UDC 512.8:
629.7:
62-503.5

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-381

安定度調整可能な 最適Reduced Order Observerの設計法

川 幡 長 勝

1974年8月

航 空 宇 宙 技 術 研 究 所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

安定度調整可能な
最適 Reduced Order Observer の設計法*

川　幡　長　勝**

A Design Method of Optimal Reduced Order Observer with Adjustable Stability

By Nagakatsu KAWAHATA

ABSTRACT

In the standard observer theory, a lot of design parameters of observer is left open for system designer's selection, so that he may be able to assign the observer an arbitary set of observer poles. It is, however, not so easy for the designer to specify all the observer poles, especially when the dimension of observer is large.

Considered is a design method of observer that is used for implementing linear-quadratic optimal control systems. It is well known that the state estimation error due to an observer in the feedback channel generally incurs an increase of quadratic cost function compared to the case of complete state feedback loop. Rom & Sarachik attempted to design an optimal reduced order observer so as to minimize the cost increase. They started with the observability canonical form of plant dynamics to find a minimal set of independent observer design parameters.

The first objective of this paper is to show that a constructive way of deriving the observer as in Kwakernaak & Sivan's book easily provides a minimal set of independent observer design parameters without transforming the plant dynamics to an observability canonical form. Then, provided is a method of design for an optimal reduced order observer to minimize the cost increase with respect to so identified minimal set of independent observer design parameters. The resulting optimal observer would be the same as that obtained by Rom & Sarachik's approach.

The optimal reduced order observer obtained by the method either of this paper or of the Rom & Sarachik's may have a strong plant-observer dynamic coupling because of the so-called Separation Theorem. Hence, the resulting closed loop system dynamics might largely differ from the dynamics of optimal system with the complete state feedback (the system to be implemented).

The main objective of this paper is to let the optimal reduced order observer have a guaranteed stability so that the dynamics of the optimal system to be implemented is not altered by the insertion of the observer in the feed-back channel. A newly introduced scalar prameter β to adjust the observer stability plays the role of trade-off between the minimum cost increase and the essential bandwidth of the observer. Every other observer design parameter can be determined as a function of the scalar parameter β. It is practically not so difficult to determine a single scalar parameter β.

---

* 昭和49年6月4日　受付
** 新型航空機研究グループ

第 1 章　まえがき

Linear-Quadratic な最適制御系の問題は広く研究され，従来の根軌跡法や周波数領域法等によっては困難と思われるような複雑で巨大な系についても有効で組織的な設計方法が提供された。結果として得られる最適制御はプラントの状態量フィードバック形になることは良く知られている。しかしながら，フィードバックに必要なプラント状態量のすべてを直接計測する事は一般に極めて困難であり，ごく限られた数の出力のみが測れるにすぎない。従って，Linear-Quadratic 最適制御系をそのまま実現する事は困難である。

そこで，数の限られた計測可能な出力のみを直接フィードバックして擬似最適制御系を構成しようとする考えが生まれる。しかし，このような制御は必ずしも閉ループ系を安定化するとは限らず，結局何らかの補償器 (compensator) が必要になる。

また，計測可能な出力から，すべての状態量を再構成 (state-reconstruction) し，その推定状態量をフィードバックして Linear-Quadratic 最適制御系を実現しようとする考えもある。良く知られた Kalman filter は，ノイズ (plant noise) を伴うプラントの状態量を，ノイズ (observation noise) を伴う観測データから推定するものである。Kalman filter の設計には，それぞれのノイズの確率的性質 (means and covariances) が既知でなければならない。系を設計する前に，あらかじめノイズの確率的性質を精度よく推定することは極めて困難なことが多い。また，Kalman filter は一般にプラントと同じ次数を持ち，先に述べた補償器の次数よりもはるかに高く，複雑高価なことが多い。

本論文では，Stochastic な場合は取り扱わず，より基礎的で実際的と思われるプラントも測定も deterministic な場合のみを考える。

Luenberger Observer は，系が deterministic な時，出力から漸近的に全状態量を構成する線形 state reconstructor として良く知られている。また，補償器を一般化すると Luenberger observer と全く同じ構造になることを示すのは易しい。従って，Linear-Quadratic 最適制御系を実現する鍵は，フィードバック回路に observer を挿入してプラントの出力から状態量を推定することであると言って良い。

Observer 理論は過去 10 年間に種々の面で精力的に研究されてきた。しかしながら，時間がたつにつれて，observer 出力が漸近的に正しい状態量を推定すると言うことからは observer を一意に決定することはできず，多くの設計パラメータに任意性が残されている。設計パラメータの任意性が原因で，observer の特性根を任意に指定することができ，ダイナミクスを適当に調整できる利点があると言われる。しかしながら，observer の次数が高い時，すべての特性根を指定することは実際上困難なことが多く，通常の observer 理論におけるパラメータの任意性は一見便利なようでありながら，制御系設計者を悩ますことになる。従って，これらの設計パラメータの決定法か，あるいは，observer 特性根の決定法が与えられない限り，observer を実際問題に応用するのは難しい。

本論文では，Linear-Ouadratic最適レギュレータ ($L-Q$最適レギュレータ) の実現を目的として，フィードバック回路に挿入される observer を取り扱う。Observer の特性根を指定する代りに，実現される閉ループ系の最適性 (最適性は 2 乗平均誤差及び動的応答特性から判定される) を考慮して，多数の未知設計パラメータに関する任意性を取り除き，唯一ケの安定度調整パラメータにまで縮少する。その結果，安定度調整可能な最適 reduced order observer の設計法が得られるであろう。

Observer をフィードバック回路に組み込んで実現される系では，observer の出力である推定状態量が誤差を伴うため，$L-Q$最適レギュレータ設計に使用される 2 次形式評価関数の値が，完全状態量フィードバックを持つ理想系の場合に較べて，増加する。observer の特性根をラプラス平面の左遠方に移して，observer の応答を早くすればする程，推定誤差の収束が早くなって 2 次形式評価関数の増加 (コスト増) が少くなると思われ勝ちであるが，一般には，評価関数が際限もなく増加を続けることが Bongiorno & Youla によって証明された。[1),2)] 一方，observer の特性根をラプラス平面の虚軸に近づければ，推定誤差ダイナミクスの漸近安定性が失われ，誤差がいつまでも残り，評価関数が増加することは明白である。このような評価関数の性質を基にして，Newmann[5),7)] は，閉ループ系のコスト増が最小になるように observer の未知パラメータを決定すべく，それらの満足すべき必要条件を求めた。しかしながら，未知パラメータの間に implicit な関数関係があることを見逃したため，条件式が redundant になった。また，フィードバック回路に彼の意味での“最適” observer を挿入した系では，レギュレータの最適ゲインが $L-Q$最適レギュレータ理論によって得られる理想系のレギュレータ　ゲインとは異なり，Separation Theorem が成立しないと結論した。しかし，Rom & Sarachik[8),9)] は，Newmann

の結論が誤りであることを指摘し，Separation Theoremが成り立つことを示した。また，Rom & Sarachikは，相似な補償器（compensator）のclassが同じコストを生ずることから，observability canonical form を使って未知設計パラメータの最小集合を作り出し，Newmannの条件に表われるようなredundancyを取り除いた。

多くの論文及び著書では，reduced order observerの条件を公理的に導くことが多い。本論文では，Kwakernaak & Sivanの著書[10]に見られるような逐次積重ね（constructive way）によって，observerを構成する。その結果，Rom & Sarachikのように，プラントのダイナミクスをcanonical formに変換しなくても，状態量（ベクトル）の要素の順序を入れ替えるだけで，独立な未知設計パラメータからなる最小の集合を容易に把握できることを示す。この最小の未知パラメータ集合に関して2次形式評価関数の増加を最小にする条件を求める。結果的に，Newmannの結論を否定し，Rom & Sarachikの結論を支持することになる。

本来，observerは完全状態量フィードバックの理想的制御系を実現するために使用されるものであって，系全体の評価関数，あるいは，動的応答特性を改善するためではない。完全状態量フィードバックの理想系（最適系）は，単に2次形式評価関数（コスト）が最小と言うことで最適であるばかりではなく，その閉ループ動特性もまた工学的見地から最適なものであると解釈される。従って，observer挿入によって，理想系の動特性が余り影響されないことが好ましい。

本論文の方法によれば，Separation Theoremが成立し，レギュレータ設計と無関係に，プラントの開ループ特性と出力特性のみによって，最適 reduced order observerが一意的に設計される。この場合，コスト増のみが主たる考慮対象となり，動的応答特性が考慮されていないため，実現目標である理想系の閉ループダイナミクスとobserverダイナミクスが強い干渉を持つ可能性がある。即ち，実現される系の動特性が実現目標である理想系のそれとは可成り異ったものになる場合がある。実際，2次系による簡単な例題によって，この事実を示す。このような場合には，実現目標である系（完全状態量フィードバックの理想系）はコスト最小と言う点だけでなく，工学的見地から見てダイナミクスもまた最適になっていると言うことを考えれば，コスト増が多少増加すると言う犠牲を払っても，observerダイナミクスが理想系の閉ループダイナミクスに影響を及ぼさないように工夫すべきであろう。

本論文では，2次形式評価関数（コスト）の増分を積分形で表わし，その被積分関数に指数関数の重み：$\varepsilon^{\beta t}$（$\beta \geq 0$）を与えた“擬似コスト増”とでも言うべきものを考える。そして，任意パラメータβを調整することによって，被積分関数の収束速度を調整できるようにする（$\beta = 0$なら，本来のコスト増と一致する）。この擬似コスト増を最小にするようなobserverの構成を試みる。結局，observerの設計パラメータは，新らたに導入したパラメータβの関数として，一意的に決定される。また，βを調整することによって，observerの安定度すなわち周波数バンド幅が自由に調整される。実際の設計においては，βに関するobserver特性根の軌跡を求め，理想系の閉ループ特性根との関係，存在するであろうノイズの周波数バンド幅をも考慮してobserverの安定度あるいは周波数バンド幅が適当になるように，工学的見地からβを決定することになる。observer次数が高く，未知設計パラメータが多くても，唯一つの安定度調整パラメータβによって，2次形式コスト増と，plant-observer dynanamic couplingの間の妥協を計れることは，実際のobserver設計に当って極めて便利であろう。

本論文は，次のように構成されている。第2章は，observerと言う“もの”を紹介し，最適observerの設計法確立と言う本論文の主題を具体的に提示するのが主目的である。observerが何故制御系実現のために必要であるかを説明し，Kwakernaak & Sivanの著書に於けるような逐次積重ね（constructive way）によってreduced order observerを構成する。そして，observerを設計するための本質的に独立な未知パラメータは何であるかを明らかにする。第3章では，最適reduced order observer設計法に入る前の準備である。observerをフィードバック回路に組み込んだ場合，実現される制御系の2次形式評価関数はどのようになるか，また，その閉ループ動特性はどのように表わされるかを調べる。第4章では，第3章の結果に基づき，実現される系全体の2次形式評価関数を最小にするようなレギュレータのゲイン，及び，observer設計パラメータが満すべき条件を求める。その結果，Separation Theoremが成立して，レギュレータのゲインは完全状態量フィードバックの理想系のゲインと同じで良いこと，また，最適reduced order observerがプラントの開ループ特性のみから一意的に設計されてレギュレータとは無関係であることを示す。しかしながら，コスト増のみを考慮してobserverを設計するため，出来上るobserverと実現目標である理想系が強いdynamic couplingを持つ可能性が

ある。多少のコスト増を犠牲にしても observer ダイナミクスが，実現目標である理想系のダイナミクスに影響しないことが好ましい場合も多い。そこで，第5章では，安定度（結果的には周波数バンド幅に対応する概念）を自由に調整できる最適 reduced order observer の設計法を述べる。 observer の次数が高い時でも，唯一つの安定度調整パラメータを導入することによって，第4章の方法で得られる最適 reduced order observer の欠点を補うような observer 設計法を得ることができる。第6章はまとめである。いくつかの基本的事項の証明は，便宜上，附録に収められている。

第2章　Reduced Order Observer

初めに，制御系との関連に於いて，何故 observer が必要であるか説明する。次いで，最も簡単な full order observer の構造を簡単に記述する。full order observer の構造を基に，本論文の主題である reduced order observer を逐次積重ね（constructive way）によって構成する。この過程で， observer を左右する本質的設計パラメータが明らかになるであろう。

§ 2.1　Observer の必要性

次の様な微分方程式で記述されるプラントが与えられたとする。

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)\ ;\ x(t_0)=x_0 \tag{2.1}$$

$$y(t)=Cx(t) \tag{2.2}$$

ここに，$x(t)$ は n 次元状態ベクトル；$u(t)$は r 次元制御ベクトル；$y(t)$ は m 次元出力ベクトル；$A,\ B,\ C$ は適当な行と列を持つ定係数マトリクスであり，rank $[C]=m$.

上記のプラントを制御する最適レギュレータを設計するに当り，次の2次形式評価関数が最小になるようにする（linear－quadratic optimal regulator design）。

$$J=\int_0^\infty [x^T(t)Qx(t)+u^T(t)Ru(t)]dt \tag{2.3}$$

こゝに，$(\cdot)^T$ は転置を意味する。

良く知られているように，最適制御法則は次のような状態量フィードバックの線形制御となる。[10),11)]

$$u(t)=-R^{-1}B^TP_{11}x(t)\equiv -L^*x(t) \tag{2.4}$$

こゝに，P_{11} は次の代数的マトリクス Riccati の式

$$P_{11}A+A^TP_{11}-P_{11}BR^{-1}B^TP_{11}+Q=O_{n\times n} \tag{2.5}$$

を満す正定（positive definite）な解である。

上記の様に得られる系のブロック図を図－1に示す。この系を実現するには，プラントのすべての状態量 $x(t)$ を知ってフィードバックせねばならない。現実には，状態量 $x(t)$ のすべての要素（n ケ）を計測する事は一般に難しく，m ケの出力（$y(t)$の要素）のみが測れるのが普通である。従って，実際には図－2のブロック図に示された如く，フィードバック回路に，ある種の estimator を挿入して出力 $y(t)$ から状態量 $x(t)$ の推定 $\hat{x}(t)$ を作らねばならない。しかしながら，推定 $\hat{x}(t)$ が必ずしも $x(t)$ に一様に一致するとは限らないから，コントローラ・ゲイン L は必ずしも(2.4)式で与えられるような内容と一致するのが良いと即断できないことを注意しておく。この様に，直接計測可能な出力 $y(t)$ から状態量 $x(t)$ の推定を作り出して，最適線形制御系を近似的に実現するために，フィードバック回路に挿入される estimator が observer である（stochastic な問題の estimator は Kalman filter として知られている）。

§ 2.2　Full Order Observer

本論文での考察対象である reduced order observer の誘導を助けるため，full order observer の構造について あらかじめ調べておく。(2.1) (2.2) のようなプラントが与えられて(2.2)式の出力 $y(t)$ から推定状態量 $\hat{x}(t)$ を作り出す estimator として，次のような n 次の系を考える。

$$\begin{aligned}\dot{\hat{x}}(t)&=A\hat{x}(t)+Bu(t)+K[y(t)-C\hat{x}(t)]\\ \hat{x}(t_0)&=\hat{x}_0\end{aligned} \tag{2.6}$$

こゝに，Kは $n\times m$ 定マトリクス。

即ち，(2.6)式の左辺及び右辺の初めの2項までは，まさにプラント(2.1)式のモデルであり，最後の$K[y(t)-C\hat{x}(t)]$ は $x(t)$ と $\hat{x}(t)$ の不一致に依存する訂正項である。明らかに，もし $\hat{x}(t)\equiv x(t)$ なら (2.6)式は (2.1)式と完全に一致する。

状態量の推定誤差 $e(t)$ を次のように定義すれば，

$$e(t)\triangleq x(t)-\hat{x}(t) \tag{2.7}$$

(2.1) 及び (2.6)式から，次の推定誤差に関するダイナミックスを得る。

$$\dot{e}(t)=[A-KC]e(t)\ ;\ e(t_0)=x_0-\hat{x}_0 \tag{2.8}$$

従って，マトリクス $[A-KC]$ の固有値がすべて負の実数部を持つように（これを $Re\{\lambda_i(A-KC)\}<0$: for all i と書く）マトリクス K を選ぶことができれば，初期値 $e(t_0)$ にかかわらず $e(t)$ は漸近的に零に収束する。

$$\lim_{t\to\infty} e(t)=O_n \quad \text{for any } e(t_0) \tag{2.9}$$

即ち，そのように選んだマトリクス K に対して，(2.6)式の解 $\hat{x}(t)$ はプラントの真の状態量 $x(t)$ を推定する。

問題は，マトリクス $[A-KC]$ のすべての固有値の実数部を負にするようなマトリクス K が存在するか否かである。幸い，$\{A,\ C\}$ が observable pair，即ち

$$\begin{aligned}\text{rank}[C^T \vdots A^TC^T \vdots (A^T)^2C^T \vdots \cdots\cdots \vdots (A^T)^{n-1}C]\\ =n\end{aligned} \tag{2.10}$$

