

NAL TR-373

UDC 533.69.048.3:  
534.01

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-373

振動する翼列の吹下ろしの一計算

市川輝雄

1974年6月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 振動する翼列の吹下ろしの一計算\*

市川 輝 雄\*\*

## An Analysis for Downwash behind Oscillating Cascades

Teruo ICHIKAWA

### SUMMARY

An approximate theory is developed for analysing downwashes behind oscillating two dimensional cascades having an infinite number of blades. The calculation procedure is greatly simplified by concentrating bound vortices on the blades other than the reference blade to their quarter chord points and also by assuming that the downwash on the reference blade induced by these concentrated vortices can be represented by its value at the three quarter chord point. It is disclosed that, both in the circulation and the downwash, limiting values when the frequency tends to zero are not equal to steady values and that the downwash becomes substantially a traveling wave of constant amplitude only after a short distance from the cascade. Circulations and downwashes are calculated for various reduced frequencies and blade spacings. The results show that, both in circulations and downwashes, variations in the real parts against the reduced frequency are small and those in the imaginary parts are approximately linear. Effects of the blade spacing are large in the circulation but are small in the downwash. A ratio of the downwash on a center plane of two adjacent blades to that on a blade plane becomes unity when the frequency or the spacing tends to zero, and decreases when a product of the reduced frequency and the spacing increases.

### 1. ま え が き

数年前当所の突風々胴<sup>1)</sup>が計画されたとき、いわゆる正弦波突風を振動する翼列で実現させることになった。風胴における正弦波突風とは主流に直角な一方向に時間的に正弦的に変化する微小速度(突風速度)をもち、これが主流の方向に進行波として流れて行く速度変化をいい、速度変化の振幅が空間的に一様であることが要求される。振動する翼列によってこのような速度変化を実現し得るかどうか、また実現し得る場合、翼間隔や翼弦長はどの程度が適当かなどを検討する必要があった。

本報告は上の目的のために行なった近似解析に多少手を加えたものである。無限枚数の2次元翼列が振動する

場合の揚力やモーメントの解析は数多く行なわれているが、<sup>2,3)</sup>後方における吹下ろしの解析は筆者の知る限り行なわれていないようである。もちろん文献(3)のような揚力やモーメントを求める厳密な理論を拡張して吹下ろしを計算することはそれ程困難なことではないが、いささか鶏を割くに牛刀を以てする感じがする。それは翼にごく近い範囲を除いた後方の吹下ろしの計算のためには、翼面上の圧力分布あるいは渦分布を知る必要はなく翼全体の循環のみを知れば十分であり、循環を求めることは渦分布を求めることに比べてはるかに簡単だからである。そこで非圧縮流中で振動する無限枚数翼列の後方の吹下ろしを求める近似理論を上のごとくに基づいて展開した。理論は2段階よりなり、第1段階は循環を求める方程式で、ここでは塩入<sup>2)</sup>に従って基準翼以外の翼では翼面上の渦分布を $\frac{1}{4}$ 翼弦点に集中させたモデルを考える。さら

\* 昭和49年5月7日受付

\*\* 機体第一部

にこの集中渦によって誘起される基準翼での吹下ろしはその $\frac{3}{4}$ 翼弦点における値を用いることにする。循環が決まれば後方にはき出される渦分布が決まるので、第2段階でこれらの渦系によって誘起される吹下ろしすなわち翼列後方の吹下ろしを第1段階と類似の式を用いて計算することになる。上のようなモデル化によって、定常の場合には厳密解と完全に一致する循環を得ることは注目に値する。

## 2. 記号

- $A$  : (30)式  
 $a$  : 翼のピッチ軸の  $x^*$  座標  
 $a_n$  :  $K_3$  を展開した係数, (37)式  
 $B$  : (31)式  
 $b$  : 半翼弦長  
 $D_1$  : (52)式  
 $D_2$  : (53)式  
 $H_n$  : (39)式  
 $h$  : 翼間隔  
 $I_n$  : (40)式  
 $K_1$  : 核, (12)式  
 $K_2$  : 核, (13)式  
 $K_3$  : 核, (22)式  
 $k$  :  $= b\omega/U$ , 無次元振動数  
 $t$  : 時間  
 $U$  : 主流の速度  
 $w$  : 吹下ろし, 上向き正  
 $w_a$  : 翼面上の吹下ろし, 上向き正  
 $w_1$  : 翼と同一平面上の吹下ろし  
 $w_2$  : 丁度翼と翼の中間の平面上の吹下ろし  
 $x, \xi$  : 翼弦方向座標, 前縁から後縁に向うのが正  
 $y, \eta$  : (36)式  
 $z$  : 翼弦に垂直方向の座標, 上向き正  
 $z_a$  : 翼面の  $z$  座標  
 $\alpha$  : 翼のピッチ角  
 $\Gamma$  : 循環  
 $r_a$  : 翼面上の  $x$  方向単位距離あたりの循環(束縛渦)  
 $r_w$  : 後流の  $x$  方向単位距離あたりの循環 (shed vortex)  
 $\kappa$  :  $(h^*/\pi)k$   
 $\Omega$  : reduced circulation  
 $\omega$  : 円振動数  
 $*$  : 半翼弦長  $b$  で割った長さを表わす  
 $\bar{\phantom{x}}$  : 複素振幅を表わす

## 3. 基礎の方程式

非圧縮流中で振動する無限枚数の食違い角のない2次元翼列の理論は、単独2次元翼に対するSchwarzの理論<sup>4,7)</sup>を拡張して次の積分方程式の形に書くことができる。この場合各翼は同じ振幅、同じ位相で振動するものとする。

$$w_a(x, t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-b}^b \frac{(x-\xi)r_a(\xi, t)}{(x-\xi)^2 + (nh)^2} d\xi - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_b^{\infty} \frac{(x-\xi)r_w(\xi, t)}{(x-\xi)^2 + (nh)^2} d\xi \quad (1)$$

ここに  $b$  は半翼弦長,  $h$  は翼間隔,  $r_a$  と  $r_w$  はそれぞれ翼面上および後流における単位の距離 ( $x$  方向) 当りの循環で,  $r_a$  はいわゆる束縛渦 (bound vortex),  $r_w$  は後流にはき出される渦 (shed vortex) をあらわす。  $f$  は Cauchy の主値をとる積分をあらわす。また左辺の  $w_a$  は流れがいつも翼面に接しているという条件から決まる翼面上の吹下ろし downwash (上向き正, 吹上げ upwash というべきであるが、ここでは通常呼び方に従って吹下ろしということにする) で

$$w_a(x, t) = \frac{\partial z_a}{\partial t} + U \frac{\partial z_a}{\partial x} \quad (2)$$

で与えられる。ここに  $U$  は主流の速度,  $z_a$  は翼面 (厚さは考えていない) の  $z$  座標である。後に述べるように  $r_w$  は  $r_a$  で表わされるから、与えられた  $w_a$  に対して後縁の Kutta の条件を満たす  $r_a$  を求めることは原理的に可能である。

$r_a$  が求められ、従って  $r_w$  も知られればこれらの渦系によって誘起される任意の位置における吹下ろしは

$$w(x, z, t) = -\frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_{-b}^b \frac{(x-\xi)r_a(\xi, t)}{(x-\xi)^2 + (z-nh)^2} d\xi - \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \int_b^{\infty} \frac{(x-\xi)r_w(\xi, t)}{(x-\xi)^2 + (z-nh)^2} d\xi \quad (3)$$

