NAL TR-370

UDC 539.43.01:
519.28

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-370

統計的平均としてのMiner則成立条件の検討

下 河 利 行

1974年6月

航 空 宇 宙 技 術 研 究 所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

統計的平均としてのMiner則成立条件の検討*

下　河　利　行**

Conditions Required to Satisfy Miner's Hypothesis Under Statistical Consideration

By Toshiyuki SHIMOKAWA

Abstract

The conditions for Miner's hypothesis to hold statistically are discussed with regard to the distribution of fatigue life and the cumulative damage in fatigue process. The Weibull, the Normal, and the Log-normal distribution functions are taken as that of fatigue life, which are frequently used to represent the test data of fatigue life. This study leads to the following conditions: (1) The condition concerning the scatter of fatigue life is that the coefficient of variation of fatigue life is constant, regardless of the stress level for the three types of the distribution functions described above. (2) The cumulative damage in the fatigue process is expressed by the damage curve, which is defined as the relation of the damage of a given specimen to its inherent cycle ratio n/N, where n is the number of cycles applied at a given stress level and N is the number of cycles to failure of the specimen at that stress level. It is assumed that the ascending order of the damage fraction of a given specimen in a group of specimens is invariable at any number of cycles under any applied stress level. Based on the assumption mentioned above, the condition concerning the cumulative damage in the fatigue process is that one damage curve is determined regardless of the ascending order of damage fraction of the specimen and the applied stress level, and that the increment of the damage of the specimen accumulated at the i-th stress level S_i in a variable stress history agrees with that of the case of constant stress level test at S_i.

On the other hand, when the conditions described above are not satisfied, the mean cumulative cycle ratio to failure $E[\sum_{i=1}^{2}(n_i/\bar{N}_i)]$, where $\bar{N}_i$ is the mean fatigue life at S_i, for two stress level tests is discussed. The deviation of the mean cumulative cycle ratio to failure from unity, which is influenced by the difference of the scatter of fatigue life and that of the damage curve between two stress levels, is evaluated. The mean cumulative cycle ratio to failure is less influenced by the difference of the scatter of fatigue life than that of the damage curve. It is also shown that the mean cumulative cycle ratio to failure is influenced by the co-operation of the scatter of fatigue life and the difference of the damage curve.

1. 緒　　言

一定繰返し応力による疲れ試験結果をもとに，変動繰返し応力を受ける試料の疲れ寿命を推定する方法としては，1945年に周知の直線被害法則がMiner[1]によって提案された。またそれ以前の1924年に，ころがり軸受の寿命推定を目的としてPalmgren[2]によっても同様の法則が提案されているため，この法則は一般にMiner則またはPalmgren−Miner則と呼ばれている。その後，この法則に合わない実験結果も広く見出され，これを修正する諸提案が多数の研究者によって発表されてきた。また同時に，Miner則の成否に影響を与える種々の因子についても研究されており，そのうちの主なものとして

* 昭和49年3月5日受付

** 機体第二部

は，応力による損傷度曲線の相違および応力が変動した際に生ずる干渉効果等があげられている。しかしながら疲れ試験結果には，材料固有の性質であるとされている寿命のばらつきがともなうため，統計的平均としてのMiner則の成否については検討の余地が残されている。したがって，疲れ寿命の分布を考慮したMiner則の検討が必要とされる。

この立場における研究としては，次のようなものがある。(1)横堀・安藤[3]は確率過程論の観点からMiner則が統計的に導びかれることを示した。(2)田中・秋田[4),5)]は信頼度曲線を使って，統計的平均としてのMiner則の成否を定性的に論じた。(3)市川・横堀[6)]は継続事象としての破壊の確率過程論の観点から成立条件を検討した。

しかしながら，以上の諸研究においては，疲れ寿命の分布が良くあてはまるとされているWeibull分布，正規分布および対数正規分布それぞれの場合についてはまだ論じられていない。また従来，Miner則を論ずる際に必ず議論の対象とされた疲れ過程における損傷度との関連性も十分には明らかにされていない。そこで本報では，田中ら[4),5)]の定性的成立条件を基礎として，疲れ寿命の分布形には上記の3種の分布型を導入し，疲れ過程における損傷度との関連性を考慮して，Miner則が統計的平均として成立するための条件を導びいた。また得られた条件が満たされない場合，一例として，2段2重重複応力を負荷する際の破断までの平均累積寿命比について考察を加え，数値計算例を示した。これにより，疲れ寿命のばらつきが破断までの平均累積寿命比に及ぼす影響を疲れ過程における損傷度の及ぼす影響と比較して調べた。

2. 統計的平均としてのMiner則成立条件

2.1 定性的成立条件

Miner則を簡単に記述すると，いま試料がm段の応力履歴を受けて破断すれば，このとき応力の負荷順序によらず

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{N_i}=\frac{n_1}{N_1}+\frac{n_2}{N_2}+\cdots\cdots+\frac{n_m}{N_m}=1 \qquad (1)$$

が成立することである。ここで$i=1,\ 2,\ \cdots,\ m$は履歴の順序番号を示す。これに対応する応力をS_iとすると，n_iはS_iにて与えた繰返し数，N_iはS_iを単独に与えたときの試料の寿命である。応力の負荷順序によらないことは，同時に前段の応力による損傷が後段応力による損傷進行過程に影響を及ぼさない。すなわち応力の干渉効果がないということをも意味する。そこで統計的平均としてMiner則が成立するということを，応力の負荷順序によらず，したがって応力の干渉効果なしに，破断までの平均累積寿命比（累積寿命比の期待値）

$$E\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{n_i}{\overline{N}_i}\right)=E\left(\frac{n_1}{\overline{N}_1}+\frac{n_2}{\overline{N}_2}+\cdots\cdots+\frac{n_m}{\overline{N}_m}\right)=1 \qquad (2)$$

が成立することであると考える。ここで寿命比の分母は(1)式における寿命N_iの代りに平均寿命$\overline{N_i}$を用い，相対寿命比でおきかえて表わしている。以下では，これを単に寿命比と呼ぶ。

田中ら[4),5)]は統計的平均としてMiner則が成立するためには，次の2種の条件を満たせば良いことを示した。

第1の条件，寿命比$N/\overline{N}$に対する信頼度（非破壊確率）曲線を規準化信頼度曲線と呼ぶことにすると，一定応力下において，この曲線が応力に依存しないこと。すなわち図1において，各応力共通に信頼度RはABCという1本の曲線で表わされること。

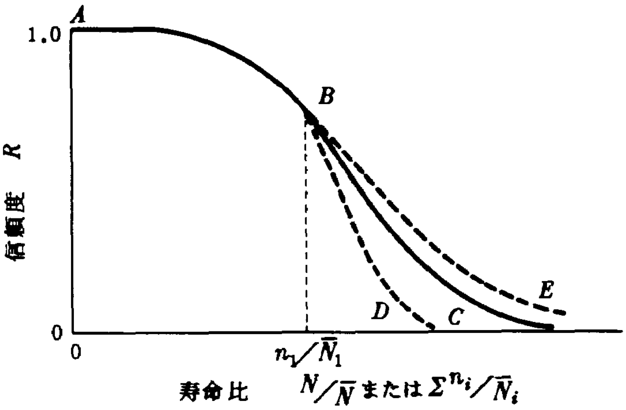

図1　規準化信頼度曲線

第2の条件，応力変動の際に信頼度曲線が乗り移ること。これを信頼度曲線の乗り移り則と称する。すなわち図2において，ABC，ADEはそれぞれ一定応力S_1，S_2の信頼度R曲線を示す。いまS_1でn_1回の繰返しの後，S_2に応力変動した場合，R曲線が図2のように$ABDE$となり，応力変動後はS_2一定の場合のR曲線上をたどるとき，信頼度曲線が乗り移ったと称する。

