NAL TR-384

UDC 521.4:
530.145.7:
629.783.525

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-384

人工衛星の運動におけるZonal Harmonicsによる摂動

——von Zeipelの方法による一次理論——

武　内　澄　夫

1974年8月

航　空　宇　宙　技　術　研　究　所

NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

人工衛星の運動におけるZonal Harmonicsによる摂動*

——von Zeipelの方法による一次理論——

武　内　澄　夫**

Zonal Harmonic Perturbations in the Motion of an Artificial Satellite

The First-Order Theory by von Zeipel's Method

By Sumio TAKEUCHI

ABSTRACT

Perturbative effects of earth oblateness on the motion of an artificial satellite are investigated by von Zeipel's modification of the method of Delaunay. In Delaunay variables, both additions to the secular motions and long-periodic terms are found for zonal harmonic of any order above the second. The complete solution of the problem is given by Brouwer's first-order solution of the main problem and the secular and long-periodic contributions caused by the zonal harmonics added to the principal term and the second harmonic. It is assumed that J_2 is a small quantity of the first order, and all other coefficients J_p for $p > 2$ are of the second order.

The numerical values of the coefficients of eccentricity functions and those of inclination functions are given for the gravitational potential of the earth represented by the sum of the central field and the perturbing potential up to the twenty-first order.

The theory is applied to the sun-synchronous orbit to calculate the variations of the orbital elements.

1. 緒　　言

地球の重力の作用下にある人工衛星の運動を決定しようとするに際して，運動方程式にLagrange's planetary equationsを用いれば第一階の摂動あるいは線型摂動を直ちに求めることができる。これについては先に報告し,[1),2)] その中で地球の重力のpotentialのharmonicsを一般項で表わした場合の理論を示した。ここで軌道決定，軌道制御などの高精度化にともなって一層詳細に運動を決定しようとする場合には線型摂動にさらに加えて非線型摂動をも求める必要がある。

この線型および非線型の摂動までをpotentialとして中心項とzonal harmonicsのみをとった力学系に関して求めることが最も重要であるが，このような理論の一つとして正準変換の理論にvon Zeipelの方法を用いたものがある。そしてこれにはHamilton関数の展開式において考慮する微小量のorderにしたがって一次理論，二次理論などがある。

この一次理論はBrouwerによって確立され，そこではharmonicsの五次までをとった場合の摂動が求められている。ただし短周期項は二次の項のみについて出されている。[3)] Giacagliaはこの理論をすすめてharmonicsとして十二次までをとったときの摂動を求めた。[4)] またGar-

---

* 昭和49年6月11日　受付
** 宇宙研究グループ

finkelはharmonicsとして一般項をとったときについて論じている[5]。それから古在教授はこのような摂動をLagrage's planetany equationsを用いて求めている[6]。

次に二次理論についてはBrouwerの一次理論の拡張としての古在教授の研究が行なわれている[7),8),9)]。

本報告はこのような一次理論を完結することを目ざし，主問題に関してはBrouwerの理論を用い，二次をこえるharmonicsとしてはこれを一般項で表示したものをとり，これに基づく長年および長周期摂動を求めた。この際に二次をこえるharmonicsにおける定数の絶対値はすべて二次のharmonicsの定数に関して二次の微小量として理論をたてた。次いでこの一般式によってharmonicsの二十一次までをとった場合の計算式を明示した。そして最後に太陽同期軌道を例にとり，これに関する数値計算を行なって軌道要素の変化を求めてみた。

運動決定の高精度化は，一次理論においてharmonicsとして高次のものまでをとった理論によっても行なわれるが，さらにまたこの一次理論を基礎とする二次理論によって一層完全なものとなる。なおこれについては今後の報告において論ずる予定である。

2. 力学系

人工衛星は地球の重力の作用のみをうけるものとする。ただし地球はその自転軸に関して回転対称の質量分布をもつとみなす。次に地心Oを原点とする座標系O xyz をとる。ここでx軸およびz軸はそれぞれ春分点および天の北極を通り，座標系は右手系直交座標系をなすとする。またこの座標系は恒星系に対して並進運動のみをするとみなす。そしてこの座標系に関して人工衛星の運動を決定する。

このとき単位質量の人工衛星に対する地球の重力のpotentialは次式で表わされる。

$$\left.\begin{aligned} U &= \frac{\mu}{\mathrm{r}}\left\{1-\sum_{p=2}^{\infty} \mathrm{J}_p\left(\frac{a_e}{\mathrm{r}}\right)^p \mathrm{P}_p(\sin\beta)\right\} \\ \mu &= \mathrm{G\,M}_e \end{aligned}\right\} \quad (2.1)$$

ここに

μ ：地心重力定数

G ：万有引力の定数

M_e ：地球の質量

J_p ：定数

a_e ：地球の平均赤道半径

r ：地心距離

β ：地心緯度

P_p ：Legendre関数

である。ここで地球の質量に対して人工衛星の質量を無視してある。

それから平均太陽時あるいは常用時をtとする。

3. 運動方程式

人工衛星の接触軌道要素として

a ：軌道の半長軸

e ：軌道の離心率

i ：赤道面に対する軌道面の傾斜角

Ω ：昇交点の赤経

ω ：昇交点から近地点までの運動の向きにはかった角距離

χ ：epochにおける平均近点離角

をとる。ここでnを平均運動とすれば

$$\mu = n^2 a^3 \quad (3.1)$$

が成立し，平均近点離角は次のようになる。

$$M = \chi + nt \quad (3.2)$$

また真近点離角をfとすれば次式が成立する。

$$\mathrm{r} = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos f} \quad (3.3)$$

このときDelaunay変数をとって，運動量変数をL，G，Hとし，これに共役な角変数をl，g，hとすれば次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} L &= (\mu a)^{\frac{1}{2}}, & l &= M \\ G &= L(1-e^2)^{\frac{1}{2}}, & g &= \omega \\ H &= G\cos i, & h &= \Omega \end{aligned}\right\} \quad (3.4)$$

ここにHは地心に関する人工衛星の運動量能率のz成分を示す。そしてこの変数を用いればHamiltonの正準方程式は次のようになる[10]。

$$\left.\begin{aligned} \frac{dL}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial l}, & \frac{dl}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial L} \\ \frac{dG}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial g}, & \frac{dg}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial G} \\ \frac{dH}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial h}, & \frac{dh}{dt} &= -\frac{\partial F}{\partial H} \end{aligned}\right\} \quad (3.5)$$

ここでFはHamilton関数であり次のようになる。

$$F = \frac{\mu^2}{2L^2} + R \quad (3.6)$$

またRは摂動関数であって次のように表わされる。

$$R = U - \frac{\mu}{\mathrm{r}} \quad (3.7)$$

なお

$$n = \frac{\mu^2}{L^3} \quad (3.8)$$

となる。

4. 摂動関数のDelaunay変数による表示

Hamilton関数の内で摂動関数は(3.7)と(2.1)に示すように地心距離と地心緯度の関数として与えられているので，これをDelaunay変数によって表示してみる。

まずKaulaの式[11),1)]によれば次のようになる。

$$R=\sum_{p=2}^{\infty} U_{p,q=0} \tag{4.1}$$

$$U_{p,0}=\sum_{u=0}^{p}\sum_{v=-\infty}^{\infty} U_{p,0,u,v} \tag{4.2}$$

$$U_{p,0,u,v}=-\mu J_p \frac{a_e^{\,p}}{a^{p+1}} G_{p,u,v}(e) F_{p,0,u}(i) \times\cos\left[(p-2u)g+(p-2u+v)l-\left\{1-(-1)^p\right\}\frac{\pi}{4}\right] \tag{4.3}$$

ここでa，eおよびiは次のように表わされる。

$$\left.\begin{aligned} a&=\frac{L^2}{\mu}\\ e&=\sqrt{1-\frac{G^2}{L^2}}\\ \cos i&=\frac{H}{G}\end{aligned}\right\} \tag{4.4}$$

5. von Zeipelの方法による一次理論の解

二次のharmonicにおける定数J_2は10^{-3}程度の微小量である。そして二次をこえるp次のharmonicにおける定数J_pの絶対値はJ_2よりもさらに小であるが，これをJ_2の二次の微小量とみなすことにする。それからJ_2を因数としてもつ量を微小量の基準として微小量のorderを表わすことにする。そしてこのorderを添字として以下の諸量における微小量につけることにする。そうすれば次のように表わされる。

$$F=F_0+F_1+F_2 \tag{5.1}$$

ここで次のようになる。

$$\left.\begin{aligned} F_0&=\frac{\mu^2}{2L^2}\\ F_1&=\frac{1}{2}\mu^4 J_2 a_e^{\,2}\frac{1}{L^6}\left\{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H^2}{G^2}\right)\frac{a^3}{r^3}\right.\\ &\qquad+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{H^2}{G^2}\right)\\ &\qquad\times\frac{a^3}{r^3}\cos(2g+2f)\\ &=-\mu J_2\frac{a_e^{\,2}}{a^3}\sum_{u=0}^{2}\sum_{u=-\infty}^{\infty} G_{2,u,v}(e)\\ &\qquad\times F_{2,o,u}(i)\\ &\qquad\times\cos\left\{(2-2u)g+(2-2u+v)l\right\}\\ F_2&=\sum_{p=3}^{\infty} U_{p,0}\\ &=-\mu\sum_{p=3}^{\infty}\sum_{u=0}^{p}\sum_{v=-\infty}^{\infty} J_p\frac{a_e^{\,p}}{a^{p+1}}\\ &\qquad\times G_{p,u,v}(e)F_{p,0,u}(i)\\ &\qquad\times\cos\left[(p-2u)g+(p-2u+v)l\right.\\ &\qquad\left.-\left\{1-(-1)^p\right\}\frac{\pi}{4}\right]\end{aligned}\right\} \tag{5.2}$$

次に解を短周期項 長周期項および長年項に分け，これを以下に求めることにする。

5.1 短周期項

最初に解の内の短周期項を出すことにする。

5.1.1 正準変換

正準変数L，G，H，l，g，hから新しい正準変数L'，G'，H'，l'，g'，h'に変換を行ない，新変数によって短周期項を表わす。この変換の必要且つ十分なる条件は変換がdetermining function S（L' G' H' l，g，h）から導かれて次式が成立することである。

$$\left.\begin{aligned} L&=\frac{\partial S}{\partial l},\quad G=\frac{\partial S}{\partial g},\quad H=\frac{\partial S}{\partial h}\\ l'&=\frac{\partial S}{\partial L'},\quad g'=\frac{\partial S}{\partial G'},\quad h'=\frac{\partial S}{\partial H'}\end{aligned}\right\} \tag{5.1.1.1}$$

ここで変換後のHamilton関数をF^*とすれば

$$F=F^*$$

となる。ここにFはL，G，H，l，g，hの関数であるが，Fの中に表われぬ変数があればこの変数を記号——で表わして変数の配列中に置く記号法を以下において用いることにする。そして

$$F(L,G,H,l,g,—)=F^*(L',G',H',—,g',—)$$

となるように変換を決定する。次に

$$\left.\begin{aligned} S&=S_0+S_1+S_2+\cdots\cdots\\ F^*&=F_0^*+F_1^*+F_2^*+\cdots\cdots\end{aligned}\right\} \tag{5.1.1.2}$$

とし，また

$$S_0=L'l+G'g+H'h \tag{5.1.1.3}$$

とする。このとき次式が成立する。

$$\begin{aligned} &F_0\left(\frac{\partial S}{\partial l}\right)+F_1\left(\frac{\partial S}{\partial l},\ \frac{\partial S}{\partial g},\ \frac{\partial S}{\partial h},\ l,\ g,\ —\right)\\ &\qquad+F_2\left(\frac{\partial S}{\partial l},\ \frac{\partial S}{\partial g},\ \frac{\partial S}{\partial h},\ l,\ g,\ —\right)\\ &=F_0^*(L')+F_1^*\left(L',\ G',\ H',\ —,\ \frac{\partial S}{\partial G'},\ —\right)\\ &\qquad+F_2^*\left(L',\ G',\ H',\ —,\ \frac{\partial S}{\partial G'},\ —\right)\end{aligned}$$

ここでこの両辺の各項を二次の微小量まで展開すれば次式をうる。

$$F_0(L')+\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_2}{\partial l}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2$$

$$+F_1(L',G',H',l,g,-)+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}$$

$$+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g}+\frac{\partial F_1}{\partial H'}\frac{\partial S_1}{\partial h}+F_2(L',G',H',l,g,-)$$

$$=F_0^*(L')+F_1^*(L',G',H',-,g,-)+\frac{\partial F_1^*}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G'}$$

$$+F_2^*(L',G',H',-,g,-)$$

次にこの両辺において同じ order の微小量の部分を等置する。まず第 0 次の部分については次式をうる。

$$F_0(L')=F_0^*(L') \tag{5.1.1.4}$$

それから第 1 次の部分については次のようになる。

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}+F_1(L',G',H',l,g,-)$$
$$=F_1^*(L',G',H',-,g,-) \tag{5.1.1.5}$$

さらに第 2 次の部分については次のようになる。

$$\frac{\partial F_0}{\partial L'}\frac{\partial S_2}{\partial l}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0}{\partial L'^2}\left(\frac{\partial S_1}{\partial l}\right)^2+\frac{\partial F_1}{\partial L'}\frac{\partial S_1}{\partial l}$$

$$+\frac{\partial F_1}{\partial G'}\frac{\partial S_1}{\partial g}+\frac{\partial F_1}{\partial H'}\frac{\partial S_1}{\partial h}$$

$$+F_2(L',G',H',l,g,-)$$

$$=\frac{\partial F_1^*}{\partial g}\frac{\partial S_1}{\partial G'}+F_2^*(L',G',H',-,g,-) \tag{5.1.1.6}$$

なお以下において L, G, H の関数の式の中の L, G, H をそれぞれ L', G', H' で置き換えることを添字の $LGH\to L'G'H'$ で示す。また L, G, H の関数からこのような置き換えによって得られる関数をもとの関数に ' をつけて表わすことにする。

5.1.2 主問題の場合

主問題の場合の解は Brower によって与えられた。[3] これを以下に示すことにする。

(5.1.1.4) から次式をうる。

$$F_0^*=\frac{\mu^2}{2L'^2} \tag{5.1.2.1}$$

次に (5.1.1.5) の左辺の内で l に独立な部分をとれば

$$F_1^*=\frac{1}{2}\frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L'^3 G'^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right) \tag{5.1.2.2}$$