で与えられる。

これらの式をもう少し便利な形に書き直してみよう。まず座標と翼間隔を半弦長で無次元化して

$$x^* = \frac{x}{b}, \quad \xi^* = \frac{\xi}{b}, \quad z^* = \frac{z}{b} \quad (4)$$

$$h^* = \frac{h}{b} \quad (5)$$

とおく。つぎに正弦波振動の仮定によって

$$r_a(\xi^*, t) = \bar{r}_a(\xi^*) e^{i\omega t} \\ r_w(\xi^*, t) = \bar{r}_w(\xi^*) e^{i\omega t} \quad (6)$$

$$w_a(x^*, t) = \bar{w}_a(x^*) e^{i\omega t} \\ = \frac{U}{b} \left( ik \bar{z}_a + \frac{d\bar{z}_a}{dx^*} \right) e^{i\omega t} \quad (7)$$

$$w(x^*, z^*, t) = \bar{w}(x^*, z^*) e^{i\omega t} \quad (8)$$

と書ける。ここに  $k$  は無次元振動数で

$$k = \frac{b\omega}{U} \quad (9)$$

後流渦は翼全体の循環の変化によって表わされ<sup>4)</sup>

$$\bar{\Gamma}_w(\xi^*) = -ik\bar{\Omega} e^{-ik\xi^*} \quad (10)$$

ここに

$$\bar{\Omega} = \frac{\bar{\Gamma}}{b} e^{ik} \\ = e^{ik} \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}_a(\xi^*) d\xi^* \quad (11)$$

$\bar{\Gamma} e^{i\omega t}$  は翼全体の循環、 $\bar{\Omega}$  は reduced circulation と呼ばれる。

(1)式と(3)式にあらわれる無限級数の和は付録1に示すように既知関数であらわされ

$$K_1(x^* - \xi^*; h^*) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^* - \xi^*}{(x^* - \xi^*)^2 + (nh^*)^2} \\ = \frac{\pi}{h^*} \coth\left\{ \frac{\pi}{h^*} (x^* - \xi^*) \right\} \quad (12)$$

$$K_2(x^* - \xi^*, z^*; h^*) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{x^* - \xi^*}{(x^* - \xi^*)^2 + (z^* - nh^*)^2} \\ = \frac{\frac{\pi}{h^*} \sinh\left\{ \frac{2\pi}{h^*} (x^* - \xi^*) \right\}}{\cosh\left\{ \frac{2\pi}{h^*} (x^* - \xi^*) \right\} - \cos\left( \frac{2\pi}{h^*} z^* \right)} \quad (13)$$

(4)-(13)式を用いると(1)式、(3)式はそれぞれ

$$\bar{w}_a(x^*) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K_1(x^* - \xi^*; h^*) \bar{\Gamma}_a(\xi^*) d\xi^* \\ + \frac{ik\bar{\Omega}}{2\pi} \int_1^{\infty} K_1(x^* - \xi^*; h^*) e^{-ik\xi^*} d\xi^* \quad (14)$$

$$\bar{w}(x^*, z^*) = -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 K_2(x^* - \xi^*, z^*; h^*) \bar{\Gamma}_a(\xi^*) d\xi^* \\ + \frac{ik\bar{\Omega}}{2\pi} \int_1^{\infty} K_2(x^* - \xi^*, z^*; h^*) e^{-ik\xi^*} d\xi^* \quad (15)$$

(12)式から容易にわかるように

$$\lim_{x^* \rightarrow \infty} K_1(x^* - \xi^*; h^*) = \frac{1}{x^* - \xi^*} \quad (16)$$

であって、この場合(14)式は単独翼の場合に帰着する。(14)、(15)式は線形ポテンシャル流理論の範囲内で厳密な方程式であって、翼は厚さがなく、 $r_a$  も  $r_w$  も一平面内に留まり、渦の拡散もないと考えている。このような

仮定は少なくとも単独翼の揚力やモーメントを求める問題ではよい結果を与えているが、当面の問題においては  $r_w$  の位置の変化とその拡散がある程度の影響をもつことがあるかも知れない。しかし本報告ではこの問題には触れないことにする。

#### 4. モデルの簡単化

$\bar{\Gamma}_a$  に関する積分方程式(14)は核の形がやや複雑であるから、単独2次元翼の場合<sup>4)</sup>のような解析解は見出されていない。従って数値解法に頼らねばならないが、これをこのままの形で解くことはまえがきに述べたように得策でない。そこで以下に述べるようなモデルの簡単化を行なう。まず(15)式から考える。

(15)式の核  $K_2$  は  $x^* - \xi^*$  が大きくなると急速に一定値に近づく。すなわち付録1に示すように

$$K_2(x^* - \xi^*, z^*; h^*) \doteq \frac{\pi}{h^*} \quad x^* - \xi^* \geq \frac{5}{\pi} h^* \quad (17)$$

そこで  $x^* \geq 1 + 5h^*/\pi$  の範囲のみを考えることにすれば(15)式の右辺第1項の積分は、(11)式を参照して

$$\int_{-1}^1 K_2(x^* - \xi^*, z^*; h^*) \bar{\Gamma}_a(\xi^*) d\xi^* \\ \doteq \frac{\pi}{h^*} \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}_a(\xi^*) d\xi^* \\ = \frac{\pi}{h^*} \bar{\Omega} e^{-ik} \quad (18)$$

すなわち(15)式は十分な精度をもって

$$\bar{w}(x^*, z^*) = \frac{\bar{\Omega}}{2\pi} \left\{ -\frac{\pi}{h^*} e^{-ik} \right. \\ \left. + ik \int_1^{\infty} K_2(x^* - \xi^*, z^*; h^*) e^{-ik\xi^*} d\xi^* \right\} \\ x^* \geq 1 + \frac{5}{\pi} h^* \quad (19)$$

で近似される。 $x$  の範囲は後縁から翼間隔の  $5/\pi = 1.59$  倍以上後方であることを示し、実際上全く差支えない。

(19)式によれば翼列後方の吹下ろしは reduced circulation  $\bar{\Omega}$  のみによって決まることがわかる。従って(14)式を解いて  $\bar{\Gamma}_a$  の分布を見出す必要はなく、その翼弦方向の積分値  $\bar{\Omega}$  を求めることができればよい。このため塩入<sup>2)</sup>に従って、 $n=0$  に対応する翼(基準翼ということにする)以外の翼の  $\bar{\Gamma}_a$  をそれぞれの  $1/4$  翼弦点 ( $\xi^* = -1/2$ ) に集中させて考える。すなわちこれらの翼の  $\bar{\Gamma}_a$  を

$$\bar{\Gamma}_a(\xi^*) = \delta\left(\xi^* + \frac{1}{2}\right) \int_{-1}^1 \bar{\Gamma}_a(\xi^*) d\xi^* \\ = \bar{\Omega} e^{-ik} \delta\left(\xi^* + \frac{1}{2}\right) \quad (20)$$

とおく。ここに  $\delta(\xi^* + 1/2)$  はデルタ関数である。さらにこれらの集中した  $\bar{r}_a$  によって基準翼の翼面上に誘起される吹下ろしは、その  $3/4$  異弦点 ( $x^* = 1/2$ ) における値で代表させる。このように翼面上の束縛渦を  $1/4$  異弦点に集中させ、それによる  $3/4$  異弦点における吹下ろしを与えられた吹下ろしに合うように循環を決めるやり方は 2次元定常平板翼では厳密な結果を与え(文献(4), pp. 239 - 240), さらに Weissinger の揚力線理論<sup>5)</sup> や Hedman の vortex lattice method<sup>6)</sup> の基礎となっている。このような簡単化を行なうと (14) 式は

$$\begin{aligned} \bar{w}_a(x^*) = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \frac{\bar{r}_a(\xi^*)}{x^* - \xi^*} d\xi^* \\ & + \frac{ik\bar{\Omega}}{2\pi} \int_1^\infty \frac{e^{-ik\xi^*}}{x^* - \xi^*} d\xi^* \\ & - \frac{K_3(1; h^*)}{2\pi} \bar{\Omega} e^{-ik} \\ & + \frac{ik\bar{\Omega}}{2\pi} \int_1^\infty K_3(x^* - \xi^*; h^*) e^{-ik\xi^*} d\xi^* \end{aligned} \quad (21)$$

