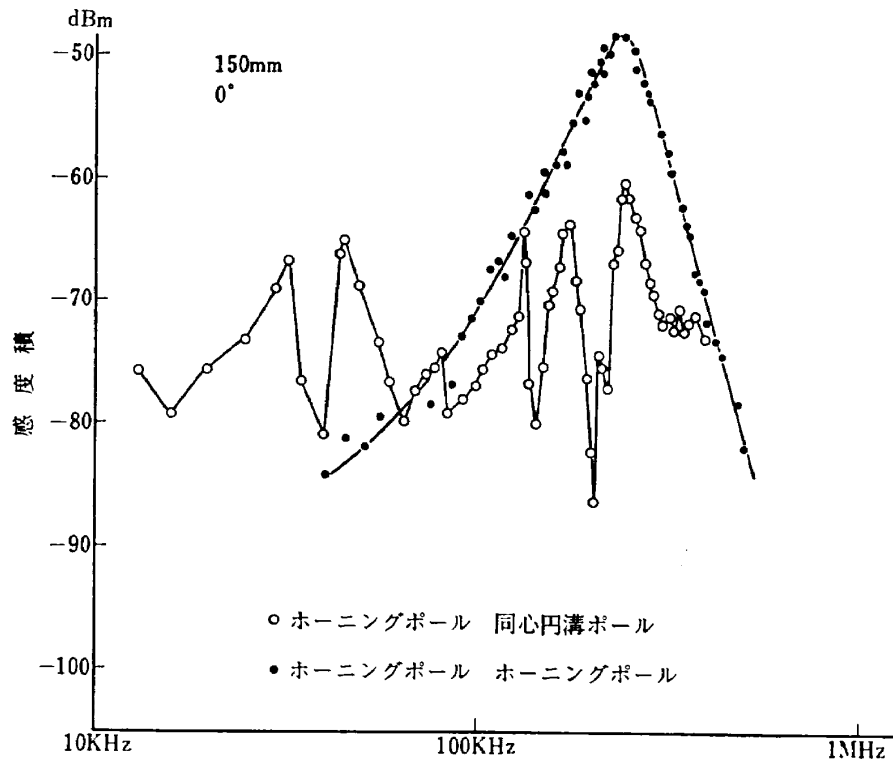


図 3 送受信周波数特性

同様に偏極電圧を加え、高入力インピーダンスの増幅器により音圧による電圧の変化を検出する。このような型式のマイクロホンの周波数特性は一枚の薄膜の振動と異り、数多くの小さなコンデンサー・マイクロホンの集合となっているため、個々のマイクロホンによって特性が異なり、かなりピークやディップがある。この型式のマイクロホンを用いた送受信の可能な周波数は約 300 kHz までで、その伝送特性の例を第 3 図に示す。ホーニング電極同志の場合一つの大きなピークを示すが、ホーニング電極と同心円の溝の電極を組合せると同程度の高さのいくつものピークがえられる。送信器の出力は数十 mW 程度の微弱なものである。また、指向性はこの実験の場合、渦の大きさや配列に関係する重要な特性である。これは電極の形状や周波数によって異なるが、大体、第 4 図のようになり、周波数が高くなるとかなり鋭い指向性となる。無限大バツフル内で振動する円板の場合、指向角度は周波数に逆比例するが、これに近い特性を示している。このような方法で発生させた超音波を円柱後流中を通過させ、受信された音波の電気信号は、先づ整流した後、平均成分と変動成分すなわち、直流成分と交流成分に分離され、それぞれ電圧計、RMS メータ、フィルター等によって処理される。一方、流れの測定には主として熱線風速計が使用され、平均風速、乱れの強さ、自己お

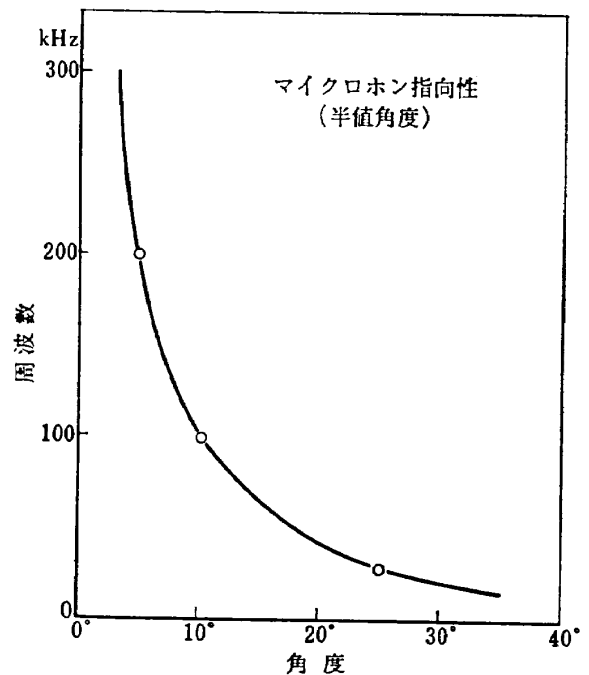


図 4 マイクロホン指向特性

よび相互相関等が測定された。また音波との相関も測定され、干渉の機構の解明に用いられた。写真 1 は風速 10 m/sec の一様流中を 30 kHz の超音波を通過させ受信された信号であるが、写真 2a, および 3a は直径 10 mm の円柱後流で、それぞれ 30 kHz および

200 kHz の周波数の信号を示す。両者とも円柱後流の乱れによって振幅変調を受けているが、入射音波の周波数が高くなると共に高い周波数の変調波が現われて、波形歪が増していることが判る。2b および 3b

は上側に変調波と下側に熱線風速計によるカルマン渦の速度信号を示す。両者の基本周波数が一致していることが判る。

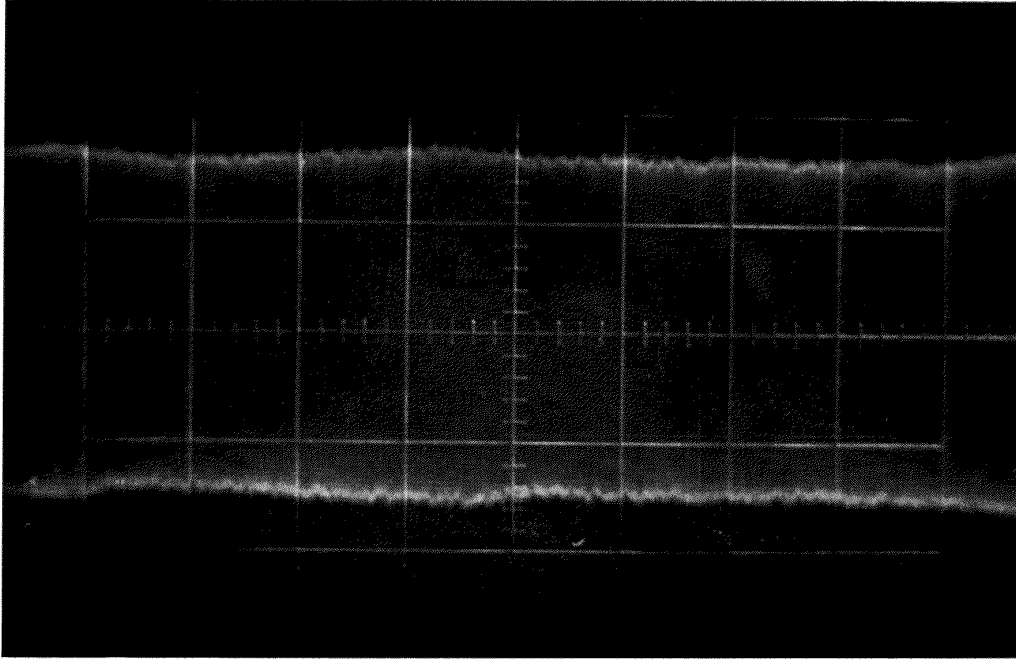


写真 1 一様流中を通過した超音波 (30 kHz)

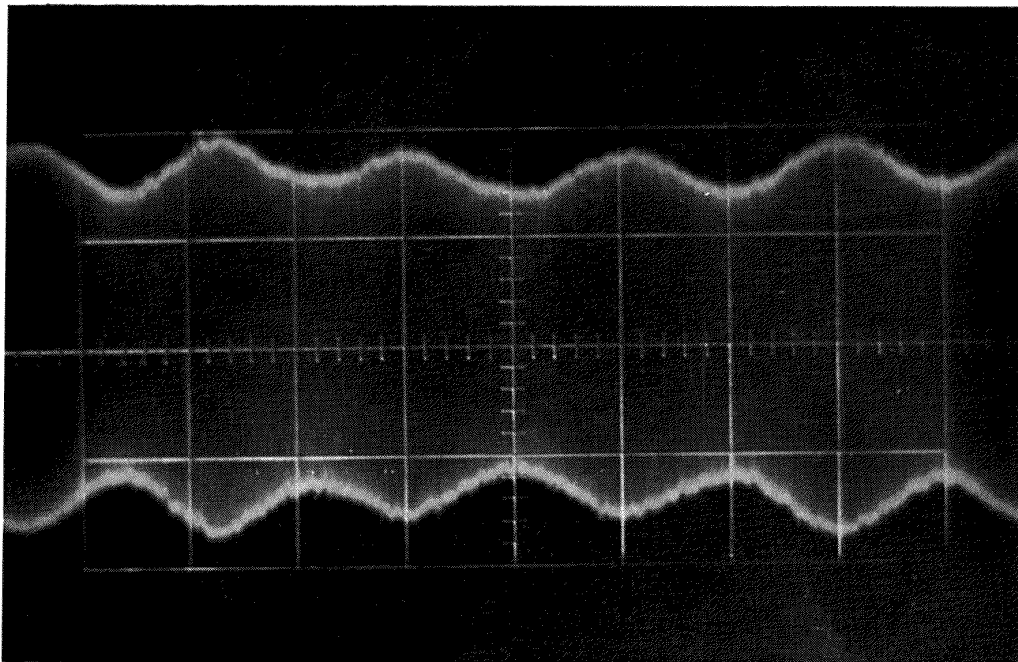


写真 2a 円柱後流中を通過した超音波 (10 m/s, 30 kHz)

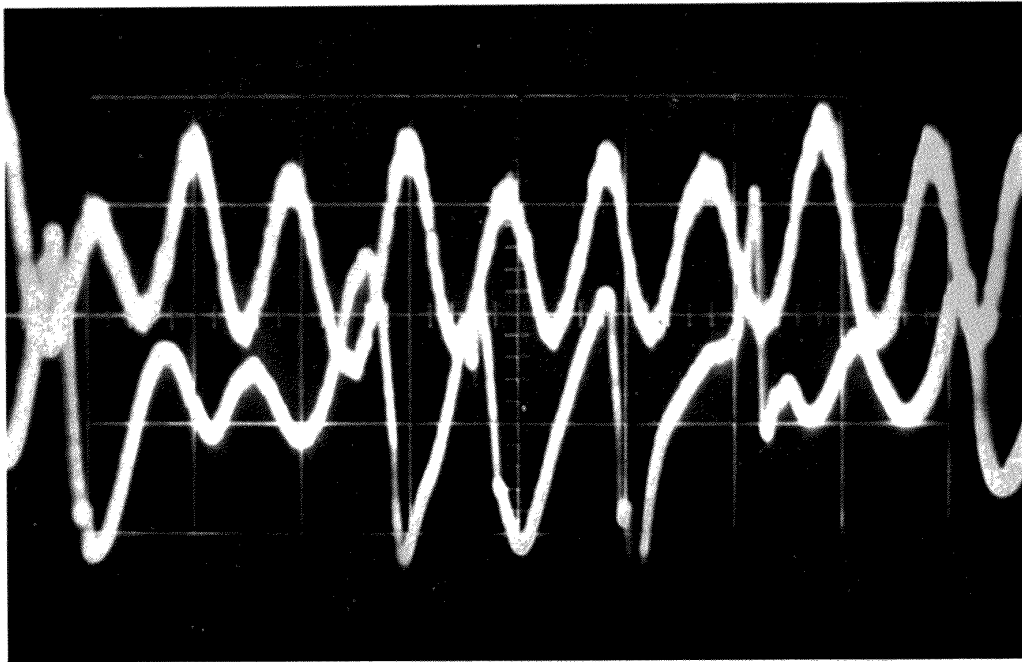


写真 2b 上側：超音波の変調波  
下側：カルマン渦風速変動

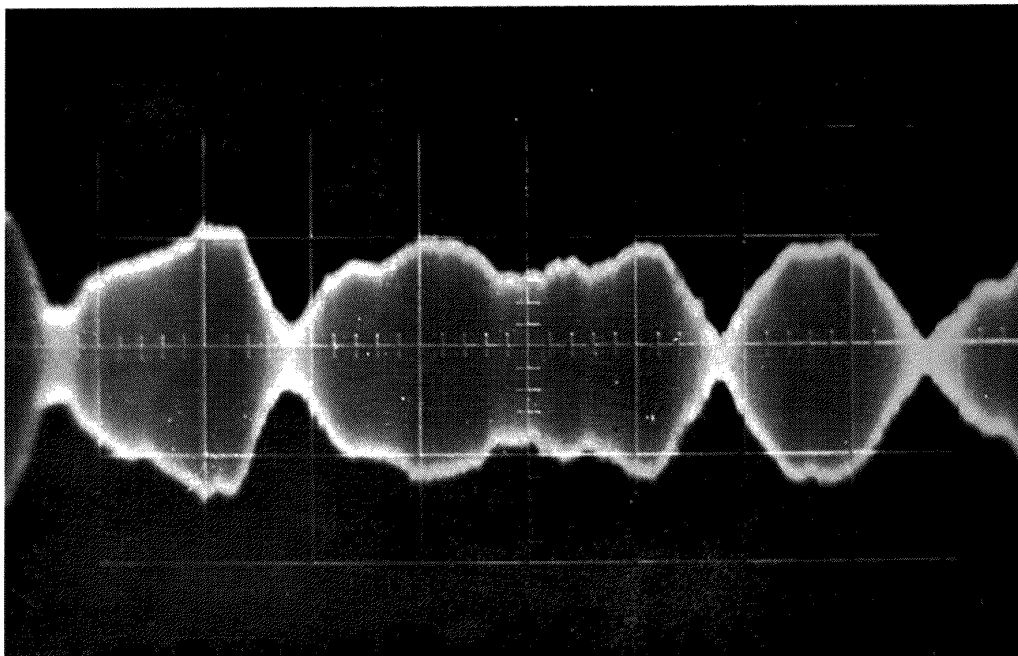


写真 3a 円柱後流中を通過した超音波 (10 m/s, 200 kHz)