であれば，〔$A-KC$〕を安定化するマトリクスKの存在することが証明されている。[12),13)] 特に，(2.10)式が満足される限り，〔$A-KC$〕の固有値のすべてを任意に指定された値にするようなKが一意に存在する事がW.M. Wonhamによって証明されている。[12)]

(2.6)式の系は次数がnであり，full order observerと言われる。その構造は，stochasticな場合のestimatorであるKalman filterと全く同じである事を注意しておく。但し，Kalman filterの場合は，ゲイン・マトリクスKはプラントのstate covariance matrixと観測（或いは計測）のnoise intensity matrix[*]に依存して一意に決定される。一方，上のような確定系のobserverにおいては，ゲインKはマトリクス〔$A-KC$〕を安定化する限り任意であり，定っていない。

§ 2.3　Reduced Order Observer

前節(2.6)式のように$x(t)$のすべてを直接推定するfull order observerの実現には，プラントの次数と同じnケの積分器が必要である。本節では，前節の"full order observer"の構造を参考にして，次数がnより低い"reduced order observer"と言われるdeterministic estimatorを構成する。通常のobserver理論では，極めて公理的にobserverを誘導する場合が多いけれども，本節では，何が設計上の任意パラメータとして残されているかを明確にする為，文献10)に見られるような段階的積重ねによってreduced order observerを誘導する。

(2.2)式の$m\times n$マトリクスC及びm次元出力ベクトル$y(t)$は既知であり，(2.2)式は$x(t)$に関するmケの線形独立な情報である。従って，線形代数方程式を解い

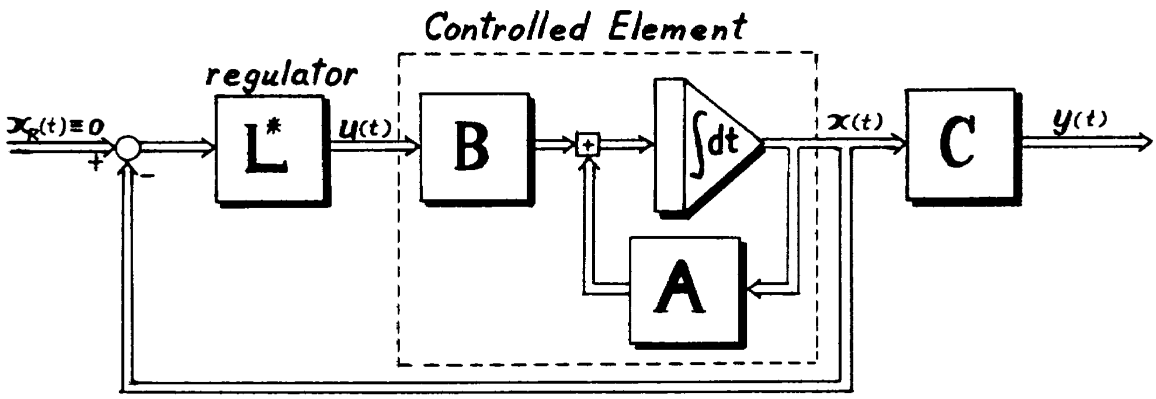

図1.　完全状態量フィードバックの理想系

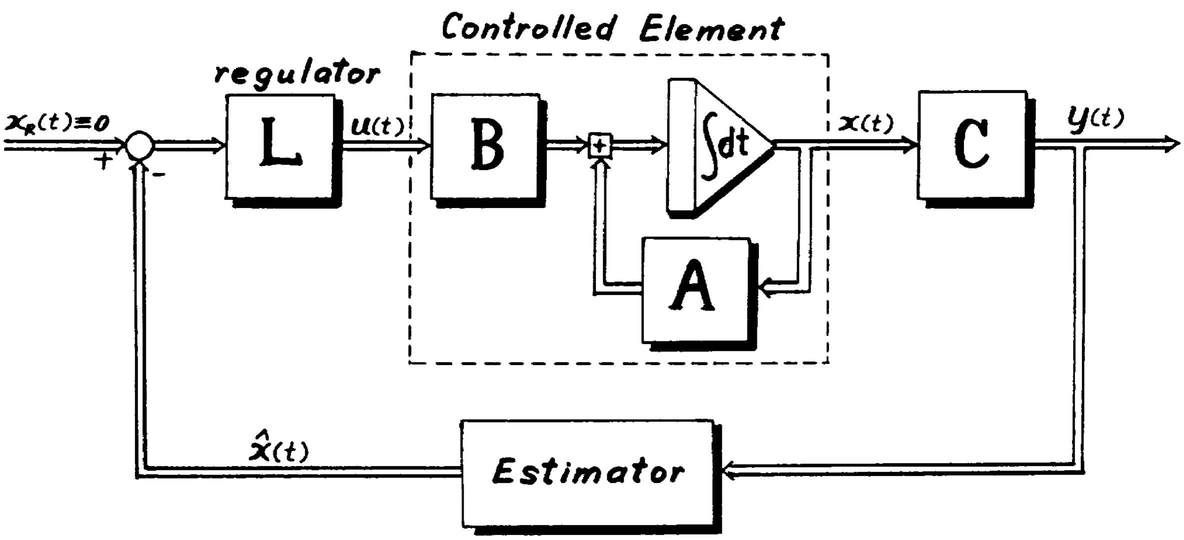

図2.　Estimatorを含む実現系

---

* 観測ノイズは普通Gaussian, white, zero meanと仮定される。そのcovarianceは，例えば，$\mathrm{Cov}\{v(t):v(\tau)\}=V\delta(t-\tau)$と表現される。この時，マトリクス$V$をintensity matrixと呼ぶ。

て状態量$x(t)$を一意的に定めるには，$x(t)$に関する更に$n-m$ケの線形独立な情報が不足している。
今，$(n-m)\times n$マトリクスC'を

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ C' \end{bmatrix}=n \quad 即ち \quad \begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ C' \end{bmatrix}=\mathrm{nonsingular} \qquad (2.11)$$

の如く選んで，(2.2)式に，次のような$n-m$ケの線形独立な情報を補充したとする。

$$p(t)=C'x(t) \qquad (2.12)$$

こゝに$p(t)$は$n-m$次元ベクトル
(2.11)式から$n\times n$マトリクス$[C^T \vdots C'^T]$の逆マトリクスが存在するから，(2.2)及び(2.12)から$x(t)$は次のように解ける。

$$x(t)=\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ C' \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} y(t) \\ \cdots \\ p(t) \end{bmatrix}=L_1 y(t)+L_2 p(t) \qquad (2.13)$$

こゝに，L_1及びL_2はそれぞれ$n\times m$及び$n\times(n-m)$の定マトリクスで次式によって定義される。

$$[L_1 \vdots L_2] \triangleq \begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ C' \end{bmatrix}^{-1} \qquad (2.14)$$

従って

$$\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ C' \end{bmatrix}[L_1 \vdots L_2] \equiv \begin{bmatrix} CL_1 & \vdots & CL_2 \\ \cdots & & \cdots \\ C'L_1 & \vdots & C'L_2 \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} I_m & \vdots & O_{m\times(n-m)} \\ \cdots & & \cdots \\ O_{(n-m)\times m} & \vdots & I_{n-m} \end{bmatrix} \qquad (2.15)$$

$$\text{から}\quad \left.\begin{array}{ll} CL_1=I_m, & CL_2=O_{m\times(n-m)} \\ C'L_1=O_{(n-m)\times m}, & C'L_2=I_{n-m} \end{array}\right\} \qquad (2.16)$$

また，nonsingularityによって

$$[L_1 \vdots L_2]\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ C' \end{bmatrix} \equiv L_1 C+L_2 C'=I_n \qquad (2.17)$$

なる関係が導かれる。

もし，(2.11)式を満すC'に対して，(2.12)式の左辺にある補助ベクトル$p(t)$が推定できたとして，これを$\hat{p}(t)$とすれば，(2.13)式から状態量$x(t)$の推定$\hat{x}(t)$は次のごとく得られる。

$$\hat{x}(t)=L_1 y(t)+L_2\hat{p}(t) \qquad (2.18)$$

従って，n次元の$x(t)$の推定$\hat{x}(t)$を求める問題は，(2.11)式を満すC'に対して，$n-m$次元の$p(t)$の推定$\hat{p}(t)$を作り出すことに等しい。

(2.12)式から$p(t)$は$x(t)$の関数であって，$x(t)$同様ある微分方程式に従う。(2.12)式を微分して(2.1)式を代入すれば，

$$\dot{p}(t)=C'\dot{x}(t)=C'Ax(t)+C'Bu(t)$$

更に，(2.13)式を代入して

$$\dot{p}(t)=C'AL_2 p(t)+C'AL_1 y(t)+C'Bu(t) \qquad (2.19)$$

を得る。即ち，当面の課題は，(2.19)式を満す$n-m$次元補助ベクトル$p(t)$の推定$\hat{p}(t)$を作り出す事である。

仮りに前節(2.6)式の full order observerの構造を参考にして，(2.19)式の$p(t)$を$\hat{p}(t)$で置き換えたモデルを考え，$\hat{p}(t)$と$p(t)$の誤差を修正する項$K[y(t)-C\hat{x}(t)]$を加えて，つまり

$$\dot{\hat{p}}(t)=C'AL_2\hat{p}(t)+C'AL_1 y(t)+C'Bu(t)$$
$$+K[y(t)-C\hat{x}(t)]$$

として，$p(t)$のestimatorを構成しようとしても成功しない。何故なら，(2.18)によって

$$y(t)-C\hat{x}(t)=y(t)-CL_1 y(t)-CL_2\hat{p}(t)$$

となり，(2.16)を使えば$CL_1=I_m$，$CL_2=O_{m\times(n-m)}$であるから

$$y(t)-C\hat{x}(t)=y(t)-y(t)\equiv O_m \qquad (2.20)$$

明らかに，$y(t)$は$p(t)$に関する何の情報も提供しない。$p(t)$に関する情報は$y(t)$を微分することによって取り出せる。

$$\dot{y}(t)=CAx(t)+CBu(t)$$

(2.13)式を使って

$$\dot{y}(t)=CAL_1 y(t)+CAL_2 p(t)+CBu(t) \qquad (2.21)$$

を得る。この$\dot{y}(t)$を(2.19)式で与えられる$p(t)$に関する系の出力或いは測定と考える。そうすれば，$p(t)$を推定する$n-m$次元の full order observer が，前節(2.6)式を参照して，次の如く得られる。

$$\dot{\hat{p}}(t)=C'AL_2\hat{p}(t)+C'AL_1 y(t)+C'Bu(t)$$
$$+K(\dot{y}(t)-CAL_1 y(t)-CAL_2\hat{p}(t)-CBu(t))$$
$$\therefore\ \dot{\hat{p}}(t)=(C'-KC)AL_2\hat{p}(t)+K\dot{y}(t)+(C'-KC)AL_1 y(t)$$
$$+(C'-KC)Bu(t) \qquad (2.22)$$

こゝに，Kは$(n-m)\times m$のゲイン・マトリクスである。

上に導いた$n-m$次元のobserverを実現するには，$y(t)$の微分$\dot{y}(t)$を計算せねばならない。しかしながら，新たに$n-m$次元ベクトル$z(t)$を

$$z(t)\triangleq\hat{p}(t)-Ky(t) \qquad (2.23)$$

の様に定義し，(2.22)及び(2.18)式から$\hat{p}(t)$と$\dot{y}(t)$を消去すれば，

$$\left.\begin{array}{l} \dot{z}(t)=(C'-KC)AL_2 z(t)+(C'-KC)A(L_1+L_2K)y(t) \\ \qquad +(C'-KC)Bu(t) \\ z(t_0)=z_0 \end{array}\right\} \qquad (2.24)$$

$$\hat{x}(t)=(L_1+L_2K)y(t)+L_2 z(t) \qquad (2.25)$$

の如く$z(t)$に関する系が構成され，その出力が$\hat{x}(t)$である。この様に，補助ベクトル$p(t)$を仲介して(2.24)及び(2.25)で表わされる$n-m$次元の reduced order observer を構成することができた。マトリクスC'を選べばL_1及びL_2は決るから，上の observer における任意なパラメータはマトリクスC'及びKであることを注意しておく。

$y(t)$及び$u(t)$を知って，(2.24)式をある初期値z_0で

解いた時，出力$\hat{x}(t)$が実際(2.1)式で与えられるプラントの状態量$x(t)$の漸近的推定になる条件を調べる。(2.1)式に前からマトリクス($C'-KC$)を掛け，(2.24)式との差を作る。更に，次式で表わされる誤差ベクトル$\tilde{e}(t)$

$$\tilde{e}(t) \triangleq z(t)-(C'-KC)x(t) \tag{2.26}$$

を定義し，これと(2.2)式を使って$z(t)$を消去すると

$$\dot{\tilde{e}}(t)=(C'-KC)AL_2\tilde{e}(t)+(C'-KC)A[L_2C'-L_2KC-I_n+L_1C+L_2KC]x(t)$$

となり，(2.17)の関係を使えば次のごとく簡単になる。

$$\dot{\tilde{e}}(t)=(C'-KC)AL_2\tilde{e}(t)\;;\;\tilde{e}(0)=z_0-(C'-KC)x_0 \tag{2.27}$$

また，(2.25)の推定$\hat{x}(t)$は$\tilde{e}(t)$を使って

$$\hat{x}(t)=x(t)+L_2\tilde{e}(t) \tag{2.28}$$

と表わされる。従って，マトリクス($C'-KC$)AL_2のすべての固有値の実数部が負

$$Re\{\lambda_i[(C'-KC)AL_2]\}<0,\quad i=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ n-m, \tag{2.29}$$

であれば，(2.27)式から$\tilde{e}(t)$は初期値にかかわらず収束する。

$$\lim_{t\to\infty}\tilde{e}(t)=O_{n-m}\quad \text{for any } \tilde{e}(t_0) \tag{2.30}$$

この時，(2.28)式によって

$$\lim_{t\to\infty}\hat{x}(t)=x(t) \tag{2.31}$$

故に，(2.24)及び(2.25)式で与えられる系の出力$\hat{x}(t)$が，初期値z_0と無関係に(即ち，$\tilde{e}(t_0)$と無関係に)，プラントの状態量$x(t)$の漸近的推定であるためには，マトリクス($C'-KC$)AL_2のすべての固有値が負の実数部を持つ事である。次に起る当然の疑問はobserverの任意パラメータであるC'及びKを適当に選んでマトリクス($C'-KC$)AL_2を安定化(固有値の実数部を負に)することが可能か否かである。W. M. Wonhamによって示された定理[12]から，full order observerの場合と同じように，$\{C'AL_2,\ CAL_2\}$がobservable pairであれば($C'-KC$)AL_2に任意の固有値を持たせるようなゲイン・マトリクスKが存在する。従って，($C'-KC$)AL_2を安定化するKが必ずある。実際$\{A,\ C\}$がobservable pairである時，$\{C'AL_2,\ CAL_2\}$もまたobservable pairである事が示される(附録の定理A－I参照)。

従って，($C'-KC$)AL_2のすべての固有値が負の実数部を持つようなゲイン・マトリクスKが存在し，(2.24)及び(2.25)式で構成されるreduced order observer ($n-m$次元)の出力$\hat{x}(t)$は，observerの初期値z_0と無関係に，(2.1)式で与えられたプラントの状態量$x(t)$を漸近的に推定する。

§2.4 議　論

前節で導かれたobserverが，通常のobserver理論で公理的に導かれるobserverと全く同一である事を示し，次にobserver実現に関する問題点を指摘する。

次の様なマトリクスT，M，Nを定義する。

$$T\triangleq C'-KC\quad;\quad (n-m)\times n \tag{2.32}$$

$$M\triangleq L_1+L_2K\quad;\quad n\times m \tag{2.33}$$

$$N\triangleq L_2\quad;\quad n\times(n-m) \tag{2.34}$$

更に，マトリクスF，G及びHを

$$F\triangleq TAN,\quad G\triangleq TAM,\quad H\triangleq TB \tag{2.35}$$

とすれば，(2.24)及び(2.25)式は次の様に書ける。

$$\dot{z}(t)=Fz(t)+Gy(t)+Hu(t)\;;\;z(t_0)=z_0 \tag{2.36}$$

$$\hat{x}(t)=My(t)+Nz(t) \tag{2.37}$$

通常のobserver理論では，observerを(2.36)及び(2.37)のように表現し，マトリクスF，G，H，T，M及びNが満すべき条件が述べられる。(2.32)，(2.33)及び(2.17)式から，

$$NT=L_2C'-L_2KC=I_n-L_1C-L_2KC$$
$$=I_n-MC$$

$$\therefore MC+NT=I_n \tag{2.38}$$

従って，

$$\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ T \end{bmatrix}=\text{nonsingular} \tag{2.39}$$