と書き直される。ここに

$$\begin{aligned} K_3(x^* - \xi^*; h^*) = & K_1(x^* - \xi^*; h^*) - \frac{1}{x^* \xi^*} \\ = & \frac{\pi}{h^*} \coth\left[\frac{\pi}{h^*}(x^* - \xi^*)\right] - \frac{1}{x^* \xi^*} \end{aligned} \quad (22)$$

$$K_3(1; h^*) = \frac{\pi}{h^*} \coth \frac{\pi}{h^*} - 1 \quad (23)$$

(21) 式において右辺第 3 項が簡単化の結果をあらわす。第 2 項と第 4 項は後の計算の便利のために 2 つの部分に分けたものである。第 2 項までが単独翼の場合の方程式をあらわし、第 3, 4 項が他の翼の影響をあらわすことになる。

## 5. 解 法

(21) 式から  $\bar{\Omega}$  を求めるため、両辺に  $\sqrt{(1+x^*)/(1-x^*)}$  を掛けて  $x^*$  について -1 から 1 まで積分すると

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \bar{w}_a(x^*) dx^* \\ = & -\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^1 \bar{r}_a(\xi^*) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \frac{1}{x^* - \xi^*} dx^* d\xi^* \\ & + \frac{ik\bar{\Omega}}{2\pi} \int_1^\infty e^{-ik\xi^*} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \frac{1}{x^* - \xi^*} dx^* d\xi^* \\ & - \frac{K_3(1; h^*) \bar{\Omega} e^{-ik}}{2\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} dx^* \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & + \frac{ik\bar{\Omega}}{2\pi} \int_1^\infty e^{-ik\xi^*} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \\ & \quad \times K_3(x^* - \xi^*; h^*) dx^* d\xi^* \end{aligned} \quad (24)$$

$x^*$  と  $\xi^*$  による積分順序の交換についての議論は Schwarz<sup>7)</sup> によってなされている。

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \frac{dx^*}{x^* - \xi^*} = \pi \quad (-1 \leq \xi^* \leq 1) \quad (25)$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \frac{dx^*}{x^* - \xi^*} = \pi \left(1 - \sqrt{\frac{\xi^* + 1}{\xi^* - 1}}\right) \quad (\xi^* > 1) \quad (26)$$

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} dx^* = \pi \quad (27)$$

$$\begin{aligned} & \int_1^\infty \left(1 - \sqrt{\frac{\xi^* + 1}{\xi^* - 1}}\right) e^{-ik\xi^*} d\xi^* \\ = & \frac{\pi}{2} [H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)] + \frac{e^{-ik}}{ik} \end{aligned} \quad (28)$$

を用いると、(24) 式から

$$\bar{\Omega} = \frac{4 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \bar{w}_a(x^*) dx^*}{\pi ik [H_1^{(2)}(k) + iH_0^{(2)}(k)] + A(k, \pi/h^*)} \quad (29)$$

ここに  $H_1^{(2)}$  と  $H_0^{(2)}$  はそれぞれ 1 次および 0 次の第 2 種 Hankel 関数である。また  $A(k, \pi/h^*)$  は

$$\begin{aligned} & A(k, \pi/h^*) \\ = & 2[-K_3(1; h^*) e^{-ik} \\ & + \frac{ik}{\pi} \int_1^\infty e^{-ik\xi^*} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} K_3(x^* - \xi^*; h^*) \\ & \quad dx^* d\xi^*] \\ = & 2\left[-\left(\frac{\pi}{h^*} \coth \frac{\pi}{h^*} - 1\right) e^{-ik} \right. \\ & \quad \left. + ik \cdot B(k, \pi/h^*)\right] \end{aligned} \quad (30)$$

ここに

$$\begin{aligned} & B(k, \pi/h^*) \\ = & \frac{1}{\pi} \int_1^\infty e^{-ik\xi^*} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} K_3(x^* - \xi^*; h^*) dx^* d\xi^* \end{aligned} \quad (31)$$

(29) 式において  $A(k, \pi/h^*)$  は異列であるための付加項で、この項がなければ単独翼の場合の式と一致する(文献(4), p. 276)。

(29) 式はまた Söhngen の反転公式(文献(4), p. 217) を用いても得られる。上の方法は揚力面理論の方程式から揚力線理論の方程式を得るのに用いられている方法である(文献(4), p. 230)。

(29) 式は前節の簡単化によって得られた式であるが、定常の場合には厳密解と一致することを示してみよう。

定常の場合には(24)式の右辺第2項と第4項がなくなり、  
また  $k=0$  であるから

$$\begin{aligned} \bar{\Gamma} &= b \bar{\Omega} \\ &= -\frac{2}{\pi} h \left( \tanh \frac{\pi}{h^*} \right) \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \bar{w}_a(x^*) dx^* \quad (32) \end{aligned}$$

迎角  $\alpha$  の平板異列を考えると

$$\bar{w}_a = -U\alpha \quad (33)$$

であるから

$$\bar{\Gamma} = 2hU\alpha \tanh \frac{\pi}{h^*} \quad (34)$$

これは厳密解<sup>8)</sup>と一致する。このように定常平板異列の場合には厳密解を与え、非定常性は主として(24)式の右辺第2項と第4項に基因し、これらの項には簡単化は行なわれていないから、(29)式はよい近似を与えるものと期待される。

さて(29)式によって  $\bar{\Omega}$  の値を定めるには、(31)式の  $B(k, \pi/h^*)$  の値を定めねばならない。このため核  $K_3$  を次のように Taylor 展開する。

$$\begin{aligned} K_3(x^* - \xi^*; h^*) &= \frac{\pi}{h^*} \left[ \coth(y - \eta) - \frac{1}{y - \eta} \right] \\ &= \frac{\pi}{h^*} \left[ a_0(\eta) + a_1(\eta)y + a_2(\eta)y^2 + \dots \right] \\ &\quad - \frac{\pi}{h^*} < y < \frac{\pi}{h^*}, \quad \eta > \frac{\pi}{h^*} \quad (35) \end{aligned}$$

ここに

$$y = \frac{\pi}{h^*} x^*, \quad \eta = \frac{\pi}{h^*} \xi^* \quad (36)$$

$$\begin{aligned} a_n(\eta) &= \frac{(-1)^n}{n!} \frac{d^n}{d\eta^n} \left( -\coth \eta + \frac{1}{\eta} \right) \\ &\quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (37) \end{aligned}$$

$n=7$  までの  $a_n(\eta)$  の形が付録2に与えてある。(35)式 ( $n=N$  まで)を(31)式に代入して

$$\begin{aligned} B(k, \pi/h^*) &= \frac{1}{\pi} \cdot \frac{\pi}{h^*} \sum_{n=0}^N \int_1^{\infty} e^{-ik\xi^*} a_n(\eta) d\xi^* \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} y^n dx^* \\ &= \frac{\pi}{h^*} \sum_{n=0}^N H_n(k, \pi/h^*) I_n \quad (38) \end{aligned}$$

とおく。ここに

$$H_n(k, \pi/h^*) = \left( \frac{\pi}{h^*} \right)^n \int_1^{\infty} e^{-ik\xi^*} a_n(\eta) d\xi^* \quad (39)$$

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} x^{*n} dx^* \quad (40)$$

$H_n$  の値は付録2に示すように初期値  $H_0$  と漸化式によ

って定められる。 $a_0(\eta)$  を

$$\begin{aligned} a_0(\eta) &= -\coth \eta + \frac{1}{\eta} \\ &= -(1 + 2e^{-2\eta} + 2e^{-4\eta} + 2e^{-6\eta} + e^{-8\eta}) + \frac{1}{\eta} \\ &\quad \eta > \frac{\pi}{h^*} \quad (41) \end{aligned}$$

で近似する。この式は  $h^* \leq \pi$  の範囲で十分な精度を与える。このとき  $H_0$  は

$$\begin{aligned} H_0(k, \pi/h^*) &= -e^{-ik} \left\{ \frac{1}{ik} + \frac{2e^{-2(\pi/h^*)}}{2(\pi/h^*) + ik} + \frac{2e^{-4(\pi/h^*)}}{4(\pi/h^*) + ik} \right. \\ &\quad \left. + \frac{2e^{-6(\pi/h^*)}}{6(\pi/h^*) + ik} + \frac{2e^{-8(\pi/h^*)}}{8(\pi/h^*) + ik} \right\} \\ &\quad - \frac{h^*}{\pi} \cdot \text{Ei}(-ik) \quad (42) \end{aligned}$$