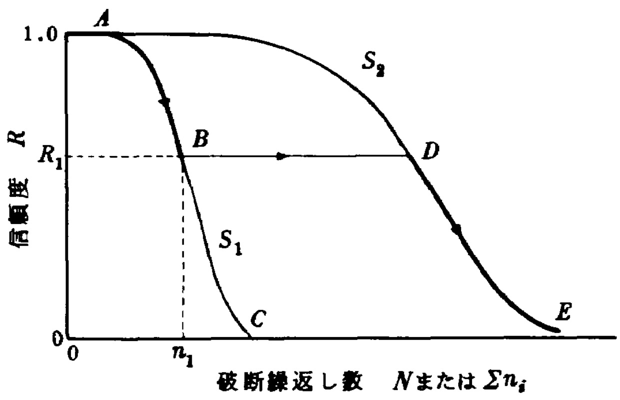

図2　信頼度曲線の乗り移り則

以上，第1および第2の条件が満たされると，図1のB点において応力変動があっても，規準化信頼度曲線は破線で描いたBDまたはBEのようにはずれることはなく，ABCと進行し，信頼度曲線と両座標軸で囲まれる面積は1となり(2)式を満足する。

以下では，まず疲れ寿命の分布形としてWeibull，正規および対数正規の3種の分布型を考え，第1の条件が成立する場合を明らかにする。このあと，疲れ過程における損傷度の概念を導入し，損傷度との関連性から第2の条件が成立する場合を明らかにして，信頼度曲線の乗り移り則に物理的根拠を与える。

2.2 一定応力下での規準化信頼度曲線が応力に依存しないための条件

疲れ寿命の分布型としてはWeibull，正規および対数正規の3分布型を考え，応力によって他種の分布型になることはないとする。いま寿命比をxとし

$$x = N/\overline{N} \tag{3}$$

と定義する。

2.2.1 Weibull分布の場合

寿命Nの信頼度$R(N)$は

$$\begin{aligned} R(N) &= \exp\left\{-\left(\frac{N-N_0}{N_c}\right)^{\alpha}\right\}, \quad N \geqq N_0 \\ &= 1 \quad , \qquad 0 \leqq N \leqq N_0 \end{aligned} \tag{4}$$

で表わされる。ここでαは形状パラメータ，N_0は位置パラメータ，N_cは尺度パラメータである。Nの確率密度関数$p(N)$には

$$p(N) = -\,dR(N)/dN \tag{5}$$

の関係があるから，平均寿命$\overline{N}$はガンマ関数を使って

$$\begin{aligned} \overline{N} &= \int_0^{\infty} N\cdot p(N)\,dN = N_0 + \int_{N_0}^{\infty} R(N)\,dN \\ &= N_0 + N_c\cdot\Gamma(1+1/\alpha) \end{aligned} \tag{6}$$

と計算できる。これからN_cを求め，(4)式に代入すると，

$$R(N) = \exp\left\{-\Gamma^{\alpha}(1+1/\alpha)\cdot\left(\frac{N-N_0}{\overline{N}-N_0}\right)^{\alpha}\right\} \tag{7}$$

ここで位置パラメータN_0の平均寿命$\overline{N}$に対する比を

$$k = N_0/\overline{N} \tag{8}$$

とおく，kは定数($\geqq 0$)である。さらに

$$K = \left\{\frac{\Gamma(1+1/\alpha)}{1-k}\right\}^{\alpha} \tag{9}$$

とおく，Kは定数である。したがって寿命比xの信頼度$R(x)$は

$$R(x) = \exp\left\{-K\cdot(x-k)^{\alpha}\right\} \tag{10}$$

となる。またNの標準偏差σは

$$\sigma = N_c\sqrt{\Gamma(1+2/\alpha)-\Gamma^2(1+1/\alpha)} \tag{11}$$

で与えられるから，Nの変動係数Vは

$$V = \frac{\sigma}{\overline{N}} = (1-k)\cdot\sqrt{\frac{\Gamma(1+2/\alpha)}{\Gamma^2(1+1/\alpha)}-1} \tag{12}$$

である。(10)式によりαとkが応力によらず一定であれば，規準化信頼度曲線は応力に依存しない。またこのとき(12)式により寿命の変動係数も応力によらない。

2.2.2 正規分布の場合

この場合は信頼度が積分表示形でしか与えられていないので，確率密度関数で論ずる。寿命Nの確率密度函数$p(N)$は

$$p(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma}\exp\left\{-\frac{(N-\overline{N})^2}{2\sigma^2}\right\}, \quad N \geqq 0 \tag{13}$$

ここでσはNの標準偏差である。寿命比xの確率密度関数を$p_n(x)$とすると

$$p(N)\cdot dN = p_n(x)\cdot dx \tag{14}$$

の関係があるから，これより$p_n(x)$を求めると

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot V}\exp\left\{-\frac{(x-1)^2}{2V^2}\right\} \tag{15}$$

ここで$V = \sigma/\overline{N}$はNの変動係数である。(15)式により，寿命の変動係数が応力によらず一定であれば，この式を積分して得られる規準化信頼度曲線は応力に依存しない。

2.2.3 対数正規分布の場合

対数寿命の表示には一般に常用対数が用いられるが，本報では計算の都合で自然対数により論ずる。なお相互の変換は定数を掛けることにより簡単に実行できる。寿命Nの確率密度関数$p(N)$は，対数寿命$\ln N$の平均値をμ，標準偏差をσ_lとすれば

$$p(N) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_l\cdot N}\exp\left\{-\frac{(\ln N-\mu)^2}{2\sigma_l^2}\right\}, \quad N > 0 \tag{16}$$

このときのNの平均値$\overline{N}$は

$$\overline{N} = \exp(\mu + \sigma_l^2/2) \tag{17}$$

である。寿命比xの確率密度関数を$p_n(x)$とすると

$$p(N)\,dN = p_n(x)\,dx \tag{18}$$

これから(17)式を使って$p_n(x)$を求めると

$$p_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\cdot\sigma_l\cdot x}\exp\left\{-\frac{(\ln x+\sigma_l^2/2)^2}{2\sigma_l^2}\right\} \tag{19}$$

ここでσ_lが応力によらず一定であれば，(19)式を積分して得られる規準化信頼度曲線は応力に依存しなくなる。一方，対数正規分布の場合には，寿命Nの分散σ^2は

$$\sigma^2 = \exp(2\mu+2\sigma_l^2) - \exp(2\mu+\sigma_l^2) \tag{20}$$

で与えられるから，(17)と(20)式からσ_lは

$$\sigma_l = \sqrt{\ln(1+V^2)} \tag{21}$$

ここで$V = \sigma/\overline{N}$はNの変動係数である。結局，(19)と(21)式から寿命の変動係数が応力によらず一定であれば，規

準化信頼度曲線は応力に依存しない。

以上によって，一定応力下の規準化信頼度曲線が応力に依存しないためには，3分布型とも寿命の変動係数が応力によらず一定であれば良い。ただしWeibull分布の場合は，位置パラメータの平均寿命に対する比と形状パラメータの両者が応力によらないことを要する。以上が疲れ寿命のばらつきに関する成立条件である。

2.3 疲れ過程の損傷度から考察した信頼度曲線の乗り移り則

応力変動後の信頼度曲線は，それ以前に個々の試料が受けた損傷度に関係があるので，まず疲れ過程における損傷度の概念を導入し，これら両者の関連性を考察して，第2の条件，信頼度曲線の乗り移り則が成立する場合を明らかにする。いま疲れ寿命に分布を考えているから，無限個の標本から成る母集団において，仮定1「一定応力下において，任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序は疲れ過程で変らない」とすれば，この順序は破断時の信頼度によって表現できる。ここで任意の試料が受ける損傷度の順序とは，言い替えれば，この試料の疲れに対する弱さの順序のことである。任意の一定応力S_iにおいて，信頼度Rに相当する試料の寿命をN_{R_i}とするとき，一定応力下での損傷度D曲線を図3に示すように，個々の試料の絶対寿命比n_i/N_{Ri}の関数

$$D=f(n_i/N_{Ri})\ ,\ (0\leqq D\leqq 1) \qquad (22)$$

として定義する。n_iはS_iの繰返し数である。さて応力の変動に際して，さらに次の仮定と条件を設ける。まず，仮定2「任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序は応力によらない」とおく。すると応力の変動があっても，個々の試料の信頼度は変らない。これらの仮定1と2はすでにLevy[7]によっても提案されている。また図4に示すように，第3の条件「損傷度曲線の乗り移り則が成立する」とおく。これは応力変動後の損傷度の進行に加速または減速現象が生じない，すなわち応力の干渉効果がないことを意味する。さて第1，第3の条件および仮定1，2のもとで応力の変動時点によらず，第2の条件が成立するためには，第4の条件「損傷度曲線は任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序と応力によらない」，すなわち図3において，信頼度Rと応力S_iのいかんによらず絶対寿命比n_i/N_{Ri}に対して損傷度Dが1本の共通曲線で描ければ良い。