となる。したがって次式をうる。

$$S_1=\frac{1}{2}\frac{\mu^2 J_2 a_e^2}{G'^3}\Big[\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)$$

$$\times(f'-l+e'\sin f')+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)$$

$$\times\left\{\frac{1}{2}\sin(2g+2f')+\frac{e'}{2}\sin(2g+f')\right.$$

$$\left.+\frac{e'}{6}\sin(2g+3f')\right\}\Big] \tag{5.1.2.3}$$

さらに (5.1.1.6) の左辺の内で l に独立な部分が F_2^* であるが、この F_2^* を g に独立な部分 F_{2s}^* と g に依存する部分 F_{2p}^* に分ければこれらは次のようになる。

$$F_2^*=F_{2s}^*+F_{2p}^*$$

$$F_{2s}^*=\frac{1}{4}\frac{\mu^6 J_2^2 a_e^4}{L'^{10}}\left\{\frac{15}{32}\frac{L'^5}{G'^5}\left(1-\frac{15}{8}\frac{H'^2}{G'^2}+\frac{H'^4}{G'^4}\right)\right.$$

$$+\frac{3}{8}\frac{L'^6}{G'^6}\left(1-6\frac{H'^2}{G'^2}+9\frac{H'^4}{G'^4}\right)-\frac{15}{32}\frac{L'^7}{G'^7}$$

$$\left.\times\left(1-2\frac{H'^2}{G'^2}-7\frac{H'^4}{G'^4}\right)\right\}$$

$$F_{2p}^*=\frac{1}{4}\frac{\mu^6 J_2^2 a_e^4}{L'^{10}}\left\{-\frac{3}{16}\left(\frac{L'^5}{G'^5}-\frac{L'^7}{G'^7}\right)\right.$$

$$\left.\times\left(1-16\frac{H'^2}{G'^2}+15\frac{H'^4}{G'^4}\right)\right\}\cos 2g' \tag{5.1.2.4}$$

ここで g を g' に変えてある。

次に (5.1.1.1) から L, G, H, l, g, h を L', G', H', l', g', h' の関数として表わす次式が得られる。

$$L=L'\Big[1+\frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a'}\right)^2\Big\{\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)$$

$$\times\left(\frac{a'^3}{r'^3}-\frac{L'^3}{G'^3}\right)+\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\frac{a'^3}{r'^3}$$

$$\times\cos(2g'+2f')\Big\}\Big]$$

$$G=G'\Big[1+\frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a'}\right)^2\frac{L'^4}{G'^4}\left(\frac{3}{2}-\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)$$

$$\times\Big\{\cos(2g'+2f')+e'\cos(2g'+f')$$

$$+\frac{e'}{3}\cos(2g'+3f')\Big\}\Big]$$

$$H=H'$$

$$l=l'-\frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a'}\right)^2\frac{1}{e'}\frac{L'}{G'}\Big[\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)$$

$$\times\left(\frac{a'^2}{r'^2}\frac{G'^2}{L'^2}+\frac{a'}{r'}+1\right)\sin f'+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)$$

$$\times\Big\{\left(-\frac{a'^2}{r'^2}\frac{G'^2}{L'^2}-\frac{a'}{r'}+1\right)\sin(2g'+f')$$

$$+\left(\frac{a'^2}{r'^2}\frac{G'^2}{L'^2}+\frac{a'}{r'}+\frac{1}{3}\right)\sin(2g'+3f')\Big\}\Big]$$

$$g=g'+\frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a'}\right)^2\frac{1}{e'}\frac{L'^2}{G'^2}\Big[\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)$$

$$
\begin{aligned}
&\times\left(\frac{a'^2}{r'^2}\frac{G'^2}{L'^2}+\frac{a'}{r'}+1\right)\sin f'+\left(\frac{3}{4}-\frac{3}{4}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\\
&\times\left\{\left(-\frac{a'^2}{r'^2}\frac{G'^2}{L'^2}-\frac{a'}{r'}+1\right)\sin(2g'+f')\right.\\
&\left.+\left(\frac{a'^2}{r'^2}\frac{G'^2}{L'^2}+\frac{a'}{r'}+\frac{1}{3}\right)\sin(2g'+3f')\right\}\Bigg]\\
&+\frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a'}\right)^2\frac{L'^4}{G'^4}\Bigg[\left(-\frac{3}{2}+\frac{15}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\\
&\times(f'-l'+e'\sin f')+\left(\frac{9}{2}-\frac{15}{2}\frac{H'^2}{G'^2}\right)\\
&\times\left\{\frac{1}{2}\sin(2g'+2f')+\frac{e'}{2}\sin(2g'+f')\right.\\
&\left.+\frac{e'}{6}\sin(2g'+3f')\right\}\Bigg]\\
h=\ &h'-\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a'}\right)^2\frac{L'^4}{G'^4}\left\{f'-l'+e'\sin f'\right.\\
&-\frac{1}{2}\sin(2g'+2f')-\frac{e'}{2}\sin(2g'+f')\\
&\left.-\frac{e'}{6}\sin(2g'+3f')\right\}\frac{H'}{G'}
\end{aligned}
\tag{5.1.2.5}
$$

ここで l, g をそれぞれ l', g' に変えてある。

5.1.3　二次をこえるharmonicsをとった場合

主問題の場合に加えてさらに二次をこえるharmonicsをとった場合を論ずる。初めに二次をこえる p 次のharmonicのみをとったときを考えてみる。なお以下において p 次の harmonic をとることによって生ずる，主問題の場合における諸量への附加量を記号 $\triangle p$ によって表わすことにする。

(5.1.1.6) によれば附加量は S_2 と F_2^* とに生ずるが，一次理論においては S_2 を求める必要がないので F_2^* の附加量だけを求める。ここで F_2 の内の p 次の harmonic $U_{p,0}$ において長年的な変化をする部分を $U_{p,0,s}$ とし，また長周期の変化をする部分を $U_{p,0,p}$ とする。そうすれば (5.1.1.6) によって次式をうる。

$$\triangle_p F_{2s}^* = U_{p,0,s}\quad LGH\to L'G'H'$$

$$\triangle_p F_{2p}^* = U_{p,0,p}\quad LGH\to L'G'H'$$

ここで $U_{p,0,s}$ は $U_{p,0}$ を構成する諸項の内で u, v が次式をみたす項からなる。

$$p-2u+v=0$$
$$p-2u=0$$

したがって次式をうる。

$$\triangle_p F_{2s}^* = -\mu J_p\frac{a_e^{\,p}}{a'^{\,p+1}}G_{p,\frac{p}{2},0}(e')F_{p,0,\frac{p}{2}}(i') \tag{5.1.3.1}$$

また $U_{p,0,p}$ は $U_{p,0}$ を構成する諸項の内で u, v が次式をみたす項からなる。

$$p-2u+v=0$$
$$p-2u\neq 0$$

したがって次式をうる。

$$
\begin{aligned}
\triangle_p F_{2p}^* =& -\mu J_p\frac{a_e^{\,p}}{a'^{\,p+1}}\sum_u G_{p,u,-p+2u}(e')F_{p,0,u}(i')\\
&\times\cos\left[(p-2u)g'-\left\{1-(-1)^p\right\}\frac{\pi}{4}\right]
\end{aligned}
\tag{5.1.3.2}
$$

ここで $\sum_u$ は0から p までの整数についての和を表わす。ただし $p/2$ についての和を除く。

以上において二次をこえるharmonicsの内で p 次のharmonic を唯一つとったときについて論じたが，二つ以上のharmonicsをとるときには，それぞれのharmonicについて以上と同様にして附加量を求めればよい。

5.2　長周期項および長年項

次に解の内の長周期項と長年項を出すことにする。

5.2.1　正準変換

正準変数 L', G', H', l', g', h' から新しい正準変数 L'', G'', H'', l'', g'', h'' に変換を行ない，新変数によって長周期項および長年項を表わす。この変換の必要且つ十分なる条件は変換が determining function S^* $(L'', G'', H'', l', g', h')$ から導かれて次式が成立することである。

$$
\begin{aligned}
&L'=\frac{\partial S^*}{\partial l'},\quad G'=\frac{\partial S^*}{\partial g'},\quad H'=\frac{\partial S^*}{\partial h'}\\
&l''=\frac{\partial S^*}{\partial L''},\quad g''=\frac{\partial S^*}{\partial G''},\quad h''=\frac{\partial S^*}{\partial H''}
\end{aligned}
\tag{5.2.1.1}
$$

ここで変換後の Hamilton 関数を F^{**} とすれば

$$F^*=F^{**}$$

となるが，

$$F^*(L', G', H', -, g', -)=F^{**}(L'', G'', H'', -, -, -)$$

となるように変換を決定する。次に

$$
\begin{aligned}
&S^*=S_0^*+S_1^*+S_2^*+\cdots\cdots\\
&F^{**}=F_0^{**}+F_1^{**}+F_2^{**}+\cdots\cdots
\end{aligned}
\tag{5.2.1.2}
$$

とし，また

$$S_0^*=L''l'+G''g'+H''h' \tag{5.2.1.3}$$

とする。このとき次式が成立する。

$$F_0^*\left(\frac{\partial S^*}{\partial l'}\right)+F_1^*\left(\frac{\partial S^*}{\partial l'},\ \frac{\partial S^*}{\partial g'},\ \frac{\partial S^*}{\partial h'}\right)$$

$$+F_{2s}^*\left(\frac{\partial S^*}{\partial \ell'},\ \frac{\partial S^*}{\partial g'},\ \frac{\partial S^*}{\partial h'}\right)+F_{2p}^*\left(\frac{\partial S^*}{\partial \ell'},\ \frac{\partial S^*}{\partial g'},\ \frac{\partial S^*}{\partial h'},\ -,\ g',\ -\right)$$

$$=F_0^{**}(L'')+F_1^{**}(L'',G'',H'')+F_2^{**}(L'',G'',H'')$$

ここでこの両辺の各項を二次の微小量まで展開すれば次式をうる。

$$\begin{aligned}&F_0^*(L'')+\frac{\partial F_0^*}{\partial L''}\frac{\partial S_1^*}{\partial L'}+\frac{\partial F_0^*}{\partial L''}\frac{\partial S_2^*}{\partial \ell'}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0^*}{\partial L''^2}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial \ell'}\right)^2\\&+F_1^*(L'',G'',H'')+\frac{\partial F_1^*}{\partial L''}\frac{\partial S_1^*}{\partial \ell'}+\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}\\&+\frac{\partial F_1^*}{\partial H''}\frac{\partial S_1^*}{\partial h'}+F_{2s}^*(L'',G'',H'')\\&+F_{2p}^*(L'',G'',H'',-,\ g',\ -)\\&=F_0^{**}(L'')+F_1^{**}(L'',G'',H'')+F_2^{**}(L'',G'',H'')\end{aligned}$$

次にこの両辺において同じ order の微小量の部分を等置する。まず第 0 次の部分については次式をうる。

$$F_0^*(L'')=F_0^{**}(L'') \qquad (5.2.1.4)$$

それから第 1 次の部分については次のようになる。

$$\frac{\partial F_0^*}{\partial L''}\frac{\partial S_1^*}{\partial \ell'}+F_1^*(L'',G'',H'')=F_1^{**}(L'',G'',H'') \qquad (5.2.1.5)$$

さらに第 2 次の部分については次のようになる。

$$\begin{aligned}&\frac{\partial F_0^*}{\partial L''}\frac{\partial S_2^*}{\partial \ell'}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 F_0^*}{\partial L''^2}\left(\frac{\partial S_1^*}{\partial \ell'}\right)^2+\frac{\partial F_1^*}{\partial L''}\frac{\partial S_1^*}{\partial \ell'}\\&+\frac{\partial F_1^*}{\partial G''}\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}+\frac{\partial F_1^*}{\partial H''}\frac{\partial S_1^*}{\partial h'}+F_{2s}^*(L'',G'',H'')\\&+F_{2p}^*(L'',G'',H'',-,\ g',\ -)=F_2^{**}(L'',G'',H'')\end{aligned} \qquad (5.2.1.6)$$

なお以下において $L',\ G',\ H'$ の関数の式の中の $L',\ G',\ H'$ をそれぞれ $L'',\ G'',\ H''$ で置き換えることを添字の $L'G'H'\to L''G''H''$ で示す。また $L',\ G',\ H'$ の関数からこのような置き換えによって得られる関数をもとの関数にさらに ' をつけて表わすことにする。

5.2.2 主問題の場合

主問題の場合の解は Brouwer によって与えられた。[3] これを以下に示すことにする。

(5.2.1.4) から次式をうる。

$$F_0^{**}=\frac{\mu^2}{2L''^2} \qquad (5.2.2.1)$$

次に (5.2.1.5) から次式をうる。

$$F_1^{**}=\frac{1}{2}\frac{\mu^4 J_2 a_e^2}{L''^3G''^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H''^2}{G''^2}\right) \qquad (5.2.2.2)$$

さらに (5.2.1.6) から次式をうる。

$$\begin{aligned}F_2^{**}=\frac{1}{4}\frac{\mu^6 J_2^2 a_e^4}{L''^{10}}&\left\{\frac{15}{32}\frac{L''^5}{G''^5}\left(1-\frac{18}{5}\frac{H''^2}{G''^2}+\frac{H''^4}{G''^4}\right)\right.\\&+\frac{3}{8}\frac{L''^6}{G''^6}\left(1-6\frac{H''^2}{G''^2}+9\frac{H''^4}{G''^4}\right)\\&\left.-\frac{15}{32}\frac{L''^7}{G''^7}\left(1-2\frac{H''^2}{G''^2}-7\frac{H''^4}{G''^4}\right)\right\}\end{aligned} \qquad (5.2.2.3)$$

同じく (5.2.1.6) から次式をうる。

$$\begin{aligned}\frac{\partial S_1^*}{\partial g'}=&\frac{1}{2}\mu^2 J_2 a_e^2\frac{G''}{L''^4}\left(\frac{L''^2}{G''^2}-\frac{L''^4}{G''^4}\right)\\&\times\left\{\frac{1}{8}\left(1-11\frac{H''^2}{G''^2}\right)-5\frac{H''^4}{G''^4}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}\right\}\cos 2g'\end{aligned} \qquad (5.2.2.4)$$

これを積分すれば次のようになる。

$$\begin{aligned}S_1^*=&\frac{1}{2}\mu^2 J_2 a_e^2\frac{G''}{L''^4}\left(\frac{L''^2}{G''^2}-\frac{L''^4}{G''^4}\right)\\&\times\left\{\frac{1}{16}\left(1-11\frac{H''^2}{G''^2}\right)-\frac{5}{2}\frac{H''^4}{G''^4}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}\right\}\sin 2g'\end{aligned} \qquad (5.2.2.5)$$

次に (5.2.1.1) から $L',\ G',\ H',\ \ell',\ g',\ h'$ を mean variables $L'',\ G'',\ H'',\ \ell'',\ g'',\ h''$ の関数として表わす次式が得られる。

$$\left.\begin{aligned}L'=&L''\\G'=&G''\left[1+\frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^2\left(\frac{L''^2}{G''^2}-\frac{L''^4}{G''^4}\right)\right.\\&\left.\times\left\{\frac{1}{8}\left(1-11\frac{H''^2}{G''^2}\right)-5\frac{H''^4}{G''^4}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}\right\}\cos 2g''\right]\\H'=&H''\\\ell'=&\ell''+\frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^2\frac{L''}{G''}\\&\times\left\{\frac{1}{8}\left(1-11\frac{H''^2}{G''^2}\right)-5\frac{H''^4}{G''^4}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}\right\}\sin 2g''\\g'=&g''+\frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^2\left\{\frac{1}{16}\frac{L''^2}{G''^2}\left(1-33\frac{H''^2}{G''^2}\right)\right.\\&-\frac{3}{16}\frac{L''^4}{G''^4}\left(1-\frac{55}{3}\frac{H''^2}{G''^2}\right)+\left(-\frac{25}{2}\frac{L''^2}{G''^2}\right.\\&\left.+\frac{35}{2}\frac{L''^4}{G''^4}\right)\frac{H''^4}{G''^4}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}-25\left(\frac{L''^2}{G''^2}-\frac{L''^4}{G''^4}\right)\\&\left.\times\frac{H''^6}{G''^6}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-2}\right\}\sin 2g''\\h'=&h''+\frac{1}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^2\left(\frac{L''^2}{G''^2}-\frac{L''^4}{G''^4}\right)\left\{\frac{11}{8}\frac{H''}{G''}\right.\end{aligned}\right\}$$

$$+10\frac{H''^3}{G''^3}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}$$

$$+25\frac{H''^5}{G''^5}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-2}\Big\}\sin 2g'' \qquad (5.2.2.6)$$