ここに Ei は積分指数関数である。 $n \geq 1$  に対する  $H_n$  の値は漸化式

$$\begin{aligned} H_{n+1}(k, \pi/h^*) &= \frac{1}{n+1} \left[ \left( \frac{\pi}{h^*} \right)^n a_n \left( \frac{\pi}{h^*} \right) e^{-ik} - ik H_n(k, \pi/h^*) \right] \\ &\quad (43) \end{aligned}$$

を用いて得られる。

$I_n$  の値は付録3に示すように

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 \\ I_{2m-1} &= \frac{(2m-1) \dots 5 \cdot 3 \cdot 1}{2m \dots 6 \cdot 4 \cdot 2} \\ I_{2m} &= I_{2m-1} \end{aligned} \quad (44) \quad (m=1, 2, \dots)$$

で与えられる。

以上によって  $B(k, \pi/h^*)$ ,  $A(k, \pi/h^*)$  が計算され、従って(29)式の  $\bar{\Omega}$  が求められる。この場合分子の積分は  $\bar{w}_a(\xi^*)$  が  $\xi^*$  の多項式で表わされれば(44)式によって値が求められる。例えば各異が  $x^*=a$  の点のまわりに  $\bar{\alpha} e^{i\omega t}$  なるピッチング振動するとき

$$\bar{z}_a = -b(x^* - a) \bar{\alpha} \quad (45)$$

$$\bar{w}_a(x^*) = -U\bar{\alpha} [1 + ik(x^* - a)] \quad (46)$$

であるから

$$\int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \bar{w}_a(x^*) dx^* = -\pi U \bar{\alpha} \left[ 1 + ik \left( \frac{1}{2} - a \right) \right] \quad (47)$$

となる。

なお(47)式は見掛け上(46)式において  $x^* = 1/2$  ( $3/4$  異弦点) において得られたものごとくであることに注意されたい。前節で行なった簡単化すなわち  $1/4$  異弦点に集中させた  $\bar{\alpha}_a$  によって基準翼の翼面上に誘起される吹下ろしをその  $3/4$  異弦点における値で代表させることの一つの根拠がここにもあるのである。

$\bar{\Omega}$ が求められれば(19)式によって吹下ろしが計算される。(19)式において  $K_2(x^* - \xi^*; z^*; h^*)$  は付録 1 に示すように  $z^*$  に関して週期的で、翼と同一平面上で最大値

$$K_2(x^* - \xi^*, mh^*; h^*) = \frac{\pi}{h^*} \coth \frac{\pi}{h^*} (x^* - \xi^*) \quad (48)$$

をとり、また丁度翼と翼の中間の平面上で最小値

$$K_2(x^* - \xi^*, (m + \frac{1}{2})h^*; h^*) = \frac{\pi}{h^*} \tanh \frac{\pi}{h^*} (x^* - \xi^*) \quad (49)$$

をとる。吹下ろし  $\bar{w}(x^*, z^*)$  もこれに対応して  $z^*$  に関して週期的となるから、この 2 つの平面上における  $\bar{w}$  の値を考えることにする。これら 2 つの場合の (19) 式を

$$\begin{aligned} \bar{w}_1(x^*) &\equiv \bar{w}(x^*, mh^*) \\ &= \frac{\bar{\Omega}}{2\pi} D_1(x^*; k, h^*) \end{aligned} \quad (50)$$

$$\begin{aligned} \bar{w}_2(x^*) &\equiv \bar{w}(x^*, (m + \frac{1}{2})h^*) \\ &= \frac{\bar{\Omega}}{2\pi} D_2(x^*; k, h^*) \end{aligned} \quad (51)$$

と書く。ここに

$$\begin{aligned} D_1(x^*; k, h^*) &= \frac{\pi}{h^*} \left\{ -e^{-ik} + ik \int_1^\infty \coth \left[ \frac{\pi}{h^*} (x^* - \xi^*) \right] e^{-ik\xi^*} d\xi^* \right\} \\ D_2(x^*; k, h^*) &= \frac{\pi}{h^*} \left\{ -e^{-ik} + ik \int_1^\infty \tanh \left[ \frac{\pi}{h^*} (x^* - \xi^*) \right] e^{-ik\xi^*} d\xi^* \right\} \end{aligned} \quad (52)$$

(52) 式においては  $\coth x$  が  $x=0$  において 1 位の極をもつので積分は Cauchy の主値をとる必要がある。

$$\lambda = \frac{\pi}{h^*} (\xi^* - x^*) \quad (54)$$

とおくと、付録 4 に示すように、 $D_1, D_2$  は

$$D_1(x^*; k, h^*) \doteq -ik e^{-ikx^*} \int_{-\lambda_x}^\infty (\coth \lambda + 1) e^{-i\kappa\lambda} d\lambda \quad (55)$$

$$D_2(x^*; k, h^*) \doteq -ik e^{-ikx^*} \int_{-\lambda_x}^\infty (\tanh \lambda + 1) e^{-i\kappa\lambda} d\lambda \quad (56)$$

ここに

$$\kappa = \frac{h^*}{\pi} k \quad (57)$$

$$\lambda_x = \frac{\pi}{h^*} (x^* - 1) \quad (58)$$

$D_1, D_2$  の計算に適した形は付録 4 によって

$$\begin{aligned} D_1(x^*; k, h^*) &= -2k e^{-ikx^*} \left[ \text{Si } \kappa\lambda_1 \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{3\kappa^2} (\sin \kappa\lambda_1 - \kappa\lambda_1 \cos \kappa\lambda_1) \right. \\ &\quad \left. + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin \kappa\lambda \coth \lambda d\lambda \right. \end{aligned}$$

$$\left. + \frac{1}{\kappa} \cos \kappa\lambda_2 \right] \quad (59)$$

$$\begin{aligned} D_2(x^*; k, h^*) &= -2k e^{-ikx^*} \left[ \int_0^{\lambda_2} \sin \kappa\lambda \tanh \lambda d\lambda \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\kappa} \cos \kappa\lambda_2 \right] \end{aligned} \quad (60)$$

ここに Si は積分正弦関数で

$$\text{Si } \kappa\lambda_1 = \int_0^{\kappa\lambda_1} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda \quad (61)$$

$\lambda_1$  は  $|\lambda| < \lambda_1$  のとき

$$\coth \lambda \doteq \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{3} \quad (62)$$

となるような  $\lambda$  の値である ( $\lambda_1 = 0.5$  とおくと上式は有効数字 3 桁まで満足される)。また  $\lambda_2$  は  $\lambda < -\lambda_2$  および  $\lambda > \lambda_2$  のとき  $\coth \lambda \doteq \tanh \lambda \doteq \mp 1.0$  となるような  $\lambda$  の値である ( $\lambda_2 = 5$  とおけば十分である)。(59) 式の角括弧の中の第 3 項の積分と (60) 式の角括弧の中の第 1 項の積分は数値積分によって値を定めることができる。

## 6. 計算例と考察

例として各翼が 1/4 翼弦点まわりにピッチング振動する場合を計算した。このとき (47) 式において  $1/2 - a = 1$  となる。

図 1 に種々の翼間隔に対する循環の  $k$  に対する変化を示す。図 1(a) が実部、(b) が虚部である。循環は単独定常翼の値  $2\pi b U \bar{\alpha}$  で割って無次元化してある。虚部の値が  $k$  と共にほぼ直線的に増加するのは (29) 式の分子すなわち (47) 式の虚部が  $k$  に比例することに基いている。 $k$  が 0.5 までの範囲では後流の渦の影響による循環の遅れは大きくないように見える。翼間隔  $h^*$  が小さいとき循環が小さいのは翼列としての干渉の効果による。それにしても  $k=0$  における実部の値は単独定常翼では 1 になる筈であるからあまりにも小さいと思われる。念のため (34) 式の定常解を見てみると

$$\frac{\bar{\Gamma}}{2\pi b U \bar{\alpha}} = \frac{h^*}{\pi} \tanh \frac{\pi}{h^*} \quad (63)$$