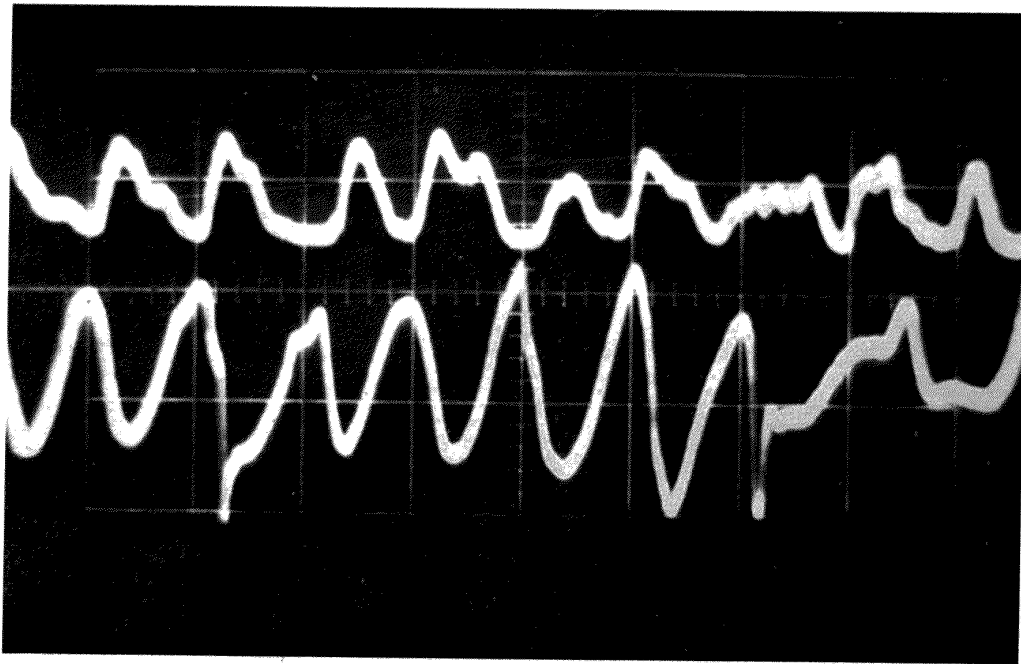


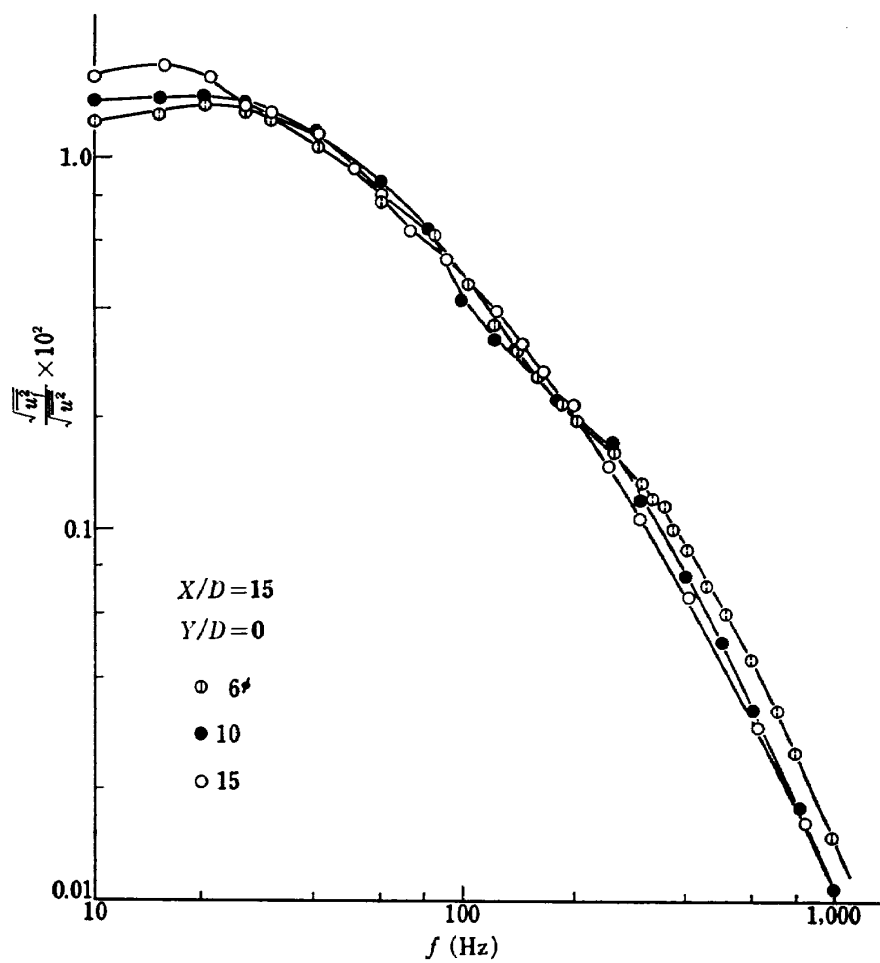
写真 3b 上側：超音波の変調波  
下側：カルマン渦風速変動

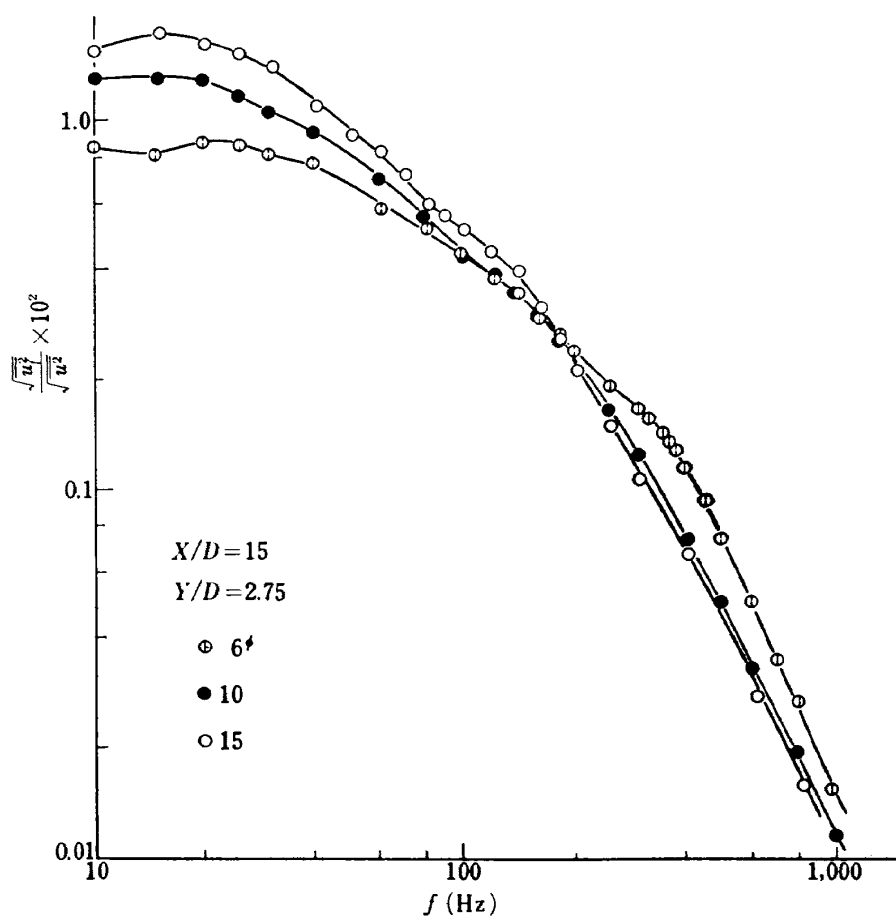
#### 4. 実験結果

実験は円柱直径が 4 mm, 6 mm, 10 mm, 15 mm および 20 mm のものについて行なわれたが、基本的には風速 10 m/sec,  $X/D=15$  (円柱中心より後流を  $X$  方向に、この方向と円柱軸に直角に  $Y$  方向をとる) で直径 10 mm のものを中心にして測定された。第 5 a, b 図には直径 6 mm, 10 mm, 15 mm, 20 mm について  $X/D=15$  において、それぞれ  $Y/D=0, 2.75$  の  $u$  成分の RMS 値のスペクトル分布を示す。これらの図で明らかな如くカルマン渦の周波数 380 Hz, 200 Hz, 110 Hz (それぞれ 6 mm, 10 mm, 15 mm の円柱に対応) はかなり崩壊し、この成分はあまり顕著でない。次に第 6 図は通過音波の減衰量、すなわち円柱のある場合とない場合の直流成分の減少の割合を入射周波数に対して示したもので、もし、渦の大きさが入射波長に比して十分大きい場合は周波数の 2 乗に比例して減衰量が増すことが理論的に予想されている。この場合、測定結果は精度が悪く、この方法ではあまり細かい点は分らないが漸近的な振舞いはこれに近いことが分る。変動成分は個々の渦がある間隔で通過するときの振幅の変動で音波の渦による減衰量とみなされ、この RMS 値を円柱の直径と入射音波の波長の比、すなわち  $f \cdot D$  で示すと第 7 図の如くなる。円柱の直径が異ると  $f \cdot D$  値の高い値で十分な相似性を示

していないことが特徴的である。第 8 図は各円柱のカルマン渦の周波数にフィルターを同調させ、それぞれの円柱について超音波の変動成分をとり出し、前と同様に  $f \cdot D$  について示した。これもよい相似性を示していないが、いづれも周波数に対する増加は単調でなく、波うっている。第 9 図は同様にカルマン周波数成分を同一の円柱で  $X/D$  を変えて測定したもので、これは  $X/D$  に比例してカルマン渦が減衰することを考慮すると、かなりよい相似性を示す。次に、風速に対する変動成分の関係をみると第 10 図の如くなり、これは各円柱に対してよい相似性をみせる。カルマン渦の強さが平均風速の  $3/2$  乗に比例する実験事実からこの変動成分は渦の強さに比例していることを示している。6 mm, 10 mm, 15 mm の円柱について変動成分の RMS 値のスペクトル分析を行ない、各周波数についての分布をみると、それぞれ第 11 a, b, c 図のごとくなり、全般的に風速変動のスペクトルと比較するとかなり異なった形をしていることが分る。この理由は一つの音波の波長に対し渦の大きさや強さによって干渉の度合いが異なるため、円柱後流の大きな渦とみられるカルマン渦と最も強く干渉していることによる。したがって、風速変動ではカルマン渦の成分が卓越していないに抱らず、音波の干渉はカルマン渦でかなり著しい。

このような入射音波の変動が生じる機構を調べるた

図 5a 速度変動スペクトル ( $Y/D=0$ )

図 5b 速度変動スペクトル ( $Y/D=2.75$ )

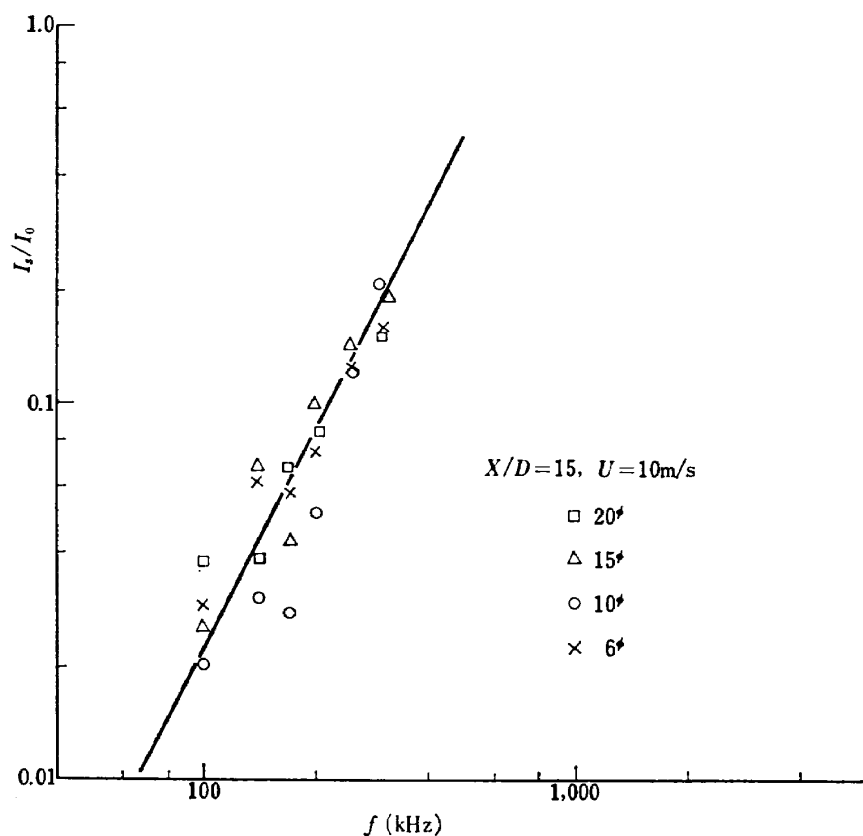


図 6 円柱後流による音波の減衰量 ( $I_0$ : 入射波の強さ,  $I_s$ : 散乱による減衰量)