また，(2.32)及び(2.35)式より

$$FT=TANT=TA(I_n-MC)=TA-TAMC$$
$$=TA-GC$$

$$\therefore TA-FT=GC \tag{2.40}$$

この様に，通常のobserver理論で良く見られる条件，即ち，

$$\left.\begin{aligned} &TA-FT=GC \\ &H=TB \\ &MC+NT=I_n\;;\;\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ T \end{bmatrix}=\text{nonsiugular} \end{aligned}\right\} \tag{2.41}$$

が容易に得られ，前節で得られたobserverは通常のobserver理論におけるものと全く同一である。前節におけるように，observerを段階的積重ねによって誘導する事の利点は，マトリクスC'及びKが本質的な設計パラメータである事を明確にできる点である。

Stochasticな系におけるobserverはKalman filterであり，プラント及び観測に含まれるノイズの統計的性質から最適なfilterが一意的に決定される。しかしながら，実際問題では，そのような統計的性質を設計の初期段階で知り得る事は少く，本論文で扱うようにdeterministicな系として取り扱う事が多い。Observerを実際に設計するには，(2.11)式を満すように適当な$(n-m)\times n$マトリクスC'を選び，$(n-m)\times(n-m)$マトリク

ス$(C'-KC)AL_2$のすべての固有値が負の実数部を持つように$(n-m)\times m$マトリクスK(observer gain)を選ばねばならない。実際，本論文附録の証明及びW. M. Wonhamが証明した定理[12]から明らかなように，マトリクス$(C'-KC)AL_2$の固有値を適当に指定して，ゲインKを決定する事ができる。しかしながら，固有値のすべてを指定する事は，実際上極めて困難であり，結局ゲインKを決定する事は非常に難しい。

本論文は，observer が最適線形フィードバック系実現のために使用されるものとして，実用的見地から，設計パラメータC'及びKを選ぶ方法を提供する。この様な企ては，Newman[5),7)]，Rom & Sarachik[8)]らによって既に試みられたが，結果的にobserverとプラントが強いdynamic coupling を持つ可能性があり，閉ループの卓越モード或いは周波数特性などの面で実用上問題がある。本論文の最終目標は，このdynamic couplingから脱却するために，observer の安定度(即ち，バンド幅)を適当に調整できるようなスカラー・パラメータβを導入し，他の observer パラメータをすべてβの関数として決定することである。

observer パラメータの最適選択を考える前の準備として，次の第3章ではregulator－plant－observer のすべてを結合した，実現し得る系の2次形式評価関数を表現し，閉ループ特性を調べる。

第3章 Regulator-Plant-Observer結合系

2.1節で考察したように，(2.1)式で与えられたプラントの2次形式評価関数((2.3)式)が最小になるような制御法則は完全状態量フィードバックになる。観測或いは計測できる量には(2.2)式のように制限があり，状態量のすべてを直接観測できないのが普通である。従って，Linear－quadraticな最適系の実現には，観測量$y(t)$を使って状態量$x(t)$を推定するobserverをフィードバック回路に挿入する(図－2参照)。本章では observer 挿入による状態量$x(t)$の推定誤差が閉ループ系ダイナミクス及び2次形式評価関数((2.3)式)に及ぼす影響を調べる。

§3.1 閉ループ ダイナミクス

Linear－quadratic最適レギュレータ理論では，完全状態量フィードバック可能と言う仮定の下に，最適レギュレータ ゲインL^*が決定された。しかしながら，実際に利用できるのは状態量$x(t)$そのものではなく，observer による推定$\hat{x}(t)$であるから，最も良いレギュレータ ゲインが必ずしも最適レギュレータ理論で得られるゲインL^*と一致するとは限らない。従って，レギュレータのゲインを単にL($r\times n$ マトリクス)とし，$x(t)$の代りに$\hat{x}(t)$を用いて，線形制御法則を

$$u(t)=-L\hat{x}(t) \tag{3.1}$$

とする。前章で与えられたプラント及び誘導された reduced order observer を便宜上まとめておく。

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t) \tag{3.2}$$

$$y(t)=Cx(t) \tag{3.3}$$

$$\dot{z}(t)=(C'-KC)AL_2z(t)+(C'-KC)A(L_1+L_2K)y(t)+(C'-KC)Bu(t) \tag{3.4}$$

$$\hat{x}(t)=(L_1+L_2K)y(t)+L_2z(t) \tag{3.5}$$

以上から，$u(t)$と$y(t)$を消去すれば，

$$\dot{x}(t)=Ax(t)-BL\hat{x}(t) \tag{3.6}$$

$$\dot{z}(t)=(C'-KC)AL_2z(t)+(C'-KC)A(L_1+L_2K)Cx(t)-(C'-KC)BL\hat{x}(t) \tag{3.7}$$

$$\hat{x}(t)=(L_1+L_2K)Cx(t)+L_2z(t) \tag{3.8}$$

更に，(2.6)式で定義された誤差ベクトル

$$\tilde{e}(t)=z(t)-(C'-KC)x(t)$$

を使って，(3.6)，(3.7)及び(3.8)を変形すれば，regulator－plant－observerからなる実現可能な系の閉ループダイナミクスは，次のマトリクス微分方程式で支配されることがわかる。

$$\begin{pmatrix}\dot{x}(t)\\ \dot{\tilde{e}}(t)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}A-BL & -BLL_2\\ O_{(n-m)\times n} & (C'-KC)AL_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x(t)\\ \tilde{e}(t)\end{pmatrix} \tag{3.9}$$

$$\begin{pmatrix}x(t_0)\\ \tilde{e}(t_0)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_0\\ z_0-(C'-KC)x_0\end{pmatrix} \tag{3.10}$$

その特性方程式は，簡単に次の行列式

$$|\lambda I_n-(A-BL)|\cdot|\lambda I_{n-m}-(C'-KC)AL_2|=0 \tag{3.11}$$

で与えられる。

明らかに，regulator－plant－observer 結合系の閉ループ特性根は，完全状態量フィードバックを仮定したregulator－plant 系の閉ループ特性根(マトリクス$A-BL$の固有値)と observer 自身の特性根(マトリクス$(C'-KC)AL_2$の固有値)の両方から成る。$A-BL$の固有値は observer の設計パラメータに全く依存せず，一方，$(C'-KC)AL_2$の固有値はレギュレータのゲインLと全く独立である。この事はSeparation Theoremとしてよく知られている。

完全状態量フィードバックを持つregulator－plant系の特性根($A-BL$の固有値)と observer の特性根($(C'-KC)AL_2$の固有値)がラプラス平面上で比較的近い時，即ち，両者の周波数バンド幅の差が少い時，reguletor－plant 系と observer が強いdynamic coupling を起す。従って，実現される regulator－plant－observer 系の閉ループ応答特性は，目標とする完全状態量フィードバックの regulator－plant 系の閉ループ応答特性とは異っ

たものになる。本来，observer は観測可能な出力から状態量$x(t)$を推定するだけの為にフィードバック回路に挿入されるものであるから，regulator－plant系（完全状態量フィードバック）の閉ループ特性に影響しないのが理想である。従って，observer 設計に当って，実際上重要な事は，精度良く状態量$x(t)$を推定すると同時に，observer のバンド幅が regulator－plant 系のそれに較べて十分広いように observer 設計パラメータC'及びKを選ぶ事である。即ち，observer poles がラプラス平面の原点から十分に離れるのが良い。

§ 3.2　Observer を含む線形系の評価関数

最適線形制御系は通常（2.3）式のような２次形式評価関数が最小になるように設計される。最適系は完全状態量をフィードバックすることで実現されている。Observer を用いてフィードバックすべき状態量を推定した場合には，推定状態量$\hat{x}(t)$は必ずしも真の状態量$x(t)$と一様に一致せず，誤差を生ずる。従って，最適線形レギュレータ設計に使用される（2.3）式の２次形式評価関数は observer 挿入によって一般に増加する。[1),2)] 本節では，フィードバック回路に observer を挿入して regulator－plant－observer 系を構成した時，observer による推定誤差が（2.3）式の２次形評価関数にどのように影響するか簡単に調べ，次章における最適 reduced order observer 設計法開発の準備をする。

（2.26）式で定義される誤差ベクトル$\tilde{e}(t)$を使えば，observer による推定状態量$\hat{x}(t)$は（2.28）式のように表現されるから，（3.1）式の操作量$u(t)$は次のように書ける。

$$u(t)=-L\hat{x}(t)\equiv-(Lx(t)+LL_2\tilde{e}(t)) \quad (3.12)$$

従って，（2.3）式の２次形式評価関数は次のように書き変えられる。

$$J=\int_0^\infty \{x^T(t)Qx(t)+[Lx(t)+LL_2\tilde{e}(t)]^TR[Lx(t)+LL_2\tilde{e}(t)]\}dt$$

$$=\int_0^\infty [x^T(t)\vdots\tilde{e}^T(t)]\,\hat{Q}\begin{bmatrix}x(t)\\ \cdots\\ \tilde{e}(t)\end{bmatrix}dt \quad (3.13)$$

こゝに

$$\hat{Q}\triangleq\begin{bmatrix}Q+L^TRL & \vdots & L^TRLL_2\\ \cdots & & \cdots\\ L_2^TL^TRL & \vdots & L_2^TL^TRLL_2\end{bmatrix} \quad (3.14)$$

ベクトル$x(t)$及び$\tilde{e}(t)$は（3.9）及び（3.10）式に従う。

$$\begin{bmatrix}\dot{x}(t)\\ \cdots\\ \dot{\tilde{e}}(t)\end{bmatrix}=\hat{A}\begin{bmatrix}x(t)\\ \cdots\\ \tilde{e}(t)\end{bmatrix};\quad\begin{bmatrix}x(0)\\ \cdots\\ \tilde{e}(0)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}x_0\\ \cdots\\ \tilde{e}_0\end{bmatrix} \quad (3.15)$$

こゝに，マトリクス$\hat{A}$は次のように定義する。

$$\hat{A}\triangleq\begin{bmatrix}A-BL & \vdots & -BLL_2\\ \cdots & & \cdots\\ O_{(n-m)\times n} & \vdots & (C'-KC)AL_2\end{bmatrix} \quad (3.16)$$

従って，（3.15）式は形式的に次のように解ける。

$$\begin{bmatrix}x(t)\\ \cdots\\ \tilde{e}(t)\end{bmatrix}=\exp(\hat{A}t)\begin{bmatrix}x_0\\ \cdots\\ \tilde{e}_0\end{bmatrix} \quad (3.17)$$

前述の如く，regulator－plant系自身が安定（$Re\{\lambda_i[A-BL]\}<0$）であるようなレギュレータのゲインLを選び，マトリクス$(C'-KC)AL_2$の固有値が負の実数部を持つように，設計パラメータC'及びKを適当に選んで，observer 出力$\hat{x}(t)$が状態量$x(t)$を漸近的に推定するようにする。従って，マトリクス$\hat{A}$の固有値はすべて負の実数部を持つから，$x(t)$及び$\tilde{e}(t)$は共に収束し，（3.13）式の評価関数（コスト）Jは有限になる。

$$J=\int_0^\infty [x_0^T\vdots\tilde{e}_0^T][\exp(\hat{A}^Tt)\hat{Q}\exp(\hat{A}t)]\begin{bmatrix}x_0\\ \cdots\\ \tilde{e}_0\end{bmatrix}dt$$

$$=[x_0^T\vdots\tilde{e}_0^T]P\begin{bmatrix}x_0\\ \cdots\\ \tilde{e}_0\end{bmatrix} \quad (3.18)$$

こゝに，マトリクスPは次式で定義される。

$$P\triangleq\int_0^\infty \exp(\hat{A}^Tt)\hat{Q}\exp(\hat{A}t)dt \quad (3.19)$$

半正定（positive semidefinite）な$(2n-m)\times(2n-m)$マトリクスPは，次の線形マトリクス方程式を解いても得られる。

$$\hat{A}^TP+P\hat{A}+\hat{Q}=O_{(2n-m)\times(2n-m)} \quad (3.20)$$

（3.16）式のマトリクス$\hat{A}$に対応するようにPを適当に分割して

$$P=\begin{bmatrix}P_{11} & \vdots & P_{12}\\ \cdots & & \cdots\\ P_{12}^T & \vdots & P_{22}\end{bmatrix}\qquad\begin{matrix}P_{11}:n\times n\text{ マトリクス}\\ P_{22}:(n-m)\times(n-m)\text{ マトリクス}\end{matrix} \quad (3.21)$$

とすれば，（3.14）及び（3.16）式から（3.20）式は次のように分解される。

$$P_{11}(A-BL)+(A-BL)^TP_{11}+L^TRL+Q=O_{n\times n} \quad (3.22)$$

$$(A-BL)^TP_{12}+P_{12}F-(P_{11}B-L^TR)LL_2=O_{n\times(n-m)} \quad (3.23)$$

$$P_{22}F+F^TP_{22}-L_2^TL^TB^TP_{12}-P_{12}^TBLL_2+L_2^TL^TRLL_2=O_{(n-m)\times(n-m)} \quad (3.24)$$

こゝに，

$$F\triangleq(C'-KC)AL_2$$

また，（3.21）式の分割されたPを使って（3.18）のJは次のように書ける。

$$J=x_0^TP_{11}x_0+2x_0^TP_{12}\tilde{e}_0+\tilde{e}_0^TP_{22}\tilde{e}_0 \quad (3.25)$$

マトリクスP_{11}，P_{12}及びP_{22}は（3.22）～（3.24）式から，明らかにレギュレータのゲインLの関数である。

こゝで，レギュレータ　ゲインLを

$$L=R^{-1}B^TP_{11} \quad (3.26)$$

とする特別の場合について考える。この時(3.22)式は

$$P_{11}A+A^TP_{11}-P_{11}BR^{-1}B^TP_{11}+Q=O_{n\times n} \quad (3.27)$$

となって，linear-quadratic な最適レギュレータ問題に表われるマトリクスRiccati方程式((2.5))となる。従って，(3.26)式のゲインLは完全状態量フィードバック系の最適ゲインL^*と完全に一致する。この時，更に observer の初期推定誤差が無ければ($\tilde{e}_0=O_{n-m}$)，誤差ベクトル$\tilde{e}(t)$は恒等的に零ベクトルとなる((2.27)式参照)。(2.28)式から observer 出力$\hat{x}(t)$は一様にプラント状態量$x(t)$に等しくなるため，系は本質的に完全状態量フィードバックの最適系とみなせる。従って，(3.25)式の右辺第一項$x_0^TP_{11}x_0$はJの取り得る最小値(最適系のコストJ^*)となる。一方，もし初期推定誤差が零でないなら($\tilde{e}_0\neq O_{n-m}$)，フィードバックされる量が状態量フィードバックの最適系のそれとは推定誤差分だけ異るため，2次形式評価関数Jは当然J^*より増加する。従って，(3.25)式の右辺第2，3項は必然的に次の不等式を満す。

$$2x_0^TP_{12}\tilde{e}_0+\tilde{e}_0^TP_{22}\tilde{e}_0\geq 0 \quad (3.28)$$

マトリクス($C'-KC$)AL_2の固有値の実数部が負である限り，observer の出力$\hat{x}(t)$は初期値$z(0)=z_0$と無関係に真の状態量$x(t)$に漸近収束するから，z_0は全く任意に選べる。従って，$\tilde{e}_0\triangleq z_0-Tx_0$もまた$x_0$と独立に全く任意である。すべての$\tilde{e}_0$，$x_0$に関して(3.28)式が成立するには，

$$P_{12}=O_{n\times(n-m)},\ P_{22}\geq 0 \quad (\text{positive semidefinite}) \quad (3.29)$$

でなければならない。一方，(3.26)を(3.23)式に代入して，

$$(A-BR^{-1}B^TP_{11})^TP_{12}+P_{12}F=O_{n\times(n-m)} \quad (3.30)$$

となるから，完全状態量フィードバックの最適系の閉ループ特性根(マトリクス$A-BR^{-1}B^TP_{11}$の固有値)と observer の特性根(マトリクスFの固有値)が共通でない限り，$P_{12}=O_{n\times(n-m)}$となる。また，(3.24)式は次の如く書き直され

$$P_{22}F+F^TP_{22}+L_2^TP_{11}BR^{-1}B^TP_{11}L_2=O_{(n-m)\times(n-m)} \quad (3.31)$$

明らかに，解P_{22}は半正定(positive semidefinite)となる。従って，(3.26)のゲイン選択(完全状態量フィードバック系の最適ゲイン)は，矛盾なく(3.29)式を満足する。この時の状態量推定誤差による評価関数Jの増分ΔJは簡単に次の様に表わされる。

$$\Delta J\triangleq J-J^*=\tilde{e}_0^TP_{22}\tilde{e}_0 \quad (3.32)$$

こゝに，P_{22}は(3.31)式によって与えられる。

Newmann[7]は，レギュレータ ゲインLを(3.26)式のように$L=L^*$と選ばなくても，(3.29)式が成立し，評価関数の増分ΔJは(3.32)式の如く表わせると結論した。しかし，Rom & Sarachik[8]はNewmannの結論は誤りである事を指摘し，上述の様に(3.29)式が成立するのは$L=L^*$の時である事を示した。*