(63) 式の値を表 1 の 2 列目に示す。これは図 1(a) の  $k \rightarrow 0$  の値と全く異なる。

$k \rightarrow 0$  のときの循環の極限值を (29) 式によって調べてみよう。 $k \rightarrow 0$  のとき

$$4 \int_{-1}^1 \sqrt{\frac{1+x^*}{1-x^*}} \bar{w}_a(x^*) dx^* \rightarrow -4\pi U \bar{\alpha} \quad (64)$$

$$\pi i k \left[ H_1^{(2)}(k) + i H_0^{(2)}(k) \right] \rightarrow -2 \quad (65)$$

$$i k \cdot B(k, \pi/h^*) \rightarrow -\frac{\pi}{h^*} \quad (66)$$

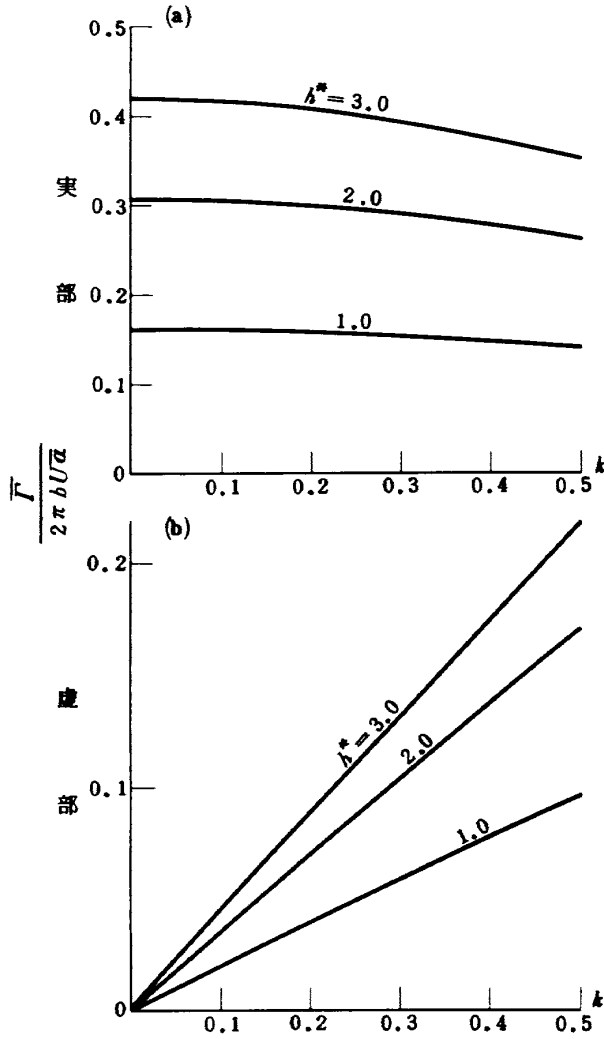


図1 循環のkに対する変化

$$A(k, \pi/h^*) \rightarrow 2 \left[ 1 - \frac{\pi}{h^*} \left( 1 + \coth \frac{\pi}{h^*} \right) \right] \quad (67)$$

であることがわかるから

$$\begin{aligned} \frac{\bar{\Gamma}}{2\pi b U \bar{\alpha}} &\rightarrow \frac{1}{\frac{\pi}{h^*} \left( 1 + \coth \frac{\pi}{h^*} \right)} \\ &= \frac{\frac{h^*}{\pi} \tanh \frac{\pi}{h^*}}{1 + \tanh \frac{\pi}{h^*}} \quad (68) \end{aligned}$$

すなわち  $k \rightarrow 0$  のときの循環の極限值は定常の値の  $1 / (1 + \tanh \pi/h^*)$  であることがわかる。式(68)の値を表1の3列目に示す。この値は図1(a)の値と一致する。このような跳び移りが起こるのは、式の上では  $k \rightarrow 0$  のとき  $ikB(k, \pi/h^*) \rightarrow 0$  とならないためであり、さらに遡れば(A13)式において  $e^{-ik}/ik$  の項があることに基いている。 $ikB(k, \pi/h^*)$  は後流の渦の影響を表わす項で、 $k$  と共にこれが零に近づかないのは極めて奇異なことと云わねばならぬ。しかしこれは理論の誤りではなく、同位相で振動する2次元無限枚数翼列に特有な現

表1 循環の定常値と  $k \rightarrow 0$  の極限值

| $h^*$ | $\frac{\bar{\Gamma}}{2\pi b U \bar{\alpha}}$ |                        |
|-------|--|------------------------|
|       | 定常値  | $k \rightarrow 0$ の極限值 |
| 1.0   | 0.317  | 0.159                  |
| 2.0   | 0.584  | 0.305                  |
| 3.0   | 0.745  | 0.417                  |

象で、文献(3)の揚力係数の計算結果にも同じ現象が表われている。

図2には翼と同一平面上における吹下ろし  $\bar{w}_1$  を示す。 $\bar{w}_1$  は  $x^*$  の関数であるが、(50)、(59)式によれば

$$\frac{\bar{w}_1}{U \bar{\alpha}} = \frac{\bar{\Gamma}}{2\pi b U \bar{\alpha}} e^{-ik(x^*-1)} (-2k) F(\kappa) \quad (69)$$

の形に書ける。ここに  $F(\kappa)$  は  $\kappa$  のみの関数である。

(69)式は  $x^*-1 \geq 5h^*/\pi$  の範囲で成立するが、あたかも  $x^*=1$  すなわち後縁から発生する進行波と同じである。図2にはこの進行波の複素振幅を無次元化した  $\bar{w}_1 e^{ik(x^*-1)}/U \bar{\alpha}$  がプロットしてある。図2(a)の実部は縦軸が拡大してあることに注意されたい。循環の場合と異なる

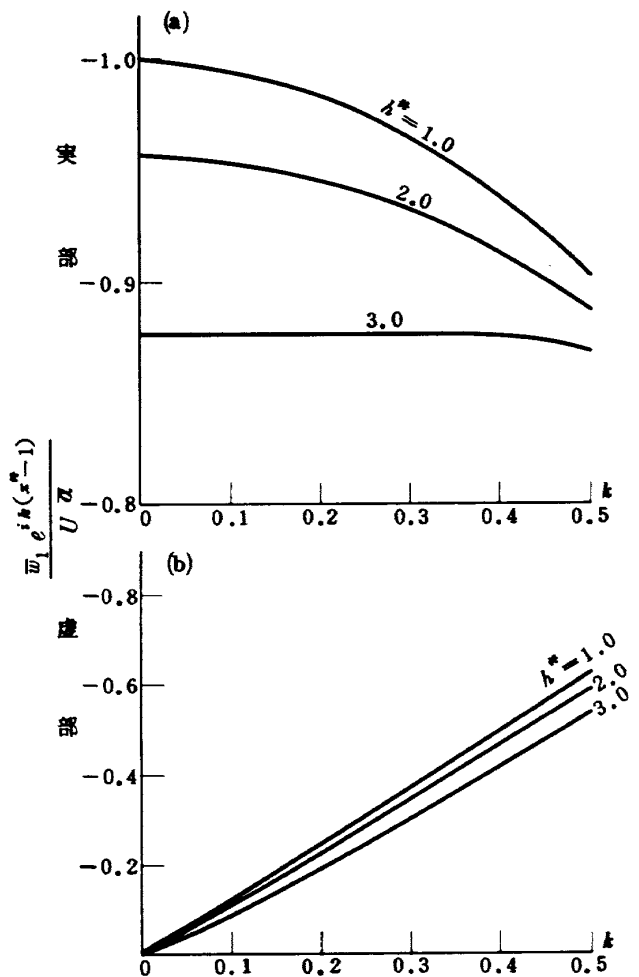


図2 吹下ろしのkに対する変化



り翼間隔  $h^*$  の影響は小さい。吹下ろしは循環に比例するにも拘らず、 $h^*$  に対する傾向が循環の場合に比べてわずかながら逆転しているのは注目に値する。

