

NAL TR-377

UDC 629.7.015.7:  
539.3

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-377

質量が変化する弾性飛しょう体の運動方程式

(I) 基礎方程式

田 寺 木 一

1974 年 8 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 質量が変化する弾性飛しょう体の運動方程式

## (I) 基礎方程式\*

田 寺 木 一\*\*

### The Equations of Motion of an Elastic Launch Vehicle with Varying Mass

#### (I) Basic Equations

by Kiichi TATERA

#### ABSTRACT

General three dimensional dynamic equations of motion for a launch vehicle with varying mass are derived, having effects of airframe bending, propellant sloshing, propellant flow and engine swivelling into account. In this paper, the effect of propellant flow are considered as reaction forces of propellant to airframe, and using the theory of continuum mechanics the time rate of change of integrals of some quantities are being transfered out of the system. Sloshing and bending equations are derived accurately, in view of practical analysis of the whole motion of the vehicle.

#### 1. 緒 言

飛しょう体の動学的運動方程式について、質量変化（排出）および重心位置変化を考慮して、一般的な並進ならびに回転運動方程式を導入した。さらに、機体の曲げ、横スロッシングに関して、従来用いられている結果との比較を容易にするため、また、実際的な応用の立場から、それぞれモード法と質量・ばね・ダッシュポット系を用い、若干の仮定のもとに質量変化と内部流れの影響を考慮した基礎式を示し、エンジンに関してはジンバル点まわりの回転式で示した。

質量変化を伴う系の運動は、多くの人によって論ぜられ（例えば文献1)~6)), それらの取扱い方法と表現は多様である。これらの結果は飛しょう体の運動力学に適用されているが、<sup>7)~10)</sup>殆んど剛体機体に適用され、弾性体を取扱った報告はLester and Collins<sup>9)</sup>に見られるだ

けである。しかしそこでは、変分原理に基いたLagrange形式の運動方程式より、ピッチ面内の運動を求めているが、全運動エネルギーには内部流れを無視し、実際には片手落ちとなっている。

文献4),10)などに見られるように、粒子の質量 $m_i$ , 速度 $\bar{v}_i$ , 質量流出率 $\dot{m}_i$ , 流出相対速度 $\bar{u}_i$ から $d/dt(m_i - \bar{v}_i) = m_i d/dt(\bar{v}_i) + \dot{m}_i \bar{u}_i$ を用いて運動方程式を導くときは、変数の物理的な意味を充分考えなければ、文献1)に示されているように不正確な結果が導かれる。ここでは内部流体の流れの影響は機体におよぼす反力として考え、出来るだけ質点運動的な方法に基きながら、部分的に連続体力学の場の量の取扱い方法を導入して、系からの流出量で式を表わした。従来飛しょう体の動力学運動方程式、特に曲げ振動、スロッシングおよびエンジン運動については、軌道、制御および荷重等の立場から、これら個々に関する運動方程式が別々に求められ、お互いに矛盾する仮定が用いられたままであることが多いので、一貫性を持たせた方式を求めることも一つの目

\* 昭和49年5月7日 受付

\*\* 機体第一部

的とした。

## 2. 座標系と質量素片の運動方程式

図1の如く  $O_I - x_I y_I z_I$  を慣性座標軸系とし、運動座標系として直交機体軸系を用い、機体が弾性変形をうけないと仮想したときの機体に固定し、これを  $O - xyz$  系とする。飛しょう体内の任意の質量素片を  $dm$ 、 $\bar{a}$  を  $dm$  の慣性空間加速度（量記号上の棒線はベクトル量を表わす）、 $\tilde{T}$  を応力テンソル（量記号上の波線はテンソル量を表わす）、 $R$  を単位質量当りの体積力、 $d\tau$  を  $dm$  の占める体積素片とすると、 $dm$  の運動方程式は固体部および流体部について、次式で表わされる。<sup>12(i)</sup>

$$\bar{a} dm = \nabla \cdot \tilde{T} d\tau + \bar{R} dm \quad (1)$$

ここに  $\nabla$  は発散演算子である。また原点  $O$  に対するモーメントの釣合から次式が得られる。<sup>12(ii)</sup>

$$\bar{r} \times \bar{a} dm = -\nabla \cdot (\tilde{T} \times \bar{r}) d\tau + \bar{r} \times \bar{R} dm \quad (2)$$

同様に重心に対するモーメント釣合式として、

$$(\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{a} dm = -\nabla \cdot \{ \tilde{T} \times (\bar{r} - \bar{r}_c) \} d\tau + (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{R} dm \quad (2')$$

を得る。 $\bar{r}_c$  は重心の位置ベクトル（図1）である。

いま、飛しょう体を図2の如く時刻  $t$  において、体積領域  $\tau$  を占める固体部と、 $\tau'$  を占める流体部（固体推進薬は固体部とするのが適当かも知れないが、燃焼段のものは燃焼面が移動するので、ここでは後の式の簡単化の都合上流体部に入れる）に分け、前者を囲む表面を  $\sigma$ 、後者のそれを  $\sigma'$  とすると、

$$\sigma = \sigma_s + \sigma_{sf}, \quad \sigma' = \sigma_{sf} + \sum_n \sigma_{en} \quad (3)$$

ここに、 $\sigma_{sf}$  は固体と流体部との接する面、 $\sigma_{en}$  は第  $n$  エンジンの出口断面、 $\sigma_s$  は外部大気と接している固体表面とする。飛しょう体の運動は各瞬間において、限定さ

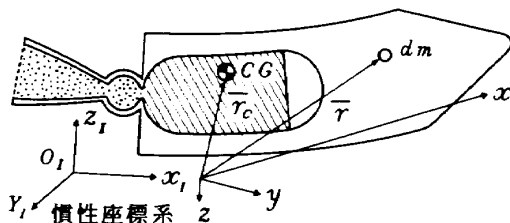


図1 座標系

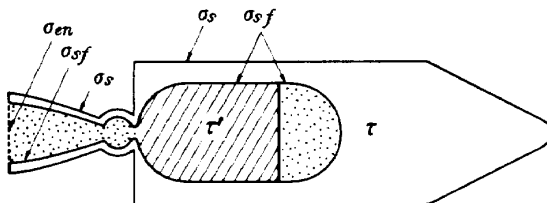


図2 飛しょう体の物質領域

れた面  $\sigma_s$  と  $\sum_n \sigma_{en}$  によって囲まれた空間内の物質の運動を知ることであり、流動し流出する流体が機体に作用する力は、 $\sigma_{sf}$  を通して作用する表面力と考えることが出来、固体部はこの流体による反力をうける。

## 3. 基礎運動方程式

### 3.1 並進運動

まず任意の機体軸系の原点の並進運動方程式を求める。(1)式をそれぞれ固体部と流体部について積分する。このさい発散定理（付録1）を用いて、 $\nabla \cdot \tilde{T}$  の体積積分を面積積分で表わすと、

$$\int_{\tau} \bar{a} dm = \int_{\sigma_s} \bar{n}_{\tau} \cdot \tilde{T} ds + \int_{\sigma_{sf}} \bar{n}_{\tau'} \cdot \tilde{T} ds + \int_{\tau} \bar{R} dm \quad (4)$$

$$\int_{\tau'} \bar{a} dm = \int_{\sigma_{sf}} \bar{n}_{\tau'} \cdot \tilde{T} ds + \sum_n \int_{\sigma_{en}} \bar{n}_{\tau'} \cdot \tilde{T} ds + \int_{\tau'} \bar{R} dm \quad (5)$$

ここに、 $\bar{n}_{\tau}$ 、 $\bar{n}_{\tau'}$  はそれぞれ  $\tau$ 、 $\tau'$  を囲む表面の面積要素  $ds$  に垂直な外方向単位ベクトルである。 $\bar{n}_{\tau} \cdot \tilde{T} ds$ 、 $\bar{n}_{\tau'} \cdot \tilde{T} ds$  はそれぞれ  $\sigma$ 、 $\sigma'$  の  $ds$  に作用する表面力で、(5)式の右辺の最初の積分項は符号を変えると、流体部が固体部におよぼす力となる。 $\sigma_{sf}$  面で  $\bar{n}_{\tau} \cdot \tilde{T} ds$  と  $\bar{n}_{\tau'} \cdot \tilde{T} ds$  は同一点では大きさは同じで逆方向であるから、(4)、(5)式より、

$$\int_{\tau + \tau'} \bar{a} dm = \bar{F} \quad (6)$$

$$\bar{F} = \int_{\sigma_s} \bar{n}_{\tau} \cdot \tilde{T} ds + \sum_n \int_{\sigma_{en}} \bar{n}_{\tau'} \cdot \tilde{T} ds + \int_{\tau + \tau'} \bar{R} dm \quad (7)$$