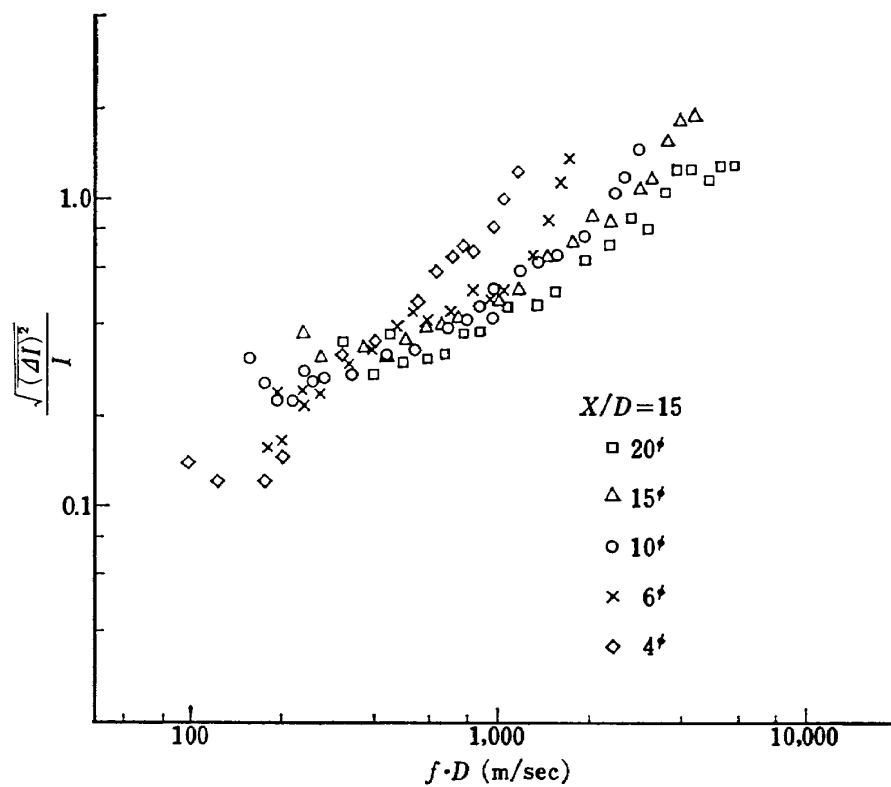


図 7 円柱後流による散乱波の強さ

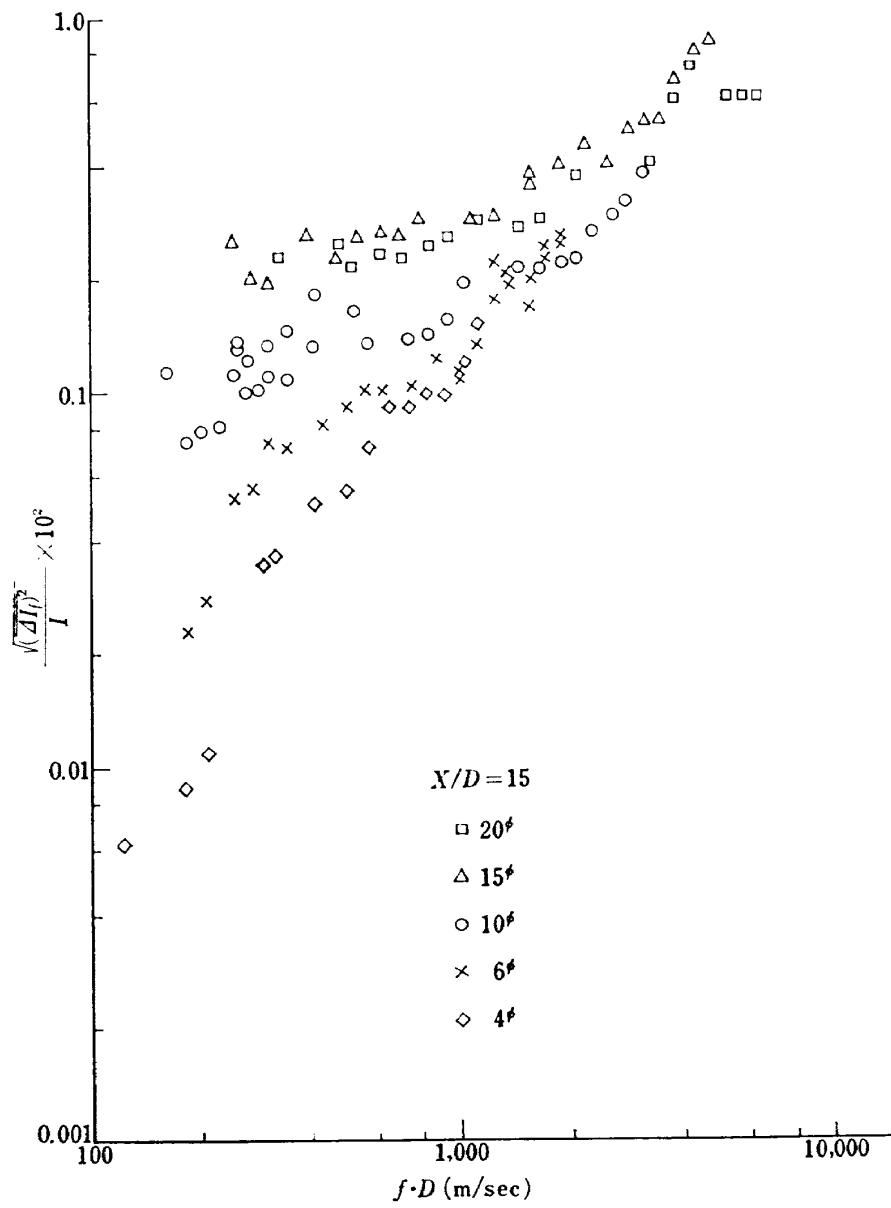


図 8 円柱後流による散乱波のカルマン周波数成分

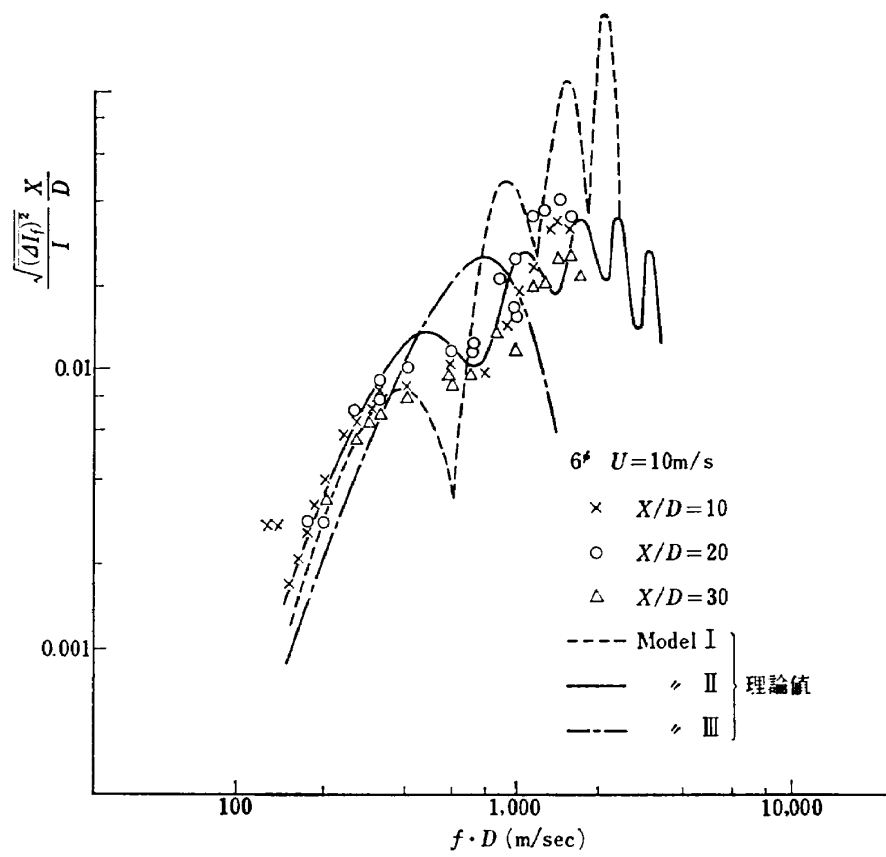


図 9 円柱後流による散乱波のカルマン周波数成分

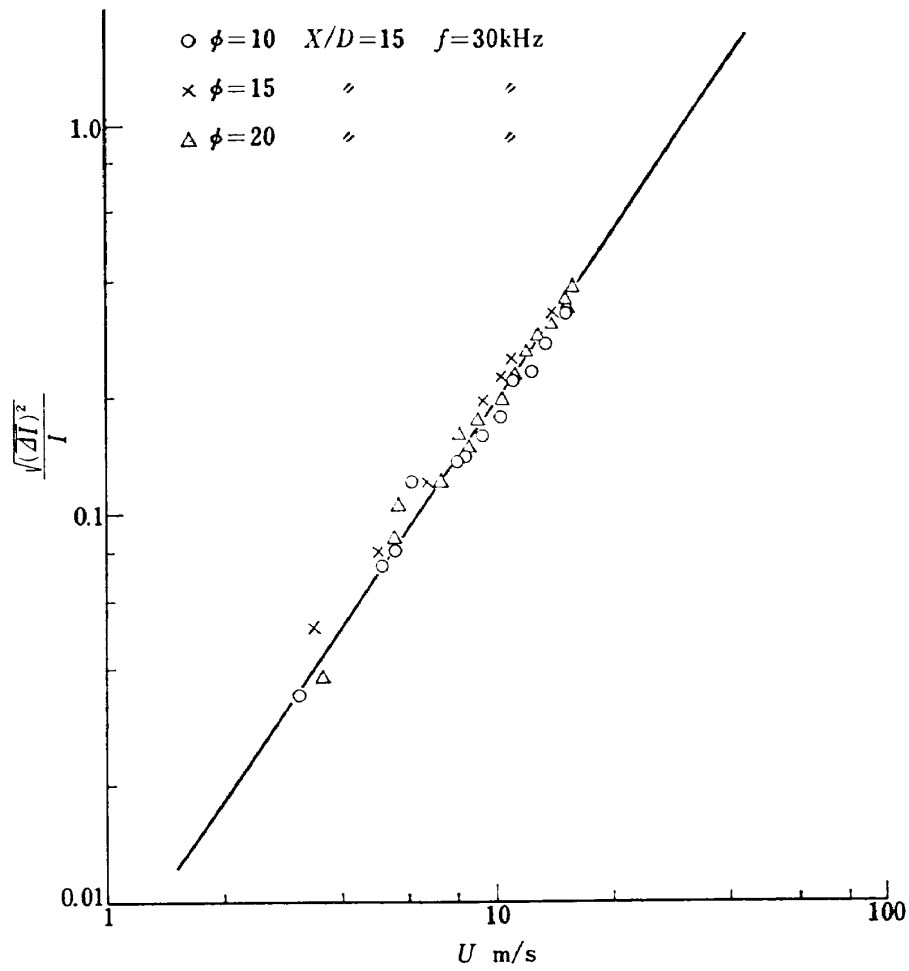


図 10 散乱波の一樣流速に対する関係

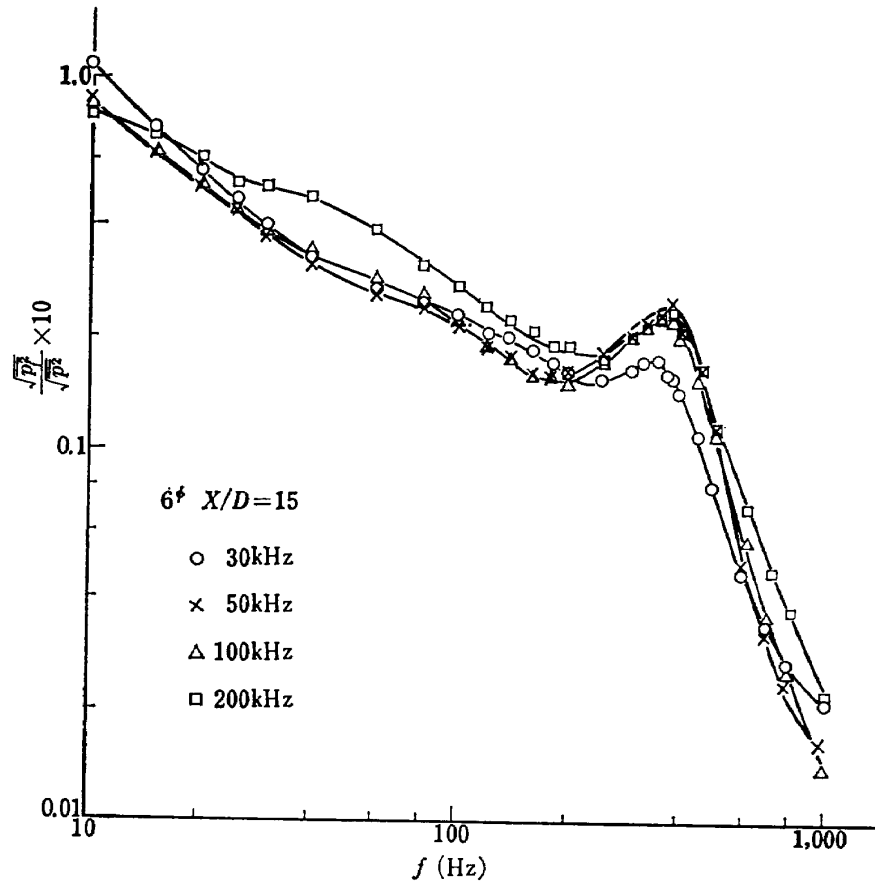


図 11a 散乱波の圧力変動 (RMS 値) スペクトル (6φ)