吹下ろしの定常値と  $k \rightarrow 0$  の極限値を求めてみよう。定常値は (52) 式において積分の項を落とすことによって

$$\begin{aligned} \frac{\bar{w}_1}{U\bar{\alpha}} &= -\left(\frac{\pi}{h^*}\right) \frac{\Gamma}{2\pi b U \bar{\alpha}} \\ &= -\tanh \frac{\pi}{h^*} \end{aligned} \quad (70)$$

また  $k \rightarrow 0$  の極限値は (59) 式から

$$\begin{aligned} \frac{\bar{w}_1}{U\bar{\alpha}} &\rightarrow -2\left(\frac{\pi}{h^*}\right) \frac{\Gamma}{2\pi b U \bar{\alpha}} \\ &\rightarrow -\frac{2}{1 + \coth \frac{\pi}{h^*}} \end{aligned} \quad (71)$$

(70), (71) 式の値を表 2 に示す。両者の差はそれ程大きくないことがわかる。

表 2 吹下ろしの定常値と  $k \rightarrow 0$  の極限値

| $h^*$ | $\frac{\bar{w}_1}{U\bar{\alpha}}$ |                        |
|-------|-----------------------------------|------------------------|
|       | 定 常 値                             | $k \rightarrow 0$ の極限値 |
| 1.0   | -0.996                            | -0.998                 |
| 2.0   | -0.917                            | -0.957                 |
| 3.0   | -0.782                            | -0.877                 |

つぎに丁度翼と翼の中間の平面上での吹下ろし  $\bar{w}_2$  をしらべてみよう。これは  $\bar{w}_1$  との比の形で見るのがよい。(59), (60) 式からわかるように  $\bar{w}_2/\bar{w}_1$  は  $x^* - 1 \geq 5h^*/\pi$  の範囲では  $x^*$  に無関係で  $\kappa$  のみの関数となる。これを図 3 に示す。 $\bar{w}_2/\bar{w}_1$  は与えられた翼間隔では  $k$  の増

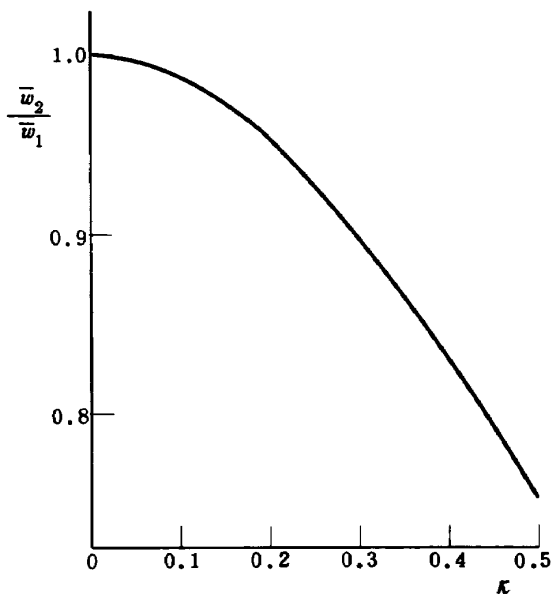


図 3 吹下ろしの振幅比

加と共に次第に 1 から減少する。定まった  $k$  に対しては翼間隔が小さい程比は 1 に近づくという常識的な結論になる。

### 7. む す び

同位相で振動する 2 次元無限枚数翼列の後方における吹下ろし速度を線型ポテンシャル流理論の範囲内で計算する比較的簡単な式を与えた。循環および吹下ろしの定常値は無次元振動数を零に近づけたときの極限値と一致しないことを示し、これらの値を与える closed form の式を与えた。これらの式は近似的に導かれたけれども、循環の定常値は厳密値と一致する。吹下ろしは翼からわずかの距離以上後方では一定振幅の進行波となる。

計算例としてピッチング振動する翼列の循環と吹下ろしの無次元振動数に対する変化を種々の翼間隔に対して計算した。循環も吹下ろしも実部は無次元振動数に対して変化は小さく、虚部はほぼ直線的に増加する。翼間隔の影響は循環では大きく、吹下ろしでは小さい。翼と翼の丁度中間の平面上の吹下ろしと、翼と同一平面上の吹下ろしの比は無次元振動数あるいは翼間隔が零の極限の場合には 1 であるが、無次元振動数と翼間隔の積が増加すると共に減少する。

### 文 献

- 1) 広末健一, 北村清美, 村上義隆, 進藤重美: 航空宇宙技術研究所突風風洞の計画と整備試験, 航空宇宙技術研究所報告 TR-335, 1973年9月
- 2) Jumpei Shioiri: Non-Stall Normal Mode Flutter in Annular Cascade, Part I, Theoretical Study, Transactions of the Japan Society of Aeronautical Engineering, Vol. 1, No. 1, 1958, pp. 26-35.
- 3) D.S. Whitehead: Force and Moment Coefficients for Vibrating Aerofoils in Cascade, ARC R & M No. 3254, 1962.
- 4) R.L. Bisplinghoff, H. Ashley, and R.L. Halfman: Aeroelasticity, Addison-Wesley Publishing Co., 1955, pp. 273-278.
- 5) J. DeYoung and C.W. Harper: Theoretical Symmetric Span Loading at Subsonic Speeds for Wings having Arbitrary Plan Form, NACA Report No. 921, 1948.
- 6) S.G. Hedman: Vortex Lattice Method for Calculation of Quasi Steady State Loadings on Thin Elastic Wings in Subsonic Flow, FFA Report No. 105, 1966.
- 7) L. Schwarz: Berechnung der Druckverteilung

einer harmonisch sich verformenden Tragfläche  
in ebener Strömung, Luftfahrtforschung, Band  
17, Nr. 11 & 12, December, 1940, pp. 379-386.

- 8) 藤本武助：応用流体力学，丸善，1941，p.181
- 9) 森口繁一，宇田川銑久，一松信：数学公式 II，岩波，  
1957

付録1 核  $K_1, K_2$ 

(1)式と(3)式にあらわれる無限級数の和は(12), (13)式のように既知関数であらわされる。まず  $K_2$  は

$$K_2(X, z^*; h^*) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{X}{X^2 + (z^* - n h^*)^2} \\ = \left(\frac{2\pi}{h^*}\right)^2 X \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\left(\frac{2\pi X}{h^*}\right)^2 + \left(-\frac{2\pi z^*}{h^*} + 2n\pi\right)^2} \quad (\text{A1})$$

と書けるから、文献(9)の p. 68 の公式

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{x^2 + (a + 2n\pi)^2} = \frac{\sinh x}{2x (\cosh x - \cos a)} \quad (\text{A2})$$

を用いると

$$K_2(X, z^*; h^*) = \frac{\frac{\pi}{h^*} \sinh \frac{2\pi}{h^*} X}{\cosh \frac{2\pi}{h^*} X - \cos \frac{2\pi}{h^*} z^*} \quad (\text{A3})$$

を得る。

明らかに  $K_2$  は  $z^*$  の値によって周期的に変化し、その週期は  $h^*$  である。 $z^* = m h^*$  ( $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ) のとき  $K_2$  は最大値をとり

$$K_2(X, m h^*; h^*) = \frac{\frac{\pi}{h^*} \sinh \frac{2\pi}{h^*} X}{\cosh \frac{2\pi}{h^*} X - 1} \\ = \frac{\pi}{h^*} \coth \frac{\pi}{h^*} X \quad (\text{A4})$$

また  $z^* = (m + \frac{1}{2}) h^*$  のとき  $K_2$  は最小値をとり

$$K_2(X, (m + \frac{1}{2}) h^*; h^*) = \frac{\frac{\pi}{h^*} \sinh \frac{2\pi}{h^*} X}{\cosh \frac{2\pi}{h^*} X + 1} \\ = \frac{\pi}{h^*} \tanh \frac{\pi}{h^*} X \quad (\text{A5})$$