を得る。

いま、 $\bar{v}_0$  を原点  $O$  の慣性空間速度、 $\bar{\omega}$  を慣性系に対する機体軸系の回転角速度、 $\bar{v}_s$ 、 $\bar{v}_f$  をそれぞれ着目する固体および流体部の  $dm$  の機体軸系に対する速度とすると、 $dm$  の慣性空間速度  $\bar{V}$  は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_s & \text{for } \tau \\ \bar{V} &= \bar{v}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r} + \bar{v}_f & \text{for } \tau' \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

( $\dot{\phantom{x}}$ ) は時間変化率を表わし、ベクトルのときは機体軸系から観察される時間変化率を表わすとすると、 $\bar{a}$  は

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= \dot{\bar{v}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{v}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \\ &\quad + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_s + \dot{\bar{v}}_s & \text{for } \tau \\ \bar{a} &= \dot{\bar{v}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{v}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) \\ &\quad + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_f + \dot{\bar{v}}_f & \text{for } \tau' \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

$\dot{\bar{v}}_s$ 、 $\dot{\bar{v}}_f$  は機体軸系に対する加速度で、いま、 $m$  を時刻  $t$  の飛しょう体の全質量とすると、並進運動の方程式は(9)、(6)式より、

$$m \left[ \dot{\bar{V}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{V}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) \right] \\ + 2 \bar{\omega} \times \left[ \int_{\tau} \bar{v}_s dm + \int_{\tau'} \bar{v}_f dm \right] + \int_{\tau} \dot{\bar{v}}_s dm \\ + \int_{\tau'} \dot{\bar{v}}_f dm = \bar{F} \quad (10)$$

となる。(10)式は通常に用いられる式である。

ここで、連続体力学の場の量の取扱いから得られる関係式を用いて、(10)式の変形を考える。 $d^*/dt$ を $(\dot{\quad})$ と同一の演算子とすると、(付2.4)、(付2.5)式により、次の関係式が得られる。

$$\frac{d^*}{dt} \int_{\tau+\tau'} \bar{r} dm = \frac{D^*}{Dt} \int_{\tau+\tau'} \bar{r} dm = \int_{\tau+\tau'} \frac{D^* \bar{r}}{Dt} dm \\ + \int_{\tau'} \frac{D^* \bar{r}}{Dt} dm - \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ = \int_{\tau} \dot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \dot{\bar{v}}_f dm - \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \quad (11)$$

上式の最後の式の末項の $\bar{v}_f$ 、 $\bar{v}_s$ はそれぞれ、流出面 $\sigma_{en}$ における流出流体および流出機体面そのものの機体軸に相対的な速度である。また

$$\int_{\tau+\tau'} \bar{r} dm = m \bar{r}_c \quad (12)$$

であるから、これと(11)式から

$$\int_{\tau} \dot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \dot{\bar{v}}_f dm = \frac{d^*}{dt} (m \bar{r}_c) \\ + \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \quad (13)$$

を得る。同様にして更に(13)式の両辺の $d^*/dt$ を遂行すると左辺は、

$$\frac{d^*}{dt} \int_{\tau} \dot{\bar{v}}_s dm + \frac{d^*}{dt} \int_{\tau'} \dot{\bar{v}}_f dm = \int_{\tau} \frac{D^* \dot{\bar{v}}_s}{Dt} dm \\ + \int_{\tau'} \frac{D^* \dot{\bar{v}}_f}{Dt} dm - \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ = \int_{\tau} \ddot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \ddot{\bar{v}}_f dm - \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds$$

右辺は、

$$\frac{d^{*2}}{dt^2} (m \bar{r}_c) + \frac{d^*}{dt} \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds$$

となるので、これらから次の関係式が得られる。

$$\int_{\tau} \ddot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \ddot{\bar{v}}_f dm = \frac{d^{*2}}{dt^2} (m \bar{r}_c) \\ + \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ + \frac{d^*}{dt} \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \quad (14)$$

(13),(14)式の右辺の第2項はそれぞれ、 $\sum_n \sigma_{en}$ から単位時間に流出する $\rho_f \bar{r} ds$ 、 $\rho_f \bar{v}_f ds$ の総和で、両式を(10)式に用いて並進運動方程式として次式を得る。

$$m \left[ \dot{\bar{V}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{V}_0 + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) + 2 \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_c + \dot{\bar{r}}_c \right] \\ + \dot{m} \bar{r}_c + 2 \dot{m} \dot{\bar{r}}_c + 2 \bar{\omega} \times \left[ \dot{m} \bar{r}_c + \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \right] \\ + \frac{d^*}{dt} \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ + \sum_{n \sigma_{en}} \int \rho_f \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds = \bar{F} \quad (15)$$

(15)式は一般式で(10)と(15)式は全く同一の内容を表わす式であるが、後者は $\bar{v}_s$ 、 $\bar{v}_f$ 、 $\dot{\bar{v}}_s$ および $\dot{\bar{v}}_f$ の全機体についての積分を $m$ 、 $\bar{r}_c$ とその時間変化率ならびに系からの流出量で表わされており、いわゆる運動量推力は左辺の末項の中に含まれており、圧力推力の項は右辺の $\bar{F}$ の中に含まれていることになる。もし全系から質量の排出を伴わないなら、左辺は最初のかっこで示した項のみとなる。従ってそれ以下の項が質量の流出の影響を表わしている。

以上は任意の機体軸系原点の慣性空間速度 $\bar{V}_0$ で並進運動を表わしたが、重心の慣性空間速度 $\bar{V}_c$ で並進運動を表わすことを考える。

$$\bar{V}_c = \bar{V}_0 + \bar{\omega} \times \bar{r}_c + \dot{\bar{r}}_c \quad (16)$$

であるから、(16)と(8)式から $dm$ の $\bar{V}$ は次式のように表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{V} &= \bar{V}_c + \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c) + \bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_c & \text{for } \tau \\ \bar{V} &= \bar{V}_c + \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c) + \bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_c & \text{for } \tau' \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

従って $\bar{a}$ は、

$$\left. \begin{aligned} \bar{a} &= \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r} - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) \\ &\quad + 2 \bar{\omega} \times (\bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_c) + \dot{\bar{v}}_s - \ddot{\bar{r}}_c & \text{for } \tau \\ \bar{a} &= \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r} - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c)) \\ &\quad + 2 \bar{\omega} \times (\bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_c) + \dot{\bar{v}}_f - \ddot{\bar{r}}_c & \text{for } \tau' \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

となり、(18)式を積分して重心の運動方程式は(10)式と同様に、次式で表わされる。

$$m \left[ \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c - 2 \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_c - \ddot{\bar{r}}_c \right] \\ + 2 \bar{\omega} \times \left[ \int_{\tau} \dot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \dot{\bar{v}}_f dm \right] + \int_{\tau} \ddot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \ddot{\bar{v}}_f dm \\ = \bar{F} \quad (19)$$

(10)式から(15)式に変形したと同様の方法により、(13)、(14)式を用いて(19)式を変形して

$$\begin{aligned}
& m \left[ \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c \right] + \dot{m} \bar{r}_c + 2 \dot{m} (\dot{\bar{r}}_c + \bar{\omega} \times \bar{r}_c) \\
& + \frac{d^*}{dt} \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_\tau] ds + 2 \bar{\omega} \\
& \times \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_\tau] ds \\
& + \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_\tau] ds = \bar{F} \quad (20)
\end{aligned}$$

系の  $\dot{m}$ ,  $\dot{m}$  が 0 のときは上式の左辺は第一項だけとなる。

ここで一例として単一エンジンで剛体対称機体の場合に適用してみる。中心軸を機体軸系の一つに一致させる (図 3)。エンジン出口断面における  $\bar{v}_f$  は一様としその大きさを  $v_e$ ,  $ds$  の  $\bar{r}$  は断面中心の  $\bar{r}_e$  で代表出来るとすると, (15) 式の左辺の積分項は次式で表わされる。