マトリクスP_{11}，P_{12}及びP_{22}は(3.22)〜(3.24)式からLの関数であると同時に，observer パラメータC'及びKの関数でもある。一般に，プラント状態量の初期値x_0は未知であるため，observer の初期値z_0を零に設定するのが便利であり，普通である。

$$z_0=O_{n-m} \quad (3.33)$$

この時，推定誤差$\tilde{e}(t)$の初期値は(2.26)式の定義から状態量の初期値x_0の線形結合となる。

$$\tilde{e}_0=-(C'-KC)x_0=-Tx_0 \quad (3.34)$$

この様に，observer の初期値z_0を設定してしまえば，推定誤差$\tilde{e}_0$も observer パラメータC'及びKの関数となる。(3.33)式の設定に対して，(3.25)式の2次形式評価関数Jは次のように書ける。

$$J=x_0^TP_{11}x_0-2x_0^TP_{12}(C'-KC)x_0 +x_0^T(C'-KC)^TP_{22}(C'-KC)x_0 \quad (3.35)$$

プラント状態量の初期値x_0は一般に未知の場合が多い。本論文では簡単のために，初期値x_0はランダムであって，その平均値は零($\bar{x}_0\triangleq\mathscr{E}\{x_0\}=O_n$)，分散を$X_0$(co-variance matrix of x_0)とする。この時，(3.35)式の平均値は次のようになる。

$$\bar{J}\triangleq\mathscr{E}\{J\} =Tr[X_0\{P_{11}-2P_{12}(C'-KC) +(C'-KC)^TP_{22}(C'-KC)\}] \quad (3.36)$$

こゝに，

$$X_0\triangleq\mathscr{E}\{x_0x_0^T\} \quad (3.37)$$

$\mathscr{E}\{\cdot\}$= expectation of $\{\cdot\}$

$Tr[\cdot]$= trace of $[\cdot]$

以上の様に，regulator-plant-observer 結合系のダイナミクス及び2次形式評価関数の表現を得た。2次形式評価関数が系全体の良し悪しを決定する基本的な指標の一つであるから，レギュレータ及び observer を，評価関数が最小になるように設計するのは当然の考え方である。次の第4章では，この意味での最適レギュレータのゲイン及び最適 reduced order observer について考

---

* $L=L^*$の時，(3.29)式が成立する。逆に，$P_{12}=O_{n\times(n-m)}$の時，(3.23)式は($P_{12}B-L^TR$)$LL_2=O_{n\times(n-m)}$となり，$L=L^*$は単に十分条件となる。

察する。

第4章　最適Reduced Order Observer

出力$y(t)$から状態量$x(t)$を作り出すために，フィードバック回路に observer を挿入する。しかし，状態量の推定誤差は避けられないので，レギュレータ設計のための2次形式評価関数が完全状態量フィードバックの最適系の場合よりも増加する事を前章で示した。

Newmann[5),7)]は，このコスト増$\Delta J \triangleq J - J^*$が最小になる observer パラメータの条件を求めようとした。彼は通常の公理的 observer 構成に従い，(2.41)式で与えられるような条件下で未知パラメータを求めようとしたが，observer 性能と無関係で余分な任意パラメータを除かなかったため，結果が redundant になった。また，彼はコスト増$\Delta J = J - J^*$が最小になるレギュレータのゲインLが完全状態量フィードバック時の最適ゲイン$L^* = R^{-1} B^T P_{11}$に一致しないと結論した。

しかしながら，Rom & Sarachik[8),9)]は，相似な observer が同一コストを生ずる事から，observability canonical form を使って Newmann の redundancy を消した。更に，彼等は，コスト増ΔJが最小になるLはL^*に一致すると反論した。Rom & Sarachik の結果を使って observer を設計するには，与えられたプラント　ダイナミクスを observability canonical formに変換せねばならない。

本章では，Rom & Sarachik のような observability canonical formを使わず，しかも，Newmannのような redundancy を伴なわずに，第2章で導いた本質的な設計パラメータを容易に判別できる observer 構成法を用いて，ΔJ最小と言う意味での最適 reduced order observer 設計法を考察する。また，レギュレータのゲインLをL^*と一致するように選ぶことが，ΔJを最小にするために十分であることを示し，Newmann の結論は誤りであって，Rom & Sarachik の結論が正しいことを確認する。

§4.1　最適Reduced Order Observer

フィードバック回路に observer を挿入することによって制御系を実現しようとする時，状態量の推定誤差によってレギュレータ設計に使用される2次形式評価関数が増加するのが普通である。2次形式評価関数が系全体の良し悪しを判定する基本的指標の一つであることを了承するなら，レギュレータだけでなく，observer もまた評価関数が最小になるように設計されるべきと思うのが普通である。

第2章で導いたような observer 構成法に従えば，§2.4 での議論から observer の未知設計パラメータは$(n-m)\times n$マトリクスC'及び$(n-m)\times m$マトリクスKの合計$(n-m)(n+m)$ケである。しかしながら，C'は(2.11)式に於けるように，$m\times n$マトリクスCを補った時 nonsingular と言う条件を満す限り任意である。一方，Kは，あるC'の選択に対して(2.14)式によってL_1及びL_2を決定した時，$(C'-KC)AL_2$が安定である限りにおいて任意である。observer の推定誤差ダイナミクスを支配するマトリクス$(C'-KC)AL_2$は((2.27)式参照)，C'よりはむしろKに直接依存する。従って，C'を(2.11)式を満すように選び，2次形式評価関数をマトリクスKの関数と考える。

状態量の順序*を適当に入れ替える事によって，出力マトリクスCを次のように分割できる。

$$C = [\, C_1 \,\vdots\, C_2 \,] \tag{4.1}$$

こゝに

C_1 : $m\times m$　nonsingular　マトリクス

C_2 : $m\times(n-m)$　マトリクス

以後，本論文では(4.1)式のように分割されたCのみを対象とする。同様に，任意マトリクスC'もC_1'及びC_2'に分割すれば，CとC'で作られる$n\times n$正方マトリクスは次の如く書ける。

$$\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ C' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_1 & \vdots & C_2 \\ \cdots & & \cdots \\ C_1' & \vdots & C_2' \end{bmatrix} \tag{4.2}$$

このマトリクスが nonsingular であるようにC'を選べば良いから，C_1が nonsingular であることを考慮して，C_1'を零マトリクス（null matrix），C_2'を単位マトリクス（identity matrix）と選ぶ。

$$C' \triangleq [\, O_{(n-m)\times m} \,\vdots\, I_{n-m} \,] \tag{4.3}$$

この時，次の様な質問が起るのは当然である。即ち，「$C_1' = O$は納得できるとしても，C_2'は nonsingular であれば何でも良い。従って，nonsingular なC_2'の内，2次形式評価関数最小と言う意味で，単位マトリクスよりはもっと良い最適マトリクスがあるのではないか？」　しかしながら，§4.2 で，単位マトリクス以外のC_2'を選んでも，コスト増に変化がないことが示される。(4.1)式のようなCの分割及び(4.3)式のようなC'の選択を行えば，L_1及びL_2は(2.14)式から次のように得られる。

---

* 状態量$x(t)$のnケの要素を入れ替えるに応じて，マトリクスA及びBの行及び列も適当に入れ替えねばならない。しかし，この入れ替えは，observability canonical form に変換するよりも一般に易しい。

$$[\,L_1 \vdots L_2\,]=\begin{pmatrix} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ O_{(n-m)\times m} & I_{n-m}\end{pmatrix} \tag{4.4}$$

上の様に，マトリクスC'を選んでしまえば，observer の未知パラメータはマトリクスKのみである。また，observer による状態量の推定が一般に誤差を伴うので，レギュレータの最適ゲインLは完全状態量フィードバックを持つ最適系のゲイン$L^*=R^{-1}B^TP_{11}$とは等しくないかも知れない。従って，regulator－plant－observer 結合系の２次形式評価関数の平均((3.36)式)は，マトリクスK及びLの関数と考えられる。

以後，本章で取り扱う問題は，(3.22)～(3.24)及び(3.36)式から次のようにまとめられる。

問題－1 「次の２次形式評価関数の初期状態量に関する平均値を最小にするレギュレータ　ゲインL及び observer ゲインKを求めよ。

$$J(L,K)=Tr[X_0\{P_{11}-2P_{12}(C'-KC)+(C'-KC)^TP_{22}(C'-KC)\}] \tag{4.5-a}$$

但し，

$$P_{11}(A-BL)+(A-BL)^TP_{11}+L^TRL+Q=O_{n\times n} \tag{4.5-b}$$

$$(A-BL)^TP_{12}+P_{12}F-(P_{11}B-L^TR)LL_2=O_{n\times(n-m)} \tag{4.5-c}$$

$$P_{22}F+F^TP_{22}-L_2^TL^TB^TP_{12}-P_{12}^TBLL_2+L_2^TL^TRLL_2=O_{(n-m)\times(n-m)} \tag{4.5-d}$$」

拘束条件下での最適問題は，Lagrange乗数法によって条件無しの最適問題となる。$n\times n$，$(n-m)\times n$及び$(n-m)\times(n-m)$の Lagrange 乗数マトリクスΣ，Λ及びΓを使って，次の様な Lagrangian を定義する。

$$\begin{aligned}\mathscr{L}(L,K)\triangleq\ &Tr[X_0\{P_{11}-2P_{12}(C'-KC)+(C'-KC)^TP_{22}(C-KC)\}]\\&+Tr[\Sigma^T\{P_{11}(A-BL)+(A-BL)^TP_{11}+L^TRL+Q\}]\\&+Tr[\Lambda^T\{(A-BL)^TP_{12}+P_{12}F-(P_{11}B-L^TR)LL_2\}]\\&+Tr[\Gamma^T\{P_{22}F+F^TP_{22}-L_2^TL^TB^TP_{12}\\&\quad-P_{12}^TBLL_2+L_2^TL^TRLL_2\}]\end{aligned} \tag{4.6}$$

こゝに，マトリクスFは次式

$$F\triangleq(C'-KC)\Lambda L_2$$

で定義されたことを注記しておく。

Gradient matrix 法によって，上記の$\mathscr{L}(L,K)$の停留条件を求める。

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial P_{11}}=X_0+\Sigma(A-BL)^T+(A-BL)\Sigma-\Lambda L_2^TL^TB^T=O_{n\times n} \tag{4.7}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}'}{\partial P_{12}}=-2X_0(C'-KC)^T-2BLL_2\Gamma+(A-BL)\Lambda+\Lambda F^T=O_{n\times(n-m)} \tag{4.8}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial P_{22}}=(C'-KC)X_0(C'-KC)^T+\Gamma F^T+F\Gamma=O_{(n-m)\times(n-m)} \tag{4.9}$$

$$\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial K}=2P_{12}^TX_0C^T-2P_{22}C'X_0C^T+2P_{22}KCX_0C^T-2P_{22}\Gamma L_2^T\Lambda^TC^T-P_{12}^T\Lambda L_2^T\Lambda^TC^T=O_{(n-m)\times m} \tag{4.10}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial\mathscr{L}}{\partial L}=&-2B^TP_{12}\Gamma^TL_2+2RLL_2\Gamma L_2^T-B^TP_{11}\Sigma-B^TP_{11}\Sigma^T\\&+RL\Sigma+RL\Sigma^T-B^TP_{12}\Lambda^T+RL\Lambda L_2^T+RLL_2\Lambda^T\\&-B^TP_{11}\Lambda L_2^T=O_{r\times n}\end{aligned} \tag{4.11}$$

以上のマトリクス連立方程式を解くのは極めて困難である。しかしながら，レギュレータ　ゲインLを，完全状態量フィードバックの最適ゲインL^*としてみる。即ち，

$$L=R^{-1}B^TP_{11} \tag{4.12}$$

§3.2の議論から(或いは(4.5－c)から)

$$P_{12}=O_{n\times(n-m)} \tag{4.13}$$

(4.12)及び(4.13)式を(4.11)式に代入して整理すれば次のようになる。

$$B^TP_{11}L_2(2\Gamma L_2^T+\Lambda^T)=O_{r\times n} \tag{4.14}$$

従って，Λを次のように選べば，(4.14)すなわち(4.11)式は満される。

$$\Lambda=-2L_2\Gamma^T \tag{4.15}$$

(4.13)式を(4.10)式に代入すれば，

$$P_{22}[\Gamma L_2^T\Lambda^TC^T+C'X_0C^T-KCX_0C^T]=O_{(n-m)\times m} \tag{4.16}$$

となる。P_{22}が nonsingular であると仮定すれば，(4.16)式は簡単に次の如くなる。

$$\Gamma L_2^T\Lambda^TC^T+C'X_0C^T-KCX_0C^T=O_{(n-m)\times m} \tag{4.17}$$

$$\therefore\ K=(C'X_0C^T+\Gamma L_2^T\Lambda^TC^T)(CX_0C^T)^{-1} \tag{4.18}$$

のようにマトリクスKが求まる。こゝに，初期状態量の共分散(covariance)マトリクスX_0は nonsingular であり，rank$[C]=m$であるから，$m\times m$マトリクスCX_0C^Tは nonsingular してよい。

(4.18)式の observer ゲイン　マトリクスKに対して，マトリクスFは

$$\begin{aligned}F&\triangleq(C'-KC)\Lambda L_2\\&=C'[I_n-X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}C]\Lambda L_2\\&\quad-\Gamma L_2^T\Lambda^TC^T(CX_0C^T)^{-1}C\Lambda L_2\end{aligned} \tag{4.19}$$

の如く，Γの線形関数として求まる。従って，(4.9)式は次のようなΓに関する代数的マトリクス Riccati 方程式になる。

$$\begin{aligned}&S\Gamma+\Gamma S^T-\Gamma L_2^T\Lambda^TC^T(CX_0C^T)^{-1}C\Lambda L_2\Gamma\\&\quad+C'[X_0-X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0]C'^T=O_{(n-m)\times(n-m)}\end{aligned} \tag{4.20}$$

こゝに，

$$S\triangleq C'[I_n-X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}C]\Lambda L_2 \tag{4.21}$$

従って，マトリクスΓは対称であることがわかり，(4.20)式をΓについて解くことができる。* また，(4.7)式は次のように書けるから

$$X_0+\Sigma(A-BR^{-1}B^TP_{11})^T+(A-BR^{-1}B^TP_{11})\Sigma$$
$$+2L_2\Gamma L_2^TP_{11}BR^{-1}B^T=O_{n\times n} \tag{4.22}$$

Lagrange 乗数マトリクスΣは(4.20)及び(4.21)を満すΓに対して一意的に決る。

以上のように，$L=L^*$なる仮定((4.12)式)の下に，すべての未知マトリクスが計算可能な程度で求まった。しかしながら，これらの簡略化された必要条件を導くに当って，(4.8)式を使わなかった。従って，$L=L^*$の仮定で求められる未知マトリクスが(4.8)式を満すか否かは疑わしい。もし，(4.8)式が成立しなければ，$L=L^*$なる(4.12)式の仮定は正しくないことになる。幸いにも，$L=L^*$なる仮定で得られた上記の結果は，(4.8)式の条件を矛盾なく満すことが次のように確かめられ，$L=L^*$なる仮定の妥当性が示される。(4.12)及び(4.15)式を使って(4.8)式は次のように書ける。

$$AL_2\Gamma+L_2\Gamma F^T+X_0(C'-KC)^T=O_{n\times(n-m)} \tag{4.22}$$

一方，(4.10)式から導かれた(4.17)式を転置して次のように書く。

$$C[AL_2\Gamma+X_0(C'-KC)^T]=O_{m\times(n-m)} \tag{4.23}$$

(2.16)式によって，$CL_2=O_{m\times(n-m)}$であるから，上の式は次のように書ける。

$$C[AL_2\Gamma+L_2\Gamma F^T+X_0(C'-KC)^T]=O_{m\times(n-m)} \tag{4.24}$$

また，Γを求めるために使われる式(4.9)に，$F=(C'-KC)AL_2$なる関係を代入して，

$$(C'-KC)AL_2\Gamma+\Gamma F^T+(C'-KC)X_0(C'-KC)^T$$
$$=O_{(n-m)\times(n-m)} \tag{4.25}$$

(2.32)及び(2.16)式によって，

$$TL_2\equiv(C'-KC)L_2=C'L_2-KCL_2=I_{(n-m)} \tag{4.26}$$

となるから，(4.25)式の左辺第2項に左からTL_2を掛けても(4.25)式は変わらない。従って，(4.25)式は次のように書ける。

$$(C'-KC)[AL_2\Gamma+L_2\Gamma F^T+X_0(C'-KC)^T]$$
$$=O_{(n-m)\times(n-m)} \tag{4.27}$$