$K_1$  については、 $K_1(X, h^*) = K_2(X, 0; h^*)$  であるから、(A4)式から直ちに

$$K_1(X, h^*) = \frac{\pi}{h^*} \coth \frac{\pi}{h^*} X \quad (\text{A6})$$

を得る。

(A4), (A5)式から

$$\frac{\pi}{h^*} \tanh \frac{\pi}{h^*} X \leq K_2(X, z^*; h^*) \leq \frac{\pi}{h^*} \coth \frac{\pi}{h^*} X \quad (\text{A7})$$

ところが  $\tanh x$  も  $\coth x$  も  $x$  の増加と共に急速に1に近づく。例えば  $x > 5.0$  のとき、小数点以下4桁まで  $\tanh x = \coth x = 1.0000$  である。従って  $X$  が大きいときの  $K_2$  の近似式として

$$K_2(X, z^*; h^*) \doteq \frac{\pi}{h^*} \quad (X > \frac{5}{\pi} h^*) \quad (\text{A8})$$

が成立する。

付録2 積分  $H_n$ 

$H_n$  の評価に際しては若干の注意が必要である。まず  $H_0$  を考えよう。

$$H_0(k, \pi/h^*) = \int_1^\infty e^{-ik\xi^*} a_0(\eta) d\xi^* \quad (\text{A9})$$

ここに

$$a_0(\eta) = -\coth \eta + \frac{1}{\eta} \quad (\text{A10})$$

明らかに  $\xi^* \rightarrow \infty$  のとき  $a_0(\eta) \rightarrow -1$  であるから(A9)式の積分は収束しない。この困難を処理するため

$$H_0(k, \pi/h^*) = \int_1^\infty e^{-ik\xi^*} [a_0(\eta) + 1] d\xi^* - \int_1^\infty e^{-ik\xi^*} d\xi^* \quad (\text{A11})$$

と書き換えると第1項の積分は収束する。第2項の積分はしばしば行なわれるように正の小さい減衰係数  $\alpha$  を導入して

$$\int_1^\infty e^{-ik\xi^*} d\xi^* = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \int_1^\infty e^{-(ik+\alpha)\xi^*} d\xi^* \\ = \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{e^{-(ik+\alpha)}}{ik+\alpha} \\ = \frac{e^{-ik}}{ik} \quad (\text{A12})$$

とする。そうすると

$$H_0(k, \pi/h^*) = \int_1^\infty e^{-ik\xi^*} [a_0(\eta) + 1] d\xi^* - \frac{e^{-ik}}{ik} \quad (\text{A13})$$

この式に  $a_0(\eta)$  として(41)式の近似式を用いると(42)式が得られる。

上の導き方はいささか形式的なきらいがあるが、減衰係数  $\alpha$  の意味は後流渦  $\bar{\gamma}_w(\xi^*)$  が  $\xi^*$  と共に減衰すると考えることができよう。より合理的な導き方としては、

Whitehead に従って一つの翼の束縛渦と後流渦の総和が零でなければならぬ事実に着目することであろう(文献(3), p.5)。すなわち

$$\Gamma + \int_b^\infty \bar{\gamma}_w(\xi) d\xi = 0 \quad (\text{A14})$$

(10), (11)式を用いると再び

$$\int_1^\infty e^{-ik\xi^*} d\xi^* = \frac{e^{-ik}}{ik} \quad (\text{A15})$$

を得る。

$n \geq 1$  に対する  $H_n$  を求めるため

$$\begin{aligned}
 H_{n+1}(k, \pi/h^n) &= \left(\frac{\pi}{h^n}\right)^{n+1} \int_1^\infty e^{-ik\xi^n} a_{n+1}(\eta) d\xi^n \\
 &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \int_1^\infty e^{-ik\xi^n} \frac{d^{n+1} a_0(\eta)}{d\xi^{n+1}} d\xi^n
 \end{aligned} \tag{A16}$$

を考える。部分積分すると

$$\begin{aligned}
 H_{n+1}(k, \pi/h^n) &= \frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)!} \left\{ e^{-ik\xi^n} \frac{d^n a_0(\eta)}{d\xi^n} \Big|_1^\infty + ik \int_1^\infty e^{-ik\xi^n} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{d^n a_0(\eta)}{d\xi^n} d\xi^n \right\} \\
 &= -\frac{\left(\frac{\pi}{h^n}\right)^n}{n+1} \left\{ -e^{-ik} a_n\left(\frac{\pi}{h^n}\right) + ik \int_1^\infty e^{-ik\xi^n} a_n(\eta) d\xi^n \right\} \\
 &= \frac{1}{n+1} \left\{ \left(\frac{\pi}{h^n}\right)^n a_n\left(\frac{\pi}{h^n}\right) e^{-ik} - ik H_n(k, \pi/h^n) \right\}
 \end{aligned} \tag{A17}$$

となり、(43)式の漸化式が得られた。この場合  $n=0$  に対してはやはり減衰項  $\alpha$  を導入して  $\alpha \rightarrow 0$  の極限を考える必要がある。

$n=7$  までの  $a_n(\eta)$  の形を書いておく。

$$\begin{aligned}
 a_0(\eta) &= -\frac{\cosh \eta}{\sinh \eta} + \frac{1}{\eta} \\
 a_1(\eta) &= -\frac{1}{\sinh^2 \eta} + \frac{1}{\eta^2} \\
 a_2(\eta) &= -\frac{\cosh \eta}{\sinh^3 \eta} + \frac{1}{\eta^3} \\
 a_3(\eta) &= -\frac{2}{3 \sinh^3 \eta} - \frac{1}{\sinh^4 \eta} + \frac{1}{\eta^4} \\
 a_4(\eta) &= -\frac{\cosh \eta}{3 \sinh^3 \eta} - \frac{\cosh \eta}{\sinh^5 \eta} + \frac{1}{\eta^5} \\
 a_5(\eta) &= -\frac{2}{15 \sinh^3 \eta} - \frac{1}{\sinh^4 \eta} - \frac{1}{\sinh^6 \eta} + \frac{1}{\eta^6} \\
 a_6(\eta) &= -\frac{2 \cosh \eta}{45 \sinh^3 \eta} - \frac{2 \cosh \eta}{3 \sinh^5 \eta} - \frac{\cosh \eta}{\sinh^7 \eta} \\
 &\quad + \frac{1}{\eta^7} \\
 a_7(\eta) &= -\frac{4}{315 \sinh^3 \eta} - \frac{2}{5 \sinh^4 \eta} - \frac{4}{3 \sinh^6 \eta} \\
 &\quad - \frac{1}{\sinh^8 \eta} + \frac{1}{\eta^8}
 \end{aligned} \tag{A18}$$

### 付録3 積分 $I_n$

積分  $I_n$  とこれに関連した積分  $J_n$  の値を求める。

$$I_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 x^n \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \tag{A19}$$

$$J_n = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \tag{A20}$$

まず  $J_n$  を考える。明らかに奇数の  $n$  に対して

$$J_{2m-1} = 0 \quad (m=1, 2, \dots) \tag{A21}$$

である。偶数の  $n$  に対しては部分積分によって

$$\begin{aligned}
 \pi(J_{2m-2} - J_{2m}) &= \int_{-1}^1 (x^{2m-2} - x^{2m}) \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \int_{-1}^1 x^{2m-2} (1-x^2)^{\frac{3}{2}} dx \\
 &= \frac{3}{2m-1} \int_{-1}^1 x^{2m} \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \frac{3\pi}{2m-1} J_{2m}
 \end{aligned} \tag{A22}$$