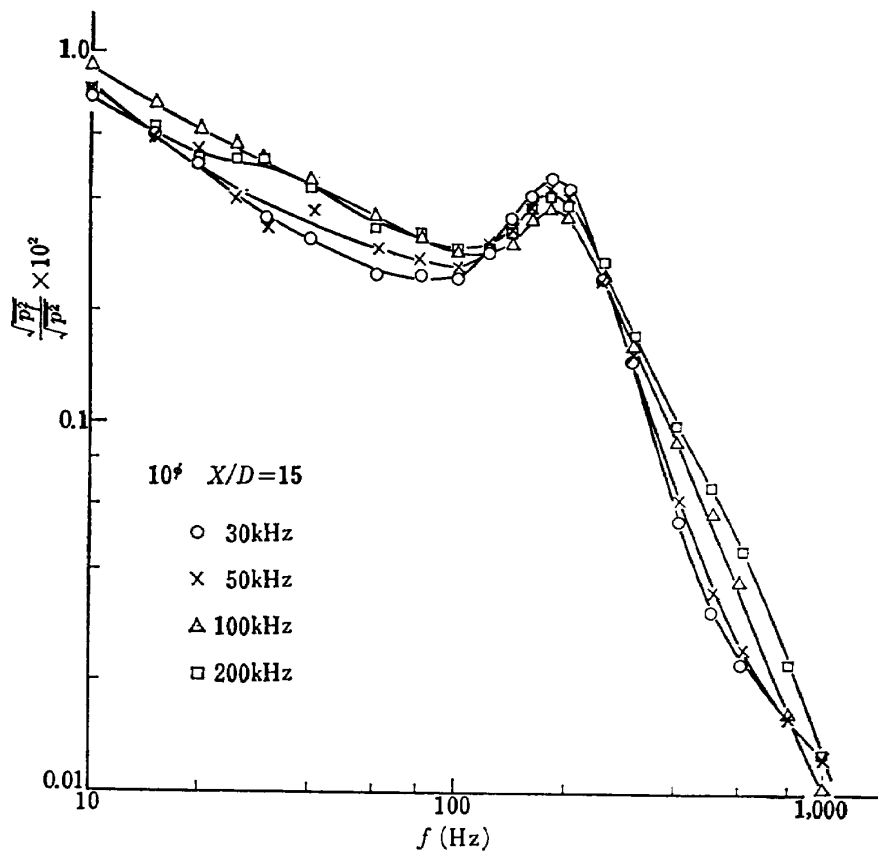


図 11b 散乱波の圧力変動 (RMS 値) スペクトル (10φ)



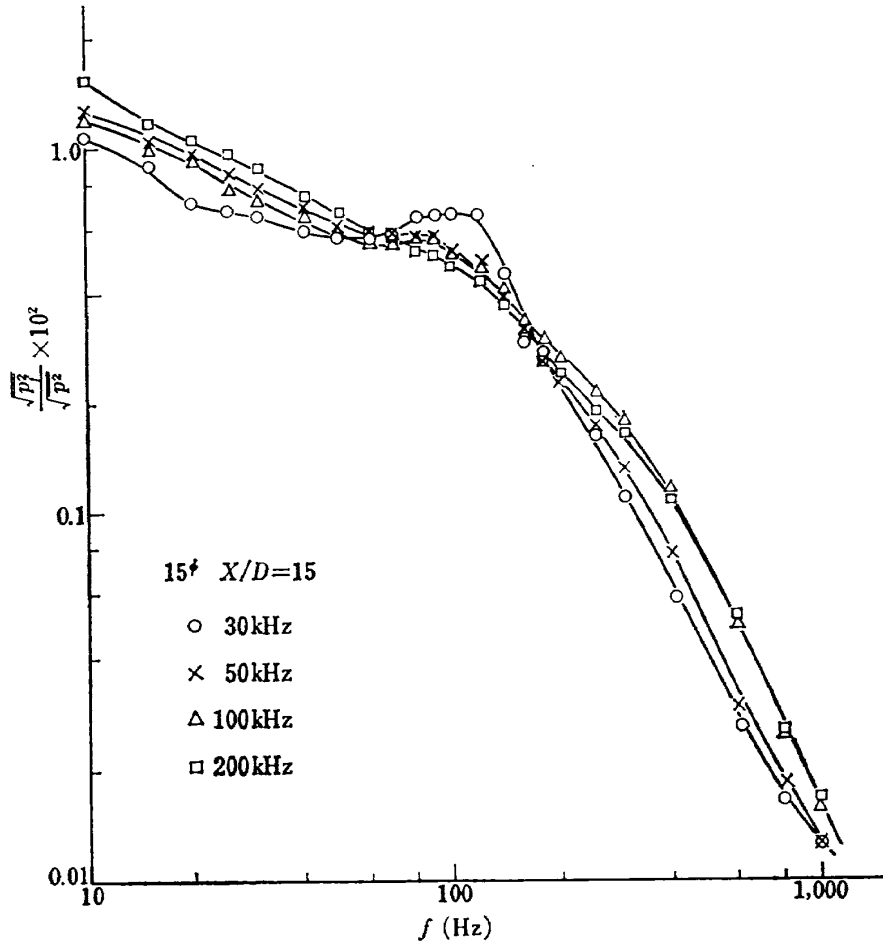


図 11c 散乱波の圧力変動 (RMS 値) スペクトル (15°)

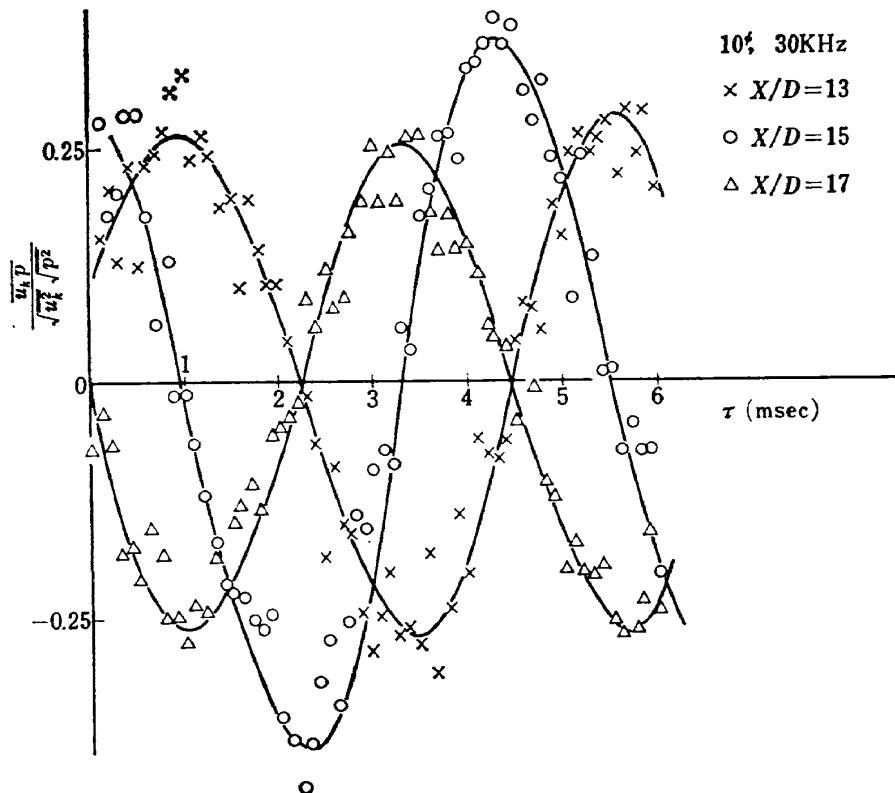


図 12 カルマン渦速度変動と散乱波との相互相関

めに、渦の流れる速度と変動成分の移動速度の関係を次のようにして測定した。すなわち、基準になる信号として熱線風速計をきれいな正弦波のカルマン渦の発生する場所におき、送信用マイクロホンは固定し、受信用のマイクロホンを上下流にそれぞれ 2 cm ずつ移動し、熱線風速計との時間相互相関を測定した。この結果を第 12 図に示す。図より 2 cm の距離の差による位相差は約 1.25 msec であり、したがって変動は 16 m/sec の速度で下流に移動していることが分る。これは主流の速度が 10 m/sec で、カルマン渦の速度がその約 80% であるとする、その約 2 倍の速度に相当する。円柱後流が送信器と受信器の中央にあり、音波ビームが点音源であると考えると合理的に説明される。これらの事実から円柱後流中を通過した超音波の、干渉による変動成分は空間的な配列をもった、移動する渦によることが明らかとなった。その変動周波数は渦の移動速度と周期に関係し、変動量の大きさは渦の強さ、入射音波の波長の渦の大きさに対する比、入射音波のビーム断面積、入射角度に関係することが分った。

### 5. 実験結果の理論的考察

Lighthill は空力的に発生する騒音の理論<sup>9)</sup>から、乱流中を通過する音波のエネルギー散乱について一般理論を導いた。彼は主として等方性乱流で、乱れのマクロー・スケールと音波の波長の比が任意の場合について研究したが、この理論は物理的意味が比較的明らかで、実際の応用において便利である。ここではこの理論を用いて非等方性乱流場の大きな渦に対する三つのモデルについて具体的な計算を行ない、実験と比較する。

まず、Lighthill の空力的騒音の発生的一般理論の概略を述べると、単位体積当りの 4 重極子分布  $T_{ij}$  による輻射場は次の式で与えられる。

$$\rho - \rho_0 = \frac{x_i x_j}{4\pi a^4 x^3} \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} T_{ij} \left( \mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{a} \right) d\mathbf{y} \quad (1)$$

ここで積分は 4 重極子のあるすべての空間について行なうものとする。高いレイノルズ数の流れにおいては

$$T_{ij} \approx \rho_0 v_i v_j \quad (2)$$

と近似されるので (1) 式は

$$\rho - \rho_0 = \frac{\rho_0 x_i x_j}{4\pi a^4 x^3} \int \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ v_i \left( \mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{a} \right) \times v_j \left( \mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{a} \right) \right\} d\mathbf{y} \quad (3)$$

となる。音の強さ  $I$  は

$$a^3 \rho_0^{-1} [(\rho - \rho_0)^2] \quad (4)$$

で与えられる。したがって

$$I(\mathbf{x}) = \frac{\rho_0 x_i x_j x_k x_l}{16\pi^2 a^5 x^6} \iint \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ v_i \left( \mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{a} \right) \times v_j \left( \mathbf{y}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{y}|}{a} \right) \right\} \right] \times \left[ \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left\{ v_k \left( \mathbf{z}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|}{a} \right) \times v_l \left( \mathbf{z}, t - \frac{|\mathbf{x} - \mathbf{z}|}{a} \right) \right\} \right] dy dz \quad (5)$$

上式を個々の流れに適用する場合、被積分関数を求めることは非常に困難であり、音場特性の計算は容易でない。このため色々な近似や仮定によって、4 次の相関を 2 次の相関で表示するとか、あるいは等方性の仮定等によって計算が行なわれている。遠距離場の音場の強さを知るためには何等かの方法でこの関数を正確に求める必要がある。

さらに、Lighthill はこの理論を用いて乱れと音の干渉理論の定式化を行なった。流れ場の速度を  $v_i$  とし、入射する音波の粒子速度を  $V_i$  とすると、第一近似として合成された速度場は  $v_i + V_i$  となるであろう。したがって単位体積当りの 4 重極子の強さは

$$\rho_0 (v_i + V_i) (v_j + V_j) = \rho_0 v_i v_j + \rho_0 V_i V_j + \rho_0 (v_i V_j + v_j V_i) \quad (6)$$

となる。この右辺第一項は乱流自身による 4 重極子であり、第二項は有限振幅のための入射波自体の変形を示し、第三項が乱流と入射波の干渉によって発生される音の音源となるもので散乱 4 重極子と名付けられている。これを流れ場の平均流  $\bar{v}_i$  と変動成分  $v'_i$  とに分けると  $\bar{v}_i$  による項、 $\rho_0 (\bar{v}_i V_j + \bar{v}_j V_i)$  は入射波と coherent な入射波の平均流による屈折を与え、 $v'_i$  による項、 $\rho_0 (v'_i V_j + v'_j V_i)$  は入射波に対し coherent でない散乱、吸収を与えるもので、これは他の音場の強さにこの音場を重ね合することができる。いま、入射波を  $x_1$  方向の進行平面波とし、粒子速度を

$$V_i = \epsilon a \cos\{\kappa(x_1 - at)\} \delta_{i1} \quad (7)$$

で与える。ここで  $\kappa a / 2\pi$  は振動数で  $\epsilon a$  は振幅である。この平面波の強さ  $I$  は

$$I = \frac{1}{2} \rho_0 a^3 \epsilon^2 \quad (8)$$

である。したがって変動速度  $v'_i$  による散乱 4 重極子は

$$\rho_0 \epsilon a \cos\{\kappa(x_1 - at)\} (v_i \delta_{j1} + v_j \delta_{i1}) \quad (9)$$

となる。ここで入射波の周波数  $\kappa a / 2\pi$  は一点にお

る  $v_i'$  の代表的な周波数に比べ遙かに大きいと仮定する。この仮定の正しいことは超音波の周波数と乱流の変動周波数を比較すると容易に理解される。したがって、(1) 式より

$$\rho - \rho_0 = -\frac{\rho_0 \epsilon \kappa^2 x_i x_1}{2\pi a x^3} \int \cos\{\kappa(y_1 + |x-y| - at)\} \times v_i'\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right) dy \quad (10)$$

散乱された音波の強さ  $I_s$  は

$$I_s = \frac{\rho_0 \epsilon^2 \kappa^4 a x_i x_j x_1^2}{4\pi x^6} \iint \cos\{\kappa(y_1 + |x-y| - at)\} \times \cos\{\kappa(z_1 + |x-z| - at)\} v_i'\left(y, t - \frac{|x-y|}{a}\right) \times v_j'\left(z, t - \frac{|x-z|}{a}\right) dy dz \quad (11)$$

で与えられる。ここで

$$k_i = \kappa \left( \frac{x_i}{x} - \delta_{i1} \right) \quad (12)$$

定義される散乱ベクトル  $k(k_1, k_2, k_3)$  を用いると、

$$I_s = \frac{2\pi I \kappa^4 x_i x_j x_1^2}{a^2 x^6} F_{ij}(k) \quad (13)$$

ただし、

$$F_{ij}(k) = \frac{1}{8\pi^3} \int v_i(y) \cdot v_j(z) \cos k \cdot (y-z) dy dz \quad (14)$$

となる。 $F_{ij}(k)$  は  $\int v_i(y) v_j(y) dy$  のフーリエ変換されたもので (14) 式を  $k$  空間について積分すると求められ、とくに  $i=j$  の場合、乱れの全エネルギーを与える。