ここでg'をg''に変えてある。

さらにF^{**}をHamilton関数とする正準方程式からmean variablesが決定される。これを次に示す。

$$\left.\begin{aligned}
L'' &= \text{const.}\\
G'' &= \text{const.}\\
H'' &= \text{const.}\\
l'' &= \frac{dl''}{dt}t+\text{const.}\\
g'' &= \frac{dg''}{dt}t+\text{const.}\\
h'' &= \frac{dh''}{dt}t+\text{const.}
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2.2.7)$$

ここで次のようになる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dl''}{dt} &= n''\Big[1+\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^2\frac{L''^3}{G''^3}\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{2}\frac{H''^2}{G''^2}\right)\\
&+\frac{1}{4}J_2^2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^4\Big\{\frac{75}{32}\frac{L''^5}{G''^5}+\frac{3}{2}\frac{L''^6}{G''^6}-\frac{45}{32}\frac{L''^7}{G''^7}\\
&+\left(-\frac{135}{16}\frac{L''^5}{G''^5}-9\frac{L''^6}{G''^6}+\frac{45}{16}\frac{L''^7}{G''^7}\right)\frac{H''^2}{G''^2}\\
&+\left(\frac{75}{32}\frac{L''^5}{G''^5}+\frac{27}{2}\frac{L''^6}{G''^6}+\frac{315}{32}\frac{L''^7}{G''^7}\right)\frac{H''^4}{G''^4}\Big\}\Big]\\
\frac{dg''}{dt} &= n''\Big[\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^2\frac{L''^4}{G''^4}\left(-\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\frac{H''^2}{G''^2}\right)\\
&+\frac{1}{4}J_2^2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^4\Big\{\frac{75}{32}\frac{L''^6}{G''^6}+\frac{9}{4}\frac{L''^7}{G''^7}-\frac{105}{32}\frac{L''^8}{G''^8}\\
&+\left(-\frac{189}{16}\frac{L''^6}{G''^6}-18\frac{L''^7}{G''^7}+\frac{135}{16}\frac{L''^8}{G''^8}\right)\frac{H''^2}{G''^2}\\
&+\left(\frac{135}{32}\frac{L''^6}{G''^6}+\frac{135}{4}\frac{L''^7}{G''^7}+\frac{1155}{32}\frac{L''^8}{G''^8}\right)\frac{H''^4}{G''^4}\Big\}\Big]\\
\frac{dh''}{dt} &= n''\Big[-\frac{3}{2}J_2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^2\frac{L''^4}{G''^4}\frac{H''}{G''}+\frac{1}{4}J_2^2\left(\frac{a_e}{a''}\right)^4\\
&\Big\{\left(\frac{27}{8}\frac{L''^6}{G''^6}+\frac{9}{2}\frac{L''^7}{G''^7}-\frac{15}{8}\frac{L''^8}{G''^8}\right)\frac{H''}{G''}\\
&+\left(-\frac{15}{8}\frac{L''^6}{G''^6}-\frac{27}{2}\frac{L''^7}{G''^7}-\frac{105}{8}\frac{L''^8}{G''^8}\right)\frac{H''^3}{G''^3}\Big\}\Big]
\end{aligned}\right\} \qquad (5.2.2.8)$$

5.2.3 二次をこえるharmonicsをとった場合

主問題の場合に加えてさらに二次をこえるharmonicsをとった場合を論ずる。初めに二次をこえるp次のharmonicのみをとったときを考える。

この際には(5.1.3.2)に示した$\triangle_p F^*_{2p}$から(5.2.2.4)に示した$\frac{\partial S^*_1}{\partial g'}$の附加量を出し，これから$S^*_1$の附加量を求め，さらにこれから(5.2.1.1)によってG', l', g', h'の附加量を決める。それから一方において(5.1.3.1)に示した$\triangle_p F^*_{2s}$から(5.2.2.3)に示したF^{**}_2の附加量を出し，これからHamilton関数をF^{**}とする正準方程式によって$\frac{dl''}{dt}$, $\frac{dg''}{dt}$, $\frac{dh''}{dt}$などの附加量を求めればよい。

まず次のようになる。

$$\frac{\partial}{\partial g'}\triangle_p S^*_1=-\frac{4}{3}\frac{L''^3G''^4}{\mu^4 J_2 a_e^2}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}$$

$$\times\triangle_p F^*_{2p}\ {}_{L'G'H'\to L''G''H''}$$

$$=\frac{4}{3}\frac{J_p}{J_2}\left(\frac{a_e}{a''}\right)^{p-2}\left(\frac{G''}{L''}\right)^3 G''\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}$$

$$\times\sum_u G_{p,u,-p+2u}(e'')\,F_{p,0,u}(i'')$$

$$\times\cos\left[(p-2u)g'-\left\{1-(-1)^p\right\}\frac{\pi}{4}\right]$$

これを積分して次式をうる。

$$\triangle_p S^*_1=\frac{4}{3}\frac{J_p}{J_2}\left(\frac{a_e}{a''}\right)^{p-2}\left(\frac{G''}{L''}\right)^3 G''\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}$$

$$\times\sum_u\frac{1}{p-2u}G_{p,u,-p+2u}(e'')\,F_{p,0,u}(i'')$$

$$\times\sin\left[(p-2u)g'-\left\{1-(-1)^p\right\}\frac{\pi}{4}\right]$$

したがって長周期項における附加量は次のようになる。

$$\triangle_p G'=\frac{\partial\triangle_p S^*_1}{\partial g'}$$

$$=\frac{4}{3}\frac{J_p}{J_2}\left(\frac{a_e}{a''}\right)^{p-2}\left(\frac{G''}{L''}\right)^3 G'\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}$$

$$\times\sum_u G_{p,u,-p+2u}(e'')\,F_{p,0,u}(i'')$$

$$\times\cos\left[(p-2u)g''-\left\{1-(-1)^p\right\}\frac{\pi}{4}\right]$$

$$\triangle_p l'=-\frac{\partial\triangle_p S^*_1}{\partial L''}$$

$$=-\frac{4}{3}\frac{J_p}{J_2}\left(\frac{a_e}{a''}\right)^{p-2}\left(\frac{G''}{L''}\right)^4\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}$$

$$\times\Big\{(1-2p)\sum_u\frac{1}{p-2u}G_{p,u,-p+2u}(e'')$$

$$\times F_{p,0,u}(i'')\sin\left[(p-2u)g''-\left\{1-(-1)^p\right\}\frac{\pi}{4}\right]$$

$$+\sum_u\frac{1}{p-2u}\frac{dG_{p,u,-p+2u}(e'')}{de''}\frac{1}{e''}\left(\frac{G''}{L''}\right)^2$$

$$\times \sin\left[(p-2u)g''-\left\{1-(-1)^{p}\right\}\frac{\pi}{4}\right]\Big\}$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_p g' &= -\frac{\partial \Delta_p S_1^{*}}{\partial G''}\\
&= -\frac{4}{3}\frac{J_p}{J_2}\left(\frac{a_e}{a''}\right)^{p-2}\left(\frac{G''}{L''}\right)^{3}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}\\
&\quad \times\Big[\left\{4-10\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}\left(\frac{H''}{G''}\right)^{2}\right\}\sum_u \frac{1}{p-2u}\\
&\quad \times G_{p,u,-p+2u}(e'')\,F_{p,0,u}(i'')\sin\Big[(p-2u)g''\\
&\quad -\left\{1-(-1)^{p}\right\}\frac{\pi}{4}\Big]+\sum_u \frac{1}{p-2u}\\
&\quad \times\Big\{G_{p,u,-p+2u}(e'')\,\frac{dF_{p,0,u}(i'')}{d i''}\cot i''\\
&\quad -\frac{dG_{p,u,-p+2u}(e'')}{d e''}\,\frac{1}{e''}\left(\frac{G''}{L''}\right)^{2}F_{p,0,u}(i'')\Big\}\\
&\quad \times\sin\left[(p-2u)g''-\left\{1-(-1)^{p}\right\}\frac{\pi}{4}\right]\Big]
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\Delta_p h' &= -\frac{\partial \Delta_p S_1^{*}}{\partial H''}\\
&= -\frac{4}{3}\frac{J_p}{J_2}\left(\frac{a_e}{a''}\right)^{p-2}\left(\frac{G''}{L''}\right)^{3}\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}\\
&\quad \times\Big[10\left(1-5\frac{H''^2}{G''^2}\right)^{-1}\frac{H''}{G''}\sum_u \frac{1}{p-2u}\,G_{p,u,-p+2u}(e'')\\
&\quad \times F_{p,0,u}(i'')\sin\left[(p-2u)g''-\left\{1-(-1)^{p}\right\}\frac{\pi}{4}\right]\\
&\quad -\sum_u \frac{1}{p-2u}\,G_{p,u,-p+2u}(e'')\,\frac{dF_{p,0,u}(i'')}{d i''}\\
&\quad \times\frac{1}{\sin i''}\sin\left[(p-2u)g''-\left\{1-(-1)^{p}\right\}\frac{\pi}{4}\right]\Big]
\end{aligned}
\qquad (5.2.3.1)
$$

ここで g' を g'' に変えてある。

また

$$
\begin{aligned}
\Delta_p F_2^{**} &= \Delta_p F_{2s\;L'G'H'\to L''G''H''}^{*}\\
&= -\mu J_p \frac{a_e^{p}}{a''^{p+1}}\,G_{p,\frac{p}{2},0}(e'')\,F_{p,0,\frac{p}{2}}(i'')
\end{aligned}
$$

となる。これを用いて長年項の変化率における附加量を求めれば次のようになる。ここで p は2をこえる偶数である。

$$
\begin{aligned}
\Delta_p \frac{dl''}{dt} &= -\frac{\partial \Delta_p F_2^{**}}{\partial L''}\\
&= n'' J_p\left(\frac{a_e}{a''}\right)^{p}F_{p,0,\frac{p}{2}}(i'')\\
&\quad \times\Big\{-2(p+1)\,G_{p,\frac{p}{2},0}(e'')\\
&\quad +\frac{dG_{p,\frac{p}{2},0}(e'')}{d e''}\,\frac{1}{e''}\left(\frac{G''}{L''}\right)^{2}\Big\}\\
\Delta_p \frac{dg''}{dt} &= -\frac{\partial \Delta_p F_2^{**}}{\partial G''}\\
&= n'' J_p\left(\frac{a_e}{a''}\right)^{p}\Big(-\frac{dG_{p,\frac{p}{2},0}(e'')}{d e''}\,\frac{1}{e''}\,\frac{G''}{L''}\\
&\quad \times F_{p,0,\frac{p}{2}}(i'')+G_{p,\frac{p}{2},0}(e'')\,\frac{L''}{G''}\\
&\quad \times\frac{dF_{p,0,\frac{p}{2}}(i'')}{d i''}\cot i''\Big)\\
\Delta_p \frac{dh''}{dt} &= -\frac{\partial \Delta_p F_2^{**}}{\partial H''}\\
&= -n'' J_p\left(\frac{a_e}{a''}\right)^{p}G_{p,\frac{p}{2},0}(e'')\,\frac{L''}{G''}\\
&\quad \times\frac{dF_{p,0,\frac{p}{2}}(i'')}{d i''}\,\frac{1}{\sin i''}
\end{aligned}
\qquad (5.2.3.2)
$$

以上において二次をこえる harmonics の内で p 次の harmonic を唯一つとるときについて論じたが，二つ以上の harmonics をとるときには以上の諸式によって示される解を加えあわせればよい。

6. harmonics の二十一次までをとった場合の計算式

次に harmonics として二次をこえ，二十一次までをとった場合の第5章の理論に基づく計算式を求めることにする。

まず (5.1.3.1) と (5.1.3.2) に示される長年項と長周期項における p，q，u，v の値を求めてみる。この長年項と長周期項における $G_{p,u,v}(e')$ の関数の一般形は F. Tisserand によって与えられ[12]これを既報[1]の (4.4) 式に示してある。それによれば $G_{p,u,v}(e')$ の因数である e の冪の指数の最小値は $|v|$ となる。したがってこの長年項と長周期項において因数として表われる e' の冪の指数の最小値が3をこえる場合にはこれらは微小量であるとして無視することにする。そうすればこの長年項と長周期項においては $|v|$ が3までのものだけを考慮すればよいことになる。このような場合における p，q，u，v の値を示せば表1のようになる。ここには $p-2u$ をも示してあり，これが零となる項が長年項である。

p，q，u，v が以上のような値をとるときの $G_{p,u,v}(e)$ の関数形を表2に示す。またこれから計算された $\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$ を表3に示す。それから Kaula の式[11),1)]によって求めた $F_{p,q,u}(i)$ の関数形を表4に示す。またこれ

から計算された $\dfrac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$ を表5に示す。ここで

$G_{p,u,v}(e)$ および $\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$ はその因数に定数項から始まる e の偶数次の式があるが，そこにおいては e^6 までを示してある。それからこれらの表に現われる2の累乗，階乗および奇数の連乗積をそれぞれ表6，7および8に示す。

以上の諸表を第5章の理論式に適用すれば計算式が得られることになる。

表1 p, q, u, v の値

p	q	u	$p-2u$	v
3	0	0	3	−3
		1	1	−1
		2	−1	1
		3	−3	3
4		1	2	−2
		2	0	0
		3	−2	2
5		1	3	−3
		2	1	−1
		3	−1	1
		4	−3	3
6		2	2	−2
		3	0	0
		4	−2	2
7		2	3	−3
		3	1	−1
		4	−1	1
		5	−3	3
8		3	2	−2
		4	0	0
		5	−2	2
9		3	3	−3
		4	1	−1
		5	−1	1
		6	−3	3
10		4	2	−2
		5	0	0
		6	−2	2
11	0	4	3	−3
		5	1	−1
		6	−1	1
		7	−3	3
12		5	2	−2
		6	0	0
		7	−2	2
13		5	3	−3
		6	1	−1
		7	−1	1
		8	−3	3
14		6	2	−2
		7	0	0
		8	−2	2
15		6	3	−3
		7	1	−1
		8	−1	1
		9	−3	3
16		7	2	−2
		8	0	0
		9	−2	2
17		7	3	−3
		8	1	−1
		9	−1	1
		10	−3	3
18		8	2	−2
		9	0	0
		10	−2	2
19		8	3	−3
		9	1	−1
		10	−1	1
		11	−3	3
20		9	2	−2
		10	0	0
		11	−2	2
21		9	3	−3
		10	1	−1
		11	−1	1
		12	−3	3