すなわち

$$J_{2m} = \frac{2m-1}{2m+2} J_{2m-2} \quad (m=1, 2, \dots) \tag{A33}$$

これが偶数の  $n$  に対する  $J_n$  の漸化式である。

$$J_0 = \frac{1}{2} \tag{A34}$$

を用いると

$$J_{2m} = \frac{(2m-1) \cdots 5 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1}{(2m+2) \cdots 8 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 2} \quad (m=1, 2, \dots) \tag{A35}$$

つきに  $I_n$  を考えると

$$\begin{aligned}
 \pi(I_n - I_{n+1}) &= \int_{-1}^1 (x^n - x^{n+1}) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \\
 &= \int_{-1}^1 x^n \sqrt{1-x^2} dx \\
 &= \pi J_n
 \end{aligned} \tag{A36}$$

すなわち

$$I_{n+1} = I_n - J_n \tag{A37}$$

これが  $I_n$  の漸化式である。(A21)式によって

$$I_{2m} = I_{2m-1} \quad (m=1, 2, \dots) \tag{A38}$$

であることがわかる。(A37)式において  $n=2m$  とおき、

(A38)式を用いると

$$I_{2m+1} = I_{2m-1} - J_{2m} \quad (m=1, 2, \dots) \tag{A39}$$

(A34), (A37)式と

$$I_0 = 1 \tag{A40}$$

を用いると

$$I_1 = \frac{1}{2} \tag{A41}$$

従って (A39), (A35)式によって

$$\begin{aligned}
 I_{2m+1} &= I_1 - J_2 - J_4 - \dots - J_{2m} \\
 &= \frac{1}{2} - \frac{1 \cdot 1}{4 \cdot 2} - \frac{3 \cdot 1 \cdot 1}{6 \cdot 4 \cdot 2} - \dots
 \end{aligned}$$

$$= \frac{(2m-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\cdot 1}{(2m+2)\cdots 8\cdot 6\cdot 4\cdot 2}$$

$$= \frac{(2m+1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{(2m+2)\cdots 6\cdot 4\cdot 2} \quad (m=1, 2, \dots)$$

(A41), (A42) 式をまとめて

$$I_{2m-1} = \frac{(2m-1)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}{2m\cdots 6\cdot 4\cdot 2} \quad (m=1, 2, \dots)$$

と書くことができる。

#### 付録 4 $D_1, D_2$

$$D_1(x^*; k, h^*)$$

$$= \frac{\pi}{h^*} \left\{ -e^{-ik} + ik \int_1^\infty \coth\left[\frac{\pi}{h^*}(x^* - \xi^*)\right] \right.$$

$$\left. \times e^{-ik\xi^*} d\xi^* \right\} \quad (A44)$$

$$D_2(x^*; k, h^*)$$

$$= \frac{\pi}{h^*} \left\{ -e^{-ik} + ik \int_1^\infty \tanh\left[\frac{\pi}{h^*}(x^* - \xi^*)\right] \right.$$

$$\left. \times e^{-ik\xi^*} d\xi^* \right\} \quad (A45)$$

の値を計算し易い形を出しておく。

まず  $D_2$  を考える。(A45) 式において  $e^{-ik}$  の項は付録 2 の (A12) 式によって

$$e^{-ik} = ik \int_1^\infty e^{-ik\xi^*} d\xi^* \quad (A46)$$

と書けるから

$$D_2(x^*; k, h^*)$$

$$= \frac{\pi}{h^*} (ik) \int_1^\infty \left\{ \tanh\left[\frac{\pi}{h^*}(x^* - \xi^*)\right] - 1 \right\} e^{-ik\xi^*} d\xi^*$$

(A47)

となる。

$$\lambda = \frac{\pi}{h^*} (\xi^* - x^*) \quad (A48)$$

とおくと

$$D_2(x^*; k, h^*)$$

$$= -ik e^{-ikx^*} \int_{-\lambda_x}^\infty (\tanh \lambda + 1) e^{-i\kappa\lambda} d\lambda$$

(A49)

ここに

$$\kappa = \frac{h^*}{\pi} k \quad (A50)$$

$$\lambda_x = \frac{\pi}{h^*} (x^* - 1) \quad (A51)$$

(19) 式が成立するのは  $x^* \geq 1 + 5(h^*/\pi)$  のときで、これは  $\lambda_x \geq 5$  に相当する。

$$\lambda_2 = 5 \quad (A52)$$

とおくと  $\lambda \leq -\lambda_2$  および  $\lambda \geq \lambda_2$  のとき  $\tanh \lambda \doteq \mp$

1.0 であるから

$$D_2(x^*; k, h^*)$$

$$= -ik e^{-ikx^*} \left[ \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} (\tanh \lambda + 1) e^{-i\kappa\lambda} d\lambda \right.$$

$$\left. + 2 \int_{\lambda_2}^\infty e^{-i\kappa\lambda} d\lambda \right]$$

$$= -2k e^{-ikx^*} \left[ \int_0^{\lambda_2} \tanh \lambda \sin \kappa\lambda d\lambda \right.$$

$$\left. + \frac{1}{\kappa} \cos \kappa\lambda_2 \right] \quad (A53)$$

を得る。

つきに  $D_1$  についても全く同様に、かつ  $\lambda \leq -\lambda_2$  および  $\lambda \geq \lambda_2$  のとき  $\coth \lambda \doteq \mp 1.0$  であるから

$$D_1(x^*; k, h^*)$$

$$= -ik e^{-ikx^*} \left[ \int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} (\coth \lambda + 1) e^{-i\kappa\lambda} d\lambda \right.$$

$$\left. + 2 \int_{\lambda_2}^\infty e^{-i\kappa\lambda} d\lambda \right] \quad (A54)$$

ただし第 1 の積分で Cauchy の主値をとることが異なる。

$$\int_{-\lambda_2}^{\lambda_2} (\coth \lambda) e^{-i\kappa\lambda} d\lambda$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ \int_{-\lambda_2}^{-\epsilon} + \int_{\epsilon}^{\lambda_2} \right]$$

$$= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left[ -2i \int_{\epsilon}^{\lambda_2} \coth \lambda \sin \kappa\lambda d\lambda \right]$$

$$= -2i \int_0^{\lambda_2} \coth \lambda \sin \kappa\lambda d\lambda \quad (A55)$$

この積分は特異積分ではないが、数値積分するのは必ずしも適当でない。このため  $|\lambda|$  が小さいとき

$$\coth \lambda \doteq \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{3} \quad (A56)$$

の近似を用いる。この式を  $\lambda \leq \lambda_1 \equiv 0.5$  の範囲に適用すると有効数字 3 桁まで正確である。そうすると

$$\int_0^{\lambda_2} \coth \lambda \sin \kappa\lambda d\lambda$$

$$\doteq \int_0^{\lambda_1} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{3} \right) \sin \kappa\lambda d\lambda$$

$$+ \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \coth \lambda \sin \kappa\lambda d\lambda \quad (A57)$$

$$\int_0^{\lambda_1} \left( \frac{1}{\lambda} + \frac{\lambda}{3} \right) \sin \kappa\lambda d\lambda$$

$$= \text{Si } \kappa\lambda_1 + \frac{1}{3\kappa^2} (\sin \kappa\lambda_1 - \kappa\lambda_1 \cos \kappa\lambda_1)$$

(A58)

ここに  $\text{Si}$  は積分正弦関数で

$$\text{Si } \kappa \lambda_1 = \int_0^{\kappa \lambda_1} \frac{\sin \lambda}{\lambda} d\lambda \quad (\text{A59})$$

(A55)-(A59) 式によって (A54) 式は

$$D_1(x^*; k, h^*) = -2k e^{-ikh^*} \left[ \text{Si } \kappa \lambda_1 \right. \quad \left. \text{となる。} \right]$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{3\kappa^3} (\sin \kappa \lambda_1 - \kappa \lambda_1 \cos \kappa \lambda_1) \\ & + \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \sin \kappa \lambda \coth \lambda d\lambda \\ & + \frac{1}{\kappa} \cos \kappa \lambda_2 \end{aligned} \quad (\text{A60})$$

---

## 航空宇宙技術研究所報告 373号

昭和49年6月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 有限会社 共 進  
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)

---