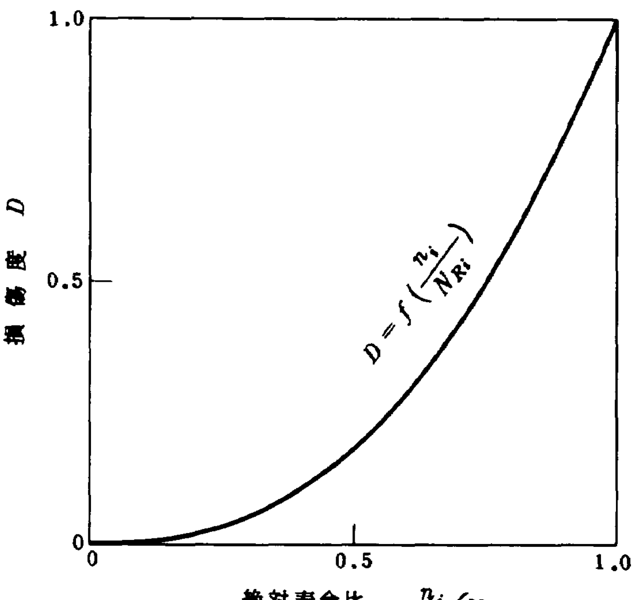

図3 一定応力下での損傷度曲線

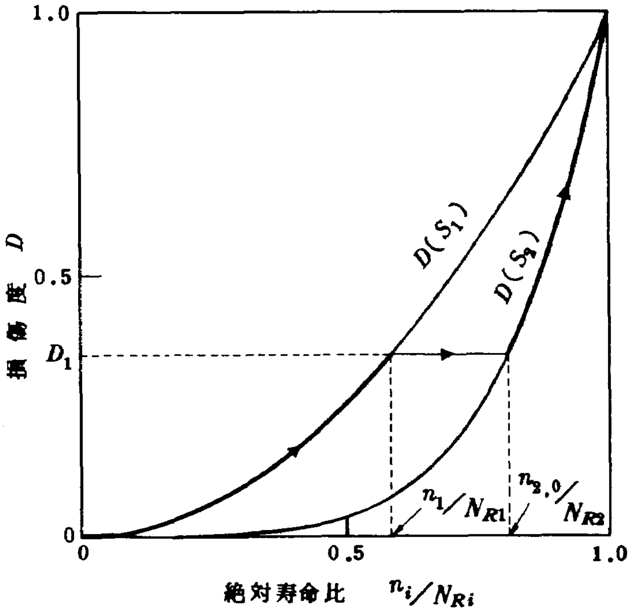

図4 損傷度曲線の乗り移り則

以上は信頼度曲線の乗り移り則に物理的根拠を与えるものである。したがって，この場合には統計的平均としてのMiner則が成立する。

また後述するように，第1の条件が成立しない場合には，他の条件が成立しても，信頼度曲線の乗り移り則は成立しない。これは田中ら[4),5)]によって示された"統計的平均としてのMiner則が成立するための2種の条件"が第2の条件ひとつにまとめられることを示すものである。

3. 成立条件を満たさない場合の信頼度曲線ならびに破断までの平均累積寿命比

疲れ過程における損傷度の概念を導入した結果，第2の条件は第1の条件および仮定1，2のもとで第3および第4の条件におきかえられた。さて第1，第3および

第4の3種の成立条件のうち，現在のところ，疲れ現象を定量的に表現できるのは第1と第4の条件のみであるから，いま第3の条件の成立を前提とし，第1と第4の2種の成立条件が満たされない場合を考える。この場合の条件の組合せは3種類考えられる。ここではまず第1の条件のみが成立しない場合と，第1と第4の条件の双方が成立しない場合を考察し，第4の条件のみが成立しない場合は後者の特殊例として含める。その上で適当な数値を与え，数値計算をして，疲れ寿命のばらつきおよび損傷度曲線の応力による相違が信頼度曲線ならびに破断までの平均累積寿命比に与える影響について検討する。ただし第4の条件が成立しない場合でも，仮定3「損傷度曲線は一定応力下において，任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序によらない」とおく。この場合は一定応力下で，同一の損傷度を与える繰返し数から得られる変動係数は損傷度のいかんによらず一定となる。なお疲れ寿命のばらつきとしては寿命の変動係数により論ずる。以下の計算例では，2段2重重複応力の場合のみをとりあげる。また Weibull 分布の場合には位置パラメータを0とおく。

さて試料に変動応力を与える場合の累積寿命比を(3)式と同様に

$$x = \Sigma\, {}^{n_i}\!/\,\overline{N}_i \tag{23}$$

と定義する。すると任意の一定応力S_iにおいて，任意の信頼度Rに対する破断寿命比X_{Ri}は

$$X_{Ri} = {}^{N_{Ri}}\!/\,\overline{N}_i \tag{24}$$

となる。ここでこのX_{Ri}と寿命の変動係数V_iを各分布型について求めておく。

1) Weibull分布（位置パラメータ＝0）の場合

(10)，(12)式から

$$X_{Ri} = \{\, ln\,(\,1/R\,)\,\}^{1/a_i} / \Gamma(\,1+{}^{1}\!/a_i\,) \tag{25}$$

$$V_i = \sqrt{\Gamma(\,1+{}^{2}\!/a_i) / \Gamma^2(1+{}^{1}\!/a_i) - 1} \tag{26}$$

2) 正規分布の場合　信頼度Rに対する規準化正規偏差をt_Rとすると，(15) 式から

$$X_{Ri} = V_i\ t_R + 1 \tag{27}$$

3) 対数正規分布の場合　(19)，(21)式からt_Rを使って

$$X_{Ri} = \exp\,(\,\sigma_{Li}\cdot t_R - {}^{\sigma_{Li}^2}\!/2\,) \tag{28}$$

$$V_i = \sqrt{\exp\,(\,\sigma_{Li}^{\,2}) - 1} \tag{29}$$

として得られる。

3.1　寿命の変動係数が成立条件を満たさない場合

(22)式の損傷度D曲線を(23)式で定義した寿命比によって表示すると

$$D = f\,(\,{}^{x}\!/X_{Ri}\,) \tag{30}$$

となる。ここで(30)式は信頼度Rおよび応力S_iによらず，${}^{x}\!/X_{Ri}$に対して1本の共通曲線である。いま2段2重重複応力として，すべての試料に1次応力S_1で繰返し数n_1を与えた後，2次応力S_2に応力変動し，その後すべての試料が破断するまで継続する場合を考える。さて任意の信頼度Rに相当する試料を考えよう。$n_1 \geqq N_{R1}$の場合，破断までの累積寿命比X_fは

$$X_f = X_{R1} \tag{31}$$

である。$n_1 < N_{R1}$のとき，1次応力(S_1，n_1)による寿命比x_1は

$$x_1 = {}^{n_1}\!/\,\overline{N}_1 \tag{32}$$

で与えられる。このときの損傷度はx_1を(30)式に代入すれば得られる。応力変動時前後で，この試料の有する信頼度および損傷度は不変であるから，1次応力(S_1，x_1)の2次応力S_2に対する換算寿命比$x_{2,0}$は(30)式から

$$x_{2,0} = x_1 \cdot X_{R2} / X_{R1} \tag{33}$$

となる。ゆえに応力変動後，破断までの寿命比x_2は

$$\begin{aligned} x_2 &= X_{R2} - x_{2,0} \\ &= X_{R2} - X_{R2}\cdot x_1 / X_{R1} \end{aligned} \tag{34}$$