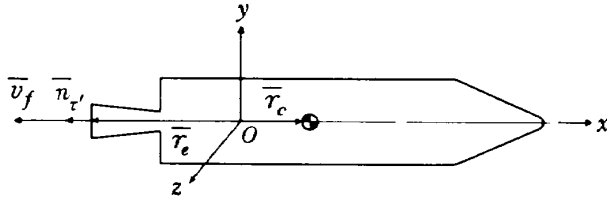


図 3 剛体対称機体例

$$\begin{aligned}
\int_{\sigma_e} \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_\tau] ds &= \int_{\sigma_e} \bar{r}_e \rho_f v_e ds = -\dot{m} \bar{r}_e \\
\int_{\sigma_e} \rho_f \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_\tau] ds &= \int_{\sigma_e} \bar{v}_f \rho_f v_e ds \\
&= -\dot{m} v_e \bar{n}_\tau \quad (21)
\end{aligned}$$

ここに  $\sigma_e$  はエンジン出口断面を表す。(7) 式の  $\bar{F}$  に関して,  $\sigma_s$  の  $ds$  に作用する外力から, 大気静圧  $p_a$  によるものを差し引いた外力を  $\bar{n}_\tau \cdot \tilde{T} ds$  で表わし,  $\bar{r}_e$  のガス圧を  $P_e$  とし,  $\sigma_s + \sigma_e$  に作用する大気静圧の合力が 0 であることを考慮して,

$$\begin{aligned}
\bar{F} &= \int_{\sigma_e} \bar{n}_\tau \cdot \tilde{T} ds + \int_{\sigma_e} -P_a \bar{n}_\tau ds + \int_{\sigma_e} -P_a \bar{n}_\tau ds \\
&+ \int_{\sigma_e} (P_a - P_e) \bar{n}_\tau ds + \int_{\tau+\tau'} \bar{R} dm \quad (22)
\end{aligned}$$

上式の第 2, 3 項の和は 0 となり, 第一項がいわゆる空気力とその他の表面力で, 第 4 項が圧力推力となる。(21) 式の第 2 式は付号を変えれば運動量推力であるから, これと (22) 式の第 4 項との和  $\bar{F}_T$  が推力となる。

$$\bar{F}_T = [\dot{m} v_e + A_e (P_a - P_e)] \bar{n}_\tau \quad (23)$$

$A_e$  はノズル出口断面積である。(22) 式の第 5 項は重力その他の体積力を表わす。(21)~(23) 式を用いて (15), (20) 式はそれぞれ次の如くなる。

$$\begin{aligned}
& m \left[ \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}_c + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_c) + 2 \bar{\omega} \times \dot{\bar{r}}_c + \dot{\bar{r}}_c \right] \\
& + \dot{m} (\bar{r}_c - \bar{r}_e) + 2 \dot{m} \dot{\bar{r}}_c + 2 \dot{m} \bar{\omega} \times (\bar{r}_c - \bar{r}_e)
\end{aligned}$$

$$= \bar{F}_T + \int_{\sigma_s} \bar{n}_\tau \cdot \tilde{T} ds + \int_{\tau+\tau'} \bar{R} dm \quad (24)$$

$$\begin{aligned}
& m \left[ \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c \right] + \dot{m} (\bar{r}_c - \bar{r}_e) + 2 \dot{m} \dot{\bar{r}}_c + 2 \dot{m} \bar{\omega} \times \\
& \times (\bar{r}_c - \bar{r}_e) = \bar{F}_T + \int_{\sigma_s} \bar{n}_\tau \cdot \tilde{T} ds + \int_{\tau+\tau'} \bar{R} dm \quad (25)
\end{aligned}$$

### 3.2 回転運動

(2) 式から原点  $O$  のまわりのモーメントの釣合式として次式を得る。

$$\int_{\tau+\tau'} \bar{r} \times \bar{a} dm = \bar{M} \quad (26)$$

$\bar{M}$  は (7) 式と同様に発散定理 (付録 1) により次式を得る。

$$\begin{aligned}
\bar{M} &= \int_{\sigma_s} \bar{r} \times (\bar{n}_\tau \cdot \tilde{T}) ds + \sum_n \int_{\sigma_{en}} \bar{r} \times (\bar{n}_\tau \cdot \tilde{T}) ds \\
&+ \int_{\tau+\tau'} \bar{r} \times \bar{R} dm \quad (27)
\end{aligned}$$

(9) を (26) 式に代入し,  $\tilde{T}$  を  $xyz$  系に関する原点  $O$  のまわりの慣性モーメントテンソル (付録 3) とすると,

$$\begin{aligned}
& \tilde{I} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times (\tilde{I} \cdot \bar{\omega}) + m \bar{r}_c \times (\dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c) \\
& + 2 \left[ \int_{\tau} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_s) dm + \int_{\tau'} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_f) dm \right] \\
& + \int_{\tau} \bar{r} \times \dot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \bar{r} \times \dot{\bar{v}}_f dm = \bar{M} \quad (28)
\end{aligned}$$

ここで, 被積分項  $\bar{r} \times [\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})]$  は, ベクトル三重積に関する付録 4 の関係式より,  $\bar{\omega} \times [\bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})]$  に変形出来ることを用いた。つきに (28) 式の変形を考える。まず (付 2.4) と (付 2.5) 式を用いて  $d^*/dt (\tilde{I} \cdot \bar{\omega})$  は次式で表わされる。

$$\begin{aligned}
\frac{d^*}{dt} (\tilde{I} \cdot \bar{\omega}) &= \frac{d^*}{dt} \left[ \int_{\tau} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm \right. \\
&\quad \left. + \int_{\tau'} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm \right] \\
&= \int_{\tau} [\bar{r} \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}) + \bar{v}_s \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \dot{\bar{v}}_s)] dm \\
&+ \int_{\tau'} [\bar{r} \times (\dot{\bar{\omega}} \times \bar{r}) + \bar{v}_f \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \dot{\bar{v}}_f)] dm \\
&- \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_\tau] ds
\end{aligned}$$

上の最後の式の第 1 と第 2 項の積分式をベクトル積の関係式 (付録 4) を用いて変形すると次式を得る。

$$\begin{aligned}
\frac{d^*}{dt} (\tilde{I} \cdot \bar{\omega}) &= \tilde{I} \cdot \dot{\bar{\omega}} + 2 \left[ \int_{\tau} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_s) dm \right. \\
&\quad \left. + \int_{\tau'} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_f) dm \right] \\
&- \bar{\omega} \times \left[ \int_{\tau} \bar{r} \times \bar{v}_s dm + \int_{\tau'} \bar{r} \times \bar{v}_f dm \right] \\
&- \sum_n \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_\tau] ds \quad (29)
\end{aligned}$$

つきに  $\bar{L}$  なる量すなわち機体軸系から見た原点  $O$  に対す

る角運動量を導入する。

$$\bar{L} = \int_{\tau} \bar{r} \times \bar{v}_s dm + \int_{\tau'} \bar{r} \times \bar{v}_f dm \quad (30)$$

さらに、(付2.4)、(付2.5)式を用いて  $d^*/dt(\bar{L})$  として、

$$\begin{aligned} \frac{d^* \bar{L}}{dt} = & \int_{\tau} \bar{r} \times \dot{\bar{v}}_s dm + \int_{\tau'} \bar{r} \times \dot{\bar{v}}_f dm \\ & - \sum_{n \sigma en} \int \rho_f \bar{r} \times \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \end{aligned} \quad (31)$$

が得られる。(29)~(31)式を用いて(28)式として結局次式が得られる。

$$\begin{aligned} \frac{d^*}{dt} (\tilde{\gamma} \cdot \bar{\omega}) + \bar{\omega} \times (\tilde{\gamma} \cdot \bar{\omega}) + m \bar{r}_c \times (\dot{\bar{V}}_o + \bar{\omega} \times \bar{V}_o) + \frac{d^* \bar{L}}{dt} \\ + \bar{\omega} \times \bar{L} + \sum_{n \sigma en} \int \rho_f \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ + \sum_{n \sigma en} \int \rho_f \bar{r} \times \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds = \bar{M} \end{aligned} \quad (32)$$