(4.24)及び(4.27)式をまとめると，

$$\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ T \end{bmatrix}[AL_2\Gamma+L_2\Gamma F^T+X_0(C'-KC)^T]=O_{n\times(n-m)} \tag{4.28}$$

となる。(2.41)式から，マトリクス$[C^T\vdots T^T]^T$はnon-singularであるから，(4.28)式が成立する限り(4.22)式は恒等的に成立する。即ち，(4.8)式の条件は，$L=L^*$なる仮定の下で，(4.9)及び(4.10)式の条件と従属関係にある。従って，$L=L^*$と仮定する時，(4.9)及び(4.10)式が満されるなら，(4.8)式も当然満されることになる。

以上のように，レギュレータ ゲインLを(4.12)のように，完全状態量フィードバックの最適ゲインL^*に選ぶことは一つの十分条件であり，すべての未知マトリクスを矛盾なく決定することができる。

前にも述べたように，残された問題は，(4.20)式から求めるべきΓの一意性に関する疑問である。observerの出力$\hat{x}(t)$が状態量$x(t)$を漸近的に推定するには，マトリクス$F\triangleq(C'-KC)AL_2$のすべての固有値の実数部が負でなければならず，そのような observer ゲインKが存在することは§2.3で述べた。従って，(4.20)式の解Γは(4.19)式のFを安定化(固有値の実数部を負に)するようなものでなければならない。

次のような架空の制御系を考える：

$$\dot{\eta}(t)=S^T\eta(t)+L_2^TA^TC^T\mu(t) \tag{4.29}$$

こゝに，$\eta(t)$：$(n-m)$次元状態量；$\mu(t)$：m次元制御量；Sは(4.21)式で定義されたもの。

この系に対する2次形式評価関数を

$$\tilde{J}=\int_0^\infty[\eta^T(t)\tilde{Q}\eta(t)+\mu^T(t)\tilde{R}\mu(t)]dt$$

として，Linear-quadratic 最適レギュレータ設計を考える。この時，もし

$$\tilde{Q}=C'[X_0-X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0]C'^T \tag{4.30}$$
$$\tilde{R}=CX_0C^T \tag{4.31}$$

とすれば，最適制御法則は次のように得られる。

$$\mu(t)=-(CX_0C^T)^{-1}CAL_2\hat{\Gamma}\eta(t) \tag{4.32}$$

こゝに，$\hat{\Gamma}$が満足すべき条件は，(4.20)式で与えるΓに関するマトリクスRiccati方程式に一致する。従って，$\hat{\Gamma}=\Gamma$となる。

(4.29)及び(4.32)式から，閉ループ系のダイナミクスは，

$$\dot{\eta}(t)=F^T\eta(t)\quad;\quad\eta(0)=\eta_0 \tag{4.33}$$

で与えられる。マトリクスFは(4.19)式で与えられるものと全く一致する。R. E. Kalmanの定理[17]によって，上のような系((4.29)式)がcontrollableであって，$\tilde{Q}$が半正定(positive semidefinite)，$\tilde{R}$が正定(positive definite)であれば，マトリクスFの固有値に負の実数部を持たせるような(4.20)式の正定な解Γが一意的に存在することが良く知られている。従って，残された問題は次の2つである：(1)系(4.29)式のpair $\{L_2^TA^T$

---

* 多数存在する解Γの内，正定(positive definite)なΓを取るべきであり，それは唯一である事を後に示す。

$[I_n - C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0]C'^T,\ L_2^TA^TC^T\}$ が controllable pair であるか？；(2) (4.31) 式の $\widetilde{R}$ は正定としても，(4.30) 式の $\widetilde{Q}$ は半正定か？

§ 2.3 で述べたように，$\{A, C\}$ は observable pair であるから，双対性 (duality) によって $\{A^T, C^T\}$ は controllable pair である。また，附録の定理A－1 によって，$\{L_2^TA^TC'^T,\ L_2^TA^TC^T\}$ も controllable pair である。そこで，$\{L_2^TA^TC'^T,\ L_2^TA^TC^T\}$ が controllable である時，$\{S^T,\ L_2^TA^TC^T\}$ すなわち $\{L_2^TA^TC'^T - L_2^TA^TC^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0C'^T,\ L_2^TA^TC^T\}$ が controllable pair か否かが重要である。この事に関して次の定理が役立つ。

定理 1. 「線形系：$\dot{\eta}(t) = \widetilde{A}(t)\eta(t) + \widetilde{B}(t)\mu(t)$ の controllability は，任意の線形状態量フィードバック $\mu(t) = \delta(t) + \widetilde{L}(t)\eta(t)$ に関して不変である。」

証明は簡単なので省略する。[14] すなわち，$\{\widetilde{A}(t),\ \widetilde{B}(t)\}$ が controllable であれば，$\{(\widetilde{A}(t) + \widetilde{B}(t)\widetilde{L}(t),\ \widetilde{B}(t)\}$ もまた controllable である。従って，$\widetilde{A}(t) = L_2^TA^TC'^T$，$\widetilde{B}(t) = L_2^TA^TC^T$ そして $\widetilde{L}(t) = -(CX_0C^T)^{-1}CX_0C'^T$ とすれば，$\{L_2^TA^TC'^T - L_2^TA^TC^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0C'^T,\ L_2^TAC^T\}$ は controllable pair であると結論できる。

共分散 (covariance) マトリクス X_0 は正定対称であるから，マトリクス $\widetilde{Q}$ は次のように変換できる。

$$\widetilde{Q} = C'X_0^{1/2}[I_n - X_0^{1/2}C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0^{1/2}]X_0^{1/2}C'^T \tag{4.34}$$

こゝで，次のようなマトリクス $\widetilde{M}$ を定義する。

$$\widetilde{M} \triangleq X_0^{1/2}C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0^{1/2} \tag{4.35}$$

そうすれば，

$$\widetilde{M}^2 = X_0^{1/2}C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0^{1/2}X_0^{1/2}C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0^{1/2}$$
$$= X_0^{1/2}C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0^{1/2} \equiv \widetilde{M}$$

$$\therefore\ \widetilde{M}^2 = \widetilde{M} \tag{4.36}$$

となって，$\widetilde{M}$ が idempotent matrix であることが解る。更に，$\widetilde{N} \triangleq I_n - \widetilde{M}$ もまた idempotent matrix であることが容易に解る。Idempotent matrix については次の定理が証明されている。

定理 2. 「Idempotent matrix は半正定であって，1 または 0 の固有値を持つ。」

便宜上，文献 15) を基にした証明を附録－B に示した。この定理によって，マトリクス $\widetilde{M}$ 及び $\widetilde{N}$ は共に半正定であって，それらの固有値は 1 又は 0 から成っている。マトリクス $\widetilde{Q}$ は，(4.34) 式から

$$Q = C'X_0^{1/2}\widetilde{N}X_0^{1/2}C'^T \tag{4.37}$$

と書けるので，Q もまた半正定であると言える。

以上のように，代数的マトリクス Riccati 方程式に関する R.E.Kalman の定理によって，マトリクス F を安定化する正定な (4.20) 式の解 Γ が一意に存在し，すべての observer パラメータを一意的に決定できる。

次に，これまでに導かれた reduced order observer の最適パラメータ選択に関する結果をまとめる。

与えられたプラント $\{A, B, C\}$，重み Q，R 及び初期状態量の共分散マトリクス X_0 に対して，

$$L = L^* = R^{-1}B^TP_{11} \tag{4.38}$$

$$P_{11}A + A^TP_{11} - P_{11}BR^{-1}B^TP_{11} + Q = O_{n\times n} \tag{4.39}$$

即ち，レギュレータ、ゲインは完全状態量フィードバックにおける最適レギュレータ ゲインのままで良い。一方，observer については，

$$C' = [O_{(n-m)\times m} \vdots I_{n-m}] \tag{4.40}$$

$$[L_1 \vdots L_2] = \begin{pmatrix} C_1^{-1} & \vdots & -C_1^{-1}C_2 \\ \cdots & & \cdots \\ O_{(n-m)\times m} & \vdots & I_{n-m} \end{pmatrix} \tag{4.41}$$

$$\Gamma S^T + S\Gamma - \Gamma L_2^TA^TC^T(CX_0C^T)^{-1}CAL_2\Gamma + C'[X_0 - X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0]C'^T = O_{(n-m)\times(n-m)} \tag{4.42}$$

$$S \triangleq C'[I_n - X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}C]AL_2 \tag{4.43}$$

$$K = (C'X_0C^T + \Gamma L_2^TA^TC^T)(CX_0C^T)^{-1} \tag{4.44}$$

によって Γ 及び K を求め，次のように F，G，H，M 及び N を決定する。

$$F = (C' - KC)AL_2\ ;\ G = (C' - KC)A(L_1 + L_2K)$$
$$H = (C' - KC)B\ ;\ M = L_1 + L_2K$$
$$N = L_2 \tag{4.45}$$

以上によって，最適 reduced order observer は

$$\dot{z}(t) = Fz(t) + Gy(t) + Hu(t)\ ;\ z(0) = O_{n-m} \tag{4.46}$$

$$\hat{x}(t) = My(t) + Nz(t) \tag{4.47}$$

の如く構成される。又，Σ，Λ，P_{12} 及び P_{22} は次のように得られる。

$$\Sigma(A - BL)^T + (A - BL)\Sigma + X_0 + 2L_2\Gamma L_2^TP_{11}BR^{-1}B^T = O_{n\times n} \tag{4.48}$$

$$\Lambda = -2L_2\Gamma \tag{4.49}$$

$$P_{12} = P_{21}^T = O_{m\times(n-m)} \tag{4.50}$$

$$P_{22}F + F^TP_{22} + L_2^TP_{11}BR^{-1}B^TP_{11}L_2 = O_{(n-m)\times(n-m)} \tag{4.51}$$

2 次形式評価関数 $\bar{J}$ は，

$$\bar{J} = Tr[X_0P_{11}] + Tr[X_0(C' - KC)^TP_{22}(C' - KC)] \tag{4.52}$$

となり，完全状態量フィードバックの理想系の最小コストからのコスト増加は

$$\overline{\Delta J} = Tr[X_0(C' - KC)^TP_{22}(C' - KC)] \tag{4.53}$$

で与えられる。

上のまとめから明らかなように，レギュレータの最適ゲイン L は，observer の存在によって全く影響されず，通常の完全状態量フィードバック可能な場合 (理想系)

の最適ゲイン L^*に等しい。一方，最適reduced order observerはレギュレータに全く影響されず，与えられたプラントのパラメータ及び初期状態量の共分散マトリクスX_0にのみ依存する。従って，いわゆるSeparation Theoremが成立する。結果的に，コスト増 ΔJ を単に推定誤差のみによる。

$$\Delta J=\int_0^\infty \tilde{e}^T(t)\,L_2^T L^{*T} R L^* L_2\,\tilde{e}(t)\,dt=\tilde{e}_0^T P_{22}\tilde{e}_0 \tag{4.54}$$

$$\tilde{e}_0=z_0-(C'-KC)x_0=-(C'-KC)x_0\ ;$$

$$z_0=O_{n-m}$$

と仮定し，初期状態量 x_0 がある共分散X_0 を持つとして(4.54)の平均値

$$\overline{\Delta J}=\mathcal{E}\{\tilde{e}_0^T P_{22}\tilde{e}_0\}=Tr[X_0(C'-KC)^T P_{22}(C'-KC)] \tag{4.55}$$

を評価関数とした最適reduced order observerを求めたことになる。

§ 4.2 マトリクスC'選択の妥当性

前節の最適reduced order observerは，マトリクスC'を(4.3)式のように最も簡単に選んで得られた。しかしながら，C'を$[\,C_1' : C_2'\,]$のように分割した時，$C_1'=O_{(n-m)\times m}$ とすれば $(n-m)\times(n-m)$ マトリクスC_2'が nonsingular である限り，(4.2)式の合成マトリクスが nonsingular であるべきと言う要求は満される。従って，$C_2'=I_{n-m}$と選ぶのが適当か否かは疑問の残る所であろう。即ち，$C_2'=I_{n-m}$以外にもっと良い選択があるのではないかという疑問である。本節では，C_2'を単位マトリクス以外に選んでも，(4.56)式のコスト増$\overline{\Delta J}$の改善が得られず，(4.3)式のような$C'=[\,O_{(n-m)\times m} : I_{n-m}\,]$なる選択が十分であることを示す。

仮りに，C'を次のように選んだとする。

$$\tilde{C}'=[\,O_{(n-m)\times m} : C_2'\,] \tag{4.56}$$

こゝに，C_2'は $(n-m)\times(n-m)$ の nonsingular マトリクス。observerの状態量$z(t)$が，プラントの状態量$x(t)$の線形結合を漸近的に推定する($\lim_{t\to\infty} z(t)=\lim_{t\to\infty}\tilde{T}x(t)$)と言う時に表われる $(n-m)\times n$ マトリクス$\tilde{T}$は(2.26)及び(2.30)式から

$$\tilde{T}=\tilde{C}'-\tilde{K}C=[-\tilde{K}C_1 : C_2'-\tilde{K}C_2] \tag{4.57}$$

となる。こゝに，$\tilde{K}$は$\tilde{C}'$に対応する observer ゲインマトリクスである。

マトリクスC_2'はnonsingularであるから

$$\tilde{T}=C_2'[-C_2'^{-1}\tilde{K}C_1 : I_{n-m}-C_2'^{-1}\tilde{K}C_2] \tag{4.58}$$

こゝで

$$K\triangleq C_2'^{-1}\tilde{K} \tag{4.59}$$

とおけば，

$$\tilde{T}=C_2'[-KC_1 : I_{n-m}-KC_2]\equiv C_2'T \tag{4.60}$$

$(n-m)\times n$ マトリクスTは$\tilde{C}'=[\,O_{(n-m)\times n} : I_{n-m}\,]\equiv C'$とした時の$\tilde{T}$である。更に，(2.14)式におけるように，合成マトリクス(composite matrix)$[C^T : \tilde{C}'^T]^T$ の逆マトリクスが$[\,\tilde{L}_1 : \tilde{L}_2\,]$であるから，

$$[\tilde{L}_1 : \tilde{L}_2]=\begin{bmatrix} C \\ \hdashline \tilde{C}' \end{bmatrix}^{-1}=\left[\begin{array}{c:c} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2C_2'^{-1} \\ \hdashline O_{(n-m)\times m} & C_2'^{-1} \end{array}\right] \tag{4.61}$$

従って，

$$\tilde{L}_1=\begin{bmatrix} C_1^{-1} \\ \hdashline O_{(n-m)\times m} \end{bmatrix}\equiv L_1\ ;\ \tilde{L}_2=\begin{bmatrix} -C_1^{-1}C_2 \\ \hdashline I_{n-m} \end{bmatrix}C_2'^{-1}$$

$$\equiv L_2C_2'^{-1} \tag{4.62}$$

以上の関係から，(4.56)式のように$\tilde{C}'$を選んだ時の推定誤差ダイナミクスは次のマトリクス$\tilde{F}$によって支配される。

$$\tilde{F}\equiv\tilde{T}A\tilde{L}_2=C_2'TAL_2C_2'^{-1} \tag{4.63}$$

従って，$C'=[\,O_{(n-m)\times m} : I_{n-m}\,]$ とした時のマトリクス $F=TAL_2$との関係は

$$\tilde{F}=C_2'FC_2'^{-1} \tag{4.64}$$

となって，$\tilde{F}$とFは互いに相似なマトリクス(similar matrices)であって，固有値は等しい。遷移マトリクスの間の関係は

$$\exp(\tilde{F}t)=C_2'\exp(Ft)C_2'^{-1} \tag{4.65}$$

となる。一方，レギュレータの最適ゲインLを $L^*=R^{-1}B^TP_{11}$ とすれば，$\tilde{P}_{22}$は(4.51)式から次の積分型で書ける(但し，$\tilde{F}$及びFは安定なマトリクスとする)。

$$\tilde{P}_{22}=\int_0^\infty \exp(\tilde{F}^Tt)\tilde{L}_2^TP_{11}BR^{-1}B^TP_{11}\tilde{L}_2\exp(\tilde{F}t)\,dt \tag{4.66}$$

(4.62)及び(4.65)式を代入して

$$\tilde{P}_{22}=C_2'^{-T}\left\{\int_0^\infty \exp(F^Tt)L_2^TP_{11}BR^{-1}B^TP_{11}L_2\exp(Ft)\,dt\right\}C_2'^{-1}=C_2'^{-T}P_{22}C_2'^{-1} \tag{4.67}$$