以上が Lighthill の乱流による音波の散乱理論の定式化であるが、次にわれわれは、これを用いて大きな渦モデルについて散乱エネルギー・スペクトルを求める。

$$F_{11} = \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \int_s \int_{s'} y_2 y_2' \cos \left\{ \kappa \frac{x_1}{x} (y_1 - y_1') + \kappa \left( \frac{x_2}{x} - 1 \right) (y_2 - y_2') \right\} dy_1 dy_1' dy_2 dy_2' \\ = \frac{4\alpha^2}{\pi^2} \frac{\sin^2 \left( \frac{x_1}{x} \kappa W \right) \left\{ \sin \left( \frac{x_2}{x} - 1 \right) \kappa L - \left( \frac{x_2}{x} - 1 \right) \kappa L \cos \left( \frac{x_2}{x} - 1 \right) \kappa L \right\}^2}{\kappa^6 \left( \frac{x_2}{x} - 1 \right)^4 \left( \frac{x_1}{x} \right)^2} \quad (17)$$

$F_{11}$  が  $k$  空間における全速度変動エネルギー・スペクトルであることは、(17) 式で  $k_1 = \kappa \frac{x_1}{x}$ ,  $k_2 = \kappa \left( \frac{x_2}{x} - 1 \right)$  とおき、 $k_1, k_2$  について積分することにより証明される。すなわち、

$$2 \int_0^\infty \int_0^\infty F_{11} dk_1 dk_2 \\ = \frac{8\alpha^2}{\pi^2} \int_0^\infty \int_0^\infty \frac{\sin^2(k_1 W) \{ \sin(k_2 L) - k_2 L \cos(k_2 L) \}^2}{k_1^2 k_2^4} dk_1 dk_2 \\ = \frac{2}{3} \alpha^2 I^3 W$$

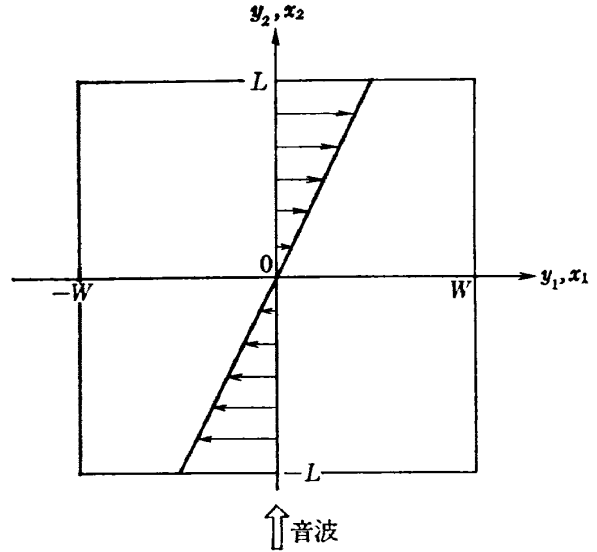


図 13 モデル I：一様な変動速度勾配の流れ

### I) 一様な変動速度勾配の流れ

第 13 図に示す如く、幅が  $2W$  で、この間で一様な変動速度勾配  $\alpha$  をもち、 $\pm L$  より速くで流れのない一次元流れを考える。速度分布を次のように与える、

$$\left. \begin{aligned} u &= \alpha y_2 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \begin{aligned} -L \leq y_2 \leq L, \\ y_2 > L, < -L \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} u &= 0 \\ v &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (15)$$

この流れに横から平面波が入射し、これを流れに対し  $\varphi$  の角度で観測すると、散乱エネルギー・スペクトル  $F_{ij}(k)$  は (14) 式より

$$F_{11} = \frac{\alpha^2}{4\pi^2} \int_s \int_{s'} y_2 y_2' \cos k \cdot (y-y') dy dy' \quad (16)$$

$$F_{12} = F_{21} = F_{22} = 0$$

散乱ベクトルの定義より

$$k \cdot (y-y') = \kappa \frac{x_1}{x} (y_1 - y_1') + \kappa \left( \frac{x_2}{x} - 1 \right) (y_2 - y_2')$$

したがって、

となり、 $u^2$  を流れの領域について積分したものに等しい。

次に、 $x_2/x = \cos \varphi$ ,  $(x^2/x-1) = -2 \sin^2(\varphi/2)$ ,  $x_1/x = \sin \varphi$  および  $k = 2\kappa \sin(\varphi/2)$  より (17) 式は

$$F_{11} = \frac{4\alpha^2}{\pi^2} \frac{\sin^2(kW \cos \varphi/2) \{kL \sin \varphi/2 \cos(kL \sin \varphi/2) - \sin(kL \sin \varphi/2)\}^2}{k^6 \cos^2 \varphi/2 \cdot \sin^4 \varphi/2} \quad (18)$$

この関数の  $k$  に対する漸近的な振舞いは、 $k \ll 1$  のときは一定、 $k \gg 1$  のとき  $k^{-4}$  に比例して減少する。散乱音波の強さ  $I_s$  は (13) 式よりただちに

$$\frac{I_s}{I} = \frac{2\alpha^2 \cos^2 \varphi}{\pi \alpha^2 x^2} \frac{\sin^2(kW \cos \varphi/2) \{kL \sin \varphi/2 \cos(kL \sin \varphi/2) - \sin(kL \sin \varphi/2)\}^2}{k^2 \sin^6 \varphi/2} \quad (19)$$

となり、 $k$  に対する漸近的振舞いは、 $k \ll 1$  のとき、 $I_s$  は  $k^4$  に比例し、 $k \gg 1$  のとき  $I_s$  は一定値となる。また、指向性は  $\varphi=0$ ,  $\frac{\pi}{2}$  で  $I_s=0$  となる。

## II) 単一の渦糸

循環  $\Gamma$  をもった渦糸の軸に垂直に平面波が入射する場合を考える。関係する座標を第 14 図に示す。渦糸の速度分布を

$$\left. \begin{aligned} u &= \frac{\Gamma \cos \theta}{2\pi r} \\ v &= \frac{\Gamma \sin \theta}{2\pi r} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} R_i \leq r \leq R_a, \\ \text{領域 } s_1 \end{array} \quad \left. \begin{aligned} u &= \frac{\Gamma r \cos \theta}{2\pi R_i^2} \\ v &= \frac{\Gamma r \sin \theta}{2\pi R_i^2} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} 0 \leq r \leq R_i \\ \text{領域 } s_2 \end{array} \quad (20)$$

で与える。したがって単位長さの渦糸について散乱エネルギー・スペクトル  $F_{ij}(k)$  は

$$F_{11} = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left\{ \int_{s_1} \int_{s_1'} \frac{\cos \theta \cos \theta'}{rr'} \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} + \int_{s_2} \int_{s_2'} \frac{rr' \cos \theta \cos \theta'}{R_i^4} \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} + \int_{s_1} \int_{s_2'} \frac{2r' \cos \theta \cos \theta'}{rR_i^2} \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) d\mathbf{y} d\mathbf{z} \right\} \quad (21)$$

$\mathbf{k}$  ベクトルの成分は  $\{\kappa(x_1/x-1), \kappa x_2/x, 0\}$ , したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) &= \kappa \left( \frac{x_1}{x} - 1 \right) (r \cos \theta - r' \cos \theta') + \kappa \frac{x_2}{x} (r \sin \theta - r' \sin \theta') \\ &= 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) - 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \theta' - \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \quad (22)$$

(21) 式に代入すると

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left[ \int_{s_1} \int_{s_1'} \cos \theta \cos \theta' \cos \left\{ 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) - 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \theta' - \frac{\varphi}{2} \right) \right\} dr dr' d\theta d\theta' \right. \\ &\quad + \int_{s_2} \int_{s_2'} \frac{r^2 r'^2}{R_i^4} \cos \theta \cos \theta' \cos \left\{ 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) - 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \theta' - \frac{\varphi}{2} \right) \right\} dr dr' d\theta d\theta' \\ &\quad \left. + \int_{s_1} \int_{s_2'} \frac{2r'^2}{R_i^2} \cos \theta \cos \theta' \cos \left\{ 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \theta - \frac{\varphi}{2} \right) - 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \sin \left( \theta' - \frac{\varphi}{2} \right) \right\} dr dr' d\theta d\theta' \right] \quad (23) \end{aligned}$$

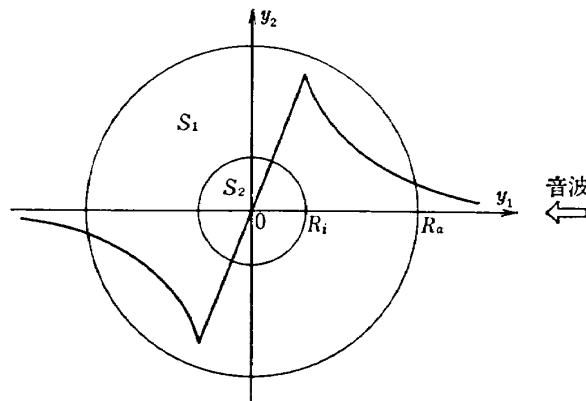


図 14 モデル II: 渦糸

同様にして

$$F_{12} = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left\{ \int_{s_1} \int_{s_1'} \cos \theta \sin \theta' \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) dr dr' d\theta d\theta' + \int_{s_2} \int_{s_2'} \frac{r^2 r'^2}{R_i^4} \cos \theta \sin \theta' \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) dr dr' d\theta d\theta' \right. \\ \left. + \int_{s_1} \int_{s_2'} \frac{2r'^2}{R_i^2} \cos \theta \sin \theta' \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) dr dr' d\theta d\theta' \right\} \quad (24)$$

$$F_{21} = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left\{ \int_{s_1} \int_{s_1'} \sin \theta \cos \theta' \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) dr dr' d\theta d\theta' + \int_{s_2} \int_{s_2'} \frac{r^2 r'^2}{R_i^4} \sin \theta \cos \theta' \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) dr dr' d\theta d\theta' \right. \\ \left. + \int_{s_1} \int_{s_2'} \frac{2r'^2}{R_i^2} \sin \theta \cos \theta' \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) dr dr' d\theta d\theta' \right\} \quad (25)$$

$$F_{22} = \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left\{ \int_{s_1} \int_{s_1'} \sin \theta \sin \theta' \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) dr dr' d\theta d\theta' + \int_{s_2} \int_{s_2'} \frac{r^2 r'^2}{R_i^4} \sin \theta \sin \theta' \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) dr dr' d\theta d\theta' \right. \\ \left. + \int_{s_1} \int_{s_2'} \frac{2r'^2}{R_i^2} \sin \theta \sin \theta' \cos \mathbf{k} \cdot (\mathbf{y} - \mathbf{z}) dr dr' d\theta d\theta' \right\} \quad (26)$$

各積分領域で  $\theta, \theta'$  は  $[0, 2\pi]$  で積分する (積分公式付録参照) と,

$$F_{11} = \Gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left\{ \int_0^{R_i} \int_0^{R_i} J_1 \left( 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1 \left( 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \right) dr dr' + \int_{R_i}^{R_a} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r^2 r'^2}{R_i^4} J_1 \left( 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1 \left( 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \right) dr dr' \right. \\ \left. + \int_0^{R_i} \int_{R_i}^{R_a} \frac{2r'^2}{R_i^2} J_1 \left( 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1 \left( 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \right) dr dr' \right\} \quad (27)$$

$$F_{12} = F_{21} = -\Gamma^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left\{ \int_0^{R_i} \int_0^{R_i} J_1 \left( 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1 \left( 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \right) dr dr' \right. \\ \left. + \int_{R_i}^{R_a} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r^2 r'^2}{R_i^4} J_1 \left( 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1 \left( 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \right) dr dr' \right. \\ \left. + \int_0^{R_i} \int_{R_i}^{R_a} \frac{2r'^2}{R_i^2} J_1 \left( 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1 \left( 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \right) dr dr' \right\} \quad (28)$$

$$F_{22} = \Gamma^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \left\{ \int_0^{R_i} \int_0^{R_i} J_1 \left( 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1 \left( 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \right) dr dr' + \int_{R_i}^{R_a} \int_{R_i}^{R_a} \frac{r^2 r'^2}{R_i^4} J_1 \left( 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1 \left( 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \right) dr dr' \right. \\ \left. + \int_0^{R_i} \int_{R_i}^{R_a} \frac{2r'^2}{R_i^2} J_1 \left( 2\kappa r \sin \frac{\varphi}{2} \right) J_1 \left( 2\kappa r' \sin \frac{\varphi}{2} \right) dr dr' \right\} \quad (29)$$

これらの式を  $r, r'$  について積分し,  $k = 2\kappa \sin \frac{\varphi}{2}$  とおくと

$$F_{11} = \frac{\Gamma^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{k^2} \{J_0(R_a k) - J_0(R_i k) - J_2(R_i k)\}^2 \quad (30)$$

$$F_{12} = F_{21} = -\frac{\Gamma^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2}}{k^2} \{J_0(R_a k) - J_0(R_i k) - J_2(R_i k)\}^2 \quad (31)$$

$$F_{22} = \frac{\Gamma^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{k^2} \{J_0(R_a k) - J_0(R_i k) - J_2(R_i k)\}^2 \quad (32)$$

$F_{ij}$  の  $k$  についての漸近的な振舞いは一般的に,  $k \ll 1$  のとき  $F_{ij} \propto k^3$ ,  $k \gg 1$  のとき  $F_{ij} \propto k^{-3}$  の特性を示す。

ここでもまた,  $F_{ii} = F_{11} + F_{22}$  が乱れの全エネルギーの  $k$  空間における波数成分であることは

$$\frac{1}{4\pi} \int_0^\infty k (F_{11} + F_{22}) dk \\ = \frac{1}{4\pi} \int_0^\infty \frac{\Gamma^2}{k} \{J_0(R_a k) - J_0(R_i k) - J_2(R_i k)\}^2 dk \\ = \frac{\Gamma^2}{2\pi} \left( \ln \frac{R_a}{R_i} + \frac{1}{4} \right) \quad (\text{付録積分公式参照})$$

一方,

$$\begin{aligned} & \int v_i(\mathbf{y})v_i(\mathbf{y})d\mathbf{y} \\ &= \frac{\Gamma^2}{4\pi^2} \left\{ \int_{R_t}^{R_a} \int_0^{2\pi} \frac{1}{r} dr d\theta + \frac{1}{R_t^4} \int_0^{R_t} \int_0^{2\pi} r^3 dr d\theta \right\} \\ &= \frac{\Gamma^2}{2\pi} \left( \ln \frac{R_a}{R_t} + \frac{1}{4} \right) \end{aligned}$$