上式の左辺の最初の2項が通常のオイラーの式に対応するが、 $\tilde{\gamma}$ は0とは限らない。ジェットダイビングは種々の定義が見られるが<sup>1),4),5)</sup>左辺最後から2項目が多く著者によりジェットダンピングと呼ばれている。(28)と(32)式は同一内容の式で、後者は $\tilde{\gamma}$ 、 $\bar{r}_c$ 以外に $\bar{L}$ と流出率を知る必要がある。しかし一般に系からの諸量の流出率は容易に分る場合が多く、(28)式左辺の末項のような積分を求める必要はない。特に、流体の流れが軸方向で軸対称と仮定出来るときは $\bar{L}$ は0となるので、非常に簡単な式になる。(32)式の最後の2項はそれぞれ、系から単位時間に流出する  $\rho_f \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) ds$  および  $\rho_f \bar{r} \times \bar{v}_f ds$  の総和を表わし、運動量推力によるモーメントは後者に含まれる。

同様にして重心まわりのモーメント釣合式は、

$$\int_{\tau+\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{a} dm = \bar{M}_c \quad (33)$$

$$\begin{aligned} \bar{M}_c = & \int_{\sigma_s} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{n}_{\tau'} \cdot \tilde{T}) ds + \sum_{n \sigma en} \int (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{n}_{\tau'} \cdot \tilde{T}) ds \\ & + \int_{\tau+\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times R dm \end{aligned} \quad (34)$$

$\bar{M}_c$  は外力による重心まわりのモーメントを表わす。(18)式を(33)式に代入して、全系について積分する。 $\tilde{I}_c$  を重心まわりの慣性モーメントテンソル(付録3)とし、

$$\begin{aligned} \tilde{I}_c \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times (\tilde{I}_c \cdot \bar{\omega}) + 2 \left[ \int_{\tau} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_s) dm \right. \\ \left. + \int_{\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_f) dm \right] + \int_{\tau} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \dot{\bar{v}}_s dm \\ + \int_{\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \dot{\bar{v}}_f dm = \bar{M}_c \end{aligned} \quad (35)$$

(28)式を変形して(32)式を得たのと同様の方法で、(35)

式の変形を考える。機体軸系から見た重心に対する角運動量  $\bar{L}_c$  を導入する。

$$\bar{L}_c = \int_{\tau} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{v}_s dm + \int_{\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{v}_f dm \quad (36)$$

$\bar{L}_c$  は  $\bar{L}$  を用いて次式で表わされるが、ここでは形式的に  $\bar{L}_c$  を用いることにする。

$$\begin{aligned} \bar{L}_c = & \bar{L} - \bar{r}_c \times \left[ \frac{d^*}{dt} (m \bar{r}_c) + \sum_{n \sigma en} \int \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \right. \\ & \left. \frac{d^*}{dt} (\tilde{I}_c \cdot \bar{\omega}) + \bar{\omega} \times (\tilde{I}_c \cdot \bar{\omega}) + \dot{\bar{r}}_c \times [m \dot{\bar{r}}_c \right. \\ & \left. + \sum_{n \sigma en} \int \rho_f \bar{r} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \right] + \frac{d^* \bar{L}_c}{dt} + \bar{\omega} \times \bar{L}_c \\ & + \sum_{n \sigma en} \int \rho_f (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ & + \sum_{n \sigma en} \int \rho_f (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \{ \bar{\omega} \times (\bar{r} - \bar{r}_c) \} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ & = \bar{M}_c \end{aligned} \quad (38)$$

最近 transport rule による運動方程式が Belknap<sup>11)</sup> によって示された。検討の結果によると、(20),(38)式はその結果に合致している。

ここで前に、(24)、(25)式を導いたと同一機体例について回転運動方程式を求めてみる。機体および流体の流れの対称性の仮定から、(30)式の  $\bar{L}$  は常に0となる。(32)式の左辺の終から第2、第1項はそれぞれ(21)式と同様に次式で表わされる。

$$\left. \begin{aligned} \int_{\sigma_e} \rho_f \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \\ = \int_{\sigma_e} \bar{r}_e \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_e) \rho_f v_e ds = -\dot{m} \bar{r}_e \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_e) \\ \int_{\sigma_e} \rho_f \bar{r} \times \bar{v}_f [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds = \int_{\sigma_e} \bar{r}_e \times \bar{v}_f \rho_f v_e ds \\ = -\dot{m} v_e \bar{r}_e \times \bar{n}_{\tau'} \end{aligned} \right\} \quad (39)$$

外力によるモーメント  $\bar{M}$  は、 $\bar{F}$  に関して(22)式で取扱ったと同様にして(27)式は、

$$\begin{aligned} \bar{M} = & \int_{\sigma_s} \bar{r} \times (\bar{n}_{\tau'} \cdot \tilde{T}') ds + \int_{\sigma_e} (p_a - p_e) \bar{r} \times \bar{n}_{\tau'} ds \\ & + \int_{\tau+\tau'} \bar{r} \times R dm \end{aligned} \quad (40)$$

となり、上式右辺の積分項はそれぞれ左から、空気力等の表面力によるモーメント、圧力推力によるモーメントおよび重力等の体積力によるモーメントを表わす。(23)式の  $\bar{F}_r$  と同様に  $\bar{M}_r$  を次式により導入すると、これはいわゆる推力によるモーメントを表わす。

$$\bar{M}_r = [ \dot{m} v_e + A_e (p_a - p_e) ] \bar{r}_e \times \bar{n}_{\tau'} \quad (41)$$

また、(40)式と同様に  $\bar{M}_c$  を表わす。

$$\bar{M}_c = \int_{\sigma_s} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{n}_r \cdot \bar{T}') ds + \int_{\sigma_e} (P_a - P_e) [(\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{n}_r] ds + \int_{\tau+\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{R} dm \quad (42)$$

さらに、 $\bar{M}_{cr}$  を  $\bar{M}_r$  にちなって導入すると、

$$\bar{M}_{cr} = [\dot{m} v_e + A_e (P_a - P_e)] (\bar{r}_e - \bar{r}_c) \times \bar{n}_r \quad (43)$$

したがって(32), (38)式は(21), (37), (39)~(43)式を用いて次式で表わすことが出来る。

$$d^*/dt (\bar{I} \cdot \bar{\omega}) + \bar{\omega} \times (\bar{I} \cdot \bar{\omega}) + m \bar{r}_c \times (\dot{\bar{V}}_0 + \bar{\omega} \times \bar{V}_0) - \dot{m} \bar{r}_e \times (\bar{\omega} \times \bar{r}_e) = \bar{M}_r + \int_{\sigma_s} \bar{r} \times (\bar{n}_r \cdot \bar{T}') ds + \int_{\tau+\tau'} \bar{r} \times \bar{R} dm \quad (44)$$

$$d^*/dt (\bar{I}_c \cdot \bar{\omega}) + \bar{\omega} \times (\bar{I}_c \cdot \bar{\omega}) - m [\bar{r}_c \times \ddot{\bar{r}}_c + \bar{\omega} \times (\bar{r}_c \times \dot{\bar{r}}_c)] - \bar{r}_c \times (2 \dot{m} \dot{\bar{r}}_c - \dot{m} \dot{\bar{r}}_e) + \dot{m} \bar{\omega} \times (\bar{r}_c \times \bar{r}_e) - \dot{m} (\bar{r}_e - \bar{r}_c) \times [\bar{\omega} \times (\bar{r}_e - \bar{r}_c)] = \bar{M}_{cr} + \int_{\sigma_s} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times (\bar{n}_r \cdot \bar{T}') ds + \int_{\tau+\tau'} (\bar{r} - \bar{r}_c) \times \bar{R} dm \quad (45)$$

機体と流体の流れの中心軸に対する対称性を仮定すると、実際は  $\bar{M}_r$ ,  $\bar{M}_{cr}$ ,  $\bar{r}_c \times \bar{r}_e$  は 0 になるが式の上では残しておいた。