表2　$G_{p,u,v}(e)$

p	u	v	p	u	v	$G_{p,u,v}(e)$
3	0	−3	3	3	3	0
3	1	−1	3	2	1	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}\,e$
4	1	−2	4	3	2	$\frac{3}{4}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}}\,e^2$
			4	2	0	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}}\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)$
5	1	−3	5	4	3	$\frac{1}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}\,e^3$
5	2	−1	5	3	1	$2\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}\,e\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)$
6	2	−2	6	4	2	$\frac{5}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{11}{2}}}\,e^2\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)$
			6	3	0	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{11}{2}}}\left(1+5e^2+\frac{15}{8}e^4\right)$
7	2	−3	7	5	3	$\frac{5}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{13}{2}}}\,e^3\left(1+\frac{3}{8}e^2\right)$
7	3	−1	7	4	1	$3\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{13}{2}}}\,e\left(1+\frac{5}{2}e^2+\frac{5}{8}e^4\right)$
8	3	−2	8	5	2	$\frac{21}{4}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{15}{2}}}\,e^2\left(1+\frac{5}{3}e^2+\frac{5}{16}e^4\right)$
			8	4	0	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{15}{2}}}\left(1+\frac{21}{2}e^2+\frac{105}{8}e^4+\frac{35}{16}e^6\right)$
9	3	−3	9	6	3	$7\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{17}{2}}}\,e^3\left(1+\frac{5}{4}e^2+\frac{3}{16}e^4\right)$
9	4	−1	9	5	1	$4\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{17}{2}}}\,e\left(1+\frac{21}{4}e^2+\frac{35}{8}e^4+\frac{35}{64}e^6\right)$
10	4	−2	10	6	2	$9\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{19}{2}}}\,e^2\left(1+\frac{7}{2}e^2+\frac{35}{16}e^4+\frac{7}{32}e^6\right)$
			10	5	0	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{19}{2}}}\left(1+18e^2+\frac{189}{4}e^4+\frac{105}{4}e^6+\cdots\cdots\right)$
11	4	−3	11	7	3	$15\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{21}{2}}}\,e^3\left(1+\frac{21}{8}e^2+\frac{21}{16}e^4+\frac{7}{64}e^6\right)$
11	5	−1	11	6	1	$5\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{21}{2}}}\,e\left(1+9e^2+\frac{63}{4}e^4+\frac{105}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$

表 2 $G_{p,u,v}(e)$ （続き）

p	u	v	p	u	v	$G_{p,u,v}(e)$
12	5	−2	12	7	2	$\frac{55}{4}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{23}{2}}}e^2\left(1+6e^2+\frac{63}{8}e^4+\frac{21}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
			12	6	0	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{23}{2}}}\left(1+\frac{55}{2}e^2+\frac{495}{4}e^4+\frac{1155}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
13	5	−3	13	8	3	$\frac{55}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{25}{2}}}e^3\left(1+\frac{9}{2}e^2+\frac{189}{40}e^4+\frac{21}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
13	6	−1	13	7	1	$6\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{25}{2}}}e\left(1+\frac{143}{8}e^2+\frac{165}{4}e^4+\frac{1155}{32}e^6+\cdots\cdots\right)$
14	6	−2	14	8	2	$\frac{39}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{27}{2}}}e^2\left(1+\frac{55}{6}e^2+\frac{165}{8}e^4+\frac{231}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
			14	7	0	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{27}{2}}}\left(1+39e^2+\frac{2145}{8}e^4+\frac{2145}{4}e^6+\cdots\cdots\right)$
15	6	−3	15	9	3	$\frac{91}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{29}{2}}}e^3\left(1+\frac{55}{8}e^2+\frac{99}{8}e^4+\frac{231}{32}e^6+\cdots\cdots\right)$
15	7	−1	15	8	1	$7\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{29}{2}}}e\left(1+\frac{39}{2}e^2+\frac{715}{8}e^4+\frac{2145}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
16	7	−2	16	9	2	$\frac{105}{4}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{31}{2}}}e^2\left(1+13e^2+\frac{715}{16}e^4+\frac{429}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
			16	8	0	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{31}{2}}}\left(1+\frac{105}{2}e^2+\frac{4095}{8}e^4+\frac{25025}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
17	7	−3	17	10	3	$70\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{33}{2}}}e^3\left(1+\frac{39}{4}e^2+\frac{429}{16}e^4+\frac{429}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
17	8	−1	17	9	1	$8\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{33}{2}}}e\left(1+\frac{105}{4}e^2+\frac{1365}{8}e^4+\frac{25025}{64}e^6+\cdots\cdots\right)$
18	8	−2	18	10	2	$34\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{35}{2}}}e^2\left(1+\frac{35}{2}e^2+\frac{1365}{16}e^4+\frac{5005}{32}e^6+\cdots\cdots\right)$
			18	9	0	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{35}{2}}}\left(1+68e^2+\frac{1785}{2}e^4+\frac{7735}{2}e^6+\cdots\cdots\right)$
19	8	−3	19	11	3	$102\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{37}{2}}}e^3\left(1+\frac{105}{8}e^2+\frac{5967}{128}e^4+\frac{36465}{512}e^6+\cdots\cdots\right)$
19	9	−1	19	10	1	$9\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{37}{2}}}e\left(1+34e^2+\frac{595}{2}e^4+\frac{7735}{88}e^6+\cdots\cdots\right)$
20	9	−2	20	11	2	$\frac{171}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{39}{2}}}e^2\left(1+\frac{68}{3}e^2+\frac{595}{4}e^4+\frac{1547}{4}e^6+\cdots\cdots\right)$
			20	10	0	$\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{39}{2}}}\left(1+\frac{171}{2}e^2+\frac{2907}{2}e^4+\frac{33915}{4}e^6+\cdots\cdots\right)$

表 2 $G_{p,u,v}(e)$ (続き)

p	u	v	p	u	v	$G_{p,u,v}(e)$
21	9	−3	21	12	3	$\frac{285}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{41}{2}}}e^3\left(1+17e^2+\frac{6183}{76}e^4+\frac{1547}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
21	10	−1	21	11	1	$10\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{41}{2}}}e\left(1+\frac{171}{4}e^2+\frac{969}{2}e^4+\frac{33915}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$

表 3 $\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$

p	u	v	p	u	v	$\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$
3	0	−3	3	3	3	0
3	1	−1	3	2	1	$5\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}}e^2$
						$+\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}$
4	1	−2	4	3	2	$\frac{21}{4}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}e^3$
						$+\frac{3}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}}e$
			4	2	0	$7\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}e\left(1+\frac{3}{2}e^2\right)$
						$+3\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{7}{2}}}e$
5	1	−3	5	4	3	$\frac{9}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{11}{2}}}e^4$
						$+\frac{3}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}e^2$
5	2	−1	5	3	1	$18\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{11}{2}}}e^2\left(1+\frac{3}{4}e^2\right)$
						$+2\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{9}{2}}}\left(1+\frac{9}{4}e^2\right)$
6	2	−2	6	4	2	$\frac{55}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{13}{2}}}e^3\left(1+\frac{1}{2}e^2\right)$
						$+5\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{11}{2}}}e\left(1+e^2\right)$

表 3 $\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$ （続き）

p	u	v	p	u	v	$\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$
			6	3	0	$11\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{13}{2}}}e\left(1+5e^2+\dfrac{15}{8}e^4\right)+10\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{11}{2}}}e\left(1+\dfrac{3}{4}e^2\right)$
7	2	−3	7	5	3	$\dfrac{65}{2}\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{15}{2}}}e^4\left(1+\dfrac{3}{8}e^2\right)+\dfrac{15}{2}\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{13}{2}}}e^2\left(1+\dfrac{5}{8}e^2\right)$
7	3	−1	7	4	1	$39\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{15}{2}}}e^2\left(1+\dfrac{5}{2}e^2+\dfrac{5}{8}e^4\right)+3\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{13}{2}}}\left(1+\dfrac{15}{2}e^2+\dfrac{25}{8}e^4\right)$
8	3	−2	8	5	2	$\dfrac{315}{4}\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{17}{2}}}e^3\left(1+\dfrac{5}{3}e^2+\dfrac{5}{16}e^4\right)+\dfrac{21}{2}\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{15}{2}}}e\left(1+\dfrac{10}{3}e^2+\dfrac{15}{16}e^4\right)$
			8	4	0	$15\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{17}{2}}}e\left(1+\dfrac{21}{2}e^2+\dfrac{105}{8}e^4+\dfrac{35}{16}e^6\right)+21\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{15}{2}}}e\left(1+\dfrac{5}{2}e^2+\dfrac{5}{8}e^4\right)$
9	3	−3	9	6	3	$119\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{19}{2}}}e^4\left(1+\dfrac{5}{4}e^2+\dfrac{3}{16}e^4\right)+21\dfrac{3}{(1-e^2)^{\frac{17}{2}}}e^2\left(1+\dfrac{25}{12}e^2+\dfrac{7}{16}e^4\right)$
9	4	−1	9	5	1	$68\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{19}{2}}}e^2\left(1+\dfrac{21}{4}e^2+\dfrac{35}{8}e^4+\dfrac{35}{64}e^6\right)+4\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{17}{2}}}\left(1+\dfrac{63}{4}e^2+\dfrac{175}{8}e^4+\dfrac{245}{64}e^6\right)$
10	4	−2	10	6	2	$171\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{21}{2}}}e^3\left(1+\dfrac{7}{2}e^2+\dfrac{35}{16}e^4+\dfrac{7}{32}e^6\right)+18\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{19}{2}}}e\left(1+7e^2+\dfrac{105}{16}e^4+\dfrac{7}{8}e^6\right)$
			10	5	0	$19\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{21}{2}}}e\left(1+18e^2+\dfrac{189}{4}e^4+\dfrac{105}{4}e^6+\cdots\cdots\right)$

表 3 $\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$ （続き）

p	u	v	p	u	v	$\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$
						$+\ 36\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{19}{2}}}\ e\left(1+\dfrac{21}{4}e^2+\dfrac{35}{8}e^4+\dfrac{35}{64}e^6\right)$
11	4	−3	11	7	3	$315\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{23}{2}}}\ e^4\left(1+\dfrac{21}{8}e^2+\dfrac{21}{16}e^4+\dfrac{7}{64}e^6\right)$
						$+\ 45\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{21}{2}}}\ e^2\left(1+\dfrac{35}{8}e^2+\dfrac{49}{16}e^4+\dfrac{21}{64}e^6\right)$
11	5	−1	11	6	1	$105\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{23}{2}}}\ e^2\left(1+9e^2+\dfrac{63}{4}e^4+\dfrac{105}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 5\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{21}{2}}}\left(1+27e^2+\dfrac{315}{4}e^4+\dfrac{735}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
12	5	−2	12	7	2	$\dfrac{1265}{4}\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{25}{2}}}\ e^3\left(1+6e^2+\dfrac{63}{8}e^4+\dfrac{21}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\dfrac{55}{2}\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{23}{2}}}\ e\left(1+12e^2+\dfrac{189}{8}e^4+\dfrac{21}{2}e^6+\cdots\cdots\right)$
			12	6	0	$23\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{25}{2}}}\ e\left(1+\dfrac{55}{2}e^2+\dfrac{495}{4}e^4+\dfrac{1155}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 55\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{23}{2}}}\ e\left(1+9e^2+\dfrac{63}{4}e^4+\dfrac{105}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
13	5	−3	13	8	3	$\dfrac{1375}{2}\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{27}{2}}}\ e^4\left(1+\dfrac{9}{2}e^2+\dfrac{189}{40}e^4+\dfrac{21}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\dfrac{165}{2}\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{25}{2}}}\ e^2\left(1+\dfrac{15}{2}e^2+\dfrac{441}{20}e^4+\dfrac{63}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
13	6	−1	13	7	1	$150\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{27}{2}}}\ e^2\left(1+\dfrac{143}{8}e^2+\dfrac{165}{8}e^4+\dfrac{1155}{32}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 6\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{25}{2}}}\left(1+\dfrac{429}{8}e^2+\dfrac{825}{8}e^4+\dfrac{8085}{32}e^6+\cdots\cdots\right)$
14	6	−2	14	8	2	$\dfrac{1053}{2}\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{29}{2}}}\ e^3\left(1+\dfrac{55}{6}e^2+\dfrac{165}{8}e^4+\dfrac{231}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 39\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{27}{2}}}\ e\left(1+\dfrac{55}{3}e^2+\dfrac{495}{8}e^4+\dfrac{231}{4}e^6+\cdots\cdots\right)$
			14	7	0	$27\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{29}{2}}}\ e\left(1+39e^2+\dfrac{2145}{8}e^4+\dfrac{2145}{4}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 78\ \dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{27}{2}}}\ e\left(1+\dfrac{55}{4}e^2+\dfrac{165}{4}e^4+\dfrac{1155}{32}e^6+\cdots\cdots\right)$

表3 $\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$ （続き）

p	u	v	p	u	v	$\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$
15	6	−3	15	9	3	$\frac{2639}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{31}{2}}}e^4\left(1+\frac{55}{8}e^2+\frac{99}{8}e^4+\frac{231}{32}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\frac{273}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{29}{2}}}e^2\left(1+\frac{275}{24}e^2+\frac{231}{8}e^4+\frac{693}{32}e^6+\cdots\cdots\right)$
15	7	−1	15	8	1	$203\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{31}{2}}}e^2\left(1+\frac{39}{2}e^2+\frac{715}{8}e^4+\frac{2145}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 7\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{29}{2}}}\left(1+\frac{117}{2}e^2+\frac{3575}{8}e^4+\frac{15015}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
16	7	−2	16	9	2	$\frac{3255}{4}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{33}{2}}}e^3\left(1+13e^2+\frac{715}{16}e^4+\frac{429}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\frac{105}{2}\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{31}{2}}}e\left(1+26e^2+\frac{2145}{16}e^4+\frac{429}{2}e^6+\cdots\cdots\right)$
			16	8	0	$31\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{33}{2}}}e\left(1+\frac{105}{2}e^2+\frac{4095}{8}e^4+\frac{25025}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+105\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{31}{2}}}e\left(1+\frac{39}{2}e^2+\frac{715}{8}e^4+\frac{2145}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
17	7	−3	17	10	3	$2310\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{35}{2}}}e^4\left(1+\frac{39}{4}e^2+\frac{429}{16}e^4+\frac{429}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+210\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{33}{2}}}e^2\left(1+\frac{65}{4}e^2+\frac{1001}{16}e^4+\frac{1287}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
17	8	−1	17	9	1	$264\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{35}{2}}}e^2\left(1+\frac{105}{4}e^2+\frac{1365}{8}e^4+\frac{25025}{64}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 8\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{33}{2}}}\left(1+\frac{315}{4}e^2+\frac{6825}{8}e^4+\frac{175175}{64}e^6+\cdots\cdots\right)$
18	8	−2	18	10	2	$1190\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{37}{2}}}e^3\left(1+\frac{35}{2}e^2+\frac{1365}{16}e^4+\frac{5005}{32}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 68\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{35}{2}}}e\left(1+35e^2+\frac{4095}{16}e^4+\frac{5005}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
			18	9	0	$35\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{37}{2}}}e\left(1+68e^2+\frac{1785}{2}e^4+\frac{7735}{2}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+136\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{35}{2}}}e\left(1+\frac{105}{4}e^2+\frac{1365}{8}e^4+\frac{25025}{64}e^6+\cdots\cdots\right)$
19	8	−3	19	11	3	$3774\frac{1}{(1-e^2)^{\frac{39}{2}}}e^4\left(1+\frac{105}{8}e^2+\frac{5967}{128}e^4+\frac{36465}{512}e^6+\cdots\cdots\right)$