従って，observerによる不完全な状態量推定から生ずるコスト増$\widetilde{\overline{\Delta J}}$((4.53)式)は

$$\widetilde{\overline{\Delta J}}\triangleq Tr[X_0\tilde{T}^T\tilde{P}_{22}\tilde{T}]=Tr[X_0T^TC_2'^T\tilde{P}_{22}C_2'T]$$

$$=Tr[X_0T^TP_{22}T]\equiv\overline{\Delta J} \tag{4.68}$$

となり，C_2'がnonsingular である限り，いかに選ぼうとも，$C_2'=I_{n-m}$(即ち，$C'=[\,O_{(n-m)\times m} : I_{n-m}\,]$)とした時のコスト増$\overline{\Delta J}$と同じになる。

以上のように，マトリクスC'を一般性を失わずに(4.3)式のように選んでよいことが示された。

§ 4.3 Observerの閉ループダイナミクスへの影響

前節までに，最適reduced order observerのパラメータ決定法が得られ，Separation Theoremが成立することを調べた。その結果は，文献10)に於けるobserverの構成法を基にして，observability canonical formを使用せず導いたものであるが，Rom & Sarachik[8]がcanonical formから出発して得た結果と同一のものである。論理構成の明確さ，条件の単純さ，特に工学的実用性に於いて，本論文による結果はRom & Sarachikによる結果に優るであろう。また，本論文における方法では，Newmannのそれのようにredundancyを含まず，またRom & Sarachikの結果の正しさを再確認し，Newmann の結論を否定する。

しかしながら，本論文及びRom & Sarachikによって得られる最適reduced order observerには，実際に応用するに当って，工学上重要な欠点がある。

完全状態量フィードバックを仮定した最適レギュレータはコスト（２次形式評価関数）が小さいこともさることながら，閉ループダイナミクスすなわち周波数特性が適当になるように設計されるのが普通であり*，得られたregulator－plant系（完全状態量フィードバック）は実現目標であって，理想の系と思ってよい。
一方，observerは理想的regulator－plant系の実現を目的として，計測可能な出力から状態量を推定するために挿入されるものであって，理想系のコストあるいは閉ループダイナミクスの改善をめざして挿入するものではない。従って，フィードバック回路にobserverを挿入した時，状態量推定の不完全さによるコスト増が小さいことと同時に，実現される閉ループ系（regulator－plant－observer系）のダイナミクスが目標とする理想系（regulator－plant系）のダイナミクスから著しく変化しないことも重要である。しかしながら，前節及びRom & Sarachikによる最適reduced order observerはコスト増の最小化のみを考慮して導かれ，閉ループダイナミクスにはほとんど注意が払われなかった。前述のように，フィードバック回路にobserverを挿入した系（regulator－plant－observer系）の閉ループダイナミクスは，実現目標である理想系（regulator－plant系）の閉ループ特性根（$A-BL^*$の固有値）及びobserver特性根（$F \triangleq (C'-KC)AL_2$の固有値）によって支配される。また，Separation Theoremによってレギュレータとobserverは全く独立に設計され，observer特性根はプラントの開ループ特性にのみ依存する。従って，理想系の閉ループ特性根が最適observerの特性根に較べて卓越する保証は全く無い。このことは，regulator－plant系とobserverが強いdynamic couplingを持ち，実現されるregulator－plant－observer系の閉ループダイナミクスが実現目標である理想のregulator－plant系の閉ループダイナミクスとは著しく異る可能性を意味する。実際 このようなdynamic couplingが起るのは極くまれなことではなく，特にレギュレータのゲインが大きい時には容易に起り得ることを次の簡単な２次系の例題によって示す。

次のような２次系が与えられたとすると：

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \dot{x}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0, & 1 \\ -\omega_0^2, & -2\varsigma_0\omega_0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b \end{bmatrix} u(t)$$

$$y(t) = [1,\ 0] \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = x_1(t)$$

２次形式評価関数は

$$J^* = \operatorname*{Min}_{u(t)} \int_0^\infty [x^T(t)\,Q\,x(t) + r u^2(t)]\,dt$$

最適制御法則は

$$u(t) = -\frac{1}{r} B^T P_{11} x(t)$$

こゝに，

$$P_{11}A + A^T P_{11} - \frac{1}{r} P_{11} B B^T P_{11} + Q = O_{2\times2}$$

マトリクス P_{11} の要素を

$$P_{11} = \begin{pmatrix} p_{11}^{11} & p_{11}^{12} \\ p_{11}^{21} & p_{11}^{22} \end{pmatrix}$$

とすれば，制御法則は

$$u(t) = -\frac{b}{r}[p_{11}^{21} x_1(t) + p_{11}^{22} x_2(t)]$$

と書け，更に $\dot{x}_1(t) = x_2(t)$ であるから，Laplace変換によって次のようになる。

$$U(s) = -G[\tau s + 1]X_1(s)$$

こゝに，$U(s) \triangleq \mathscr{L}\{u(t)\}$，$X_1(s) \triangleq \mathscr{L}\{x_1(t)\}$，

$$G \triangleq b p_{11}^{21}/r, \qquad \tau \triangleq p_{11}^{22}/p_{11}^{21}$$

従って，閉ループ特性方程式 $\Delta(s)$ は

$$\Delta(s) \equiv s^2 + (2\varsigma_0\omega_0 + bG\tau)s + \omega_0^2 + bG = 0$$

となり，与えられた重み Q，r に対してdamping ratio ς 及び固有振動数 ω を決定できる。重み Q，r は閉ループダイナミクスが適当になるように決定されるのが普通である。例えば，文献16)によれば，r をパラメータとして，Q の行列式（$|Q|$）が一定なものの内，閉ループのTotal System Damping（TSD）が最小になるように Q を選ぶのが良いと言われる。この時の最適重み Q^* は

$$Q^* = \begin{pmatrix} \omega, & 0 \\ 0, & \frac{1}{\omega} \end{pmatrix} \quad ; \quad \omega^2 = \omega_0^2 + bG$$

となる。この様に選んだ Q に対して，r をパラメータとする状態量フィードバックの閉ループ根軌跡は第３図の

＊　完全状態量フィードバックを持つ最適系の閉ループダイナミクスは，２次形式評価関数の重みマトリクス Q 及び R を適当に選ぶことによって調整される。それらの選び方については文献16)を参照。

実線のように略記される。rを小さくすると開ループの特性根がどこにあっても，$\lim_{r\to 0}\varsigma = 0.866$となる。$r$の選択はレギュレータのゲイン限界，閉ループの周波数特性あるいはシミュレーションによって決定される。重みQを上のように選ばなくても，rを小さくすれば，利用可能な制御エネルギーが増大することから，一般に閉ループの周波数帯域が広くなる。この例題においては，$x_1(t)=y(t)$であるから，制御法則は

$$U(s)=-G[\tau s+1]Y(s)\ ;\ Y(s)\triangleq\mathscr{L}\{y(t)\}$$

となる。従って，単に測定可能な出力$y(t)$を直接フィードバックして，equalization zeroを$s=-1/\tau$に置けば最適系が簡単に実現され，observerや他の状態量estimatorを必要としない。しかしながら，前節までに開発した手法によって，$\overline{\Delta J}$を最小ならしめる最適reduced order observerを求めてみる。(4.40)から(4.51)式までの必要条件を使って最適observerを求めることもできるが，この例題の場合はコスト増$\overline{\Delta J}$をobserverゲインKに関して直接最小にする。observerの次数は明らかに1次である($n-m=1$)。また，プラントの初期状態量の共分散マトリクスは単位マトリクスで与えられるものとする。

$$X_0=\begin{bmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{bmatrix}$$

こゝで，(4.3)式から$C'=[0,\ 1]$と選ぶことができるから，L_1及びL_2は次のように与えられる。

$$L_1=[1,\ 0]^T\ ;\quad L_2=[0,\ 1]^T$$

従って，

$$T\triangleq C'-KC=[-K,\ 1]\ ;\ K\text{はスカラー}$$

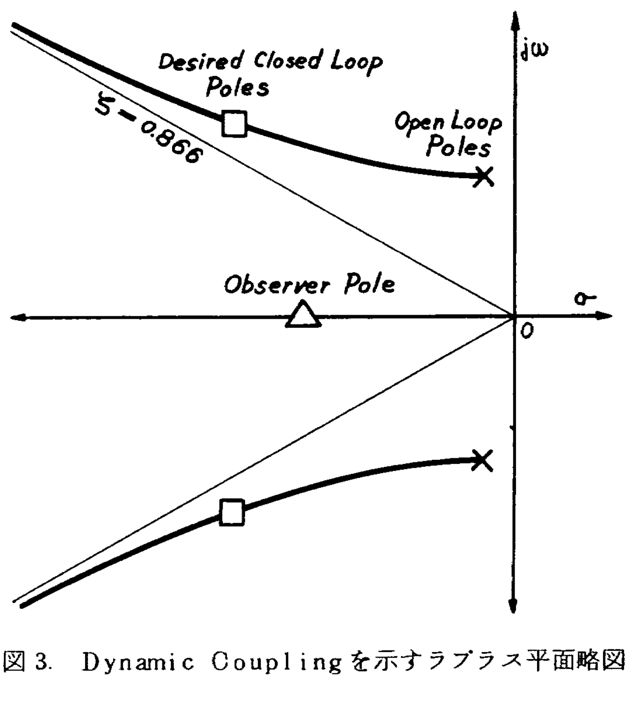

図3.　Dynamic Couplingを示すラプラス平面略図

$$F\triangleq(C'-KC)AL_2=-2\varsigma_0\omega_0-K$$

この場合，(4.51)式はスカラー式であって，$P_{22}\equiv p_{22}$は次のように解ける。

$$p_{22}=\frac{b^2(p_{11}^{22})^2}{2r}\cdot\frac{1}{K+2\varsigma_0\omega_0}$$

また，簡略化されたコスト増((4.56)式)は

$$\overline{\Delta J}\triangleq Tr[X_0T^TP_{22}T]\equiv\frac{b^2(p_{11}^{22})^2}{2r}\cdot\frac{K^2+1}{K+2\varsigma_0\omega_0}$$

となり，明らかにKに関して最小値が存在する。Kが大きくなればFの固有値が左遠方に去ることから，推定誤差の収束が早く，コスト増$\overline{\Delta J}$が小さくなると思われ勝ちであるが，必ずしもそうでないことがわかる。$\overline{\Delta J}$最小と言う意味での最適なKは次のようになる。

$$K^*=-2\varsigma_0\omega_0+\sqrt{1+(2\varsigma_0\omega_0)^2}$$

対応するobserverの各係数は

$$F^*=(C'-K^*C)AL_2=-\sqrt{1+(2\varsigma_0\omega_0)^2}$$

$$G^*=(C'-KC)A(L_1+L_2K^*)$$
$$=-\omega_0^2(1-\varsigma_0^2)-[\sqrt{1+(2\varsigma_0\omega_0)^2}-\varsigma_0\omega_0]^2$$

$$H=(C'-KC)B=b$$

の如く得られる。また，実現されるregulator－plant－observer系の閉ループダイナミクスに影響を及ぼす推定誤差ダイナミクスは

$$\dot{\tilde{e}}(t)=F^*\tilde{e}(t)\ ;\ \tilde{e}(0)=\tilde{e}_0$$

であるから，その特性根s_0(添字"0"はobserverを意味する)は，

$$s_0=-\sqrt{1+(2\varsigma_0\omega_0)^2}$$

この様に，observerの係数，従って特性根がレギュレータ(G，τ，Q，r etc)とは全く独立にプラントのパラメータ(A，B，C)のみから決定される。

第3図において，レギュレータのゲイン限界，閉ループの周波数特性等から，重みrを適当に選び，regulator－plant系(完全状態量フィードバックの理想系)の閉ループ特性根が実線上"口"印になったとし，これをs_r(添字"r"はregulatorを意味する)とする。一方，observerの根s_0("△"印)がs_rとは全く無関係にプラントのς_0及びω_0のみで一意的に決定されるので，s_0の固有振動数がs_rの固有振動数よりはるかに低いことがいくらも起る。特にrが小さく，レギュレーターのゲインGが大きい時は容易に起り得る。その時，明らかにs_0の方がs_rに較べて卓越根となり，regulator－plant－observer系の周波数特性は理想とするregulator－plant系(完全状態量フィードバック)のそれとは，かなり違ったものになる。即ち，observerによる状態量推定の不完全さがもたらす2次形式評価関数の増加は，なるほど最小になるけれども，全体としての閉ループ応答特性

が理想的な応答特性（完全状態量フィードバックのregulator－plant系）とは異ったものになる。最初に述べた如く，レギュレータ設計に使用される実質的な評価関数は，コスト最小と言うことと，閉ループ系が適当な応答特性を持つと言う2面性を持つ。従って，状態量のすべてを計測できない時に，その推定の為にフィードバック回路に挿入する observer は，コスト増が小さいこともさることながら，閉ループ系の応答特性をなるべく変えないように設計されるのが良い。仮りに，上の例で説明されたように，コスト増を最小ならしめる observer の特性根が，理想とする regulator－plant 系の閉ループ特性根（$A-BL^*$ の固有値）より卓越する場合には，多少のコスト増加を犠牲にしても，$A-BL^*$ の固有値の卓越性を保ちたい場合が起る。特に，observer が多次元の場合，その特性根の相互配置をいかにすべきかと言う問題に対して，本章前節までに示した最適 reduced order observerの設計法は何ら効力を持たない。

次章では，observer による状態量推定の不完全性から生ずる多少のコスト増を許しても，observer 特性根の卓越性を押えるために（簡単には，特性根を原点から離すために），スカラー　パラメータを導入してobserver の安定度を自由に変えられるような設計法を提案する。observer の次数が高い時でも，特性根の間の相互配置が新しく導入されるスカラー　パラメータに対して一意的に定まる。observer 安定度と，系全体のコスト増の間の Trade－off が唯一ケのパラメータで調整されることは，実際に工学問題に応用する上で極めて便利なことである。

第5章　安定度調整可能な最適Reduced Order Observer

フィードバック回路に挿入した observer の状態量推定が不完全であることによって，2次形式評価関数が，完全状態量フィードバックの理想系の場合に較べて，一般に増加する。このコスト増を最小に押えるような最適 reduced order observer 設計法を前章で調べた。しかしながら，このように設計される最適 observer はプラントの特性にのみ依存し，レギュレータに依存しないため，observer ダイナミクス（実際には，状態量の推定誤差ダイナミクス）が，regulator－plant 系の閉ループダイナミクスと強い dynamic coupling を持ち，コスト増が最小であるにもかかわらず，目標とする閉ループ周波数特性を得られないかも知れないことも調べた。

実際に，レギュレータを設計する時，2次形式評価関数を最小にすること（即ち，精度の良い制御をすること）のみを考えるのではなく，完全状態量フィードバックを持つ閉ループ系のダイナミクスが適当になること（適度の応答性を持つこと）も考慮するのが普通である。前章で説明されたように，コスト増が少いと言うことだけで observer を設計してしまうと，出来上る系の閉ループダイナミクスが目標とするものから変ってしまい，好ましい結果を持たらさない場合もある。従って，observer の設計は，推定の不完全性によるコスト増を押えながら，且つ，全体の閉ループダイナミクスをなるべく変えないように，両面からなされるのが良い。本章では，多少のコスト増と言う犠牲を払っても，完全状態量フィードバックを仮定した理想系の閉ループダイナミクスが，observer 挿入によってなるべく影響されないように，observerの安定度（周波数バンド幅）を変えられるような設計法を考える。

§ 5.1　Observer 設計の評価関数

フィードバック回路に observer を挿入した場合でも，レギュレータの最も良いゲイン L として完全状態量フィードバック時の最適ゲイン $L^*=R^{-1}B^TP_{11}$ を選んで良い事が§ 4.3 で示された。$L=L^*$であれば，必然的に $P_{12}=O_{n\times(n-m)}$となり（(4.13) あるいは (4.50) 式），実質的な deterministicコスト増 ΔJ は (4.54) 式のようになる。即ち

$$\Delta J=\int_0^\infty \tilde{e}^T(t)\,L_2^T L^{*T} R L^* L_2 \tilde{e}(t)\,dt \tag{5.1}$$

こゝに，

$$\dot{\tilde{e}}(t)=F\tilde{e}(t)\quad ; \quad \tilde{e}(0)=z_0-(C'-KC)x_0$$
$$F\triangleq(C'-KC)AL_2$$
$$P_{11}A+A^TP_{11}-P_{11}BR^{-1}B^TP_{11}+Q=O_{n\times n}\quad ; \quad P_{11}>0$$
$$L^*=R^{-1}B^TP_{11}$$

Anderson & Moore[11]は linear－quadratic なレギュレータの設計に関して，2次形式評価関数の被積分関数に指数関数の重み $\varepsilon^{2\beta t}$ を与えても，評価関数が有限になるようにレギュレータのゲインを決定することを試みた。その結果，閉ループ特性根の実数部が $-\beta$ より小さく，閉ループダイナミクスが保証された安定度を持つようなレギュレータを得た。同様の手法を，上の (5.1) 式に応用し，スカラー　パラメータ $\beta(\geq 0)$ によって observer の安定度を調整することを試みる。