### 3.3 流体運動

タンク内の液体推進薬および燃焼室内のガスの運動は、機体の弾性変形との相互作用により非常に複雑である。この運動は初期および境界条件、連続の式、エネルギー式、燃焼特性およびその他の constitutive equations を用いて解くことが出来るかも知れないが、ここでは後程実さい詳細に機体全体の運動を表わすことも考える都合上、スロッシングは縦スロッシングを無視し、横スロッシングに対して質量・スプリング・ダッシュポットの等価力学系で表わし<sup>14)</sup>(図4)液体および燃焼ガスの排出流運動は、仮定を設けてこれを用いることにする。

(1)式を第  $k$  横スロッシング質量に適用する。

$\mu_k$  : スロッシング質量

$\xi_k$  : 減衰比

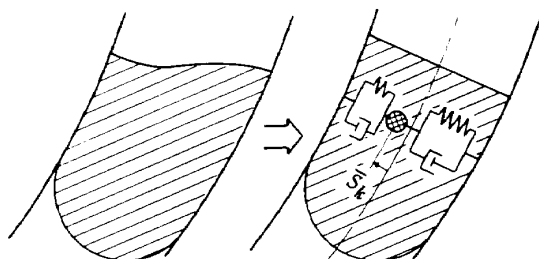


図4 横スロッシングの等価力学的モデル

$\bar{v}_k$  : 機体軸系に対する  $\mu_k$  の速度

$\omega_k$  : 固有円振動数

$\bar{r}_k$  : 原点  $O$  に対する位置ベクトル

$\bar{s}_k$  : タンク中心軸に垂直方向のスロッシング変位

(1)式の右辺はスプリングの復原力  $-\mu_k \omega_k^2 \bar{s}_k$  と、ダッシュポットの減衰力  $-2\mu_k \xi_k \omega_k (\bar{s}_k / |\bar{s}_k|) (\dot{\bar{s}}_k / |\dot{\bar{s}}_k|)$  と、体積力  $\mu_k \bar{R}$  の項で表わされる。このとき減衰力は  $\bar{s}_k$  と直角方向には作用せず、 $|\bar{s}_k|$  ( $\bar{s}_k$  の絶対値) の変化に対してのみ作用するとする。一般に飛しょう体のスロッシュダンピングは大低環状のバッフルで効果を与える機構が多いので、この仮定を用いる。すなわち回転スロッシングには減衰を無視する。第  $k$  スロッシング質量の運動方程式は、重心の加速度で表わすと次式の如くなる。

$$\mu_k [\dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r}_k - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times (\bar{r}_k - \bar{r}_c))] + 2 \bar{\omega} \times (\bar{v}_k - \dot{\bar{r}}_c) + \dot{\bar{v}}_k - \dot{\bar{r}}_c = -\mu_k \omega_k^2 \bar{s}_k - 2\mu_k \xi_k \omega_k \frac{\bar{s}_k}{|\bar{s}_k|} \cdot \frac{\dot{\bar{s}}_k}{|\dot{\bar{s}}_k|} + \mu_k \bar{R} \quad (46)$$

ただし(46)式は  $\bar{s}_k$  を含むタンク中心軸に垂直な面内でのみ成立するとする。

### 3.4 曲げ変形運動

刻々に質量が変化し、しかもジナルエンジンのような非保存力による運動を伴う全系の固有振動モードは、通常の意味においては存在しない。従って何らかの仮想的な制限下における機体モードを用いて曲げ変形を表わす。この assumed モード形の選び方によって、スロッシング質量およびエンジン慣性力と曲げ振動のカップリングの度合が左右され、かつ同一精度で曲げ変位を表わし得るモード形のとるべき項数が異なる。assumed モード形の選び方は、(i)スロッシング質量とジナルエンジンを除いた部分について、流体は frozen の仮定で固有振動モードを求め、並進、回転および曲げ振動運動等においては、除外したエンジンおよびスロッシング質量の影響はその慣性力および減衰力等を外力として取扱う。(ii)エンジンは初期設定位置で固定され、流体はスロッシング質量も含めて frozen した仮想的な束縛下の固有振動モード。(iii)上述(i)および(ii)の中間の状態の仮想 assumed モード。(iv)ジナルエンジンのない場合には全系の固有振動モード(スロッシングはバネ・質量で表わし他の流体は frozen)。これらの種々のモードが考えられる。ここではカップリング項が出来るだけ少く、しかもスロッシング運動およびエンジン運動の個々の物理的な意味が明瞭に保持されているように、(ii)の場合の assumed モードを用いる。

この第 $\nu$ 次固有振動の円振動数を $\omega_\nu$ , 一般質量を $m_\nu$ , 減衰比を $\zeta_\nu$ , モード形を $\bar{\phi}_\nu(\bar{r}, t)$ として, 曲げ変位 $\bar{u}(\bar{r}, t)$ は次式で表わされると仮定する。

$$\bar{u}(\bar{r}, t) = \sum_{\nu} \xi_\nu(t) \bar{\phi}_\nu(\bar{r}, t) \quad (47)$$

$\xi_\nu$ は $\bar{\phi}_\nu$ の一般座標である。

弾性振動方程式は例えば Bisplinghoff の教科書<sup>12)</sup>に従えば, 付録5の(付5.5)式で表わされる。いまこれを適用するに当たっては, スロッシング質量の動揺, 流体の機体に対する相対的な流れおよびエンジンのふれ運動等の有効力を外力の如く考える必要がある。assumedモードで仮定した状態の機体各部 $dm$ の慣性空間加速度を $\bar{a}_a$ とおくと, 流体部エンジン部はこの仮定した状態からの相対変位による加速度は $a - \bar{a}_a$ で, 他の部分は $\bar{a} - \bar{a}_a = 0$ とおける。(付5.5)式の右辺の $\bar{a}$ は上述の $\bar{a}_a$ に対応するから,  $\bar{a} - \bar{a}_a$ に対する慣性力を考慮すると次式を得る。

$$\begin{aligned} m_\nu \omega_\nu^2 \xi_\nu = & \int_{\tau+\tau'} [-\bar{a}_a - (\bar{a} - \bar{a}_a)] \cdot \bar{\phi}_\nu dm \\ & + \int_{\tau+\tau'} \bar{R} \cdot \bar{\phi}_\nu dm + \int_{\sigma} (\bar{n}_\tau \cdot \tilde{T}) \cdot \bar{\phi}_\nu dm \\ & + \sum_n \int_{\sigma_{en}} (\bar{n}_\tau \cdot \tilde{T}) \cdot \bar{\phi}_\nu ds \end{aligned}$$

上式右辺の第1項の被積分項 $(\bar{a} - \bar{a}_a) \cdot \bar{\phi}_\nu$ による積分を $Q_{e\nu}$ とおき, また第2項は重力, 第3, 4項は表面力による一般力でこれ等を合せて $Q_\nu$ とおく。さらに減衰項を付加すると振動方程式は次式で表わされる。

$$\begin{aligned} m_\nu \omega_\nu^2 \xi_\nu = & \int_{\tau+\tau'} (-\bar{a}_a \cdot \bar{\phi}_\nu) dm - 2m_\nu \zeta_\nu \dot{\xi}_\nu \\ & + Q_{e\nu} + Q_\nu \end{aligned} \quad (48)$$

### 3.5 エンジンの運動

第 $n$ エンジンのジンバル点から $dm$ への位置ベクトルを $\bar{r}'$ として, ジンバル点 $G_n$ まわりのモーメントの釣合式は次式で表わされる。

$$\int_{\tau(E_n)+\tau'(E_n)} \bar{r}' \times \bar{a} dm = \bar{M}_{en} \quad (49)$$

ここに,  $\tau(E_n), \tau'(E_n)$ はそれぞれ第 $n$ エンジンの固体部と流体部で,  $\bar{M}_{en}$ はエンジンに作用するモーメントで,

$$\begin{aligned} \bar{M}_{en} = & \int_{\sigma(E_n)} \bar{r}' \times (\bar{n}_\tau \cdot \tilde{T}) ds + \int_{\sigma_{en}} \bar{r}' \times (\bar{n}_\tau \cdot \tilde{T}) ds \\ & + \int_{\sigma_{ein}} \bar{r}' \times (\bar{n}_\tau \cdot \tilde{T}) ds + \int_{\tau(E_n)+\tau'(E_n)} \bar{r}' \times \bar{R} dm \end{aligned} \quad (50)$$