と求められる。したがって，破断までの累積寿命比 X_fは

$$\begin{aligned} X_f &= x_1 + x_2 \\ &= x_1 + X_{R2} - X_{R2}\cdot x_1 / X_{R1} \end{aligned} \tag{35}$$

で与えられる。結局，(31)と(35)式により，任意の信頼度Rと破断までの累積寿命比X_fの関係を決めることができる。なお各分布型に対しては，それぞれ(25)，(27)および(28)式をあてはめれば良い。またこの関係は損傷度D曲線の(22)または(30)式の関数形いかんによらず決定される。

次に破断までの平均累積寿命比を求めよう。破断までの累積寿命比X_fの確率密度関数および信頼度をそれぞれ$p_i(X_f)$，$R_i(X_f)$とする。（ただし，$0 \leqq X_f \leqq x_1$のとき$i=1$，$x_1 < X_f$のとき$i=2$）。また$p_i(X_f)$と$R_i(X_f)$の間には

$$p_i(X_f) = -\frac{d\,R_i(X_f)}{d\,X_f}\ ,\quad (\ i=1,\ 2\ ) \tag{36}$$

の関係があり，応力変動時前後の信頼度は不変であるから

$$R_1(\,x_1) = R_2(\,x_1) \tag{37}$$

である。したがって，2段2重重複応力による破断までの平均累積寿命比$\overline{X}_f$は(36)と(37)式の関係を使って

$$\begin{aligned} \overline{X}_f &= \int_0^{x_1} X_f\cdot p_1(X_f)\,dX_f + \int_{x_1}^{\infty} X_f\cdot p_2(X_f)\,dX_f \\ &= \int_0^{x_1} R_1(X_f)\cdot dX_f + \int_{x_1}^{\infty} R_2(X_f)\,dX_f \end{aligned} \tag{38}$$

と表わされるので，(31)と(35)式との関係から$\bar{X}_f$を計算することができる。ただし応力変動後の信頼度の積分，すなわち(38)式の第2項は数値積分によって求める。以上により，$\bar{X}_f$は$R(X_f)$の積分により求められることが明らかとなったので，破断までの平均累積寿命比$\bar{X}_f$も損傷度D曲線の(22)または(30)式の関数形いかんによらず決定される。

〔計算例〕 寿命の変動係数Vが2種の応力間で非常に大きな差がある場合，すなわち$S_A(V_A=0.1)$，$S_B(V_B=0.8)$の組合せを考えてみよう。ただし寿命の変動係数が大である場合には，正規分布を採用すると，繰返し数が負の領域でも分布が存在することになり，物理的に不合理である。このため正規分布の場合は除外する。図5−a，5−bに対数正規分布の場合の信頼度Rと破断