表 3 $\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$ （続き）

p	u	v	p	u	v	$\dfrac{dG_{p,u,v}(e)}{de}$
						$+306\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{37}{2}}}e^2\left(1+\dfrac{175}{8}e^2+\dfrac{13923}{128}e^4+\dfrac{109395}{512}e^6+\cdots\cdots\right)$
19	9	-1	19	10	1	$333\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{39}{2}}}e^2\left(1+34e^2+\dfrac{595}{2}e^4+\dfrac{7735}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 9\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{37}{2}}}\left(1+102e^2+\dfrac{2975}{2}e^4+\dfrac{54145}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
20	9	-2	20	11	2	$\dfrac{6669}{2}\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{41}{2}}}e^3\left(1+\dfrac{68}{3}e^2+\dfrac{595}{4}e^4+\dfrac{1547}{4}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+171\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{39}{2}}}e\left(1+\dfrac{136}{3}e^2+\dfrac{1785}{4}e^4+1547e^6+\cdots\cdots\right)$
			20	10	0	$39\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{41}{2}}}e\left(1+\dfrac{171}{2}e^2+\dfrac{2907}{2}e^4+\dfrac{33915}{4}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+171\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{39}{2}}}e\left(1+34e^2+\dfrac{595}{2}e^4+\dfrac{7735}{8}e^6+\cdots\cdots\right)$
21	9	-3	21	12	3	$\dfrac{11685}{2}\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{43}{2}}}e^4\left(1+17e^2+\dfrac{6183}{76}e^4+\dfrac{1547}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\dfrac{855}{2}\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{41}{2}}}e^2\left(1+\dfrac{85}{3}e^2+\dfrac{14427}{76}e^4+\dfrac{4641}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
21	10	-1	21	11	1	$410\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{43}{2}}}e^2\left(1+\dfrac{171}{4}e^2+\dfrac{969}{2}e^4+\dfrac{33915}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$
						$+\ 10\dfrac{1}{(1-e^2)^{\frac{41}{2}}}\left(1+\dfrac{513}{4}e^2+\dfrac{4845}{2}e^4+\dfrac{237405}{16}e^6+\cdots\cdots\right)$

表4 $F_{p,q,u}(i)$

p	q	u	$F_{p,q,u}(i)$
3	0	0	$-\frac{5!!}{0!\,2^3\,0!\,3!}\sin^3 i$
3	0	1	$\left(\frac{5!!}{0!\,2^3\,1!\,2!}\sin^2 i-\frac{3!!}{1!\,2^2\,0!\,1!}\right)\sin i$
3	0	2	$-F_{3,0,1}(i)$
3	0	3	$-F_{3,0,0}(i)$
4	0	1	$\left(-\frac{7!!}{0!\,2^4\,1!\,3!}\sin^2 i+\frac{5!!}{1!\,2^3\,0!\,2!}\right)\sin^2 i$
4	0	2	$\frac{7!!}{0!\,2^4\,2!\,2!}\sin^4 i-\frac{5!!}{1!\,2^3\,1!\,1!}\sin^2 i+\frac{3!!}{2!\,2^2\,0!\,0!}$
4	0	3	$F_{4,0,1}(i)$
5	0	1	$\left(-\frac{9!!}{0!\,2^5\,1!\,4!}\sin^2 i+\frac{7!!}{1!\,2^4\,0!\,3!}\right)\sin^3 i$
5	0	2	$\left(\frac{9!!}{0!\,2^5\,2!\,3!}\sin^4 i-\frac{7!!}{1!\,2^4\,1!\,2!}\sin^2 i+\frac{5!!}{2!\,2^3\,0!\,1!}\right)\sin i$
5	0	3	$-F_{5,0,2}(i)$
5	0	4	$-F_{5,0,1}(i)$
6	0	2	$\left(-\frac{11!!}{0!\,2^6\,2!\,4!}\sin^4 i+\frac{9!!}{1!\,2^5\,1!\,3!}\sin^2 i-\frac{7!!}{2!\,2^4\,0!\,2!}\right)\sin^2 i$
6	0	3	$\frac{11!!}{0!\,2^6\,3!\,3!}\sin^6 i-\frac{9!!}{1!\,2^5\,2!\,2!}\sin^4 i+\frac{7!!}{2!\,2^4\,1!\,1!}\sin^2 i-\frac{5!!}{3!\,2^3\,0!\,0!}$
6	0	4	$F_{6,0,2}(i)$
7	0	2	$\left(-\frac{13!!}{0!\,2^7\,2!\,5!}\sin^4 i+\frac{11!!}{1!\,2^6\,1!\,4!}\sin^2 i-\frac{9!!}{2!\,2^5\,0!\,3!}\right)\sin^3 i$
7	0	3	$\left(\frac{13!!}{0!\,2^7\,3!\,4!}\sin^6 i-\frac{11!!}{1!\,2^6\,2!\,3!}\sin^4 i+\frac{9!!}{2!\,2^5\,1!\,2!}\sin^2 i-\frac{7!!}{3!\,2^4\,0!\,1!}\right)\sin i$
7	0	4	$-F_{7,0,3}(i)$
7	0	5	$-F_{7,0,2}(i)$
8	0	3	$\left(-\frac{15!!}{0!\,2^8\,3!\,5!}\sin^6 i+\frac{13!!}{1!\,2^7\,2!\,4!}\sin^4 i-\frac{11!!}{2!\,2^6\,1!\,3!}\sin^2 i+\frac{9!!}{3!\,2^5\,0!\,2!}\right)\sin^2 i$
8	0	4	$\frac{15!!}{0!\,2^8\,4!\,4!}\sin^8 i-\frac{13!!}{1!\,2^7\,3!\,3!}\sin^6 i+\frac{11!!}{2!\,2^6\,2!\,2!}\sin^4 i-\frac{9!!}{3!\,2^5\,1!\,1!}\sin^2 i$ $+\frac{7!!}{4!\,2^4\,0!\,0!}$

表 4　$F_{p,q,u}(i)$　（続き）

p	q	u	$F_{p,q,u}(i)$
8	0	5	$F_{8,0,3}(i)$
9	0	3	$\left(-\frac{17!!}{0!2^9 3!6!}\sin^6 i+\frac{15!!}{1!2^8 2!5!}\sin^4 i-\frac{13!!}{2!2^7 1!4!}\sin^2 i+\frac{11!!}{3!2^6 0!3!}\right)\sin^3 i$
9	0	4	$\left(\frac{17!!}{0!2^9 4!5!}\sin^8 i-\frac{15!!}{1!2^8 3!4!}\sin^6 i+\frac{13!!}{2!2^7 2!3!}\sin^4 i-\frac{11!!}{3!2^6 1!2!}\sin^2 i+\frac{9!!}{4!2^5 0!1!}\right)\sin i$
9	0	5	$-F_{9,0,4}(i)$
9	0	6	$-F_{9,0,3}(i)$
10	0	4	$\left(-\frac{19!!}{0!2^{10}4!6!}\sin^8 i+\frac{17!!}{1!2^9 3!5!}\sin^6 i-\frac{15!!}{2!2^8 2!4!}\sin^4 i+\frac{13!!}{3!2^7 1!3!}\sin^2 i-\frac{11!!}{4!2^6 0!2!}\right)\sin^2 i$
10	0	5	$\frac{19!!}{0!2^{10}5!5!}\sin^{10} i-\frac{17!!}{1!2^9 4!4!}\sin^8 i+\frac{15!!}{2!2^8 3!3!}\sin^6 i-\frac{13!!}{3!2^7 2!2!}\sin^4 i+\frac{11!!}{4!2^6 1!1!}\sin^2 i-\frac{9!!}{5!2^5 0!0!}$
10	0	6	$F_{10,0,4}(i)$
11	0	4	$\left(-\frac{21!!}{0!2^{11}4!7!}\sin^8 i+\frac{19!!}{1!2^{10}3!6!}\sin^6 i-\frac{17!!}{2!2^9 2!5!}\sin^4 i+\frac{15!!}{3!2^8 1!4!}\sin^2 i-\frac{13!!}{4!2^7 0!3!}\right)\sin^3 i$
11	0	5	$\left(\frac{21!!}{0!2^{11}5!6!}\sin^{10} i-\frac{19!!}{1!2^{10}4!5!}\sin^8 i+\frac{17!!}{2!2^9 3!4!}\sin^6 i-\frac{15!!}{3!2^8 2!3!}\sin^4 i+\frac{13!!}{4!2^7 1!2!}\sin^2 i-\frac{11!!}{5!2^6 0!1!}\right)\sin i$
11	0	6	$-F_{11,0,5}(i)$
11	0	7	$-F_{11,0,4}(i)$
12	0	5	$\left(-\frac{23!!}{0!2^{12}5!7!}\sin^{10} i+\frac{21!!}{1!2^{11}4!6!}\sin^8 i-\frac{19!!}{2!2^{10}3!5!}\sin^6 i+\frac{17!!}{3!2^9 2!4!}\sin^4 i-\frac{15!!}{4!2^8 1!3!}\sin^2 i+\frac{13!!}{5!2^7 0!2!}\right)\sin^2 i$
12	0	6	$\frac{23!!}{0!2^{12}6!6!}\sin^{12} i-\frac{21!!}{1!2^{11}5!5!}\sin^{10} i+\frac{19!!}{2!2^{10}4!4!}\sin^8 i-\frac{17!!}{3!2^9 3!3!}\sin^6 i+\frac{15!!}{4!2^8 2!2!}\sin^4 i-\frac{13!!}{5!2^7 1!1!}\sin^2 i+\frac{11!!}{6!2^6 0!0!}$
12	0	7	$F_{12,0,5}(i)$

表4 $F_{p,q,u}(i)$ （続き）

p	q	u	$F_{p,q,u}(i)$
13	0	5	$\left(-\frac{25!!}{0!2^{13}5!8!}\sin^{10} i+\frac{23!!}{1!2^{12}4!7!}\sin^{8} i-\frac{21!!}{2!2^{11}3!6!}\sin^{6} i+\frac{19!!}{3!2^{10}2!5!}\sin^{4} i-\frac{17!!}{4!2^{9}1!4!}\sin^{2} i+\frac{15!!}{5!2^{8}0!3!}\right)\sin^{3} i$
13	0	6	$\left(\frac{25!!}{0!2^{13}6!7!}\sin^{12} i-\frac{23!!}{1!2^{12}5!6!}\sin^{10} i+\frac{21!!}{2!2^{11}4!5!}\sin^{8} i-\frac{19!!}{3!2^{10}3!4!}\sin^{6} i+\frac{17!!}{4!2^{9}2!3!}\sin^{4} i-\frac{15!!}{5!2^{8}1!2!}\sin^{2} i+\frac{13!!}{6!2^{7}0!1!}\right)\sin i$
13	0	7	$-F_{13,0,6}(i)$
13	0	8	$-F_{13,0,5}(i)$
14	0	6	$\left(-\frac{27!!}{0!2^{14}6!8!}\sin^{12} i+\frac{25!!}{1!2^{13}5!7!}\sin^{10} i-\frac{23!!}{2!2^{12}4!6!}\sin^{8} i+\frac{21!!}{3!2^{11}3!5!}\sin^{6} i-\frac{19!!}{4!2^{10}2!4!}\sin^{4} i+\frac{17!!}{5!2^{9}1!3!}\sin^{2} i-\frac{15!!}{6!2^{8}0!2!}\right)\sin^{2} i$
14	0	7	$\frac{27!!}{0!2^{14}7!7!}\sin^{14} i-\frac{25!!}{1!2^{13}6!6!}\sin^{12} i+\frac{23!!}{2!2^{12}5!5!}\sin^{10} i-\frac{21!!}{3!2^{11}4!4!}\sin^{8} i+\frac{19!!}{4!2^{10}3!3!}\sin^{6} i-\frac{17!!}{5!2^{9}2!2!}\sin^{4} i+\frac{15!!}{6!2^{8}1!1!}\sin^{2} i-\frac{13!!}{7!2^{7}0!0!}$
14	0	8	$F_{14,0,6}(i)$
15	0	6	$\left(-\frac{29!!}{0!2^{15}6!9!}\sin^{12} i+\frac{27!!}{1!2^{14}5!8!}\sin^{10} i-\frac{25!!}{2!2^{13}4!7!}\sin^{8} i+\frac{23!!}{3!2^{12}3!6!}\sin^{6} i-\frac{21!!}{4!2^{11}2!5!}\sin^{4} i+\frac{19!!}{5!2^{10}1!4!}\sin^{2} i-\frac{17!!}{6!2^{9}0!3!}\right)\sin^{3} i$
15	0	7	$\left(\frac{29!!}{0!2^{15}7!8!}\sin^{14} i-\frac{27!!}{1!2^{14}6!7!}\sin^{12} i+\frac{25!!}{2!2^{13}5!6!}\sin^{10} i-\frac{23!!}{3!2^{12}4!5!}\sin^{8} i+\frac{21!!}{4!2^{11}3!4!}\sin^{6} i-\frac{19!!}{5!2^{10}2!3!}\sin^{4} i+\frac{17!!}{6!2^{9}1!2!}\sin^{2} i-\frac{15!!}{7!2^{8}0!1!}\right)\sin i$
15	0	8	$-F_{15,0,7}(i)$
15	0	9	$-F_{15,0,6}(i)$
16	0	7	$\left(-\frac{31!!}{0!2^{16}7!9!}\sin^{14} i+\frac{29!!}{1!2^{15}6!8!}\sin^{12} i-\frac{27!!}{2!2^{14}5!7!}\sin^{10} i+\frac{25!!}{3!2^{13}4!6!}\sin^{8} i-\frac{23!!}{4!2^{12}3!5!}\sin^{6} i+\frac{21!!}{5!2^{11}2!4!}\sin^{4} i-\frac{19!!}{6!2^{10}1!3!}\sin^{2} i+\frac{17!!}{7!2^{9}0!2!}\right)\sin^{2} i$
16	0	8	$\frac{31!!}{0!2^{16}8!8!}\sin^{16} i-\frac{29!!}{1!2^{15}7!7!}\sin^{14} i+\frac{27!!}{2!2^{14}6!6!}\sin^{12} i-\frac{25!!}{3!2^{13}5!5!}\sin^{10} i+\frac{23!!}{4!2^{12}4!4!}\sin^{8} i-\frac{21!!}{5!2^{11}3!3!}\sin^{6} i+\frac{19!!}{6!2^{10}2!2!}\sin^{4} i-\frac{17!!}{7!2^{9}1!1!}\sin^{2} i+\frac{15!!}{8!2^{8}0!0!}$
16	0	9	$F_{16,0,7}(i)$