(5.1) 式を基にして，次の擬似コスト増（pseudo cost increment）$\Delta J'$ を考える。

$$\Delta J'=\int_0^\infty \varepsilon^{2\beta t}\,\tilde{e}^T(t)\,L_2^T L^{*T} R L^* L_2 \tilde{e}(t)\,dt \tag{5.2}$$

こゝに，　ε ：自然対数の底

$\beta\geq 0$

$\Delta J'$が有限であるためには，tが無限に近ずくにつれて$\tilde{e}(t)$が$\varepsilon^{-\beta t}$以上の速度で零に収束することが十分であり，また恐らく必要である。新らたに，次の$n-m$次元ベクトル$\hat{e}(t)$を定義する。

$$\hat{e}(t) \triangleq \varepsilon^{\beta t}\,\tilde{e}(t) \tag{5.3}$$

$\tilde{e}(t)$が時間tに関して$\varepsilon^{-\beta t}$以上の収束速度を持つか否かは，上に定義した$\hat{e}(t)$が単に漸近安定か否かに変換される。(5.3)式によって，(5.2)式は形式的に

$$\Delta J' = \int_0^\infty \hat{e}^T(t) L_2^T L^{*T} R L^* L_2 \hat{e}(t)\,dt \tag{5.4}$$

と書け，ベクトル$\hat{e}(t)$は次の微分方程式を満す。

$$\dot{\hat{e}}(t) = \hat{F}\hat{e}(t) \ \ ; \ \ \hat{e}(0) = \tilde{e}_0 \tag{5.5}$$

こゝに，$\hat{F} \triangleq F + \beta I_{n-m}$ (5.6)

ベクトル$\hat{e}(t)$が漸近安定か否かは，マトリクス$\hat{F}$の固有値の実数部が正か負かに依存する。$\hat{F}$のすべての固有値の実数部が負になるような observer パラメータC'及びKが存在するか否かは疑問であろう。しかしながら，マトリクス$\hat{F}$は

$$\hat{F} \equiv C' A L_2 + \beta I_{n-m} - K C A L_2 \tag{5.7}$$

の如く展開され，もし pair $\{L_2^T A^T C'^T + \beta I_{n-m},\ L_2^T A^T C^T\}$がcontrollable であれば，マトリクス$\hat{F}$の固有値をラプス平面上の任意の位置に置くマトリクスKが存在する事はW.M.Wonham[12]によって証明されている。一方，附録の定理A－Iによってpair $\{A,\ C\}$がobserver である時，即ち双対性によって$\{A^T, C^T\}$がcontrollable である時，pair $\{L_2^T A^T C'^T,\ L_2^T A^T C^T\}$ がcontrollableである。従って，pair $\{L_2^T A^T C'^T,\ L_2^T A^T C^T\}$ がcontrollable な時，pair $\{L_2^T A^T C'^T + \beta I_{n-m},\ L_2^T A^T C^T\}$ がcontrollable であることが言えれば良い。実際，附録の定理A－IIによって，pair $\{L_2^T A^T C'^T + \beta I_{n-m},\ L_2^T A^T C^T\}$がcontrollable と言えるから，(5.7)式のマトリクス$\hat{F}$の固有値の実数部を負にするようなマトリクスKが存在する。

今，$\hat{F}\,(\triangleq F + \beta I_{n-m})$の固有値の実数部がすべて負で，$\hat{e}(t)$が時間と共に漸近的に収束するものと仮定する。この時，有限な$\Delta J'$が存在して次のように計算される。

$$\Delta J' = \hat{e}_0^T \hat{P}_{22}\, \hat{e}_0 \tag{5.8}$$

こゝに，

$$\hat{P}_{22}\,(F+\beta I_{n-m}) + (F+\beta I_{n-m})^T \hat{P}_{22} + L_2^T L^{*T} R L^* L_2 = O_{(n-m)\times(n-m)} \tag{5.9}$$

observer の初期値z_0は普通，零と置かれるから，$\hat{e}_0$は次のようになる。

$$\hat{e}_0 \equiv \tilde{e}_0 = z_0 - (C'-KC)\,x_0 = -(C'-KC)\,x_0 \tag{5.10}$$

従って，(5.8)式の疑似コスト増$\Delta J'$は次のように書ける。

$$\Delta J' = x_0^T (C'-KC)^T \hat{P}_{22}\,(C'-KC)\,x_0 \tag{5.11}$$

前章と同様に，プラントの初期状態量はランダムであるとし，その共分散マトリクス$X_0 \triangleq \mathscr{E}\{x_0 x_0^T\}$が与えられているとする（但し，$\overline{x_0} \triangleq \mathscr{E}\{x_0\} = O_n$）。擬似コスト増$\Delta J'$の ensemble 平均は

$$\overline{\Delta J'} \triangleq \mathscr{E}\{\Delta J'\} = Tr\,[\,X_0\,(C'-KC)^T \hat{P}_{22}\,(C'-KC)\,] \tag{5.12}$$

で与えられる。このようにして得られる$\overline{\Delta J'}$を最小にするような最適 reduced order observer を求めるのが本章の主題である。

§ 5.2　可変安定度を持つ最適Observer

Observer の未知設計パラメータはC'及びKであるが，前章に於ける議論から，一般性を失うことなく$C' = [\,O_{(n-m)\times m} \,\vdots\, I_{n-m}\,]$と選んで良い。対応するマトリクス$L_1$及び$L_2$も同様に次のようになる。

$$\begin{bmatrix} C \\ \cdots \\ C' \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} C_1 & \vdots & C_2 \\ \cdots & & \cdots \\ O_{(n-m)\times m} & \vdots & I_{n-m} \end{bmatrix} \tag{5.13}$$

$$[\,L_1 \,\vdots\, L_2\,] = \begin{bmatrix} C_1^{-1} & \vdots & -C_1^{-1} C_2 \\ \cdots & & \cdots \\ O_{(n-m)\times m} & \vdots & I_{n-m} \end{bmatrix} \tag{5.14}$$

従って，決定すべき設計パラメータはマトリクスKのみであるから，本節での問題は次のように書ける。

問題－2．『与えられたパラメータβに対する擬似コスト増（pseudo cost increment）$\Delta J'$の初期状態量x_0に関する平均値$\overline{\Delta J'}$：

$$\overline{\Delta J'} = Tr\,[\,X_0\,(C'-KC)^T\,\hat{P}_{22}\,(C'-KC)\,]$$

を最小にする observer ゲインKを求めよ。但し，

$$\hat{P}_{22}\,(F+\beta I_{n-m}) + (F+\beta I_{n-m})^T \hat{P}_{22} + L_2^T L^{*T} R L^* L_2 = O_{(n-m)\times(n-m)}$$

$$F \triangleq (C'-KC)\,A L_2$$ 』

上の条件付き最適問題をLagrange乗数マトリクス$\hat{\Gamma}$（$(n-m)\times(n-m)$）を導入して条件無しの最適問題として解く。Lagrangian $\hat{\mathscr{L}}(K,\ \hat{P}_{22})$を次のように定義する。

$$\begin{aligned} \hat{\mathscr{L}}(K,\ \hat{P}_{22}) \triangleq\ & Tr\,[\,X_0\,(C'-KC)^T \hat{P}_{22}\,(C'-KC)\,] \\ & + Tr\,[\,\hat{\Gamma}^T\{\,(\,(C'-KC)\,AL_2 + \beta I_{n-m})^T \hat{P}_{22} \\ & + \hat{P}_{22}\,(\,(C'-KC)\,AL_2 + \beta I_{n-m}) + L_2^T L^{*T} R L^* L_2\}\,] \end{aligned} \tag{5.15}$$

$\hat{\mathscr{L}}(K,\ \hat{P}_{22})$の停留条件を，gradient matrix 法によって求める。

$$\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}(K,\ \hat{P}_{22})}{\partial \hat{P}_{22}} = O_{(n-m)\times(n-m)} \ :$$

$$[\,(C'-KC)AL_2 + \beta I_{n-m}\,]\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}[\,(C'-KC)AL_2 + \beta I_{n-m}\,]^T + (C'-KC)X_0(C'-KC)^T = O_{(n-m)\times(n-m)} \tag{5.16}$$

$$\frac{\partial \hat{\mathscr{L}}(L, \hat{P}_{22})}{\partial K} = O_{(n-m)\times m} :$$

$$2\hat{P}_{22}[K(CX_0C^T) - C'X_0C^T - \hat{\Gamma}L_2^TA^TC^T] = O_{(n-m)\times m}$$

こゝで，$\hat{P}_{22}$ 及び CX_0C^T が共に正定（nonsingular）と仮定して，

$$K = C'X_0C^T(CX_0C^T)^{-1} + \hat{\Gamma}L_2^TA^TC^T(CX_0C^T)^{-1} \tag{5.17}$$

を得る。従って，(5.3) 式で定義したベクトル $\hat{e}(t)$ の応答特性を支配するマトリクス $\hat{F} \triangleq F + \beta I_{n-m}$ は，(5.7) 及び (5.17) 式から次のようになる。

$$\hat{F} = S + \beta I_{n-m} - \hat{\Gamma}L_2^TA^TC^T(CX_0C^T)^{-1}CAL_2 \tag{5.18}$$

こゝに，マトリクス S は (4.21) 式と同様に

$$S \triangleq C'[I_n - X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}C]AL_2 \tag{5.19}$$

で定義する。このように，Lagrange 乗数マトリクス $\hat{\Gamma}$ が決れば，マトリクス $\hat{F}$ も observer ゲイン K も決定される。(5.17) 式を (5.16) 式に代入して，(5.19) 式を使えば，次の $\hat{\Gamma}$ に関する代数的マトリクスRiccatiの式を得る。

$$\begin{aligned}&(S+\beta I_{n-m})\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}(S+\beta I_{n-m})^T\\ &-\hat{\Gamma}L_2^TA^TC^T(CX_0C^T)^{-1}CAL_2\hat{\Gamma}\\ &+C'[X_0 - X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0]C'^T = O_{(n-m)\times(n-m)}\end{aligned} \tag{5.20}$$

評価関数である擬似コスト増の平均 $\overline{\Delta J'}$ が有限であって，(5.12) 式のように書けるためには，Riccatiの式 (5.20) の解 $\hat{\Gamma}$ は (5.18) 式の $\hat{F}$ を安定化（固有値の実数部を負に）するようなものでなければならない。前章で (4.20) 式について調べたように，$\{S^T, L_2^TA^TC^T\}$ は controllable pair であるから，附録の定理A−IIによって $\{S^T + \beta I_{n-m}, L_2^TA^TC^T\}$ もまた controllable pair である。マトリクス $[I_n - X_0^{1/2}C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0^{1/2}]$ が idempotent matrix であるから，マトリクス $C'[X_0 - X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0]C'^T$ が半正定であることも前章で調べた。従って，R. E. Kalmanの定理[17]によって，マトリクス $\hat{F}$ を安定化する (5.20) 式の解 $\hat{\Gamma}$ が唯一に存在し，それは正定である。

$$\hat{\Gamma} > 0 \tag{5.21}$$

このように，マトリクス $\hat{F}$ は一意的に安定化されるので，(5.5) 式から $\hat{e}(t)$ は時間に関して漸近的に収束する。従って，(5.3) 式から observer の状態量推定誤差を表わす $\tilde{e}(t)$ の収束速度は $\varepsilon^{-\beta t}$ よりも早い。このことを，ラプラス平面上の特性根に関して言い換えれば，$\hat{F}$ の固有値を λ_i，F の固有値を s_i とした時，(5.6) 式から次の関係を得る。

$$s_i = \lambda_i - \beta, \quad i = 1, 2, 3, \cdots, n-m$$

本節におけるマトリクス F は $\hat{\Gamma}$ 及び K を通じて，すでにパラメータ β の関数であるから，第4章で求めた最適 reduced order observer の特性根（F の固有値）を，ラプラス平面上で実軸に沿って平行移動しても上式で言う λ_i は得られないことを注意しておく。$\hat{F}$ の固有値の実数部は，すべて負であるから

$$R_e\{\lambda_i(\hat{F})\} < 0, \quad i = 1, 2, \cdots, n-m$$

$$\therefore R_e\{s_i(F)\} < -\beta, \quad i = 1, 2, \cdots, n-m \tag{5.22}$$

即ち，フィードバック回路に observer を挿入したことによって，閉ループ系に新たに附加される observer 特性根（F の固有値）のすべてが，ラプラス平面上 $\sigma = -\beta$ より左に置かれることになる。従って，パラメータ β を適当に変えることによって，推定誤差ダイナミクスの安定度（observerの安定度）を自由に調整することが出来る。

このように，与えられた安定度調整パラメータ β に対して，初期の目的を満す observer ゲイン K が一意的に決定されるから，observer 設計に必要なすべての係数マトリクスが一意的に決定される。便宜上，以上の結果を次にまとめておく。

$$\begin{pmatrix} C \\ \cdots \\ C' \end{pmatrix} = \left(\begin{array}{c:c} C_1 & C_2 \\ \hdashline O_{(n-m)\times m} & I_{n-m} \end{array}\right) : \quad C_1 > 0$$

$$[L_1 \vdots L_2] = \left(\begin{array}{c:c} C_1^{-1} & -C_1^{-1}C_2 \\ \hdashline O_{(n-m)\times m} & I_{n-m} \end{array}\right)$$

$$\begin{aligned}&(S+\beta I_{n-m})\hat{\Gamma} + \hat{\Gamma}(S+\beta I_{n-m})^T\\ &-\hat{\Gamma}L_2^TA^TC^T(CX_0C^T)^{-1}CAL_2\hat{\Gamma}\\ &\quad+C'[X_0 - X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}CX_0]C'^T = O_{(n-m)\times(n-m)}\end{aligned}$$

$$S = C'[I_n - X_0C^T(CX_0C^T)^{-1}C]AL_2$$

$$\hat{\Gamma} > 0$$

$$K = C'X_0C^T(CX_0C^T)^{-1} + \hat{\Gamma}L_2^TA^TC^T(CX_0C^T)^{-1}$$

以上によって，適当な β に対してマトリクス K を求めた後，次の係数マトリクスを計算する。

$$F = (C' - KC)AL_2, \quad G = (C' - KC)A(L_1 + L_2K)$$

$$H = (C' - KC)B$$

$$M = L_1 + L_2K, \quad N = L_2$$

これらを使って，observer を容易に構成できる。

本章の重要な点は，1ケのパラメータ β を与えることによって，安定度の保証された observer を設計できることである。実際に設計する時には，β をパラメータとしてマトリクス $F = (C' - KC)AL_2$ の根軌跡を求め，regulator − plant 系（完全状態量フィードバック）の理想とする閉ループ特性根（$A - BL^*$ の固有値）との関係を参考にしながら，種々の工学的判断を基に（例えば，dynamic couplingの少いように）適当な β の値を選ぶのが良い。

最後に，$\beta = 0$ とすれば，本章で得られた結果は，最適 reduced order observer について得られた前章の結

果と全く一致することに注意しておく。

第6章　む　す　び

線形系の最適制御法則は一般に完全状態量フィードバックとなる。このような理想的最適系を実現するには，計測可能な出力から状態量のすべてを推定せねばならない。実際に系を実現することを目的としてフィードバック回路に挿入されるreduced order observerの設計法を研究した。

Observer理論では通常極めて多くのパラメータに自由度が残され，observerの固有値を任意に指定できると言われる。しかしながら，observerの次数が高い時，すべての固有値を指定することは実際上極めて難しい。observerによる状態量推定は一般に誤差を伴い，その結果，最適レギュレータの設計に用いられる2次形式評価関数（コスト）が増加する。[1] Observer設計の1つの妥当な方法は，このコスト増が最小になるようにobserverの設計パラメータを決定することである。[7), 8)]

多くの文献に見られるようなobserverの公理的誘導（axiomatic derivation）では，本質的に独立な未知設計パラメータを見失い勝ちである。Rom & Sarachik[8)]はプラントダイナミクスをobservability canonical formで与え，observerの本質的に独立な未知設計パラメータを探った。本論文では，canonical formから出発しなくても，Kwakernaak & Sivan[10)]のように逐次積重ね（constructive way）によってobserverを誘導すれば，observerゲインマトリクスKが本質的に独立な設計パラメータであると容易に理解されることを示した。