となり両者は一致する。散乱音波の強さ  $I_s$  は (13) 式より,

$$\frac{I_s}{I} = \frac{\pi\Gamma^2 k^3 \cos^2 \varphi}{8a^2 x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \{J_0(R_a k) - J_0(R_t k) - J_2(R_t k)\}^2 \quad (33)$$

$I_s$  は漸近的に,  $k \ll 1$  のとき  $k^6$  に比例し,  $k \gg 1$  のとき  $k$  に比例して増大する。

### III) 大きな渦モデル

乱流剪断流中の大きな渦について Townsend が提唱したモデル<sup>10)</sup>は次のような速度分布をもつ, (第 15 図)

$$\begin{cases} u = A\beta r \cos \theta e^{-\beta^2 r^2} \\ v = A\beta r \sin \theta e^{-\beta^2 r^2} \end{cases} \quad 0 \leq r < \infty \quad (34)$$

ここで  $\beta$  は渦の大きさの逆数である。これについて前と同様な方法で  $F_{ij}$  を求めると,

$$\begin{aligned} F_{11} &= \frac{A^2 \beta^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^2 r'^2 \cos \theta \cos \theta' e^{-\beta^2(r^2+r'^2)} \\ &\quad \times \cos\{(r-r')k\} dr dr' d\theta d\theta' \quad (35) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{21} = F_{12} &= \frac{A^2 \beta^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^2 r'^2 \cos \theta \sin \theta' e^{-\beta^2(r^2+r'^2)} \\ &\quad \times \cos\{(r-r')k\} dr dr' d\theta d\theta' \quad (36) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{22} &= \frac{A^2 \beta^2}{4\pi^2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} r^2 r'^2 \sin \theta \sin \theta' e^{-\beta^2(r^2+r'^2)} \\ &\quad \times \cos\{(r-r')k\} dr dr' d\theta d\theta' \quad (37) \end{aligned}$$

まず,  $\theta, \theta'$  について積分を行なうと,

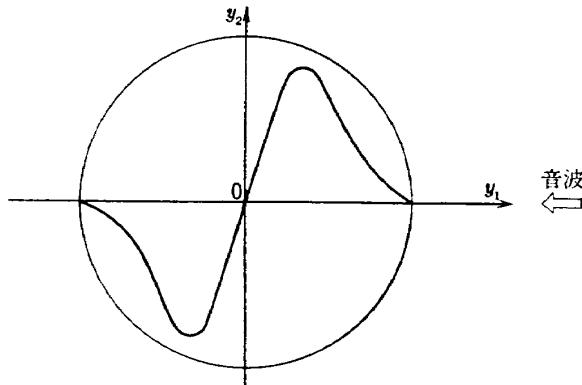


図 15 モデル II: 大きな渦

$$\begin{aligned} F_{11} &= A^2 \beta^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty r^2 r'^2 e^{-\beta^2(r^2+r'^2)} \\ &\quad \times J_1\left(2kr \sin \frac{\varphi}{2}\right) J_1\left(2kr' \sin \frac{\varphi}{2}\right) dr dr' \quad (38) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{21} = F_{12} &= A^2 \beta^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty r^2 r'^2 e^{-\beta^2(r^2+r'^2)} \\ &\quad \times J_1\left(2kr \sin \frac{\varphi}{2}\right) J_1\left(2kr' \sin \frac{\varphi}{2}\right) dr dr' \quad (39) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_{22} &= A^2 \beta^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \int_0^\infty \int_0^\infty r^2 r'^2 e^{-\beta^2(r^2+r'^2)} \\ &\quad \times J_1\left(2kr \sin \frac{\varphi}{2}\right) J_1\left(2kr' \sin \frac{\varphi}{2}\right) dr dr' \quad (40) \end{aligned}$$

付録積分公式により,  $r, r'$  について積分し,  $k = 2\kappa \sin \frac{\varphi}{2}$  とおくと

$$F_{11} = A^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} \left\{ \frac{k}{4\beta^3} e^{-(k^2/4\beta^2)} \right\}^2 \quad (41)$$

$$F_{12} = F_{21} = -A^2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \left\{ \frac{k}{4\beta^3} e^{-(k^2/4\beta^2)} \right\}^2 \quad (42)$$

$$F_{22} = A^2 \cos^2 \frac{\varphi}{2} \left\{ \frac{k}{4\beta^3} e^{-(k^2/4\beta^2)} \right\}^2 \quad (43)$$

上式より明らかな如く,  $F_{ij}$  は  $k \ll 1$  のとき  $k^2$  に比例して増大し,  $k \gg 1$  のとき  $e^{-k^2}$  で単調に減少する。また, 散乱エネルギーは (13) 式より

$$\begin{aligned} \frac{I_s}{I} &= \frac{2\pi a^2 k^4 A^2 \cos^2 \varphi}{16a^2 x^2 \sin^4 \frac{\varphi}{2}} \left( \sin^2 \frac{\varphi}{2} \cos^2 \varphi \right. \\ &\quad \left. - 2 \sin \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi}{2} \sin \varphi \cos \varphi + \cos^2 \frac{\varphi}{2} \sin^2 \varphi \right) \\ &\quad \times \left\{ \frac{k}{4\beta^3} e^{-(k^2/4\beta^2)} \right\}^2 \\ &= \frac{\pi A^2 \cos^2 \varphi}{8a^2 x^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \left\{ \frac{k^3}{4\beta^3} e^{-(k^2/4\beta^2)} \right\}^2 \quad (44) \end{aligned}$$

$I_s$  の  $k$  に対する振舞いは,  $k \ll 1$  のとき  $k^6$  に比例し,  $k \gg 1$  のとき  $e^{-k^2}$  に比例し減少する。

先に述べた円柱後流に対する超音波の実験により, 得られたカルマン渦と音波の異なる波長に対する干渉結果を, 三つの渦モデルによる散乱エネルギー・スペクトルよりえられる圧力の RMS 値と比較すると第 9 図中に示れた三つの曲線になる。点線, 実線, 一点鎖線はそれぞれモデル I, II, III に対応する。これらの曲線は実験点とできるだけ一致するようにとられたものであるが, この図から明らかな如く, 散乱エネルギー・スペクトルは II のモデルが一番よく適合しているように思える。

## 6. ソニック・ブームへの応用

高々度を超音速飛行する航空機より発生する衝撃波は地上付近に達すると、圧力上昇がかなり弱められて、強い音波として取扱うことができる。しかし、実在の気は必ずしも均質でなく、速度勾配や温度勾配のため、ソニック・ブームの波面は大きな影響を受ける。とくに、地面付近の気流乱流による波形の歪は上空におけるように非線形効果による波形の複元を受ける時間がないため、そのまま地上に達し、予想される圧力上昇をかなり上廻ることがある。この現象は飛行実験や風洞実験等によりかなり研究されているが、理論的な取扱いはかなり困難である。ここでは乱流の大きな渦による音波の散乱効果を用いてソニック・ブームの波形を計算する。

まず、正常なN波形の圧力変動のフーリエ成分は

$$P_0(\omega) = - \int_{-T/2}^{T/2} \frac{2p_s}{T} t \sin \omega t dt \\ = \frac{2p_s}{\omega} \left\{ \cos \frac{\omega t}{2} - \frac{2}{\omega T} \sin \frac{\omega t}{2} \right\} \quad (45)$$

のように与えられる。ここで  $\omega = \kappa a$ 、 $T$  はN波の持続時間、 $p_s$  は圧力上昇である。ここで3つの渦のモデルに対して、 $P_0(\omega)$  なるスペクトル分布をもった入射波に対する散乱を考える。音の圧力は音の強さに対し、 $p' = \sqrt{I_s \rho a}$  の関係をもつので  $P_0(\omega)$  の入射波に対し、散乱波の圧力のフーリエ成分は  $\sqrt{I_s/I} \cdot P_0(\omega)$  で与えられる。全体として乱れを通過した音波は

$$P(\omega) = P_0(\omega) + \sqrt{I_s/I} \cdot P_0(\omega) = P_0(\omega) + P_s(\omega) \quad (46)$$

なる圧力成分をもつ。したがって3つのモデルに対し  $P_s(\omega)$  はそれぞれ次のように示される。

$$\text{I. } P_s(\omega) = \frac{\sqrt{2} \alpha \cos \varphi \sin \left( kW \cos \frac{\varphi}{2} \right) kL \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left( kL \sin \frac{\varphi}{2} \right) - \sin \left( kL \sin \frac{\varphi}{2} \right)}{\sqrt{\pi} a x \sin^3 \frac{\varphi}{2} k} P_0(\omega) \quad (47)$$

$$\text{II. } P_s(\omega) = \frac{\sqrt{\pi} k \Gamma \cos \varphi}{2\sqrt{2} a x \sin \frac{\varphi}{2}} \{J_0(R_a k) - J_0(R_i k) - J_2(R_i k)\} P_0(\omega) \quad (48)$$

$$\text{III. } P_s(\omega) = - \frac{\sqrt{\pi} A k^3 \cos \varphi}{8\sqrt{2} a x \beta^3 \sin \frac{\varphi}{2}} e^{-(k^2/4\beta^2)} P_0(\omega) \quad (49)$$

上の関数はすべて  $k$  について偶関数となっていることを注意する。散乱によるN波の変形分  $p'(t)$  は

$$p'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} P_s(\omega) \cos \omega t d\omega \quad (50)$$

によって求められる。後の計算のため  $P_0(\omega) \cos \omega t$  を次のように変形しておく、

$$P_0(\omega) \cos \omega t = \frac{p_s}{\omega} \{ \cos s\omega + \cos s'\omega \} - \frac{2p_s}{\omega^2 T} \{ \sin s\omega + \sin s'\omega \} \quad (51)$$

$$s = \frac{T}{2} + t, \quad s' = \frac{T}{2} - t \quad (52)$$

モデルIについて  $p'(t)$  は

$$p'(t) = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\alpha \cos \varphi}{a x \sin^3 \frac{\varphi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin \left( kW \cos \frac{\varphi}{2} \right)}{k} \left\{ kL \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left( kL \sin \frac{\varphi}{2} \right) - \sin \left( kL \sin \frac{\varphi}{2} \right) \right\} \\ \times \left\{ \frac{p_s}{\omega} (\cos s\omega + \cos s'\omega) - \frac{2p_s}{\omega^2 T} (\sin s\omega + \sin s'\omega) \right\} d\omega \quad (53)$$

積分を次のように4つの項に分けて、それぞれ積分する、

$$\text{第一項} = \int_0^{\infty} \frac{\sin \left( kW \cos \frac{\varphi}{2} \right)}{k} \left\{ kL \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left( kL \sin \frac{\varphi}{2} \right) \frac{p_s}{\omega} (\cos s\omega + \cos s'\omega) \right\} d\omega \quad (54)$$

$$\left. \begin{aligned} p &= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{a} \left( W \cos \frac{\varphi}{2} + L \sin \frac{\varphi}{2} \right) \\ q &= \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2}}{a} \left( W \cos \frac{\varphi}{2} - L \sin \frac{\varphi}{2} \right) \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

とおくと

$$\text{第一項} = \frac{p_s L \sin \frac{\varphi}{2}}{2} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega} (\sin p\omega - \sin q\omega) (\cos s\omega + \cos s'\omega) d\omega \quad (56)$$

$$= p_s L \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\pi}{4} : p > s, \quad p_s L \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\pi}{2} : q > s, \quad p_s L \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\pi}{4} : p > s', \quad p_s L \sin \frac{\varphi}{2} \frac{\pi}{4} : q > s'$$

$$0 : p < s, \quad 0 : q < s, \quad 0 : p < s', \quad 0 : q < s'$$

$$\text{第二項} = - \int_0^{\infty} \frac{p_s \sin \left( kW \cos \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( kL \sin \frac{\varphi}{2} \right)}{\omega k} (\cos s\omega + \cos s'\omega) d\omega$$

$$= - \frac{p_s a}{2 \sin \frac{\varphi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2} \left\{ \sin^2 \left( \frac{p}{2} \omega \right) - \sin^2 \left( \frac{q}{2} \omega \right) \right\} (\cos s\omega + \cos s'\omega) d\omega \quad (57)$$

$$= - \frac{p_s a}{4 \sin \frac{\varphi}{2}} \left\{ \begin{array}{llll} 0 : s \geq p, & 0 : s \geq q, & 0 : s' \geq p, & 0 : s' \geq q \\ \frac{2p-s}{4} \pi : s < p, & -\frac{2q-s}{4} \pi : s < q, & \frac{2p-s'}{4} \pi : s' < p, & -\frac{2q-s'}{4} \pi : s' < q \end{array} \right\}$$

$$\text{第三項} = - \int_0^{\infty} \frac{2p_s}{\omega^2 T} \sin \left( kW \cos \frac{\varphi}{2} \right) L \sin \frac{\varphi}{2} \cos \left( kL \sin \frac{\varphi}{2} \right) (\sin s\omega + \sin s'\omega) d\omega$$

$$= - \frac{p_s L \sin \frac{\varphi}{2}}{T} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^2} (\sin p\omega - \sin q\omega) (\sin s\omega + \sin s'\omega) d\omega \quad (58)$$

$$= - \frac{p_s L \sin \frac{\varphi}{2}}{T} \left\{ \begin{array}{llll} \frac{\pi}{2} p : p < s, & \frac{\pi}{2} q : q < s, & \frac{\pi}{2} p : p < s', & \frac{\pi}{2} q : q < s' \\ \frac{\pi}{2} s : p > s, & \frac{\pi}{2} s : q > s, & \frac{\pi}{2} s' : p > s', & \frac{\pi}{2} s' : q > s' \end{array} \right\}$$

$$\text{第四項} = \int_0^{\infty} \frac{2p_s}{\omega^2 T} \frac{\sin \left( kW \cos \frac{\varphi}{2} \right) \sin \left( kL \sin \frac{\varphi}{2} \right)}{k} (\sin s\omega + \sin s'\omega) d\omega$$

$$= \frac{p_s a}{T \sin \frac{\varphi}{2}} \int_0^{\infty} \frac{1}{\omega^3} \left\{ \sin^2 \left( \frac{p}{2} \omega \right) - \sin^2 \left( \frac{q}{2} \omega \right) \right\} (\sin s\omega + \sin s'\omega) d\omega \quad (59)$$

$$= \frac{p_s a}{T \sin \frac{\varphi}{2}} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{8} p^2 : s \geq p, & -\frac{\pi}{8} q^2 : s \geq q, \\ \frac{\pi}{8} \left( \frac{4sp}{2} - s^2 \right) : s \leq p, & -\frac{\pi}{8} \left( \frac{4sq}{2} - s^2 \right) : s \leq q, \\ \frac{\pi}{8} p^2 : s' \geq p, & -\frac{\pi}{8} q^2 : s' \geq q, \\ \frac{\pi}{8} \left( \frac{4s'p}{2} - s'^2 \right) : s' \leq p, & -\frac{\pi}{8} \left( \frac{4s'q}{2} - s'^2 \right) : s' \leq q \end{array} \right\}$$