表 4 $F_{p,q,u}(i)$ （続き）

p	q	u	$F_{p,q,u}(i)$
17	0	7	$\left(-\frac{33!!}{0!\,2^{17}7!\,10!}\sin^{14}i+\frac{31!!}{1!\,2^{16}6!\,9!}\sin^{12}i-\frac{29!!}{2!\,2^{15}5!\,8!}\sin^{10}i+\frac{27!!}{3!\,2^{14}4!\,7!}\sin^{8}i-\frac{25!!}{4!\,2^{13}3!\,6!}\sin^{6}i+\frac{23!!}{5!\,2^{12}2!\,5!}\sin^{4}i-\frac{21!!}{6!\,2^{11}1!\,4!}\sin^{2}i+\frac{19!!}{7!\,2^{10}0!\,3!}\right)\sin^{3}i$
17	0	8	$\left(\frac{33!!}{0!\,2^{17}8!\,9!}\sin^{16}i-\frac{31!!}{1!\,2^{16}7!\,8!}\sin^{14}i+\frac{29!!}{2!\,2^{15}6!\,7!}\sin^{12}i-\frac{27!!}{3!\,2^{14}5!\,6!}\sin^{10}i+\frac{25!!}{4!\,2^{13}4!\,5!}\sin^{8}i-\frac{23!!}{5!\,2^{12}3!\,4!}\sin^{6}i+\frac{21!!}{6!\,2^{11}2!\,3!}\sin^{4}i-\frac{19!!}{7!\,2^{10}1!\,2!}\sin^{2}i+\frac{17!!}{8!\,2^{9}0!\,1!}\right)\sin i$
17	0	9	$-F_{17,0,8}(i)$
17	0	10	$-F_{17,0,7}(i)$
18	0	8	$\left(-\frac{35!!}{0!\,2^{18}8!\,10!}\sin^{16}i+\frac{33!!}{1!\,2^{17}7!\,9!}\sin^{14}i-\frac{31!!}{2!\,2^{16}6!\,8!}\sin^{12}i+\frac{29!!}{3!\,2^{15}5!\,7!}\sin^{10}i-\frac{27!!}{4!\,2^{14}4!\,6!}\sin^{8}i+\frac{25!!}{5!\,2^{13}3!\,5!}\sin^{6}i-\frac{23!!}{6!\,2^{12}2!\,4!}\sin^{4}i+\frac{21!!}{7!\,2^{11}1!\,3!}\sin^{2}i-\frac{19!!}{8!\,2^{10}0!\,2!}\right)\sin^{2}i$
18	0	9	$\frac{35!!}{0!\,2^{18}9!\,9!}\sin^{18}i-\frac{33!!}{1!\,2^{17}8!\,8!}\sin^{16}i+\frac{31!!}{2!\,2^{16}7!\,7!}\sin^{14}i-\frac{29!!}{3!\,2^{15}6!\,6!}\sin^{12}i+\frac{27!!}{4!\,2^{14}5!\,5!}\sin^{10}i-\frac{25!!}{5!\,2^{13}4!\,4!}\sin^{8}i+\frac{23!!}{6!\,2^{12}3!\,3!}\sin^{6}i-\frac{21!!}{7!\,2^{11}2!\,2!}\sin^{4}i+\frac{19!!}{8!\,2^{10}1!\,1!}\sin^{2}i-\frac{17!!}{9!\,2^{9}0!\,0!}$
18	0	10	$F_{18,0,8}(i)$
19	0	8	$\left(-\frac{37!!}{0!\,2^{19}8!\,11!}\sin^{16}i+\frac{35!!}{1!\,2^{18}7!\,10!}\sin^{14}i-\frac{33!!}{2!\,2^{17}6!\,9!}\sin^{12}i+\frac{31!!}{3!\,2^{16}5!\,8!}\sin^{10}i-\frac{29!!}{4!\,2^{15}4!\,7!}\sin^{8}i+\frac{27!!}{5!\,2^{14}3!\,6!}\sin^{6}i-\frac{25!!}{6!\,2^{13}2!\,5!}\sin^{4}i+\frac{23!!}{7!\,2^{12}1!\,4!}\sin^{2}i-\frac{21!!}{8!\,2^{11}0!\,3!}\right)\sin^{3}i$
19	0	9	$\left(\frac{37!!}{0!\,2^{19}9!\,10!}\sin^{18}i-\frac{35!!}{1!\,2^{18}8!\,9!}\sin^{16}i+\frac{33!!}{2!\,2^{17}7!\,8!}\sin^{14}i-\frac{31!!}{3!\,2^{16}6!\,7!}\sin^{12}i+\frac{29!!}{4!\,2^{15}5!\,6!}\sin^{10}i-\frac{27!!}{5!\,2^{14}4!\,5!}\sin^{8}i+\frac{25!!}{6!\,2^{13}3!\,4!}\sin^{6}i-\frac{23!!}{7!\,2^{12}2!\,3!}\sin^{4}i+\frac{21!!}{8!\,2^{11}1!\,2!}\sin^{2}i-\frac{19!!}{9!\,2^{10}0!\,1!}\right)\sin i$
19	0	10	$-F_{19,0,9}(i)$
19	0	11	$-F_{19,0,8}(i)$
20	0	9	$\left(-\frac{39!!}{0!\,2^{20}9!\,11!}\sin^{18}i+\frac{37!!}{1!\,2^{19}8!\,10!}\sin^{16}i-\frac{35!!}{2!\,2^{18}7!\,9!}\sin^{14}i+\frac{33!!}{3!\,2^{17}6!\,8!}\sin^{12}i\right.$

表4 $F_{p,q,u}(i)$ （続き）

p	q	u	$F_{p,q,u}(i)$
			$-\frac{31!!}{4!2^{16}5!7!}\sin^{10}i+\frac{29!!}{5!2^{15}4!6!}\sin^{8}i-\frac{27!!}{6!2^{14}3!5!}\sin^{6}i+\frac{25!!}{7!2^{13}2!4!}\sin^{4}i-\frac{23!!}{8!2^{12}1!3!}\sin^{2}i+\frac{21!!}{9!2^{11}0!2!})\sin^{2}i$
20	0	10	$\frac{39!!}{0!2^{20}10!10!}\sin^{20}i-\frac{37!!}{1!2^{19}9!9!}\sin^{18}i+\frac{35!!}{2!2^{18}8!8!}\sin^{16}i-\frac{33!!}{3!2^{17}7!7!}\sin^{14}i+\frac{31!!}{4!2^{16}6!6!}\sin^{12}i-\frac{29!!}{5!2^{15}5!5!}\sin^{10}i+\frac{27!!}{6!2^{14}4!4!}\sin^{8}i-\frac{25!!}{7!2^{13}3!3!}\sin^{6}i+\frac{23!!}{8!2^{12}2!2!}\sin^{4}i-\frac{21!!}{9!2^{11}1!1!}\sin^{2}i+\frac{19!!}{10!2^{10}0!0!}$
20	0	11	$F_{20,0,9}(i)$
21	0	9	$\left(-\frac{41!!}{0!2^{21}9!12!}\sin^{18}i+\frac{39!!}{1!2^{20}8!11!}\sin^{16}i-\frac{37!!}{2!2^{19}7!10!}\sin^{14}i+\frac{35!!}{3!2^{18}6!9!}\sin^{12}i-\frac{33!!}{4!2^{17}5!8!}\sin^{10}i+\frac{31!!}{5!2^{16}4!7!}\sin^{8}i-\frac{29!!}{6!2^{15}3!6!}\sin^{6}i+\frac{27!!}{7!2^{14}2!5!}\sin^{4}i-\frac{25!!}{8!2^{13}1!4!}\sin^{2}i+\frac{23!!}{9!2^{12}0!3!}\right)\sin^{3}i$
21	0	10	$\left(\frac{41!!}{0!2^{21}10!11!}\sin^{20}i-\frac{39!!}{1!2^{20}9!10!}\sin^{18}i+\frac{37!!}{2!2^{19}8!9!}\sin^{16}i-\frac{35!!}{3!2^{18}7!8!}\sin^{14}i+\frac{33!!}{4!2^{17}6!7!}\sin^{12}i-\frac{31!!}{5!2^{16}5!6!}\sin^{10}i+\frac{29!!}{6!2^{15}4!5!}\sin^{8}i-\frac{27!!}{7!2^{14}3!4!}\sin^{6}i+\frac{25!!}{8!2^{13}2!3!}\sin^{4}i-\frac{23!!}{9!2^{12}1!2!}\sin^{2}i+\frac{21!!}{10!2^{11}0!1!}\right)\sin i$
21	0	11	$-F_{21,0,10}(i)$
21	0	12	$-F_{21,0,9}(i)$

表 5 $\dfrac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$

p	q	u	$\dfrac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$
3	0	0	$-\dfrac{3\cdot 5!!}{0!2^3 0!3!}\sin^2 i\cos i$
3	0	1	$\left(\dfrac{3\cdot 5!!}{0!2^3 1!2!}\sin^2 i-\dfrac{1\cdot 3!!}{1!2^2 0!1!}\right)\cos i$
3	0	2	$-\dfrac{dF_{3,0,1}(i)}{di}$
3	0	3	$-\dfrac{dF_{3,0,0}(i)}{di}$
4	0	1	$\left(-\dfrac{2\cdot 7!!}{0!2^3 1!3!}\sin^2 i+\dfrac{1\cdot 5!!}{1!2^2 0!2!}\right)\sin i\cos i$
4	0	2	$\left(\dfrac{2\cdot 7!!}{0!2^3 2!2!}\sin^2 i-\dfrac{1\cdot 5!!}{1!2^2 1!1!}\right)\sin i\cos i$
4	0	3	$\dfrac{dF_{4,0,1}(i)}{di}$
5	0	1	$\left(-\dfrac{5\cdot 9!!}{0!2^5 1!4!}\sin^2 i+\dfrac{3\cdot 7!!}{1!2^4 0!3!}\right)\sin^2 i\cos i$
5	0	2	$\left(\dfrac{5\cdot 9!!}{0!2^5 2!3!}\sin^4 i-\dfrac{3\cdot 7!!}{1!2^4 1!2!}\sin^2 i+\dfrac{1\cdot 5!!}{2!2^3 0!1!}\right)\cos i$
5	0	3	$-\dfrac{dF_{5,0,2}(i)}{di}$
5	0	4	$-\dfrac{dF_{5,0,1}(i)}{di}$
6	0	2	$\left(-\dfrac{3\cdot 11!!}{0!2^5 2!4!}\sin^4 i+\dfrac{2.9!!}{1!2^4 1!3!}\sin^2 i-\dfrac{1\cdot 7!!}{2!2^3 0!2!}\right)\sin i\cos i$
6	0	3	$\left(\dfrac{3\cdot 11!!}{0!2^5 3!3!}\sin^4 i-\dfrac{2\cdot 9!!}{1!2^4 2!2!}\sin^2 i+\dfrac{1\cdot 7!!}{2!2^3 1!1!}\right)\sin i\cos i$
6	0	4	$\dfrac{dF_{6,0,2}(i)}{di}$
7	0	2	$\left(-\dfrac{7\cdot 13!!}{0!2^7 2!5!}\sin^4 i+\dfrac{5\cdot 11!!}{1!2^6 1!4!}\sin^2 i-\dfrac{3\cdot 9!!}{2!2^5 0!3!}\right)\sin^2 i\cos i$
7	0	3	$\left(\dfrac{7\cdot 13!!}{0!2^7 3!4!}\sin^6 i-\dfrac{5\cdot 11!!}{1!2^6 2!3!}\sin^4 i+\dfrac{3\cdot 9!!}{2!2^5 1!2!}\sin^2 i-\dfrac{1\cdot 7!!}{3!2^4 0!1!}\right)\cos i$
7	0	4	$-\dfrac{dF_{7,0,3}(i)}{di}$
7	0	5	$-\dfrac{dF_{7,0,2}(i)}{di}$
8	0	3	$\left(-\dfrac{4\cdot 15!!}{0!2^7 3!5!}\sin^6 i+\dfrac{3\cdot 13!!}{1!2^6 2!4!}\sin^4 i-\dfrac{2\cdot 11!!}{2!2^5 1!3!}\sin^2 i+\dfrac{1\cdot 9!!}{3!2^4 0!2!}\right)\sin i\cos i$
8	0	4	$\left(\dfrac{4\cdot 15!!}{0!2^7 4!4!}\sin^6 i-\dfrac{3\cdot 13!!}{1!2^6 3!3!}\sin^4 i+\dfrac{2\cdot 11!!}{2!2^5 2!2!}\sin^2 i-\dfrac{1\cdot 9!!}{3!2^4 1!1!}\right)\sin i\cos i$
8	0	5	$\dfrac{dF_{8,0,3}(i)}{di}$

表5 $\dfrac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$ (続き)

p	q	u	$\dfrac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$
9	0	3	$\left(-\frac{9\cdot17!!}{0!\,2^9\,3!\,6!}\sin^6 i+\frac{7\cdot15!!}{1!\,2^8\,2!\,5!}\sin^4 i-\frac{5\cdot13!!}{2!\,2^7\,1!\,4!}\sin^4 i+\frac{3\cdot11!!}{3!\,2^6\,0!\,3!}\right)\sin^2 i\ \cos i$
9	0	4	$\left(\frac{9\cdot17!!}{0!\,2^9\,4!\,5!}\sin^8 i-\frac{7\cdot15!!}{1!\,2^8\,3!\,4!}\sin^6 i+\frac{5\cdot13!!}{2!\,2^7\,2!\,3!}\sin^4 i-\frac{3\cdot11!!}{3!\,2^6\,1!\,2!}\sin^2 i+\frac{1\cdot9!!}{4!\,2^5\,0!\,1!}\right)\cos i$
9	0	5	$-\frac{dF_{9,0,4}(i)}{di}$
9	0	6	$-\frac{dF_{9,0,3}(i)}{di}$
10	0	4	$\left(-\frac{5\cdot19!!}{0!\,2^9\,4!\,6!}\sin^8 i+\frac{4\cdot17!!}{1!\,2^8\,3!\,5!}\sin^6 i-\frac{3\cdot15!!}{2!\,2^7\,2!\,4!}\sin^4 i+\frac{2\cdot13!!}{3!\,2^6\,1!\,3!}\sin^2 i-\frac{1\cdot11!!}{4!\,2^5\,0!\,2!}\right)\sin i\ \cos i$
10	0	5	$\left(\frac{5\cdot19!!}{0!\,2^9\,5!\,5!}\sin^8 i-\frac{4\cdot17!!}{1!\,2^8\,4!\,4!}\sin^6 i+\frac{3\cdot15!!}{2!\,2^7\,3!\,3!}\sin^4 i-\frac{2\cdot13!!}{3!\,2^6\,2!\,2!}\sin^2 i+\frac{1\cdot11!!}{4!\,2^5\,1!\,1!}\right)\sin i\ \cos i$
10	0	6	$\frac{dF_{10,0,4}(i)}{di}$
11	0	4	$\left(-\frac{11\cdot21!!}{0!\,2^{11}\,4!\,7!}\sin^8 i+\frac{9\cdot19!!}{1!\,2^{10}\,3!\,6!}\sin^6 i-\frac{7\cdot17!!}{2!\,2^9\,2!\,5!}\sin^4 i+\frac{5\cdot15!!}{3!\,2^8\,1!\,4!}\sin^2 i-\frac{3\cdot13!!}{4!\,2^7\,0!\,3!}\right)\sin^2 i\ \cos i$
11	0	5	$\left(\frac{11\cdot21!!}{0!\,2^{11}\,5!\,6!}\sin^{10} i-\frac{9\cdot19!!}{1!\,2^{10}\,4!\,5!}\sin^8 i+\frac{7\cdot17!!}{2!\,2^9\,3!\,4!}\sin^6 i-\frac{5\cdot15!!}{3!\,2^8\,2!\,3!}\sin^4 i+\frac{3\cdot13!!}{4!\,2^7\,1!\,2!}\sin^2 i-\frac{1\cdot11!!}{5!\,2^6\,0!\,1!}\right)\cos i$
11	0	6	$-\frac{dF_{11,0,5}(i)}{di}$
11	0	7	$-\frac{dF_{11,0,4}(i)}{di}$
12	0	5	$\left(-\frac{6\cdot23!!}{0!\,2^{11}\,5!\,7!}\sin^{10} i+\frac{5\cdot21!!}{1!\,2^{10}\,4!\,6!}\sin^8 i-\frac{4\cdot19!!}{2!\,2^9\,3!\,5!}\sin^6 i+\frac{7\cdot17!!}{3!\,2^8\,2!\,4!}\sin^4 i-\frac{2\cdot15!!}{4!\,2^7\,1!\,3!}\sin^2 i+\frac{1\cdot13!!}{5!\,2^6\,0!\,2!}\right)\sin i\ \cos i$
12	0	6	$\left(\frac{2\cdot23!!}{0!\,2^{11}\,6!\,6!}\sin^{10} i-\frac{5\cdot21!!}{1!\,2^{10}\,5!\,5!}\sin^8 i+\frac{4\cdot19!!}{2!\,2^9\,4!\,4!}\sin^6 i-\frac{3\cdot17!!}{3!\,2^8\,3!\,3!}\sin^4 i+\frac{2\cdot15!!}{4!\,2^7\,2!\,2!}\sin^2 i-\frac{1\cdot13!!}{5!\,2^6\,1!\,1!}\right)\sin i\ \cos i$
12	0	7	$\frac{dF_{12,0,5}(i)}{di}$
13	0	5	$\left(-\frac{13\cdot25!!}{0!\,2^{13}\,5!\,8!}\sin^{10} i+\frac{11\cdot23!!}{1!\,2^{12}\,4!\,7!}\sin^8 i-\frac{9\cdot21!!}{2!\,2^{11}\,3!\,6!}\sin^6 i+\frac{7\cdot19!!}{3!\,2^{10}\,2!\,5!}\sin^4 i\right.$