で表わされる。 $\sigma(E_n)$ は第 $n$ エンジンの燃焼ガスに接していない外面,  $\sigma_{ein}$ は第 $n$ エンジンへの流体流入面を表わす。従って右辺第1項の積分は $G_n$ まわりのアクチュエーターによるモーメント, ジンバル点の摩擦力による

モーメント, 配管によるモーメントおよび空気力等を表わし, 第2, 3項の積分は排出ガス圧, 流入圧によるモーメントを, 末項の積分は体積力によるモーメントを表わす。

$dm$ の $\bar{a}$ は図5の記号を用い, 重心の慣性空間加速度で表わすと((18)式),

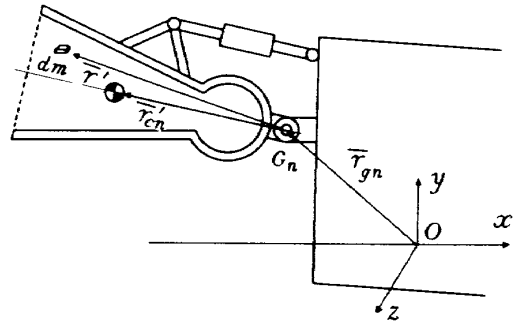


図5 第 $n$ エンジンの座標

$$\begin{aligned} \bar{a} = & \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r}_{gn} + \bar{r}' - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \\ & \times [\bar{\omega} \times (\bar{r}_{gn} + \bar{r}' - \bar{r}_c)] + 2\bar{\omega} \times (\bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_c) + \dot{\bar{v}}_s - \ddot{\bar{r}}_c \end{aligned}$$

for  $\tau(E_n)$

$$\begin{aligned} \bar{a} = & \dot{\bar{V}}_c + \bar{\omega} \times \bar{V}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r}_{gn} + \bar{r}' - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \\ & \times [\bar{\omega} \times (\bar{r}_{gn} + \bar{r}' - \bar{r}_c)] + 2\bar{\omega} \times (\bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_c) + \dot{\bar{v}}_f - \ddot{\bar{r}}_c \end{aligned}$$

for  $\tau'(E_n)$

第 $n$ エンジンのガスも含めた全質量を $m_{en}$ ,  $G_n$ の慣性空間加速度を $\bar{a}_{gn}$ ,  $\tilde{I}_{en}$ を $xyz$ 系に関する $G_n$ まわりのエンジン慣性モーメントテンソルとして, (49)式より次式を得る( $\bar{a}_{gn}$ は(53)式)。

$$\begin{aligned} \tilde{I}_{en} \cdot \dot{\bar{\omega}} + \bar{\omega} \times (\tilde{I}_{en} \cdot \bar{\omega}) + m_{en} \bar{r}'_{cn} \times \bar{a}_{gn} \\ + 2 \left[ \int_{\tau(E_n)} \bar{r}' \times \{ \bar{\omega} \times (\bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_{gn}) \} dm \right. \\ \left. + \int_{\tau'(E_n)} \bar{r}' \times \{ \bar{\omega} \times (\bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_{gn}) \} dm \right] \\ + \int_{\tau(E_n)} \bar{r}' \times (\dot{\bar{v}}_s - \ddot{\bar{r}}_{gn}) dm + \int_{\tau'(E_n)} \bar{r}' \times (\dot{\bar{v}}_f - \ddot{\bar{r}}_{gn}) dm \\ = \bar{M}_{en} \end{aligned}$$

(28)から(32)式を導いたと同様にして,  $G_n$ まわりの回転運動方程式として次式を得る。

$$\begin{aligned} d^*/dt (\tilde{I}_{en} \cdot \bar{\omega}) + \bar{\omega} \times (\tilde{I}_{en} \cdot \bar{\omega}) + m_{en} \bar{r}'_{cn} \times \bar{a}_{gn} \\ + d^*/dt (\bar{L}_{en}) \\ + \bar{\omega} \times \bar{L}_{en} + \int_{\sigma_{en} + \sigma_{ein}} \rho_f \bar{r}' \times (\bar{\omega} \times \bar{r}') [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_\tau] ds \\ + \int_{\sigma_{en} + \sigma_{ein}} \rho_f \bar{r}' \times (\bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_{gn}) [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_\tau] ds = \bar{M}_{en} \end{aligned} \quad (51)$$



$$\bar{L}_{en} = \int_{\tau(E_n)} \bar{r}' \times (\bar{v}_s - \dot{\bar{r}}_{gn}) dm + \int_{\tau'(E_n)} \bar{r}' \times (\bar{v}_f - \dot{\bar{r}}_{gn}) dm \quad (52)$$

$$\begin{aligned} \bar{a}_{gn} = & \dot{\bar{v}}_c + \bar{\omega} \times \bar{v}_c + \dot{\bar{\omega}} \times (\bar{r}_{gn} - \bar{r}_c) + \bar{\omega} \\ & \times (\bar{\omega} \times (\bar{r}_{gn} - \bar{r}_c)) + 2 \bar{\omega} \times (\dot{\bar{r}}_{gn} - \dot{\bar{r}}_c) \\ & + \ddot{\bar{r}}_{gn} - \ddot{\bar{r}}_c \end{aligned} \quad (53)$$

## 5. むすび

質量が変化している飛しょう体について、重心位置変化、機体の横曲げ振動、横スロッシングおよびエンジン運動を考慮した一般動力学運動方程式の基礎式を、系からの流出量を用いて導入した。このさい、実際の機体全体の運動に対して適用容易な表現をとった。一見表現は複雑のように見えるが、(10)式のような速度および加速度の積分を付録 2 に示したような流出量に関係した積分式を用いたので、結果としては(10)式に比し幾分便利な式となっており、実際に適用するのにも特に困難はない。この基礎方程式を用い、若干の簡単化の仮定を設定して、詳細な運動方程式に書下し、当節の初めにのべた諸現象間の相互影響を詳しくしらべるのは次の機会にゆづる。

## 参 考 文 献

- 1) M.V. Barton: The Effects of Variation of Mass on the Dynamic Stability of Jet-propelled missiles, J. Aero. Sci. Vol. 17, No. 4, 1950/4, pp. 197-203.
- 2) 鷲津久一郎: 質量および重心位置が時間と共に変化するロケット航空機の運動方程式, 日本航空学会誌 第 5 巻, 第 43 号, 1957, pp. 7-10
- 3) J.A. Thorpe and R.C. Hatchinson: The Dynamics of Rocket-Powered Vehicles, MIT-IL Report-206, 1959.
- 4) W.T. Thomson: Introduction to Space Dynamics, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1963, pp. 230-235.
- 5) W.T. Thomson and G.S. Reiter: Jet Damping of a Solid Rocket: Theory and Flight Results, AIAA J., Vol. 3, No. 3, 1965, pp. 413-417.
- 6) W.T. Thomson: Equations of Motion for the Variable Mass System, AIAA J., Vol. 4, No. 4, 1966, pp. 766-768.
- 7) R.L. James: A Three Dimensional Trajectory simulation Using Six-Degree-Of-Freedom with Arbitrary Winds, NASA TN D-641, 1961.
- 8) J.R. Harris: A Trajectory Simulation Applicable to Stability and Control Studies of Large Multi-engine Vehicles, NASA TN D-1838, 1963.
- 9) H.C. Lester and D.F. Collins: Determination of Loads on a Flexible Launch Vehicle, NASA TN D-2590, 1965.
- 10) A.L. Greensite: Analysis and Design of Space Vehicle Flight Control Systems, Vol. II - Trajectory Equations, NASA CR-821, 1967.
- 11) S.B. Belknap: A General Transport Rule for Variable Mass Dynamics, AIAA J., Vol. 10, No. 9, 1972, pp. 1137-1138.
- 12) R.L. Bisplinghoff and H. Ashley: Principles of Aeroelasticity, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1962, (i) p. 22, (ii) p. 187, pp. 451-457.
- 13) A.C. Eringen: Mechanics of Continua, John Wiley & Sons, Inc., New York, 1967, p. 75.
- 14) H.N. Abramson: The Dynamic Behavior of Liquid in Moving Containers, NASA SP-106, 1966, pp. 199-223.