各項をまとめると

$$s > p, q : - \frac{p_s L \sin \frac{\varphi}{2}}{T} \frac{\pi}{2} (p+q) + \frac{p_s a}{T \sin \frac{\varphi}{2}} \frac{\pi}{8} (p^2 - q^2) = 0 \quad (60)$$

$$s < p : \frac{\pi}{4} p_s L \sin \frac{\varphi}{2} - \frac{\pi p_s a}{16 \sin \frac{\varphi}{2}} (2p-s) - \frac{\pi}{2} \frac{p_s L \sin \frac{\varphi}{2}}{T} s + \frac{p_s a \pi}{16 T \sin \frac{\varphi}{2}} (4sp - 2s^2)$$

$$= \frac{\pi}{4} \frac{ap_s}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left\{ \left( \frac{L \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{a} - \frac{p}{2} \right) + \left( \frac{1}{4} + \frac{p}{T} - \frac{2L \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{aT} \right) s - \frac{1}{2T} s^2 \right\} \quad (61)$$



$$s < q : \frac{\pi}{4} \frac{ap_s}{\sin \frac{\varphi}{2}} \left\{ \left( \frac{L \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{a} + \frac{q}{2} \right) + \left( -\frac{1}{4} + \frac{q}{T} - \frac{2L \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{aT} \right) s + \frac{1}{2T} s^2 \right\} \quad (62)$$

$s'$  については上式中  $s$  を  $s'$  におきかえればよい。この波形の一例を第 16 図, 曲線 I に示す。

モデル II について  $p'(t)$  は

$$p'(t) = 2 \int_0^\infty \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma \cos \varphi \cdot \omega}{a^2 x} \left\{ J_0 \left( \frac{\omega \cdot 2R_a \sin \frac{\varphi}{2}}{a} \right) - J_0 \left( \frac{\omega \cdot 2R_t \sin \frac{\varphi}{2}}{a} \right) - J_2 \left( \frac{\omega \cdot 2R_t \sin \frac{\varphi}{2}}{a} \right) \right\} \\ \times \left\{ \frac{p_s}{\omega} (\cos s\omega + \cos s'\omega) - \frac{2p_s}{\omega^2 T} (\sin s\omega + \sin s'\omega) \right\} d\omega \quad (63)$$

ここで

$$l = \frac{2R_a \sin \frac{\varphi}{2}}{a}, \quad m = \frac{2R_t \sin \frac{\varphi}{2}}{a} \quad (64)$$

とおき, 積分を次の二つの項に分けて行なう。

$$\text{第一項} = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma \cos \varphi \cdot p_s}{a^2 x} \int_0^\infty \{ J_0(l\omega) - J_0(m\omega) - J_2(m\omega) \} (\cos s\omega + \cos s'\omega) d\omega \quad (65) \\ = 2 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma \cos \varphi \cdot p_s}{a^2 x} \left\{ \begin{array}{lll} 0 : s^2 > l^2, & 0 : s^2 > m^2, & 0 : s^2 > m^2 \\ \frac{1}{\sqrt{l^2 - s^2}} : s^2 < l^2, & -\frac{1}{\sqrt{m^2 - s^2}} : s^2 < m^2, & -\frac{\cos \left( 2 \sin^{-1} \frac{s}{m} \right)}{\sqrt{m^2 - s^2}} : s^2 < m^2 \\ 0 : s'^2 > l^2, & 0 : s'^2 > m^2, & 0 : s'^2 > m^2 \\ \frac{1}{\sqrt{l^2 - s'^2}} : s'^2 < l^2, & -\frac{1}{\sqrt{m^2 - s'^2}} : s'^2 < m^2, & -\frac{\cos \left( 2 \sin^{-1} \frac{s}{m} \right)}{\sqrt{m^2 - s'^2}} : s'^2 < m^2 \end{array} \right\}$$

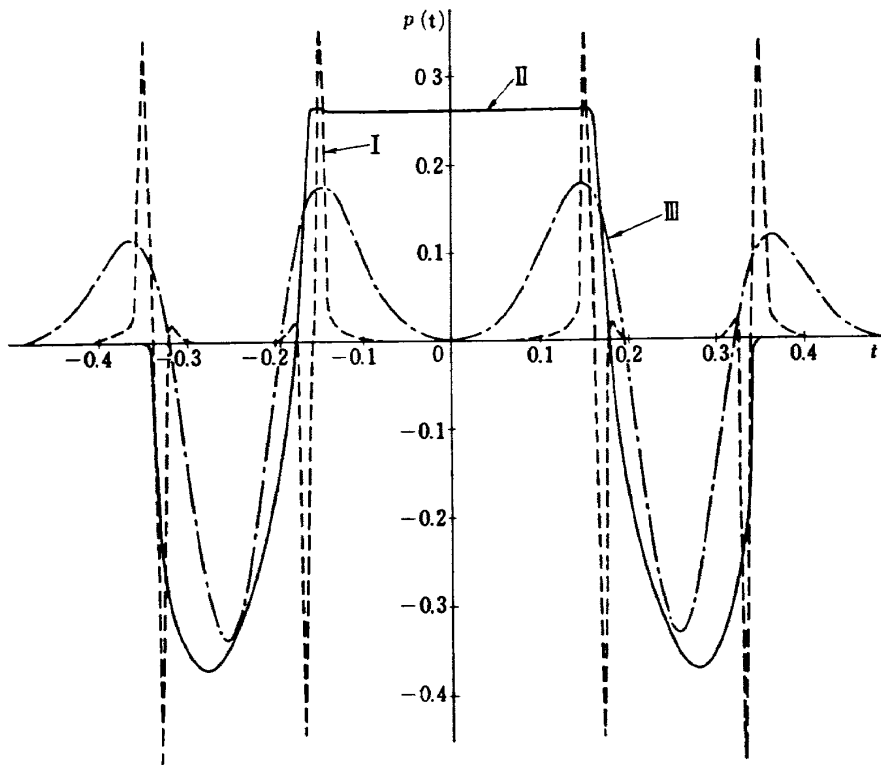


図 16 大きな渦によるソニック・ブームの変形量

$$\begin{aligned}
\text{第二項} &= -2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{T \cos \varphi \cdot 2p_s}{a^2 x T} \int_0^\infty \frac{1}{\omega} \{J_0(l\omega) - J_0(m\omega) - J_2(m\omega)\} (\sin s\omega + \sin s'\omega) d\omega \\
&= -2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\Gamma \cos \varphi \cdot p_s}{a^2 x} \left\{ \begin{array}{ll} \frac{\pi}{T} : s > l > 0, & -\frac{\pi}{T} : s > m > 0, \\ \frac{2}{T} \sin^{-1} \frac{s}{l} : l > s > 0, & -\frac{2}{T} \sin^{-1} \frac{s}{m} : m > s > 0, \\ 0 : s \geq m > 0, & \frac{\pi}{T} : s' > l > 0, \\ -\frac{1}{T} \sin\left(2 \sin^{-1} \frac{s}{m}\right) : m \geq s \geq 0, & \frac{2}{T} \sin^{-1} \frac{s'}{m} : l > s' > 0, \\ -\frac{\pi}{T} : s' > m > 0, & 0 : s' > m > 0 \\ -\frac{2}{T} \sin^{-1} \frac{s'}{m} : m > s' > 0, & -\frac{1}{T} \sin\left(2 \sin^{-1} \frac{s'}{m}\right) : m > s' > 0 \end{array} \right\}
\end{aligned} \tag{66}$$

この結果をまとめて示すと

$$s > l, m : 0 \tag{67}$$

$$l > s > m : \frac{\sqrt{2\pi} \Gamma \cos \varphi \cdot p_s}{a^2 x} \left\{ \frac{1}{\sqrt{l^2 - s^2}} - \frac{2}{T} \sin^{-1} \frac{s}{l} + \frac{\pi}{T} \right\} \tag{68}$$

$$m > s > 0 : \frac{\sqrt{2\pi} \Gamma \cos \varphi \cdot p_s}{a^2 x} \left\{ \frac{1}{\sqrt{l^2 - s^2}} - \frac{2}{T} \sin^{-1} \frac{s}{l} + \frac{2}{T} \sin^{-1} \frac{s}{m} + \frac{2\sqrt{m^2 - s^2}}{m^2} \left(1 + \frac{s}{T}\right) \right\} \tag{69}$$

$s'$  については上式の  $s$  を  $s'$  におきかえればよい。この波形の例を第 16 図曲線 II に示す。

モデル III について  $p'(t)$  は

$$p'(t) = -2\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{A \cos \varphi}{8ax\beta^3 \sin \frac{\varphi}{2}} \int_0^\infty k^3 e^{-k^2/4\beta^2} \left\{ \frac{p_s}{\omega} (\cos s\omega + \cos s'\omega) - \frac{2p_s}{\omega^2 T} (\sin s\omega + \sin s'\omega) \right\} d\omega \tag{70}$$

これも積分を次の二項に分けて行なう、

$$\begin{aligned}
\text{第一項} &= \frac{8p_s \sin^2 \frac{\varphi}{2}}{a^3} \int_0^\infty \omega^2 e^{-\omega^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} / \beta^2} (\cos s\omega + \cos s'\omega) d\omega \\
&= \frac{\sqrt{\pi} p_s \beta^3}{a^3 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \left\{ \left( 2 \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\beta^2} - s^2 \right) e^{-s^2 \beta^2 / 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} + \left( 2 \frac{\sin^2 \frac{\varphi}{2}}{\beta^2} - s'^2 \right) e^{-s'^2 \beta^2 / 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right\}
\end{aligned} \tag{71}$$