表 5 $\dfrac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$ （続き）

p	q	u	$\dfrac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$
			$-\dfrac{5\cdot 17!!}{4!2^{9}1!4!}\sin^{2}i+\dfrac{3\cdot 15!!}{5!2^{8}0!3!}\Big)\sin^{2}i\ \cos i$
13	0	6	$\Big(\dfrac{13\cdot 25!!}{0!2^{13}6!7!}\sin^{12}i-\dfrac{11\cdot 23!!}{1!2^{12}5!6!}\sin^{10}i+\dfrac{9\cdot 21!!}{2!2^{11}4!5!}\sin^{8}i-\dfrac{7\cdot 19!!}{3!2^{10}3!4!}\sin^{6}i+\dfrac{5\cdot 17!!}{4!2^{9}2!3!}\sin^{4}i-\dfrac{3\cdot 15!!}{5!2^{8}1!2!}\sin^{2}i+\dfrac{1\cdot 13!!}{6!2^{7}0!1!}\Big)\cos i$
13	0	7	$-\dfrac{dF_{13,0,6}(i)}{di}$
13	0	8	$-\dfrac{dF_{13,0,5}(i)}{di}$
14	0	6	$\Big(-\dfrac{7\cdot 27!!}{0!2^{13}6!8!}\sin^{12}i+\dfrac{6\cdot 25!!}{1!2^{12}5!7!}\sin^{10}i-\dfrac{5\cdot 23!!}{2!2^{11}4!6!}\sin^{8}i+\dfrac{4\cdot 21!!}{3!2^{10}3!5!}\sin^{6}i-\dfrac{3\cdot 19!!}{4!2^{9}2!4!}\sin^{4}i+\dfrac{2\cdot 17!!}{5!2^{8}1!3!}\sin^{2}i-\dfrac{1\cdot 15!!}{6!2^{7}0!2!}\Big)\sin i\ \cos i$
14	0	7	$\Big(\dfrac{7\cdot 27!!}{0!2^{13}7!7!}\sin^{12}i-\dfrac{6\cdot 25!!}{1!2^{12}6!6!}\sin^{10}i+\dfrac{5\cdot 23!!}{2!2^{11}5!5!}\sin^{8}i-\dfrac{4\cdot 21!!}{3!2^{10}4!4!}\sin^{6}i+\dfrac{3\cdot 19!!}{4!2^{9}3!3!}\sin^{4}i-\dfrac{2\cdot 17!!}{5!2^{8}2!2!}\sin^{2}i+\dfrac{1\cdot 15!!}{6!2^{7}1!1!}\Big)\sin i\ \cos i$
14	0	8	$\dfrac{dF_{14,0,6}(i)}{di}$
15	0	6	$\Big(-\dfrac{15\cdot 29!!}{0!2^{15}6!9!}\sin^{12}i+\dfrac{13\cdot 27!!}{1!2^{14}5!8!}\sin^{10}i-\dfrac{11\cdot 25!!}{2!2^{13}4!7!}\sin^{8}i+\dfrac{9\cdot 23!!}{3!2^{12}3!6!}\sin^{6}i-\dfrac{7\cdot 21!!}{4!2^{11}2!5!}\sin^{4}i+\dfrac{5\cdot 19!!}{5!2^{10}1!4!}\sin^{2}i-\dfrac{3\cdot 17!!}{6!2^{9}0!3!}\Big)\sin^{2}i\ \cos i$
15	0	7	$\Big(\dfrac{15\cdot 29!!}{0!2^{15}7!8!}\sin^{14}i-\dfrac{13\cdot 27!!}{1!2^{14}6!7!}\sin^{12}i+\dfrac{11\cdot 25!!}{2!2^{13}5!6!}\sin^{10}i-\dfrac{9\cdot 23!!}{7!2^{8}0!1!}\sin^{8}i+\dfrac{7\cdot 21!!}{4!2^{11}3!4!}\sin^{6}i-\dfrac{5\cdot 19!!}{5!2^{10}2!3!}\sin^{4}i+\dfrac{3\cdot 17!!}{6!2^{9}1!2!}\sin^{2}i-\dfrac{1\cdot 15!!}{7!2^{8}0!1!}\Big)\cos i$
15	0	8	$-\dfrac{dF_{15,0,7}(i)}{di}$
15	0	9	$-\dfrac{dF_{15,0,6}(i)}{di}$
16	0	7	$\Big(-\dfrac{8\cdot 31!!}{0!2^{15}7!9!}\sin^{14}i+\dfrac{7\cdot 29!!}{1!2^{14}6!8!}\sin^{12}i-\dfrac{6\cdot 27!!}{2!2^{13}5!7!}\sin^{10}i+\dfrac{5\cdot 25!!}{3!2^{12}4!6!}\sin^{8}i-\dfrac{4\cdot 23!!}{4!2^{11}3!5!}\sin^{6}i+\dfrac{3\cdot 21!!}{5!2^{10}2!4!}\sin^{4}i-\dfrac{2\cdot 19!!}{6!2^{9}1!3!}\sin^{2}i+\dfrac{1\cdot 17!!}{7!2^{8}0!2!}\Big)\sin i\ \cos i$
16	0	8	$\Big(\dfrac{8\cdot 31!!}{0!2^{15}8!8!}\sin^{14}i-\dfrac{7\cdot 29!!}{1!2^{14}7!7!}\sin^{12}i+\dfrac{6\cdot 27!!}{2!2^{13}6!6!}\sin^{10}i-\dfrac{5\cdot 25!!}{3!2^{12}5!5!}\sin^{8}i+\dfrac{4\cdot 23!!}{4!2^{11}4!4!}\sin^{6}i-\dfrac{3\cdot 21!!}{5!2^{10}3!3!}\sin^{4}i+\dfrac{2\cdot 19!!}{6!2^{9}2!2!}\sin^{2}i-\dfrac{1\cdot 17!!}{7!2^{8}1!1!}\Big)\sin i\ \cos i$
16	0	9	$\dfrac{dF_{16,0,7}(i)}{di}$
17	0	7	$\Big(-\dfrac{17\cdot 33!!}{0!2^{17}7!10!}\sin^{14}i+\dfrac{15\cdot 31!!}{1!2^{16}6!9!}\sin^{12}i-\dfrac{13\cdot 29!!}{2!2^{15}5!8!}\sin^{10}i+\dfrac{11\cdot 27!!}{3!2^{14}4!7!}\sin^{8}i$

表 5　$\dfrac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$　（続き）

p	q	u	$\dfrac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$
			$-\frac{9\cdot 25!!}{4!2^{13}3!6!}\sin^6 i+\frac{7\cdot 23!!}{5!2^{12}2!5!}\sin^4 i-\frac{5\cdot 21!!}{6!2^{11}1!4!}\sin^2 i+\frac{3\cdot 19!!}{7!2^{10}0!3!}\Big)\sin^2 i\ \cos i$
17	0	8	$\Big(\frac{17\cdot 33!!}{0!2^{17}8!9!}\sin^{16} i-\frac{15\cdot 31!!}{1!2^{16}7!8!}\sin^{14} i+\frac{13\cdot 29!!}{2!2^{15}6!7!}\sin^{12} i-\frac{11\cdot 27!!}{3!2^{14}5!6!}\sin^{10} i$ $+\frac{9\cdot 25!!}{4!2^{13}4!5!}\sin^8 i-\frac{7\cdot 23!!}{5!2^{12}3!4!}\sin^6 i+\frac{5\cdot 21!!}{6!2^{11}2!3!}\sin^4 i-\frac{3\cdot 19!!}{7!2^{10}1!2!}\sin^2 i$ $+\frac{1\cdot 17!!}{8!2^9 0!1!}\Big)\cos i$
17	0	9	$-\frac{dF_{17,0,8}(i)}{di}$
17	0	10	$-\frac{dF_{17,0,7}(i)}{di}$
18	0	8	$\Big(-\frac{9\cdot 35!!}{0!2^{17}8!10!}\sin^{16} i+\frac{8\cdot 33!!}{1!2^{16}7!9!}\sin^{14} i-\frac{7\cdot 31!!}{2!2^{15}6!8!}\sin^{12} i+\frac{6\cdot 29!!}{3!2^{14}5!7!}\sin^{10} i$ $-\frac{5\cdot 27!!}{4!2^{13}4!6!}\sin^8 i+\frac{4\cdot 25!!}{5!2^{12}3!5!}\sin^6 i-\frac{3\cdot 23!!}{6!2^{11}2!4!}\sin^4 i+\frac{2\cdot 21!!}{7!2^{10}1!3!}\sin^2 i$ $-\frac{1\cdot 19!!}{8!2^9 0!2!}\Big)\sin i\ \cos i$
18	0	9	$\Big(\frac{9\cdot 35!!}{0!2^{17}9!9!}\sin^{16} i-\frac{8\cdot 33!!}{1!2^{16}8!8!}\sin^{14} i+\frac{7\cdot 31!!}{2!2^{15}7!7!}\sin^{12} i-\frac{6\cdot 29!!}{3!2^{14}6!6!}\sin^{10} i$ $+\frac{5\cdot 27!!}{4!2^{13}5!5!}\sin^8 i-\frac{4\cdot 25!!}{5!2^{12}4!4!}\sin^6 i+\frac{3\cdot 23!!}{6!2^{11}3!3!}\sin^4 i-\frac{2\cdot 21!!}{7!2^{10}2!2!}\sin^2 i$ $+\frac{1\cdot 19!!}{8!2^9 1!1!}\Big)\sin i\ \cos i$
18	0	10	$\frac{dF_{18,0,8}(i)}{di}$
19	0	8	$\Big(-\frac{19\cdot 37!!}{0!2^{19}8!11!}\sin^{16} i+\frac{17\cdot 35!!}{1!2^{18}7!10!}\sin^{14} i-\frac{15\cdot 33!!}{2!2^{17}6!9!}\sin^{12} i+\frac{13\cdot 31!!}{3!2^{16}5!8!}\sin^{10} i$ $-\frac{11\cdot 29!!}{4!2^{15}4!7!}\sin^8 i+\frac{9\cdot 27!!}{5!2^{14}3!6!}\sin^6 i-\frac{7\cdot 25!!}{6!2^{13}2!5!}\sin^4 i+\frac{5\cdot 23!!}{7!2^{12}1!4!}\sin^2 i$ $-\frac{3\cdot 21!!}{8!2^{11}0!3!}\Big)\sin^2 i\ \cos i$
19	0	9	$\Big(\frac{19\cdot 37!!}{0!2^{19}9!10!}\sin^{18} i-\frac{17\cdot 35!!}{1!2^{18}8!9!}\sin^{16} i+\frac{15\cdot 33!!}{2!2^{17}7!8!}\sin^{14} i-\frac{13\cdot 31!!}{3!2^{16}6!7!}\sin^{12} i$ $+\frac{11\cdot 29!!}{4!2^{15}5!6!}\sin^{10} i-\frac{9\cdot 27!!}{5!2^{14}4!5!}\sin^8 i+\frac{7\cdot 25!!}{6!2^{13}3!4!}\sin^6 i-\frac{5\cdot 23!!}{7!2^{12}2!3!}\sin^4 i$ $+\frac{3\cdot 21!!}{8!2^{11}1!2!}\sin^2 i-\frac{1\cdot 19!!}{9!2^{10}0!1!}\Big)\cos i$
19	0	10	$-\frac{dF_{19,0,9}(i)}{di}$
19	0	11	$-\frac{dF_{19,0,8}(i)}{di}$
20	0	9	$\Big(-\frac{10\cdot 39!!}{0!2^{19}9!11!}\sin^{18} i+\frac{9\cdot 37!!}{1!2^{18}8!10!}\sin^{16} i-\frac{8\cdot 35!!}{2!2^{17}7!9!}\sin^{14} i+\frac{7\cdot 33!!}{3!2^{16}6!8!}\sin^{12} i$ $-\frac{6\cdot 31!!}{4!2^{15}5!7!}\sin^{10} i+\frac{5\cdot 29!!}{5!2^{14}4!6!}\sin^8 i-\frac{4\cdot 27!!}{6!2^{13}3!5!}\sin^6 i+\frac{3\cdot 25!!}{7!2^{12}2!4!}\sin^4 i$