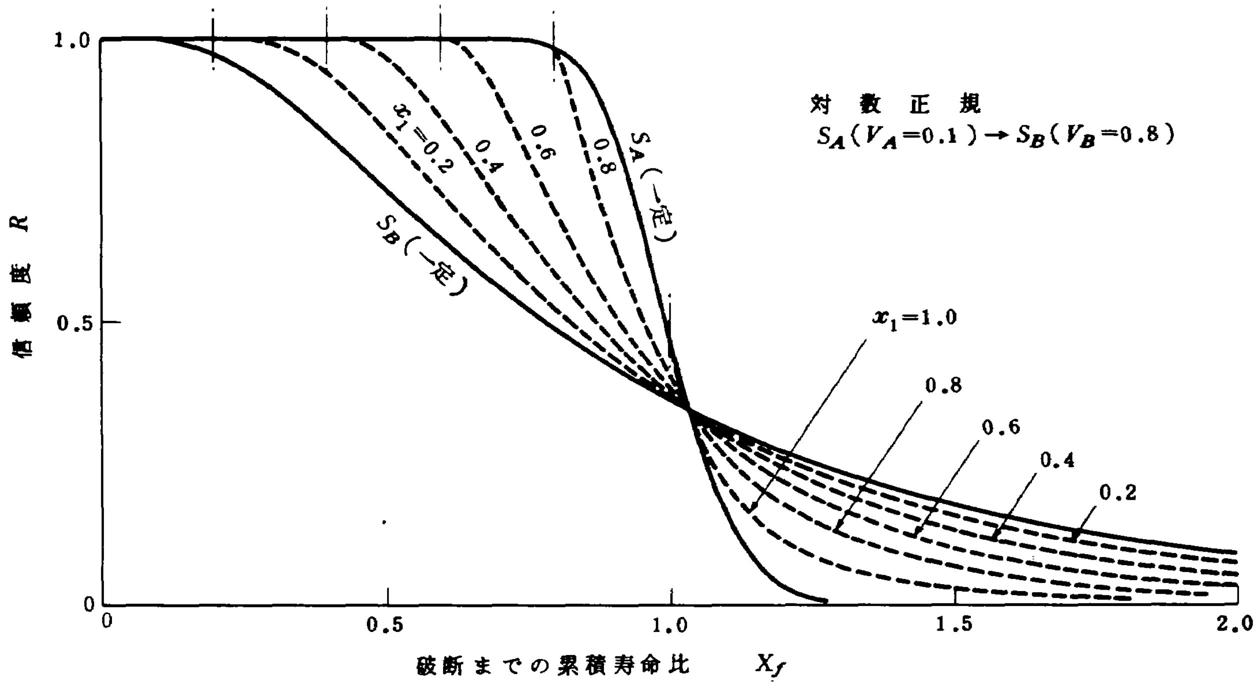

図5−a　損傷度曲線が応力によらない場合，2段2重重複応力に対する信頼度と破断までの累積寿命比の関係

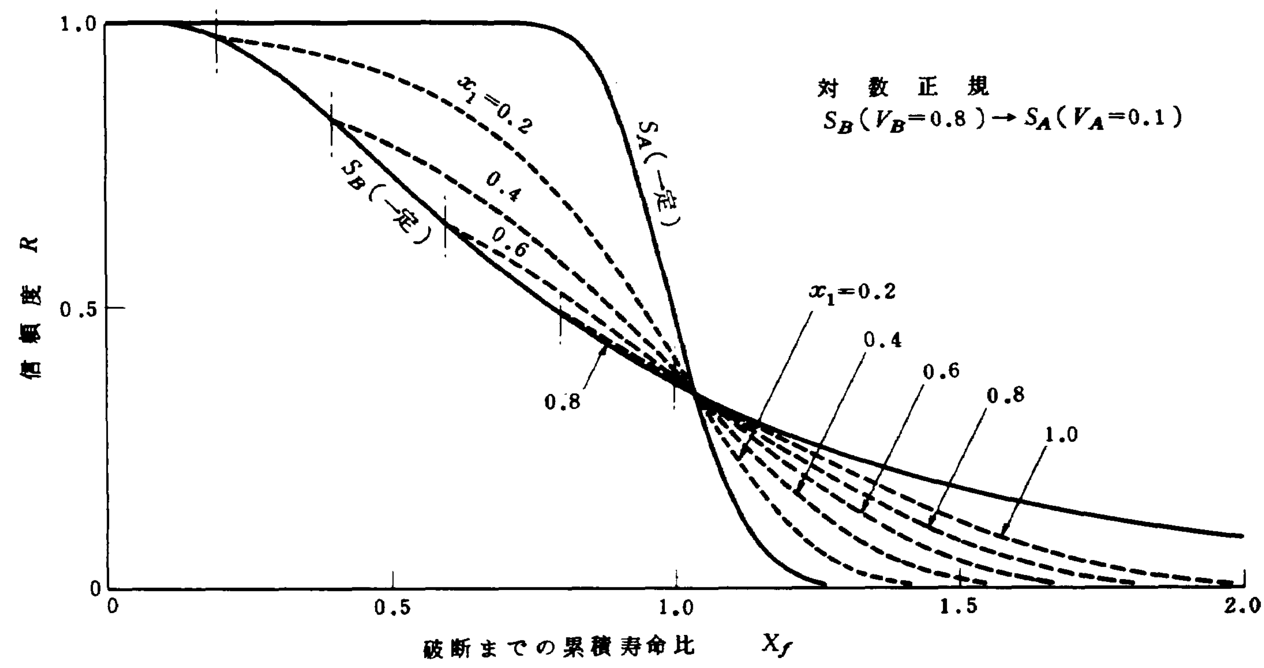

図5−b　損傷度曲線が応力によらない場合，2段2重重複応力に対する信頼度と破断までの累積寿命比の関係

までの累積寿命比X_fの関係を示す。パラメータx_1は1次応力の寿命比であり，応力の変動時点を示すものである。図から明らかなように，応力変動後の信頼度曲線は2種の応力それぞれ一定の場合における2本の信頼度曲線の内側を通過している。Weibull分布の場合も全く同様な傾向があるが図は省略する。これにより，寿命の変動係数が異なる応力間では，損傷度曲線が共通であっても，応力変動後の信頼度曲線の乗り移り則は認められないことがわかる。これは一般に変動因子に対する部品の信頼性を考える場合等において極めて重要な点である。図6は応力変動時点，すなわち1次応力の寿命比x_1と破断までの平均累積寿命比$\bar{X}_f$の関係を示す。これにより，寿命の変動係数のみの相違が破断までの平均累積寿命比の1からのはずれに与える影響は，変動係数の小から大に応力変動する場合には，無視できないとしても大きくはない。他方，変動係数の大から小に応力変動する場合には，かなりの効果が存在することがわかる。

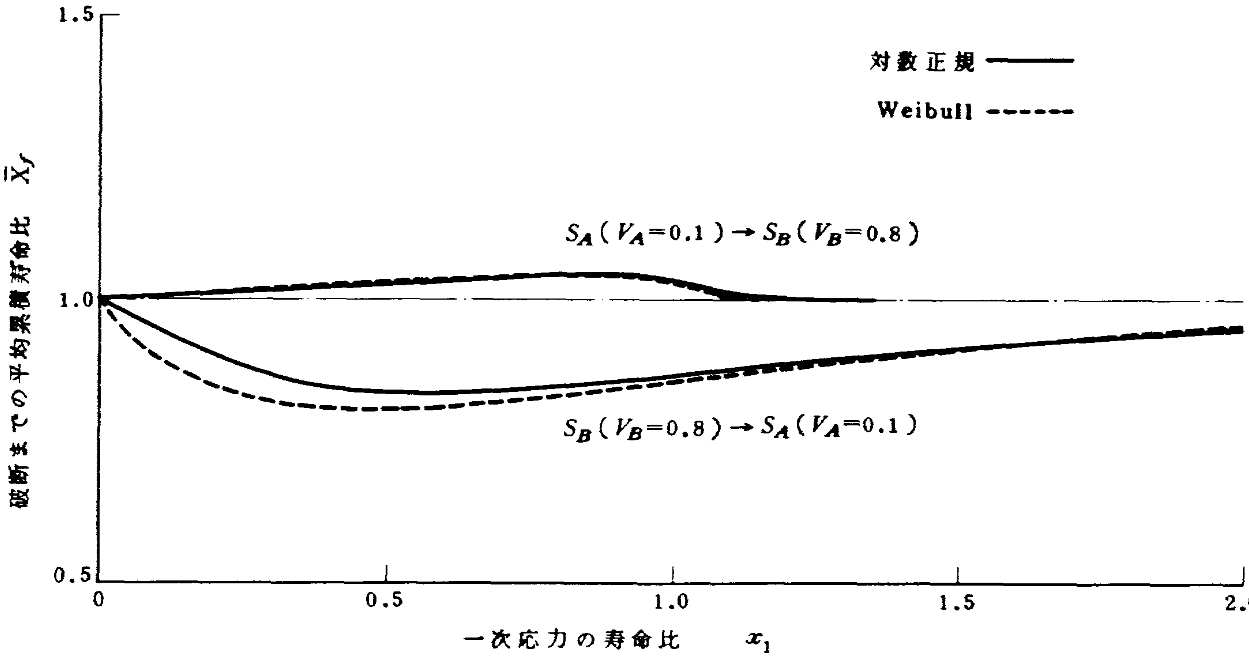

図6 応力変動時点に対する破断までの平均累積寿命比

3.2 寿命の変動係数と損傷度曲線の双方が応力によって異なる場合

損傷度曲線のモデルとしては，過去種々の提案がなされているが，ここでは直線損傷則について最も単純であり，しかも応力による相違を考察しうるMarco-Starkey[8)] の提案による次式

$$D=(n/N)^C \tag{39}$$

を使う。Cは応力に依存する定数。ただしここでは一定応力下でCは不変，寿命のみ分布すると考えているので，任意の応力S_iと信頼度Rに対する損傷度曲線を

$$D=(n_i/N_{Ri})^{C_i} = (x/X_{Ri})^{C_i} \tag{40}$$

とする。いま前節と同様な2段2重重複応力を考え，任意の信頼度Rに相当する試料を考える。$n_1 \geqq N_{R1}$のとき，破断までの累積寿命比X_fは(31)式となる。$n_1<N_{R1}$のときは，1次応力(S_1, n_1)による寿命比x_1は(32)式である。応力変動時前後で，この試料の有する信頼度および損傷度は不変であるから，1次応力(S_1, x_1)の2次応力S_2に対する換算寿命比は(40)式から

$$x_{2,0}=X_{R2}\cdot(x_1/X_{R1})^{C_1/C_2} \tag{41}$$

となる。応力変動後，破断までの寿命比x_2は

$$x_2=X_{R2}-x_{2,0} = X_{R2}-X_{R2}\cdot(x_1/X_{R1})^{C_1/C_2} \tag{42}$$

となる。したがって，破断までの累積寿命比 X_f は

$$X_f=x_1+x_2 = x_1+X_{R2}-X_{R2}\cdot(x_1/X_{R1})^{C_1/C_2} \tag{43}$$

で与えられる。結局，(31)と(43)式により，信頼度Rと破断までの累積寿命比X_fの関係を決めることができる。また破断までの平均累積寿命比$\bar{X}_f$は前節と同様に，(38)と(31)および(43)式から計算することができる。

〔計算例〕 いま高低2種の応力S_H, S_Lを考える。一般に応力の高い方が寿命の変動係数Vは小，(40)式の定数Cも小という傾向があると考えられているから，こ

こでは一例として，$S_H(V_H=0.2,\ C_H=2.0)$と$S_L(V_L=0.5,\ C_L=5.0)$の組合せを考える。ただし正規分布の場合は，前節と同様な理由で除外する。(40)式にC_H, C_Lを代入した場合の損傷度曲線を図7に示す。さて対数正規分布の場合の信頼度Rと破断までの累積寿命比X_fの関係を図8−a，8−bに示す。パラメータのx_1は1次応力の寿命比である。この場合も信頼度曲線の乗り移り則は成立していない。Weibull分布の場合も同様な傾向があるが図は省略する。図9には，1次応力の寿命比x_1と破断までの平均累積寿命比$\bar{X}_f$の関係を示す。なおこの図には寿命のばらつきが無いと考えた，図7による通常の推定法から求めた破断までの累積寿命比をも同時に示す。すなわち，これは損傷度曲線の相違のみが破断までの平均累積寿命比に及ぼす効果を示すものと考えられる。図9により，寿命の変動係数の相違が破断までの平均累積寿命比に及ぼす影響を調べると，変動係数の小から大に応力変動する場合には，通常の推定法による結果に非常に近く，変動係数の相違による効果は小さいことがわかる。他方，変動係数の大から小に応力変動する場合，破断までの平均累積寿命比は寿命にばらつきがないとした通常の推定法による値からかなりはずれている。これは図6の傾向にも一致するものである。