## 付 録

## 付録1.

$\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  を直角座標軸方向の単位ベクトルとし, 発散演算子  $\nabla = \bar{i}\partial/\partial x + \bar{j}\partial/\partial y + \bar{k}\partial/\partial z$  を用いて, 発散定理 (例えば文献12) の(i)により,  $\tau$ ,  $\sigma$  を或る空間内の体積とそれを囲む表面,  $\bar{n}_\tau$  を  $\sigma$  の面積要素  $ds$  に垂直で外方向の単位ベクトルとすると, この空間で定義されたテンソル量  $\tilde{T}$  について, 次式を得る。

$$\int_{\tau} \nabla \tilde{T} d\tau = \int_{\sigma} \bar{n}_\tau \cdot \tilde{T} ds \quad (\text{付1.1})$$

$$\int_{\tau} \nabla \cdot (\tilde{T} \times \bar{r}) d\tau = \int_{\sigma} (\bar{n}_\tau \cdot \tilde{T}) \times \bar{r} ds \quad (\text{付1.2})$$

## 付録2.

連続体の運動をオイラーの方法により場の量で表わすと, 連続体の実質部分に付随する任意の量  $\bar{A}$  が, 実質部分の運動と共に変化する割合を  $D/Dt(\bar{A})$  で表わすと,  $\bar{v}$  を物質の速度として, 直角座標系で,

$$D/Dt(\bar{A}) = \partial/\partial t(\bar{A}) + (\bar{v} \cdot \nabla) \bar{A}$$

である。従って,  $\bar{v}_f$ ,  $D^*/Dt(\bar{A})$  をそれぞれ運動座標から見た物質の速度および実質部分の運動と共に変化する  $\bar{A}$  の割合,  $\nabla$  を運動座標系に関する発散演算子とすると次式を得る。

$$D^*/Dt(\bar{A}) = \frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} + (\bar{v}_f \cdot \nabla) \bar{A} \quad (\text{付2.1})$$

$\partial^*/\partial t$  は運動座標系の成分についての時間偏微分である。いま,  $\sigma$  を或る物質系の運動する物質粒子が作る閉曲面,  $\tau$  をその内部体積として, 文献13) より,

$$\frac{D^*}{Dt} \int_{\tau} \bar{A} d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma} \bar{A} (\bar{v}_f \cdot \bar{n}_\tau) ds \quad (\text{付2.2})$$

$$= \int_{\tau} \left[ \frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} + \bar{A} (\nabla \cdot \bar{v}_f) + (\bar{v}_f \cdot \nabla) \bar{A} \right] d\tau \quad (\text{付2.2'})$$

の関係式が得られる。つきに, 考察する物質粒子が作る閉曲面とは限らず, 運動する任意の閉曲面  $\Sigma$  に囲まれた  $T$  体積内の物質系の場合にも同様に<sup>13)</sup>,  $\bar{v}_s$ ,  $\bar{n}_\tau$  を閉曲面  $\Sigma$  の  $ds$  部の運動座標系から見た速度および  $ds$  に垂直な外方向単位ベクトルとして, 次の関係式が得られる。

$$\frac{D^*}{Dt} \int_{\tau} \bar{A} d\tau = \int_{\tau} \frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} d\tau + \int_{\Sigma} \bar{A} (\bar{v}_s \cdot \bar{n}_\tau) ds \quad (\text{付2.3})$$

さて, 以上の関係式を用いて, 本文の記号を用いてロケットの場合に適用する。固体部については境界面  $\sigma_s$  と

$\sigma_{sf}$  は固体部粒子が作る面であるから, 密度を  $\rho_s$  とし連続の式

$$\partial^*/\partial t(\rho_s) + \nabla \cdot (\rho_s \bar{v}_s) = 0$$

と演算子  $\nabla$  を含む関係式

$$\nabla \cdot (\rho_s \bar{v}_s) = \bar{v}_s \cdot (\nabla \rho_s) + \rho_s \nabla \cdot \bar{v}_s$$

$$(\bar{v}_s \cdot \nabla) \rho_s \bar{A} = \bar{A} \{ \bar{v}_s \cdot (\nabla \rho_s) \} + \rho_s (\bar{v}_s \cdot \nabla) \bar{A}$$

とを用いて, (付2.2') 式から,

$$\begin{aligned} \frac{D^*}{Dt} \int_{\tau} \bar{A} dm &= \frac{D^*}{Dt} \int_{\tau} \rho_s \bar{A} d\tau = \int_{\tau} \left[ \rho_s \frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} + \bar{A} \frac{\partial^* \rho_s}{\partial t} \right. \\ &\quad \left. + \rho_s \bar{A} (\nabla \cdot \bar{v}_s) + (\bar{v}_s \cdot \nabla) \rho_s \bar{A} \right] d\tau \\ &\quad + \int_{\tau} \rho_s \left[ \frac{\partial^* \bar{A}}{\partial t} + (\bar{v}_s \cdot \nabla) \bar{A} \right] d\tau = \int_{\tau} \frac{D^* \bar{A}}{Dt} dm \end{aligned} \quad (\text{付2.4})$$

を得る。(付2.4) は  $\bar{A} dm$  の総和の時間微分は,  $D^*/Dt(\bar{A}) dm$  の総和に等しいことを示し, 全く質点運動的な取扱いが出来る。つきに流体部についてはその境界面のうち  $\sigma_{en}$  は, 運動する流体粒子が作る面ではなくて, 固体部が作るエンジン出口断面であることを考えて, (付2.3) 式から,

$$\begin{aligned} \frac{D^*}{Dt} \int_{\tau'} \bar{A} dm &= \int_{\tau'} \frac{\partial^* \rho_s \bar{A}}{\partial t} d\tau + \int_{\sigma_{sf}} \rho_f \bar{A} (\bar{v}_f \cdot \bar{n}_{\tau'}) ds \\ &\quad + \int_{\Sigma_{\sigma_{en}}} \rho_f \bar{A} (\bar{v}_s \cdot \bar{n}_{\tau'}) ds = \int_{\tau'} \frac{\partial^* \rho_f \bar{A}}{\partial t} d\tau \\ &\quad + \int_{\sigma_{sf} + \Sigma_{\sigma_{en}}} \rho_f \bar{A} \cdot (\bar{v}_f \cdot \bar{n}_{\tau'}) ds \\ &\quad - \int_{\Sigma_{\sigma_{en}}} \rho_f \bar{A} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \end{aligned}$$

$\bar{v}_s$  は  $\sigma_{en}$  上の  $ds$  の運動座標系から見た速度で, 上の最後の式の最初の2項の積分を, (付2.2), (付2.2') 式および連続の式を用い (付2.4) 式を導入した方法と同様にして,

$$\frac{D^*}{Dt} \int_{\tau'} \bar{A} dm = \int_{\tau'} \frac{D^* \bar{A}}{Dt} dm - \sum_{\sigma_{en}} \int_{\sigma_{en}} \rho_f \bar{A} [(\bar{v}_f - \bar{v}_s) \cdot \bar{n}_{\tau'}] ds \quad (\text{付2.5})$$

を得る。上式の右辺の第2項の積分は,  $\sigma_{en}$  から単位時間に流出する  $\rho_f \bar{A} ds$  の総和を表わしている。

## 付録3.

慣性モーメントテンソル  $\tilde{I}$  は対称であり,  $\tilde{I} \cdot \bar{\omega} = \int_{\tau+\tau'} \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) dm$  で定義され, その  $xyz$  系に関する成分はマトリックス表示で,

$$[I] = \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}$$

である。ただし、 $I_{xx}$  等は次式で定義される。

$$\begin{aligned} I_{xx} &= \int_{\tau+\tau'} (y^2+z^2) dm, & I_{xy} &= -\int_{\tau+\tau'} xy dm \\ I_{xz} &= -\int_{\tau+\tau'} xz dm, & I_{yx} &= I_{xy} \\ I_{yy} &= \int_{\tau+\tau'} (z^2+x^2) dm, & I_{yz} &= -\int_{\tau+\tau'} yz dm \\ I_{zx} &= I_{xz}, & I_{zy} &= I_{yz} \\ I_{zz} &= \int_{\tau+\tau'} (x^2+y^2) dm \end{aligned}$$