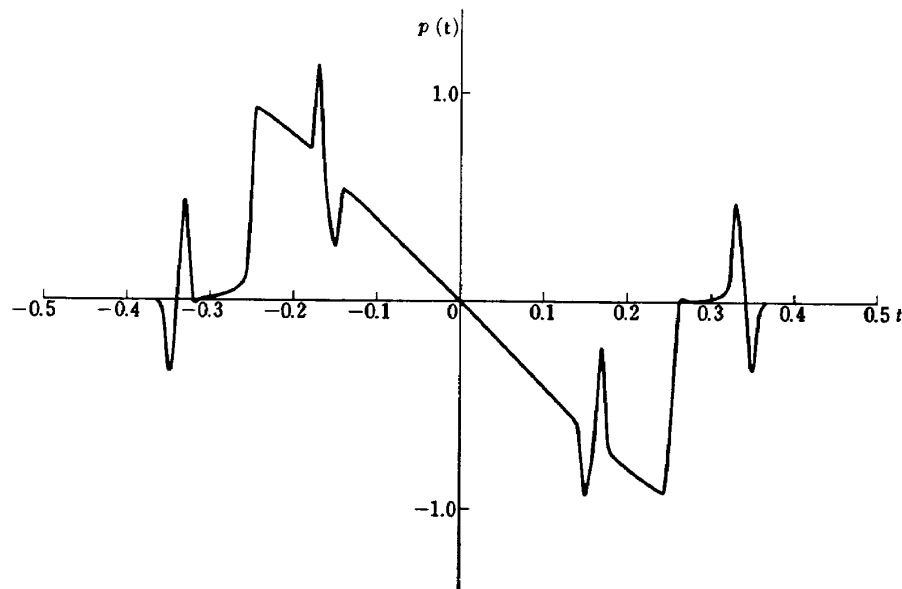


図 17(I) モデル I により変形された N 波

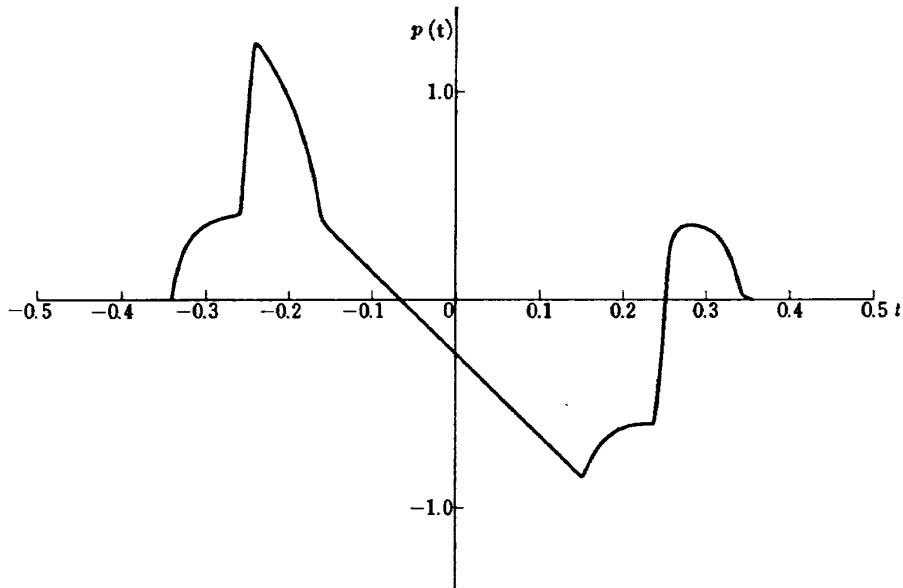


図 17(II) モデルIIにより変形されたN波

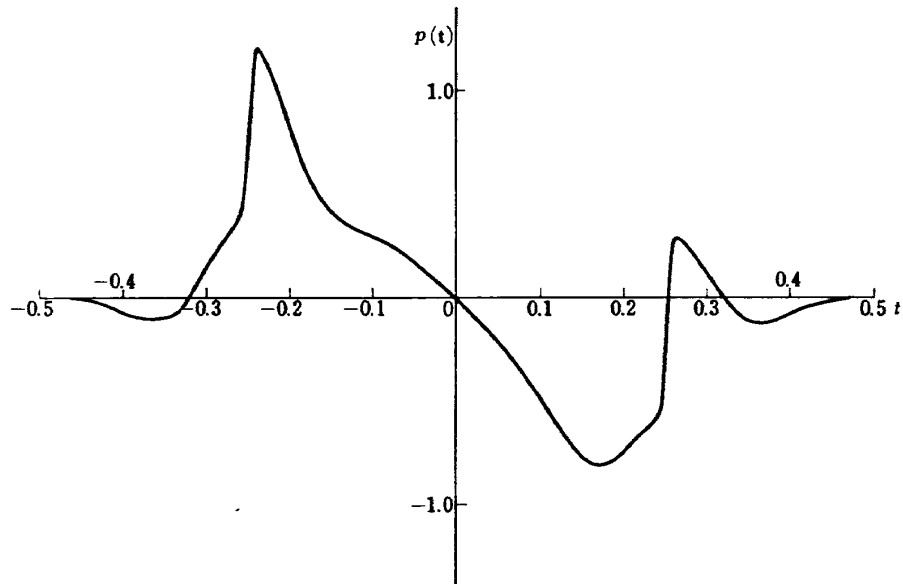


図 17(III) モデルIIIにより変形されたN波

$$\begin{aligned}
 \text{第二項} &= -\frac{16p_s \sin^3 \frac{\varphi}{2}}{Ta^3} \int_0^\infty \omega e^{-\omega^2 \sin^2 \frac{\varphi}{2} / \beta^2} (\sin s\omega + \sin s'\omega) d\omega \\
 &= -\frac{\sqrt{\pi} 4p_s \beta^3}{Ta^3} \left\{ s e^{-s^2 \beta^2 / 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} + s' e^{-s'^2 \beta^2 / 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right\} \quad (72)
 \end{aligned}$$

したがって、この場合

$$p'(t) = -\frac{\pi A p_s \cos \varphi}{\sqrt{2} \cdot 4 x a^4 \sin \frac{\varphi}{2}} \left\{ \left( 2 - \frac{4}{T} s - \frac{\beta^2}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} s^2 \right) e^{-s^2 \beta^2 / 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} + \left( 2 - \frac{4}{T} s' - \frac{\beta^2}{\sin^2 \frac{\varphi}{2}} s'^2 \right) e^{-s'^2 \beta^2 / 4 \sin^2 \frac{\varphi}{2}} \right\} \quad (73)$$

この関数形の例を第 16 図, 曲線 III に示す。

第 17 図 I, II, III は  $T=0.5$ ,  $p_s=1.0$ ,  $\varphi=0.3$ ,  $x=100$  としそれぞれ,

$$\text{I} \begin{cases} \alpha=1.0 \\ W=100 \\ L=100 \end{cases} \quad \text{II} \begin{cases} \Gamma=2\pi \times 10^4 \\ R_a=1000 \\ R_t=100 \end{cases} \quad \text{III} \begin{cases} A=1.0 \\ \beta=0.01 \end{cases}$$

として計算された N 波の変形分をもとの正常な N 波に重畳したものである。いづれも圧力上昇の側に擾乱が加わることは実際の波形の変形とよく一致している。I, II については N 波に先行する擾乱があるが, III には存在しない。II, III の波形の特徴は大体同じであるが, I については非常にピーキで, しかも N 波の途中で擾乱がある。これは非線形効果により, 大きな圧力上昇に従う微少擾乱は伝播速度が早く, 大きな圧力上昇に追いついてゆくこと, またこのような途中にピークをもったソニック・ブーム波形も観測されており, I の波形も現実性のないものではない。ここに挙げたモデルのどれも現実の大気乱流の大きな渦を詳しく具体化しているとは考えられない, またこれらの音波の干渉によるソニック・ブームのピーキな変形も一長一短があり, 決定的なものはない。しかし, 大きな数少い渦によってソニック・ブームのピーキな変形が生じることは大きな可能性が示された。

## 7. 結 論

大気乱流によってソニック・ブームの圧力波形がピーキになることの原因を実験, 理論両面から調べた。まず, この原因は大気乱流中の大きな渦とソニック・ブーム圧力波形に含まれる, 比較的低周波数のエネルギー成分の干渉によることに着目し, 円柱後流中に超音波を通過させ, 音波の散乱特性を調べた。散乱による音波の減衰は, 音波の波長が長い間はカルマン渦の成分によるものが卓越したが, 波長が短くなると小さい渦によるものが現われた。音波の減衰は渦の強さに比例し, 音波の周波数に平均的に 2 乗に比例した。入射波の波長と渦の大きさの色々な比に対し, 散乱スペクトルを測定し, 三つの渦モデル, すなわち, 一次元の剪断流, 渦糸, Townsend による大きな渦モデルについて Lighthill の理論により散乱エネルギー・スペクトルを計算し比較した。この結果, 渦糸モデルのスペクトルが一番よく実験と一致した。これらの理論結果を用いてソニック・ブーム波形の変形を計算した。どのモデルも波形のピーキな変形を与えなかったが, 決定的なものはえられなかった。しかし, ピーキとなる原因が N 波の低周波成分と大気乱流の数少い大きな渦との干渉による可能性は十分確められた。

## 謝 辞

本研究を遂行するにあたり, 終始御協力いただいた空気力学第一部橋篤志, 斉藤実面技官に対し, 深甚なる謝意を表するものである。

## 付 録

積分公式<sup>11), 12)</sup>

$$1. a. \int_0^{2\pi} \cos \phi \cos \left\{ x \sin \left( \phi - \frac{\varphi}{2} \right) \right\} d\phi = 0$$

$$b. \int_0^{2\pi} \cos \phi \sin \left\{ x \sin \left( \phi - \frac{\varphi}{2} \right) \right\} d\phi \\ = -2\pi \sin \frac{\varphi}{2} J_1(x)$$

$$c. \int_0^{2\pi} \sin \phi \cos \left\{ x \sin \left( \phi - \frac{\varphi}{2} \right) \right\} d\phi = 0$$

$$d. \int_0^{2\pi} \sin \phi \sin \left\{ x \sin \left( \phi - \frac{\varphi}{2} \right) \right\} d\phi \\ = 2\pi \cos \frac{\varphi}{2} J_1(x)$$

$$2. \int_0^{\infty} t^{-1} \{ J_0^2(at) + J_0^2(bt) - 2J_0(at)J_0(bt) \} dt$$

$$\text{公式} \int_0^b t^{-1} J_0(at) \{ 1 - J_0(bt) \} dt = 0 \quad b \leq a \\ = \ln(b/a) \quad b \geq a$$

$$\text{より} \int_0^{\infty} t^{-1} J_0(at) dt = \int_0^{\infty} t^{-1} J_0(at) J_0(bt) dt + \ln b/a$$

をうる。

したがって

$$= \int_0^{\infty} t^{-1} J_0(at) dt + \int_0^{\infty} t^{-1} J_0(bt) dt \\ - 2 \int_0^{\infty} t^{-1} J_0(at) + 2 \ln b/a \\ = 2 \ln b/a$$

$$3. a. \int_0^{\infty} \frac{1}{x} J_0(ax) J_2(ax) dx = 0 \quad \text{Lommel の定理}$$

$$b. \int_0^{\infty} \frac{1}{x} J_2^2(ax) dx = \int_0^{\infty} \frac{1}{x} J_2^2(x) dx = \frac{1}{4} \quad \text{部分} \\ \text{積分による}$$

$$4. \int_0^{\infty} r^2 e^{-\beta^2 r^2} J_1(ar) dr = \frac{a}{(2\beta^2)^2} e^{-a^2/4\beta^2}$$

$$5. a. \int_0^{\infty} \frac{\sin qx \cos px}{x} dx = \frac{1}{2} \pi \quad (q < p) \\ = 0 \quad (q < p) \\ = \frac{1}{4} \pi \quad (q = p)$$

$$b. \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 qx \cos px}{x^2} dx = 0 \quad (p \geq 2q) \\ = \frac{2q-p}{4} \pi \quad (p < 2q)$$

$$c. \int_0^{\infty} \frac{\sin qx \sin px}{x^2} dx = \frac{1}{2} p\pi \quad (p \leq q) \\ = \frac{1}{2} q\pi \quad (p \geq q)$$

$$\begin{aligned}
 \text{d. } \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 qx \sin px}{x^3} dx &= \frac{1}{2} q^2 \pi \quad (p \geq 2q) \\
 &= \frac{1}{8} \pi (4pq - p^2) \quad (p \leq 2q) \\
 \text{6. a. } \int_0^{\infty} J_0(bx) \cos ax dx &= 0 \quad (a^2 > b^2) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \quad (b^2 > a^2) \\
 \text{b. } \int_0^{\infty} J_2(bx) \cos ax dx &= 0 \quad (a > b > 0) \\
 &= \frac{1}{\sqrt{b^2 - a^2}} \cos \left[ 2 \sin^{-1} \left( \frac{a}{b} \right) \right] \\
 &\quad (b > a > 0) \\
 \text{c. } \int_0^{\infty} J_0(bx) \frac{\sin ax}{x} dx &= \frac{\pi}{2} \quad (a > b > 0) \\
 &= \sin^{-1} \frac{a}{b} \quad (b > a > 0) \\
 \text{d. } \int_0^{\infty} J_2(bx) \frac{\sin ax}{x} dx &= 0 \quad (a > b > 0) \\
 &= \frac{1}{2} \left[ 2 \sin^{-1} \left( \frac{a}{b} \right) \right] \\
 &\quad (b \geq a \geq 0) \\
 \text{7. a. } \int_0^{\infty} e^{-p^2 x^2} \cos qx \cdot x^2 dx &= \frac{2p^2 - q^2}{8p^5} e^{-q^2/4p^2} \sqrt{\pi} \\
 \text{b. } \int_0^{\infty} e^{-p^2 x^2} \sin qx \cdot x dx &= \frac{q}{4p^3} e^{-q^2/4p^2} \sqrt{\pi}
 \end{aligned}$$

## 文 献

- 1) D. Mintzer: Wave propagation in a randomly inhomogeneous medium. Jour. Acous. Soc. Am., Vol. 25, No. 5 (1953)
- 2) M.J. Lighthill: On the energy scattered from the interactions of turbulence with sound or shock waves. Proc. Camb. Phil. Soc., A, Vol. 49, pp. 531-551 (1953)
- 3) R.H. Kraichnan: The scattering of sound in a turbulent media. Jour. Acous. Soc. Am., Vol. 25, No. 6 (1953)
- 4) K.J. Plotkin, A.R. George: Weak shock waves in turbulent media. AIAA Paper 70-54 (1970)
- 5) D. Schmidt: Experimentelle Untersuchungen über die Streuung von Schall in turbulenter Strömung. Max-Planck-Institut für Strömungsforschung, Göttingen.
- 6) E. Müller, K.R. Matschat: The scattering of sound by a single vortex and by turbulence. AFOSR TN 59-337
- 7) A.B. Bauer: Sonic boom and turbulence interaction-Laboratory measurement compared with theory. AIAA Paper No. 71-618(1971)
- 8) I.R. Schwartz Ed.: Third Conference on Sonic Boom Research. NASA SP-255(1970)
- 9) M.J. Lighthill: Sound generated aerodynamically. Proc. Roy. Soc. A, Vol. 267, p. 147 (1962)
- 10) A.A. Townsend: The structure of turbulent shear flow. Cambridge Univ. Press (1956)
- 11) A. Gray, G. Mathews: A treatise on Bessel functions and their applications to physics, Macmillan, London, 2nd Ed. (1931)
- 12) D. Bieren de Haan: Nouvelles Tables D'intégrales Définies. (1867)

- TR-328 連続板の振動  
Natural Frequencies of Continuous Plate 1973年7月 林 洋一, 川井忠彦
- TR-329 ジェットエンジン用薄肉組立ロータの曲げ剛性(静荷重試験と振動試験による測定と有限要素法による計算)  
Flexural Rigidity of the Thin Walled Build-up Rotor for the Jet Engine (Measurement by Static Load Test and Vibration Test and Calculation by Finite Element Method) 1973年7月 宮地敏雄, 小河昭紀  
貝谷昌二, 祖父江清
- TR-330T 線形シェル理論について  
On the Linear Theory of Thin Elastic Shells 1973年7月 古賀達藏, 戸田 勲
- TR-331 非線型層流安定理論と数値計算  
(第1報 べき級数展開による Orr-Sommerfeld 方程式の数値解法)  
A Non-linear Hydrodynamic Stability Theory with Numerical Calculations  
—Part 1 A Power Series Method for the Numerical Treatment of the Orr-Sommerfeld Equation— 1973年7月 伊藤信毅
- TR-332 非線型層流安定理論と数値計算  
(第2報 手行流における有限攪乱理論と二次元 Poiseuille 流れへの応用)  
A Non-linear Hydrodynamic Stability Theory with Numerical Calculations  
—Part 2 Theoretical Analysis and the Numerical Results for Plane Poiseuille Flow— 1973年7月 伊藤信毅
- TR-333 非線型層流安定理論と数値計算  
(第3報 平板境界層における有限攪乱の計算)  
A Non-linear Hydrodynamic Stability Theory with Numerical Calculations  
—Part 3 Numerical Results for the Flat Plate Boundary Layer— 1973年7月 伊藤信毅

---

## 航空宇宙技術研究所報告 334 号

昭和 48 年 8 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町 1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) 182

印刷所 株式会社 東京プレス  
東京都板橋区桜川 2~27~12

---