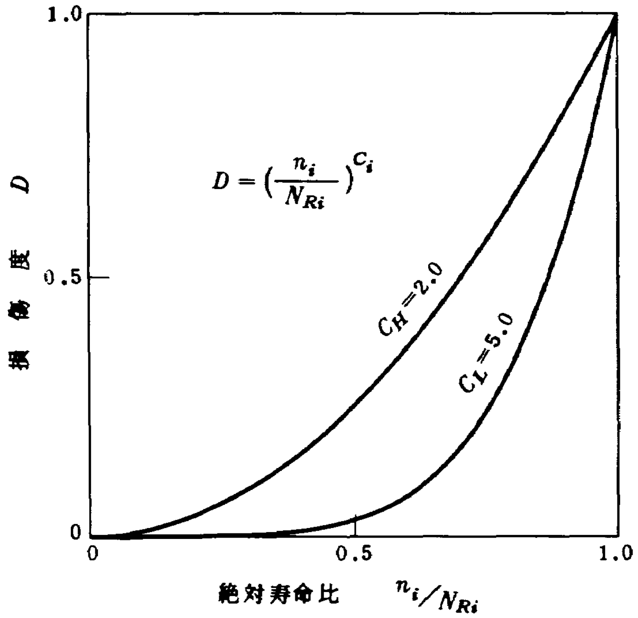

図7　2種の応力S_H，S_Lに対する損傷度曲線

以上，図6および図9の結果から，破断までの平均累積寿命比は損傷度曲線の相違によって大きく影響され，寿命の変動係数の相違から受ける影響は比較的小さいと考えられる。

次に2種の応力間で寿命の変動係数Vが等しく，定数Cのみ異なる場合として，$S_E(V_E=0.5,\ C_E=2.0)$と$S_G(V_G=0.5,\ C_G=5.0)$の組合せを考える。対数正規分布の場合の信頼度Rと破断までの累積寿命比X_fの関係を図10に示す。Weibull分布の場合も同様な傾向があるが図は省略する。この図で明らかなように，応力変動後の信頼度は図8−a，8−bの傾向と一致している。図11に1次応力の寿命比x_1に対する破断までの平均累積寿命比$\bar{X}_f$を示す。この場合にも，寿命にばらつきを考えた効果が

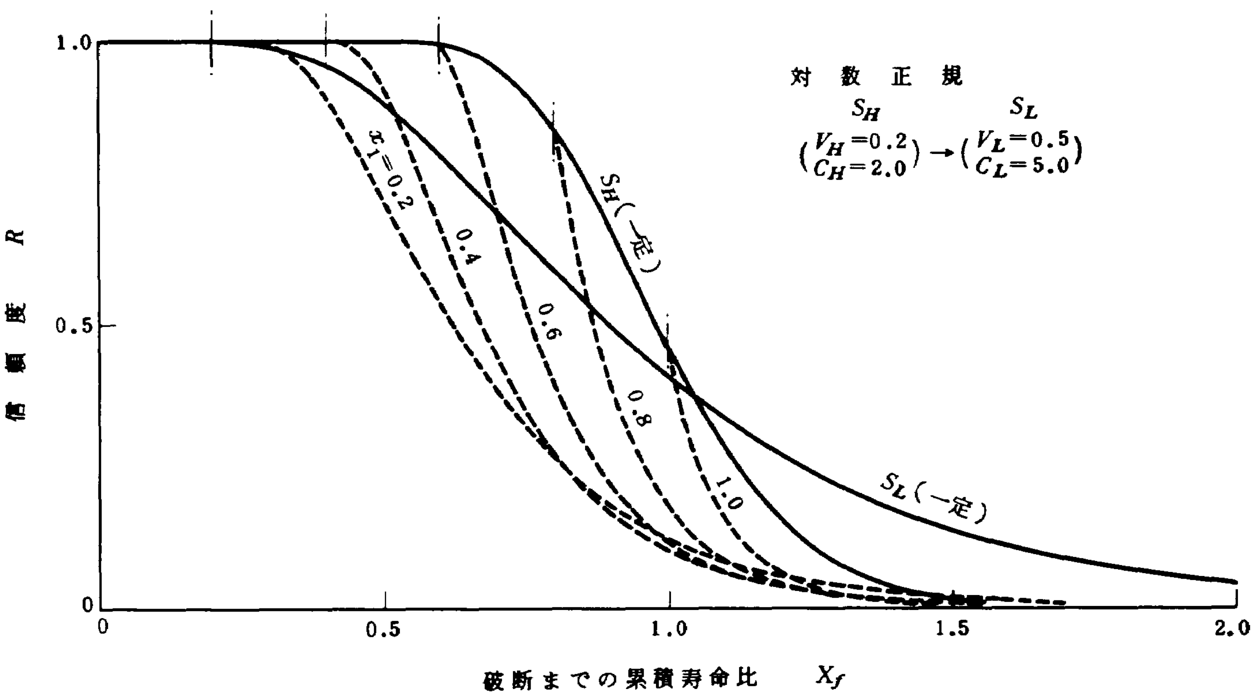

図8−a　2段2重重複応力に対する信頼度と破断までの累積寿命比の関係

現れている。すなわち，ここで得られた$\bar{X}_f$は，Cのみが異なる場合の$\bar{X}_f$（図11でばらつきなしの値）とCならびにVが等しくかつVが0でない場合の$\bar{X}_f$（x_1によらず$\bar{X}_f=1$）の双方を重ね合わせたものとしては説明できない。それゆえ，この結果は定数Cの相違と寿命のばらつきとの間の一種の相乗効果として得られたと考えられる。さらに当然のことながら，寿命の変動係数を小さくするとばらつきなしの値に近づく。