必ずしも真の状態量$x(t)$と恒等的に等しくはない推定状態量$\hat{x}(t)$をフィードバックした時，レギュレータの最適ゲインが理想的な場合（$x(t)$フィードバック）のゲインL^*のままで良いか否か疑問である。そこで，レギュレータゲインL及びobserverゲインKに関して2次形式評価関数の最小化（単にコスト増の最小化ではない）を試みた。その結果，レギュレータゲインLはobserverの有無と無関係にL^*に等しくて十分であり，observerゲインKはレギュレータゲイン$L\ (=L^*)$とは無関係に，プラントの開ループダイナミクス（マトリクスA，B）と，出力特性（マトリクスC）のみに依存して一意的に決定される事を示した。それはRom & Sarachik[8)]の結果を支持し，Newmann[7)]の結論を必ずしも正しくないとするものである。また，レギュレータのゲインが$L=L^*$で良い為，結局の所，observer挿入によるコストの増分のみが最小になるようにobserverゲインKと選べば良く，observerの設計に当って2次形式評価関数の全体を考慮する必要がないことが明らかになった。このように，最適observerの設計に当り，2次形式コスト或いはコスト増を考慮する方法は，本論文が最初ではなく，NewmannやRom & Sarachikによってすでに試みられた（Newmannの結論には誤りがあるけれども）。本論文では，Rom & Sarachikのようにobservability canonical formを使用せず，恐らく理解しやすく，且つ，計算も容易な別のapproachを示した。

本来，observerは観測できる出力から観測できない状態量を推定し，完全状態量フィードバックの理想系を近似的に実現するために挿入されるものであって，全体の閉ループ特性を改善するためではない。observerの設計には，通常の2次形式評価関数（コスト）の増加が少いことだけでなく，実現目標である理想系の閉ループ動特性に対する影響が少くなるような配慮も必要である。

第4章で取り扱った最適reduced order observerのように，コストの面からのみobserverを設計すると，実現される系全体の閉ループ特性が，目標である理想系（完全状態量フィードバック）のそれと異ったものになる可能性があることを簡単な例題で概説した。即ち，実際の閉ループ特性は，理想系の閉ループ特性根とobserver特性根によって支配されるが，後者の特性根が前者の特性根に較べ卓越して，両者が強いdynamic couplingを起す可能性である。このような場合は極くまれに起るのではなく，Separation Theoremが成立する限り，レギュレータゲインL^*の高い系では頻ぱんに起り得る。仮りに，目標とする理想系（完全状態量フィードバック）と，コスト増を最小にする最適observerとが強いdynamic couplingを持つ結果になった時，そのcouplingを弱めるためにある程度の余分のコスト増を支払ったとしても，卓越したobserver特性根をどのように動かすべきかは難しい問題である。特に，observerの次数が高い時には極めて困難となる。

第5章では，コスト増の積分表示に更に$\varepsilon^{\beta t}$（$\beta\geq 0$）なる附加重みを与えたもの，言うなれば「擬似コスト増」を最小にするようなobserverを考えた。その結果，スカラー　パラメータβを適当に調整することによって，安定度を自由に変えられる最適observerが得られた。即ち，多少のコスト増という犠牲を払うことになるが，パラメータβによってobserver特性根の卓越性を調整できるのである。更に言い換えれば，βの選択によってobserverのバンド幅を調整できることを意味する。勿論，$\beta=0$の場合には，第4章のコスト増を最小にする最適reduced order observerと全く一致する。従って，実際のobserver設計に当っては，observer次数の高い

時でもβ（≥ 0）をパラメータとするobserverの（マトリクスFの）根軌跡を描き，理想系（完全状態量フィードバック）の閉ループ特性根との関連，或いは，存在するであろうノイズの周波数バンド幅を考慮して，適当なβを工学的判断によって比較的容易に決定できるであろう。丁度，サーボ系のバンド幅を制御対象のバンド幅よりも広くなるようにするのと同様，observerバンド幅が理想系のバンド幅より広くなるようにβを選ぶのが一般的であろう。

本論文によって，安定度を自由に調整できる最適reduced order observerの1つの設計法が提案されたが，実際問題に応用するには，まだ難点が残されている。それは，このような最適observerを設計するには，プラントの状態量の初期共分散マトリクス（covariance matrix）$X_0 \triangleq \mathscr{E}\{x_0 x_0^T\}$を知らねばならないことである。現実には，$X_0$をあらかじめ推定できないような場合が相当多い。従って，今後の課題の1つは，X_0が解らぬ時，observerをいかに設計するかである。

文　献

1) Bongiorno, J.J., Jr., and D.C. Youla, "On Observers in Multi-variable Control Systems," Int. J. Control, Vol. 8, No. 3, 1968.
2) Bongiorno, J.J., Jr., and D.C. Youla, "Discussion of "On observers in multi-variable control systems," Int. J. Control, Vol. 12, No. 1, 1970.
3) Bongiorno, J.J., Jr., "On the design of observers for insensitivity to plant parameter variations," Int. J. Control, Vol. 18, No. 3, 1973.
4) Bongiorno, J.J., Jr., and Y.Ö. Yüksel, "Observers for Linear Multivariable Systems with Applications," IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-16, No. 6, December 1971.
5) Newmann, M.M., "Optimal and sub-optimal control using an observer when some of the state variables are not measurable," Int. J. Control, Vol. 9, No. 3, 1969.
6) Newmann, M.M., "A continuous-time reduced-order filter for estimating the state vector of a linear stochastic system," Int. J. Control, Vol. 11, No. 2, 1970.
7) Newmann, M.M., "Specific optimal control of the linear regulator using a dynamical controller based on the minimal-order Luenberger observer," Int. J. Control, Vol. 12, No. 12, 1970.
8) Rom, D.B., and P.E. Sarachik, "Further results on the design of optimal compensators using a minimal-order observer," Int. J. Cdntrol, Vol. 18, No. 4, 1973.
9) Rom, D.B., and P.E. Sarachik, "The Design of Optimal Compensators for Linear Constant Systems with Inaccessible States," IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-18, No. 5, October 1973.
10) Kwakernaak, H., and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems,* Wiley-Interscience, a Division of John Wiley & Sons, Inc., New York, 1972.
11) Anderson, B.D.O., and J.B. Moore, *Linear Optimal Control,* Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1971.
12) W.M. Wonham, "On Pole Assignment in Multi-Input Controllable Linear Systems," IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-12, No. 6, December 1967.
13) Langenhop, C.E., "ON THE STABILIZATION OF LINEAR SYSTEMS," American Mathematical Society, Proceedings, Vol. 15, 1964.
14) Chen, C.T., *Introduction to Linear System Theory,* Holt, Rinehart and Winston, Inc., New York, 1970.
15) Pease, M.C., III, *Methods of Matrix Algebra,* Academic Press, New York, 1965.
16) Kawahata, N., "Linear Control System Optimization by Optimal Selection of the Weighting Matrices in Quadratic Cost Functions," Ph. D. Dissertation, Dept. of Aerospace and Mechanical Sciences, Princeton University, Princeton, New Jersey, 1973.
17) Kalman, R.E., "Contributions to the Theory of Optimal Control," Bol. Soc. Mat. Mexicana, Vol. 5, 1960.
18) Levine, W.S., and M. Athans, "On the Determination of the Optimal Constant Output Feedback Gains for Linear Multivariable Systems," IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-15, No. 1, February 1970.
19) Bellman, R.E., *Introduction to Matrix Analysis,* MeGraw-Hill, 1960.
20) Kreindler, E., and P.E. Sarachik, "On the Concepts of Controllability and Observability of Linear Systems," IEEE Trans. Auto. Control, Vol. AC-9, No. 2, April 1964.

附録―A ControllabilityとObservabilityに関する定理

Controllability と Observabilityの基本的事項については種々の論文，著書に述べられている。こゝでは，本論文で特に必要な関係について証明のあらすじを述べる。

定理　A－I　「制御系の係数マトリクスの pair $\{A,\ C\}$ が completely state observable ならば，pair $\{C'AL_2,\ CAL_2\}$ も completely state observable である。」

双対性によって，上の定理は次の系のように言い換えることができる。

系　A－I　「制御系の係数マトリクスの pair $\{A^T,\ C^T\}$ が completely state controllable なら，pair $\{L_2^TA^TC'^T,\ L_2^TA^TC^T\}$ も completely state controllable である。」

こゝでは，上の系を証明しておく。証明の過程を明確にするため，次のようにいくつかのLemmasを述べる。

Lemma 1.　「pair $\{L_2^TA^TC'^T,\ L_2^TA^TC^T\}$ の complete state controllabilityは，triplet $\{C'^TL_2^TA^T,\ C^T,\ L_2^TA^T\}$ の complete output controllabilityと等価である。」

証明　：　次のような系を考える。

$$\dot{\xi}(t)=C'^TL_2^TA^T\xi(t)+C^T\mu(t) \qquad (A-1)$$

$$\eta(t)=L_2^TA^T\xi(t) \qquad (A-2)$$

こゝに，$\xi(t)$はn次元状態量：$\mu(t)$はm次元操作量：$\eta(t)$は$n-m$次元出力とする。

（A－2）式を時間tに関して微分して，（A－1）式を代入すると，

$$\dot{\eta}(t)=L_2^TA^TC'^TL_2^TA^T\xi(t)+L_2^TA^TC^T\mu(t)$$

$$\therefore\ \dot{\eta}(t)=L_2^TA^TC'^T\eta(t)+L_2^TA^TC^T\mu(t) \qquad (A-3)$$

（A－3）式で与えられる系で，pair $\{L_2^TA^TC'^T,\ L_2^TA^TC^T\}$が completely state controllable であることは，任意のベクトルη_0を他の任意のベクトルη_1に有限時間内に移す適当な操作$\mu(t)$が存在することを意味する。このことは，（A－1）及び（A－2）式で与えられる系で，出力$\eta(t)$を任意に制御する適当な$\mu(t)$があることを意味するから，triplet $\{C'^TL_2^TA^T,\ C^T,\ L_2^TA^T\}$ が completely output controllableである。　Q.E.D.

Lemma 2.　「（A－1）及び（A－2）式で表わされる系で，rank $[L_2^TA^T]=n-m$（最大）の時，pair $\{C'^TL_2^TA^T,\ C^T\}$ の complete state controllability は triplet $\{C'^TL_2^TA^T,\ C^T,\ L_2^TA^T\}$ の complete output controllabilityを意味する。」

証明は，かなり基本的な事から始めねばならず比較的長くなるので，省略する。例えば，[20] を参照の事。

以上のLemma 1及び2から，定理A－Iの系を証明するには，pair $\{A^T,\ C^T\}$ が completely state controllable であることから，pair $\{C'^TL_2^TA^T,\ C^T\}$ が completely state controllable であることを示せば良い。

Lemma 3.　「pair $\{C'^TL_2^TA^T,\ C^T\}$ が completely state controllable であるための必要十分条件は，pair $\{A^T,\ C^T\}$ が completely state controllable なことである。」

証明　：　次の系を考える（（A－1）式の系）。

$$\dot{\xi}(t)=C'^TL_2^TA^T\xi(t)+C^T\mu(t) \qquad (A-4)$$

定義から

$$L_1C+L_2C'=I_n \qquad (A-5)$$

$$\therefore\ C'^TL_2^T=I_n-C^TL_1^T \qquad (A-6)$$

従って，（A－4）式は次のように書ける。

$$\dot{\xi}(t)=A^T\xi(t)+C^T(-L_1^TA^T\xi(t))+C^T\mu(t) \qquad (A-7)$$

もし pair $\{A^T,\ C^T\}$ が completely state controllable ならば，

$$C\varepsilon^{At}\xi_1=O_m \qquad (A-8)$$

なる式が$\xi_1=O_n$を意味する。[10),11),14)] また，$\exp(-AL_1Ct)$は nonsingular であるから，

$$\varepsilon^{-AL_1Ct}\xi_2=O_n \qquad (A-9)$$

は$\xi_2=O_n$を意味する。従って，$\xi_1=[\exp(-AL_1Ct)]\xi_2$と置けば，（A－8）式は

$$C\varepsilon^{At}\cdot\varepsilon^{-AL_1Ct}\xi_2=C\varepsilon^{(A-AL_1C)t}\xi_2=O_m \qquad (A-10)$$

と書くことが出来，この式は$\xi_2=O_n$を意味することになる。即ち，第2及び第3辺から pair $\{(A-AL_1C)^T,\ C^T\}$ は completely state controllable である。従って，（A－7）式で与えられる系が completely state controllable と言えるから，（A－4）式の系も completely state controllable である。つまり，pair $\{C'^TL_2^TA^T,\ C^T\}$が completely state controllable である。このように十分条件が証明された。必要条件もまた同様に示すことができる。

従って，上の3つのLemmasを逆にたどれば，定理A－Iの系を証明できる。

定理　A－II　「pair $\{\tilde{A}+\beta I_n,\ \tilde{B}\}$ が completely state controllable であるための必要十分条件は，pair $\{\tilde{A},\ \tilde{B}\}$ が completely state controllable なことである。」

証明　：　もし pair $\{\tilde{A},\ \tilde{B}\}$ が completely state controllable であれば，

$$\widetilde{B}^T \varepsilon^{\widetilde{A}^T t} \xi_1 = O_r \quad \text{(A-11)}$$

は，$\xi_1 = O_n$ を意味する。任意の ξ_1 に対して次式を満す η_1を考える。

$$\xi_1 = \varepsilon^{\beta I_n t} \eta_1 \quad \text{(A-12)}$$

$\varepsilon^{\beta I_n t}$ は nonsingular マトリクス（$n \times n$）であるから，$\xi_1 = O_n$ は $\eta_1 = O_n$ を意味する。従って，（A-11）式は

$$\widetilde{B}^T \varepsilon^{\widetilde{A}^T t} \xi_1 = \widetilde{B}^T \varepsilon^{\widetilde{A}^T t} \varepsilon^{\beta I_n t} \eta_1 = O_r \quad \text{(A-13)}$$

となって，$\eta_1 = O_n$ を意味する。即ち，pair $\{ \widetilde{A}+\beta I_n, \widetilde{B} \}$ は completely state controllable である。以上のように十分条件が示された。必要条件は同様に証明されるので省略する。 Q.E.D.

本論文§5.1の議論では，$\widetilde{A}$を $L_2^T A^T C'^T$，$\widetilde{B}$を $L_2^T A^T C^T$ そして，こゝでの次元 r を（$n-m$）と思えば良い。

附録―B Idempotent Matrix

定理 B. 『Idempotent matrixは半正定（positive semidefinite）であって，その固有値は1と0からなる。』

この定理の証明は，文献15）に見られるが，便宜上，こゝにまとめておく。

証明 ： Mを $n \times n$ の idempotent matrixとする。即ち

$$M^2 = M \quad \text{(B-1)}$$

n 次元のベクトル空間を S とし，次式

$$M x_1 = x_1 \quad \text{(B-2)}$$

を満す全べての x_1 からなる集合を S_1，即ち，

$$S_1 = \{ x_1 \ ; \ M x_1 = x_1 \} \quad \text{(B-3)}$$

また，S_2を次式

$$M x_2 = O_n \quad \text{(B-4)}$$

を満す全べてのx_2からなる集合とする。即ち，

$$S_2 = \{ x_2 \ ; \ M x_2 = O_n \} \quad \text{(B-5)}$$

こゝで，集合 S_1 及び S_2 が全空間 Sの分割（decomposition）であれば，Mの固有値は0と1のみからなる。もし全空間 S を分割するために，S_1 及び S_2以外に別の集合が必要なら，Mの固有値として0と1以外のものがあるであろう。従って，集合 S_1 と S_2 が全空間 Sの分割になっているかどうかが問題である。

仮りに，部分集合 S_1 と S_2 に共通なベクトル u があったとする。$u \in S_1$であるから，（B-2）式より

$$M u = u \quad \text{(B-6)}$$

また，$u \in S_2$でもあるから，（B-4）式より

$$M u = O_n \quad \text{(B-7)}$$

従って，（B-6）及び（B-7）式から u は null vector となるから，集合 S_1 と S_2 は原点以外に共通部分のない Sの部分空間（disjoint subspaces of S）となる。

x を任意のベクトル（$x \in S$）とすれば，次のように書ける。

$$x = M x + (I_n - M) x \quad \text{(B-8)}$$

もし x_1 及び x_2 をそれぞれ次のように定義し，

$$x_1 \triangleq M x, \quad x_2 \triangleq (I_n - M) x \quad \text{(B-9)}$$

（B-2）式に代入して，（B-1）式を使えば，

$$M x_1 = M^2 x = M x \equiv x_1$$

となり，（B-9）で定義された x_1 は確かに S_1 に属する。同様に，（B-9）式の x_2を（B-4）式に代入して，(B-1) 式を使えば，

$$M x_2 = M (I_n - M) x = M x - M^2 x = O_n$$

となって，x_2 は S_2に属する。このように，空間 Sの任意のベクトル xは次のように書けるから，

$$x = x_1 + x_2, \quad x_1 \in S_1 \text{ and } x_2 \in S_2$$

全空間 S は部分空間（subspaces）S_1 と S_2 に分割（decomposition）される。従って，idempotent matrix Mの固有値は0と1だけからなる。このことはまた，M が半正定マトリクスであることを意味する。

Q.E.D.

航空宇宙技術研究所報告381号

昭和49年8月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　株式会社　共進
東京都杉並区久我山4－1－7(羽田ビル)

Printed in Japan