また重心まわりの慣性モーメントテンソル  $\tilde{I}_c$  は  $\tilde{I}_c \cdot \bar{\omega} = \int_{\tau+\tau'} (\bar{r}-\bar{r}_c) \times \{ \bar{\omega} \times (\bar{r}-\bar{r}_c) \} dm$  で定義され成分は同様に次式で定義される。

$$\begin{aligned} I_{cxx} &= \int_{\tau+\tau'} [(y-y_c)^2 + (z-z_c)^2] dm, \\ I_{cxy} &= -\int_{\tau+\tau'} (x-x_c)(y-y_c) dm \\ I_{cxz} &= -\int_{\tau+\tau'} (x-x_c)(z-z_c) dm, & I_{cyx} &= I_{cxy} \\ I_{cyy} &= \int_{\tau+\tau'} [(z-z_c)^2 + (x-x_c)^2] dm, \\ I_{cyz} &= -\int_{\tau+\tau'} (y-y_c)(z-z_c) dm \\ I_{czx} &= I_{cxz}, & I_{czy} &= I_{cyz} \\ I_{czz} &= \int_{\tau+\tau'} [(x-x_c)^2 + (y-y_c)^2] dm \end{aligned}$$

付録 4.

ベクトルの三重積に関する公式

$$\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) + \bar{B} \times (\bar{C} \times \bar{A}) + \bar{C} \times (\bar{A} \times \bar{B}) = 0$$

から、 $\bar{A} \times (\bar{B} \times \bar{C}) = \bar{C} \times (\bar{B} \times \bar{A}) - \bar{B} \times (\bar{C} \times \bar{A})$

従って、

$$\left. \begin{aligned} \bar{v}_s \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) &= \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_s) - \bar{\omega} \times (\bar{r} \times \bar{v}_s) \\ \bar{v}_f \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) &= \bar{r} \times (\bar{\omega} \times \bar{v}_f) - \bar{\omega} \times (\bar{r} \times \bar{v}_f) \end{aligned} \right\} \text{(付 4.1)}$$

付録 5.

文献 12) の(ii) に従い質量不変の弾性体について、

$\bar{r}$  : 物質要素の重心からの位置ベクトル

$\bar{r}_R$  : 弾性変形のないときの重心からの位置ベクトル

$\bar{q}$  : 弾性変形による変位ベクトル

$\bar{q}_0$  : 機体の弾性変形がないときの重心位置点の弾性変形による変位ベクトル

$\tilde{\Gamma}(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma)$ : 弾性変形がないときの重心を固定したたわみ性影響関数テンソル

$-\rho \bar{a} dV$ : 体積素片  $dV$  の物質の慣性力

$\bar{R}$  : 単位質量当りの体積力

$\bar{n}_\nu \cdot \tilde{T} dS$ : 表面  $dS$  に作用する外力

$\bar{\phi}_{\nu 0}$ :  $\nu$  次振動モードにおけるたわみがないときの機体重心点のモード形

以上の記号を用いて同文献の(9-4b)式により、弾性変位は次式で表わすことが出来る。

$$\begin{aligned} \bar{q} - \bar{q}_0 - \frac{1}{2} (\nabla \times \bar{q}_0) \times \bar{r}_R &= \int_V \tilde{\Gamma}(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma) \\ &\quad \cdot (-\rho \bar{a} + \rho \bar{R}) dV_\xi \\ &\quad + \int_S \tilde{\Gamma}(x, y, z; \xi, \eta, \varsigma) \cdot (\bar{n}_\nu \cdot \tilde{T}) dS \end{aligned} \quad \text{(付 5.1)}$$

ただし、 $dV_\xi$  は  $\xi, \eta, \varsigma$  に関係し、 $dV_x$  は  $x, y, z$  に関係する体積積分要素を表わし、 $dS$  は  $\xi, \eta, \varsigma$  に関係する面積積分要素を表わすことにする。つきにまた以下の関係式が成立つ。

$$\left. \begin{aligned} \bar{q} &= \sum_\nu \xi_\nu \bar{\phi}_\nu, \\ \int_V \rho \bar{\phi}_\nu dV_x &= 0 \\ \int_V \bar{r}_R \times \bar{\phi}_\nu \rho dV_x &= 0 \\ \int_V \rho \bar{\phi}_\nu \bar{\phi}_{\nu'} dV_x &= 0 \quad \text{for } \nu \neq \nu' \\ &= m_\nu \quad \text{for } \nu = \nu' \end{aligned} \right\} \text{(付 5.2)}$$

また同文献の(9-11)式から自由振動モードに対して次式が成立つ。

$$\bar{\phi}_\nu - \bar{\phi}_{\nu 0} - \frac{1}{2} (\nabla \times \bar{\phi}_{\nu 0}) \times \bar{r}_R = \omega_\nu^2 \int_V \tilde{\Gamma} \cdot \bar{\phi}_\nu \rho dV_\xi \quad \text{(付 5.3)}$$

ここで(付 5.1)式の両辺に  $\bar{\phi}_\nu \rho$  を乗じて全体積についての積分を考える。(付 5.1)式の左辺は、

$$\sum_\nu \xi_\nu \left[ \bar{\phi}_\nu - \bar{\phi}_{\nu 0} - \frac{1}{2} (\nabla \times \bar{\phi}_{\nu 0}) \times \bar{r}_R \right]$$

であるので、 $\bar{\phi}_\nu \rho$  を乗じた体積積分は(付 5.2)を用いて  $m_\nu \xi_\nu$  となる。(付 5.1)式の右辺に  $\bar{\phi}_\nu \rho$  を乗じた積分は  $\tilde{\Gamma}$  が対称テンソルであるので、

$$\bar{\phi}_\nu \cdot (\tilde{\Gamma} \cdot \bar{a}) = \bar{a} \cdot (\tilde{\Gamma} \cdot \bar{\phi}_\nu) \quad \text{(付 5.4)}$$

が成立ち、この関係式と(付 5.3)式を用いて、

$$\begin{aligned} &\int_V (-\rho \bar{a} + \rho \bar{R}) \cdot \left[ \int_V \tilde{\Gamma} \cdot \bar{\phi}_\nu \rho dV_x \right] dV_\xi \\ &\quad + \int_S (\bar{n}_\nu \cdot \tilde{T}) \cdot \left[ \int_V \tilde{\Gamma} \cdot \bar{\phi}_\nu \rho dV_x \right] dS \\ &= \frac{1}{\omega_\nu^2} \int_V \left[ \bar{\phi}_\nu - \bar{\phi}_{\nu 0} - \frac{1}{2} (\nabla \times \bar{\phi}_{\nu 0}) \times \bar{r}_R \right] \\ &\quad \cdot (-\rho \bar{a} + \rho \bar{R}) dV_\xi \\ &= \frac{1}{\omega_\nu^2} \int_S \left[ \bar{\phi}_\nu - \bar{\phi}_{\nu 0} - \frac{1}{2} (\nabla \times \bar{\phi}_{\nu 0}) \times \bar{r}_R \right] \\ &\quad \cdot (\bar{n}_\nu \cdot \tilde{T}) dS \end{aligned}$$

となるが、 $\bar{\phi}_{\nu 0}$  および  $(\nabla \times \bar{\phi}_{\nu 0}) \times \bar{r}_R$  が関係する積分は、本分の(1)式の両辺そのものの積分および両辺に  $\bar{r}_R$  を乗じた積分式となっており消去されるので、結局上式は

$$\frac{1}{\omega_\nu^2} \left[ \int_V (-\rho \bar{a} + \rho \bar{R}) \cdot \bar{\phi}_\nu dV_\xi + \int_S (\bar{n}_\nu \cdot \tilde{T}) \cdot \bar{\phi}_\nu dS \right]$$

となるので、振動方程式は一般に次式のようになる。

$$m_\nu \omega_\nu^2 \xi_\nu = \int_V (-\rho \bar{a} + \rho \bar{R}) \cdot \bar{\phi}_\nu dV + \int_S (\bar{n}_\nu \cdot \tilde{T}) \cdot \bar{\phi}_\nu dS$$

(付5.5)

---

## 航空宇宙技術研究所報告 377号

昭和49年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)千182

印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)

---