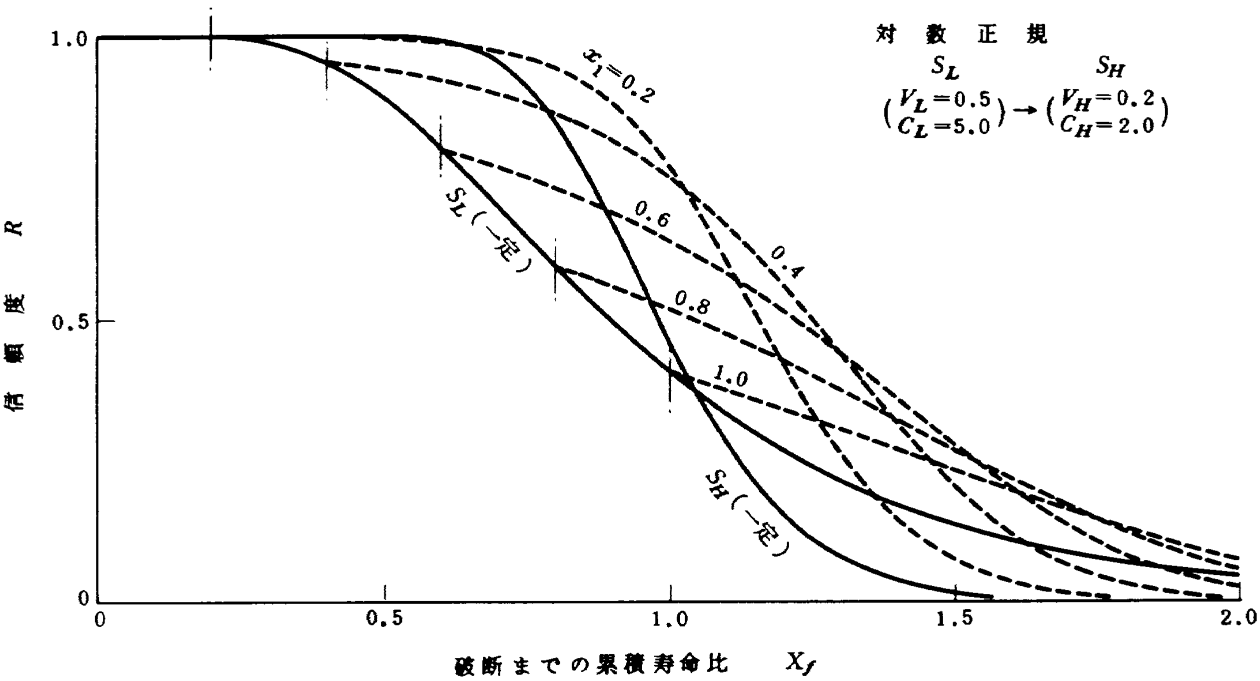

図8－b　2段2重重複応力に対する信頼度と破断までの累積寿命比の関係

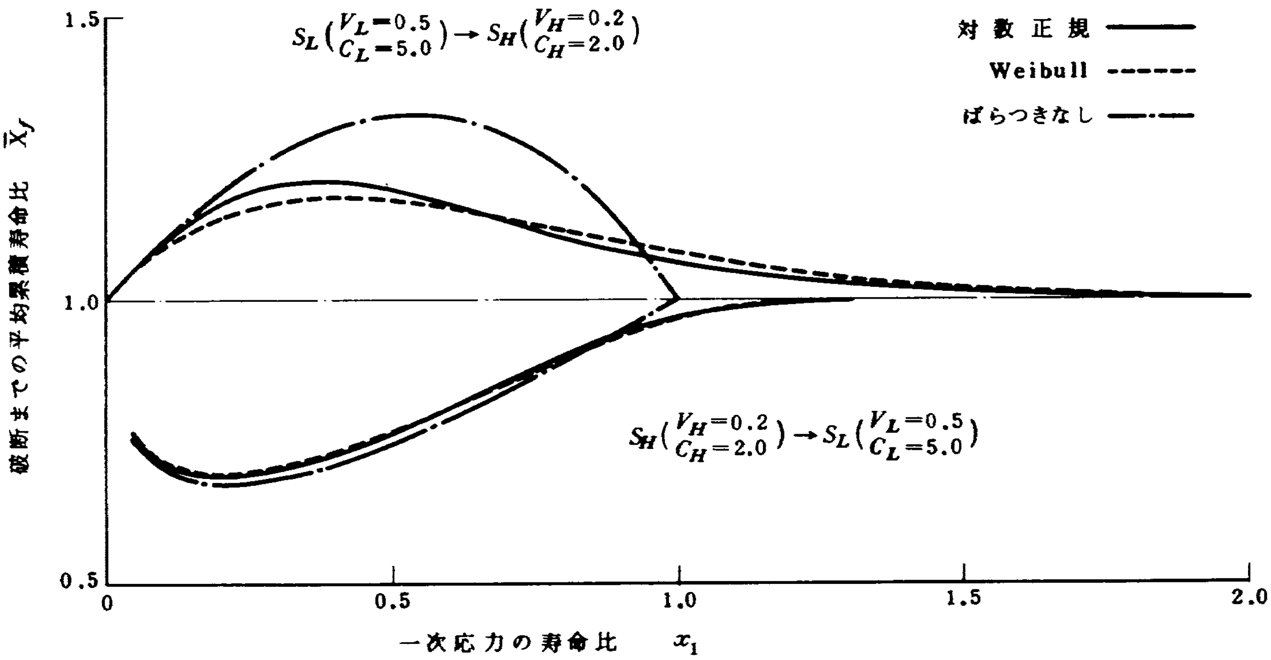

図9　応力変動時点に対する破断までの平均累積寿命比

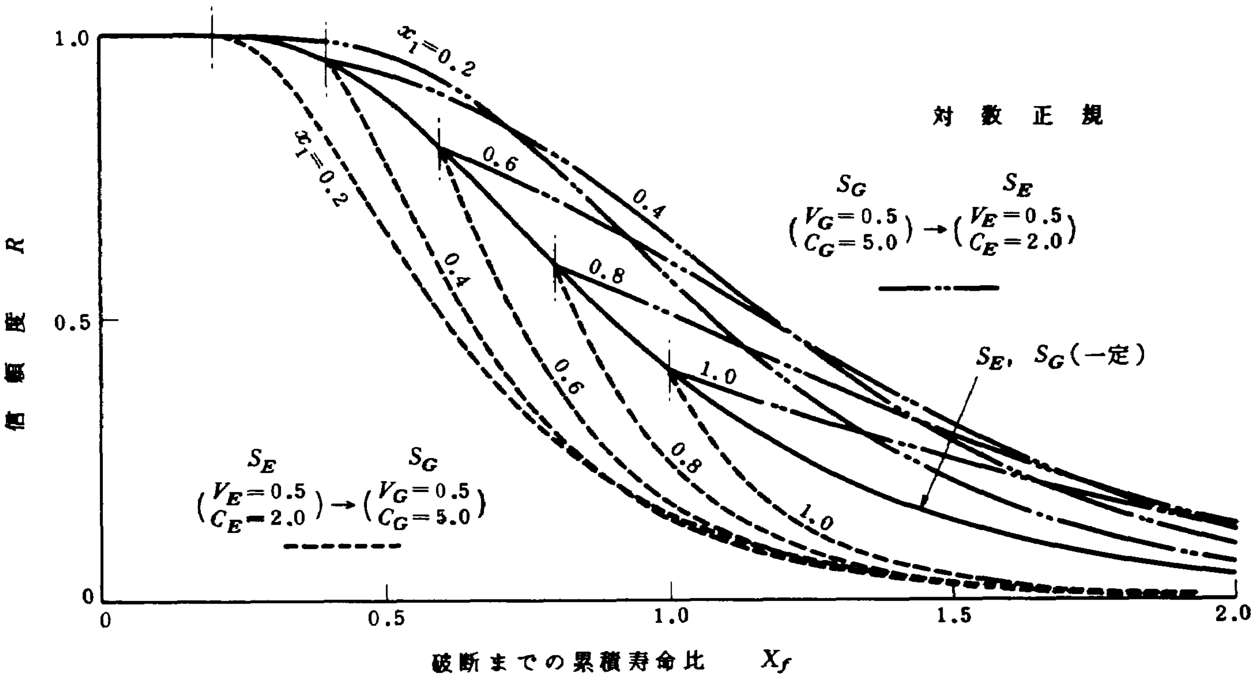

図10 寿命の変動係数が応力によらない場合，2段2重重複応力に対する信頼度と破断までの累積寿命比の関係

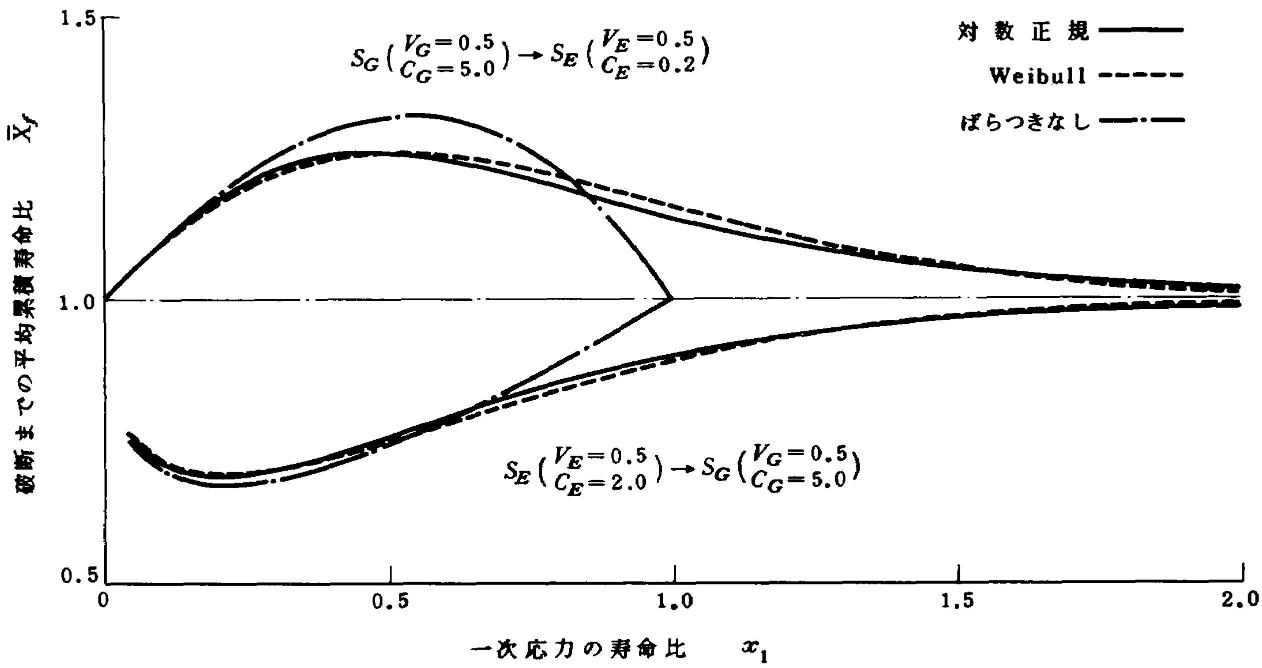

図11 応力変動時点に対する破断までの平均累積寿命比

4. 検　討

ここでは上述の議論を進める上でおいた仮定および成立条件に関して，いままでに報告されている実験結果等にもとづき若干の検討を加える。

1) 仮定1「一定応力下において，任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序は疲れ過程で変らない」田中・秋田・小林[9]は一定応力下で25本の試料により，疲れ過程におけるき裂長さの順序について調べているが，この順序は巨視的にはほとんど変らないことを報告している。これは疲れ寿命のばらつきの原因に関する本質的性質にもかかわる問題とされており[10]，さらに検討を要すると思われるが，過去この種の実験は他になされた例

がない。したがって現在のところ，切欠材のように巨視的き裂伝播が寿命の大部分を占めるような場合には，このような仮定はほゞ妥当なものであると考えられる。

2) 仮定2「任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序は応力によらない」 これを実験的に確かめた例はまだ存在しないが，Levy[7] は，疲れ寿命のばらつきは各々の試料に先在する局部的条件に依存すると考えて，この仮定をおいている。

3) 仮定3「損傷度曲線は一定応力下において，任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序によらない」 田中・秋田・小林[9]によるとき裂の進展は，一定応力下において，各々の試料の破断寿命で繰返し数を規準化して絶対寿命比に対して表わすと，ほとんど1本とみなせる共通曲線で描けることを明らかにしている。

4) 第1の条件「寿命の変動係数が3分布型いずれにおいても応力によらない」 疲れ寿命分布がWeibull，正規または対数正規分布のいずれかにあてはまるとき，寿命の変動係数が応力によらずほゞ一定とみなし得る応力範囲の存在することが，例えば，小西・篠塚[11]，田中・秋田[4),5)]および筆者ら[12)]によって明らかにされている。

5) 第3の条件「損傷度曲線の乗り則が成立する」 これは疲れにおける最も重要な問題のひとつであるが，損傷度曲線によりMiner則を論ずる場合には一般に前提条件としておかれる。

6) 第4の条件「損傷度曲線は任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序と応力によらない」 仮定3が容認されるなら，損傷度曲線が応力によらなければ良いことになるが，田中・秋田・小林[9]による実験結果を筆者が整理し直したところ，絶対寿命比に対するき裂の進展は応力によらないとみなせる範囲のあることが明らかとなっている。

一方，Miner則を比較的多数の試料(20本以上)により検討した例として，小西・篠塚[11]，田中・秋田[4),5)]の実験によると，前記した田中ら[4),5)]の挙げた2種の条件をほゞ満たして，統計的平均としてのMiner則が成立する実験例を報告している。これを本報にあてはめて考えると，まず双方の実験とも一定応力下での寿命の変動係数がほゞ等しい応力範囲である。また信頼度曲線の乗り移り則がほゞ成立していることから，損傷度に関しては調べられていないが，これらは本報で挙げた損傷度に関する仮定および成立条件をほゞ満たしている場合であると推測される。

5. 結　論

田中ら[4),5)]が定性的に導いた統計的平均としてのMiner則成立条件をもとに，疲れ寿命の分布型としてWeibull，正規および対数正規分布を導入し，疲れ過程における損傷度との関連性を考慮して，疲れ寿命のばらつきおよび疲れ過程における損傷度に関する成立条件を導いた。また得られた条件が成立しない場合，一例として，試料に2段2重重複応力を負荷する場合を考え，破断までの平均累積寿命比について考察を加え，さらに数値計算例を示し，疲れ寿命のばらつきおよび損傷度曲線の双方の応力による相違が破断までの平均累積寿命比に与える影響について調べた。

統計的平均としてMiner則が成立するための条件は，

1) 疲れ寿命のばらつきに関する条件 疲れ寿命の変動係数が3分布型いずれにおいても応力によらない。(ただしWeibull分布の場合は，位置パラメータの平均寿命に対する比および形状パラメータが応力によらない。)

2) 疲れ過程の損傷度に関する条件 仮定1「一定応力下において，任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序は疲れ過程で変らない」，および仮定2「任意の試料が受ける損傷度の全標本中における順序は応力によらない」のもとで，

2.1) 損傷度曲線の乗り移り則が成立する。

2.2) 損傷度曲線は任意の試料が受ける損傷度の順序と応力によらない。

また以上の成立条件が満たされない場合を考察した結果，破断までの平均累積寿命比は損傷度曲線の相違によって大きく影響され，疲れ寿命のばらつきの相違から受ける影響は比較的小さい。さらに，損傷度曲線の相違と疲れ寿命のばらつきとの相乗効果としても影響を受けることが明らかとなった。

最後に本研究を遂行するにあたり，終始御指導いただきました電気通信大学の田中栄教授および秋田敏助手に，また御助言をいただきました九州大学の石田誠教授および本所の上山忠夫科学研究官に厚く感謝申し上げます。

参 考 文 献

(1) M.A. Miner, J. Appl. Mech., 12 (1945), A-159.
(2) A.A. Palmgren, Z. Vereines Deutscher Ingenieure, 68-14 (1924), 339.
(3) 横堀・安藤，材料強度学会誌，4−3（昭44），87.
(4) 田中・秋田，機械学会論文集，38，313，（昭47−9），2185.
(5) 田中，機械の研究，21−11（1969），1481；同21−12（1969），1647.
(6) 市川・横堀，第1回安全工学国内シンポジウム予稿集，（昭45−5），44.

(7) J.C. Levy, Engineering, 179 (1955), 724.
(8) S.M. Marco and W.L. Starkey, Trans. Am. Soc. Mech. Eng., 76 (1954), 627.
(9) 田中・秋田・小林，材料強度学会誌，8－2（昭48），56.
(10) 横堀，材料強度学，技報堂，（1955）
(11) 小西・篠塚，京都大学工学部紀要，18（1956），78.（両氏による実験結果の再整理：下河，第2回安全工学国内シンポジウム講演予稿集，（昭46－5），48，または，下河，第15回材料研究連合講演会，（昭46－9），85.）
(12) 下河・浜口，材料強度学会講演論文集，（昭48－6），21，または，下河・浜口，機械学会第51期全国大会講演論文集，No. 730－12（昭48－10），169.（材料強度学会誌および本所研究報告に投稿中）

TR—370 正誤表

頁	行	誤	正
10	図１１上方	$S_G\left(\begin{smallmatrix}V_G=0.5\\C_G=5.0\end{smallmatrix}\right)\rightarrow S_E\left(\begin{smallmatrix}V_E=0.5\\C_E=0.2\end{smallmatrix}\right)$	$S_G\left(\begin{smallmatrix}V_G=0.5\\C_G=5.0\end{smallmatrix}\right)\rightarrow S_E\left(\begin{smallmatrix}V_E=0.5\\C_E=2.0\end{smallmatrix}\right)$

航空宇宙技術研究所報告370号

昭和49年6月発行

発行所　航　空　宇　宙　技　術　研　究　所
東　京　都　調　布　市　深　大　寺　町　1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　有　限　会　社　　共　　進
東京都杉並区久我山4－1－7(羽田ビル)

Printed in Japan