表 5 $\frac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$ （続き）

p	q	u	$\frac{dF_{p,q,u}(i)}{di}$
			$-\frac{2\cdot 23!!}{8!2^{11}1!3!}\sin^2 i+\frac{1\cdot 21!!}{9!2^{10}0!2!}\Big)\sin i\ \cos i$
20	0	10	$\Big(\frac{10\cdot 39!!}{0!2^{19}10!10!}\sin^{18} i-\frac{9\cdot 37!!}{1!2^{18}9!9!}\sin^{16} i+\frac{8\cdot 35!!}{2!2^{17}8!8!}\sin^{14} i-\frac{7\cdot 33!!}{3!2^{16}7!7!}\sin^{12} i$ $+\frac{6\cdot 31!!}{4!2^{15}6!6!}\sin^{10} i-\frac{5\cdot 29!!}{5!2^{14}5!5!}\sin^{8} i+\frac{4\cdot 27!!}{6!2^{13}4!4!}\sin^{6} i-\frac{3\cdot 25!!}{7!2^{12}3!3!}\sin^{4} i$ $+\frac{2\cdot 23!!}{8!2^{11}2!2!}\sin^{2} i-\frac{1\cdot 21!!}{9!2^{10}1!1!}\Big)\sin i\ \cos i$
20	0	11	$\frac{dF_{20,0,9}(i)}{di}$
21	0	9	$\Big(-\frac{21\cdot 41!!}{0!2^{21}9!12!}\sin^{18} i+\frac{19\cdot 39!!}{1!2^{20}8!11!}\sin^{16} i-\frac{17\cdot 37!!}{2!2^{19}7!10!}\sin^{14} i+\frac{15\cdot 35!!}{3!2^{18}6!9!}\sin^{12} i$ $-\frac{13\cdot 33!!}{4!2^{17}5!8!}\sin^{10} i+\frac{11\cdot 31!!}{5!2^{16}4!7!}\sin^{8} i-\frac{9\cdot 29!!}{6!2^{15}3!6!}\sin^{6} i+\frac{7\cdot 27!!}{7!2^{14}2!5!}\sin^{4} i$ $-\frac{5\cdot 25!!}{8!2^{13}1!4!}\sin^{2} i+\frac{3\cdot 23!!}{9!2^{12}0!3!}\Big)\sin^2 i\ \cos i$
21	0	10	$\Big(\frac{21\cdot 41!!}{0!2^{21}10!11!}\sin^{20} i-\frac{19\cdot 39!!}{1!2^{20}9!10!}\sin^{18} i+\frac{17\cdot 37!!}{2!2^{19}8!9!}\sin^{16} i-\frac{15\cdot 35!!}{3!2^{18}7!8!}\sin^{14} i$ $+\frac{13\cdot 33!!}{4!2^{17}6!7!}\sin^{12} i-\frac{11\cdot 31!!}{5!2^{16}5!6!}\sin^{10} i+\frac{9\cdot 29!!}{6!2^{15}4!5!}\sin^{8} i-\frac{7\cdot 27!!}{7!2^{14}3!4!}\sin^{6} i$ $+\frac{5\cdot 25!!}{8!2^{13}2!3!}\sin^{4} i-\frac{3\cdot 23!!}{9!2^{12}1!2!}\sin^{2} i+\frac{1\cdot 21!!}{10!2^{11}0!1!}\Big)\cos i$
21	0	11	$-\frac{dF_{21,0,10}(i)}{di}$
21	0	12	$-\frac{dF_{21,0,9}(i)}{di}$

表6　2の累乗

n	2^n
1	2
2	4
3	8
4	1.6×10^{1}
5	3.2×10^{1}
6	6.4×10^{1}
7	1.28×10^{2}
8	2.56×10^{2}
9	5.12×10^{2}
10	1.024×10^{3}
11	2.048×10^{3}
12	4.096×10^{3}
13	8.192×10^{3}
14	1.6384×10^{4}
15	3.2768×10^{4}
16	6.5536×10^{4}
17	1.31072×10^{5}
18	2.62144×10^{5}
19	5.24288×10^{5}
20	1.048576×10^{6}
21	2.097152×10^{6}

表7　階　乗

n	$n!$
0	1
1	1
2	2
3	6
4	2.4×10^{1}
5	1.20×10^{2}
6	7.20×10^{2}
7	5.040×10^{3}
8	4.0320×10^{4}
9	3.62880×10^{5}
10	3.628800×10^{6}
11	3.9916800×10^{7}
12	4.79001600×10^{8}

表8　奇数の連乗積

n	$n!!$
1	1
3	3
5	1.5×10^{1}
7	1.05×10^{2}
9	9.45×10^{2}
11	1.0395×10^{4}
13	1.35135×10^{5}
15	2.027025×10^{6}
17	3.4459425×10^{7}
19	6.54729075×10^{8}
21	$1.3749310575 \times 10^{10}$
23	$3.16234143225 \times 10^{11}$
25	$7.905853580625 \times 10^{12}$
27	$2.13458046676875 \times 10^{14}$
29	$6.190283353629375 \times 10^{15}$
31	$1.918987839625 10625 \times 10^{17}$
33	$6.332659870762850625 \times 10^{18}$
35	$2.21643095476699771875 \times 10^{20}$
37	$8.200794532637891559375 \times 10^{21}$
39	$3.19830986772877770815625 \times 10^{23}$
41	$1.311307045768798860344 0625 \times 10^{25}$

7.　太陽同期軌道の計算

以上の計算式によって太陽同期軌道に関する計算を次に行なうことにする。この軌道をとる人工衛星においてはその昇交点の赤経がほぼ一様に一太陽年の間に360°増大する。このため人工衛星は同緯度上を常にほとんど同時刻に通過することとなる。長年的な運動のみについて考え，

Y_T ：太陽年

として，

$$\frac{dh''}{dt} = \frac{2\pi}{Y_T} \tag{7.1}$$

であれば軌道は太陽同期軌道となる。この(7.1)をみたすようなmean variablesあるいはmean elementsは(7.1)に(5.2.2.8)および(5.2.3.2)を用いて決定される。ここで$\frac{dh''}{dt}$はa''，e''およびi''の関数となり，次のように表わされる。

$$\frac{dh''}{dt} = F(a'',\ e'',\ i'') = \frac{2\pi}{Y_T} \tag{7.2}$$

そこで$F(a'', e'', i'')$を二次のharmonicに基づく線型摂動のみによって表わし，a''とe''を与えてi''を求めることにする。このようにして決定されたmean variables あるいはmean elements を用いて第6章の計算式によればzonal harmonics による摂動が求められる。

次に計算に用いられる定数を以下のようにとる。[13,14,15]

$$\mu = 3.986013 \times 10^{20}\ \frac{\mathrm{cm}^3}{\mathrm{sec}^2}$$

$$a_e = 6.378155 \times 10^6\ \mathrm{m}$$

$$J_2 = 1.082628 \times 10^{-3}$$

$$J_3 = -2.538 \times 10^{-6}$$

$$J_4 = -1.593 \times 10^{-6}$$

$$J_5 = -0.230 \times 10^{-6}$$

$$J_6 = 0.502 \times 10^{-6}$$

$$J_7 = -0.361 \times 10^{-6}$$

$$J_8 = -0.118 \times 10^{-6}$$

$$J_9 = -0.100 \times 10^{-6}$$

$$J_{10} = -0.354 \times 10^{-6}$$

$$J_{11} = 0.202 \times 10^{-6}$$

$$J_{12} = -0.042 \times 10^{-6}$$

$$J_{13} = -0.123 \times 10^{-6}$$

$$J_{14} = -0.073 \times 10^{-6}$$

$$J_{15} = -0.174 \times 10^{-6}$$

$$J_{16} = 0.187 \times 10^{-6}$$

$$J_{17} = 0.085 \times 10^{-6}$$

$$J_{18} = -0.231 \times 10^{-6}$$

$$J_{19} = -0.216 \times 10^{-6}$$

$$J_{20} = -0.005 \times 10^{-6}$$

$$J_{21} = 0.145 \times 10^{-6}$$

また日本時の1973年1月1日の正午をepoch $t=0$平均太陽日とする。ここで

$$Y_T = 365.24219431\ \text{平均太陽日}$$

となる。

それからepochにおけるmean elementsを表9のようにとる。

表9　epochにおけるmean elementsの値

a''	e''	i''	h''	g''	l''
Km		deg	deg	deg	deg
7800	0.005	101.5407286	240	30	5

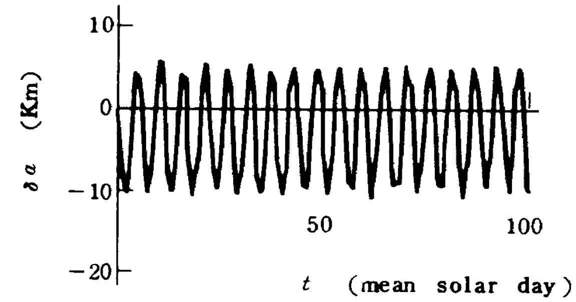

図1.1　tとδaとの関係

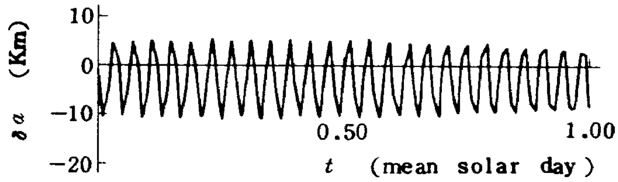

図1.2　tとδaとの関係

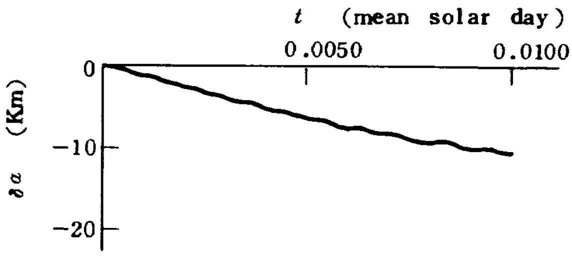

図1.3　tとδaとの関係

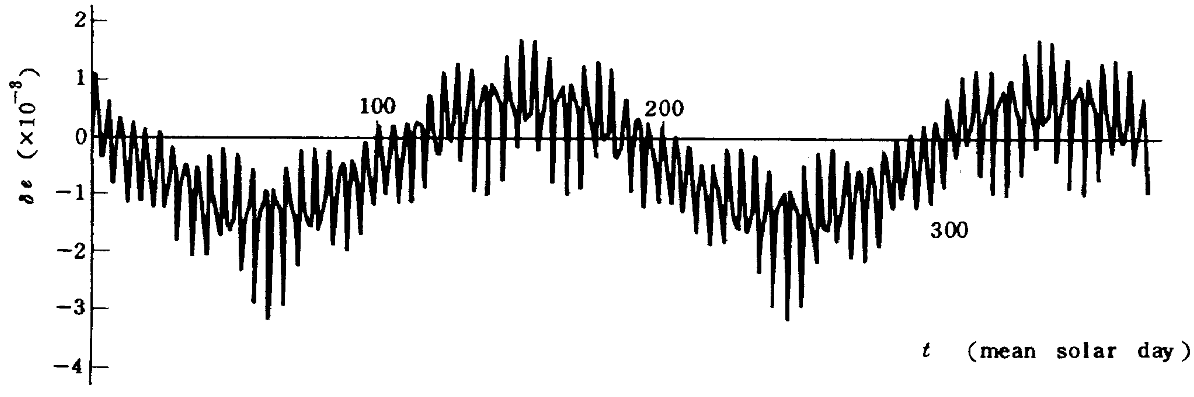

図2.1　tとδeとの関係

そしてepoch以後の時間間隔δt毎の要素の変化δElを計算した。ここでδtの単位としては平均太陽日をとり，またその数値を1，0.01および0.0001とした。

このようにしてδtの数値を1とした場合の計算結果を図の1.1，2.1，3.1，4，5.1および6に示す。またδtの数値を0.01とした場合の計算結果を図の1.2，2.2，3.2および5.2に示す。それからδtの数値を0.0001とした場合の計算結果を図の1.3，2.3，3.3および5.3に示す。

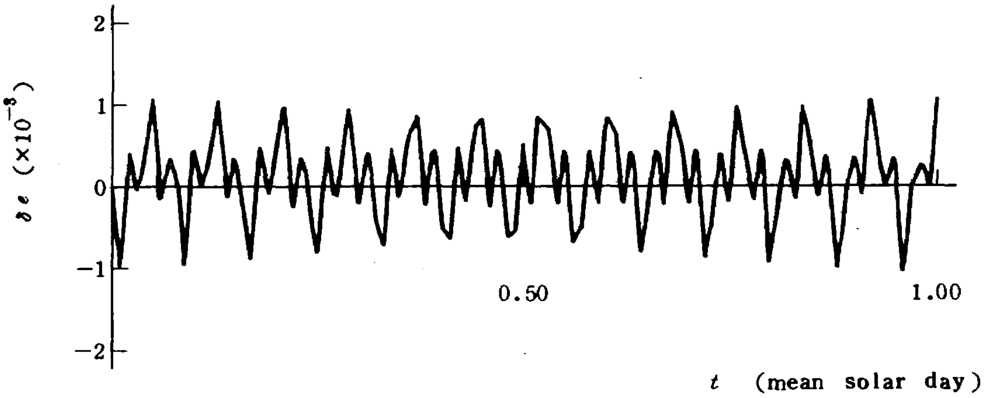

図 2.2　tとδeとの関係

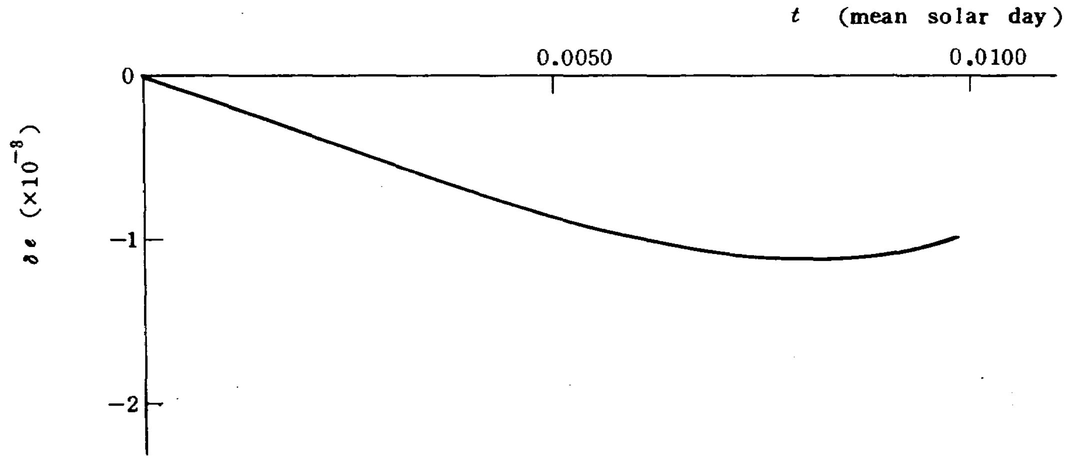

図 2.3　tとδeとの関係

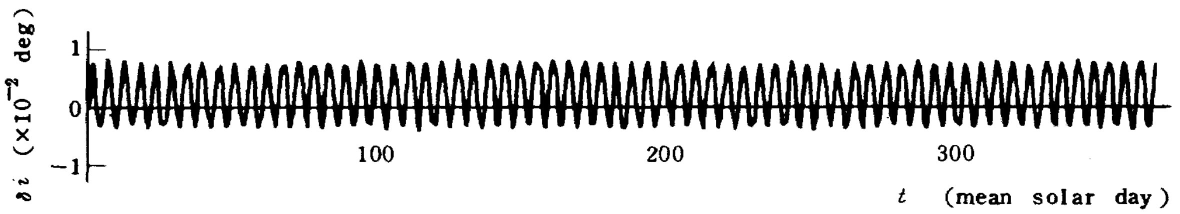

図 3.1　tとδiとの関係

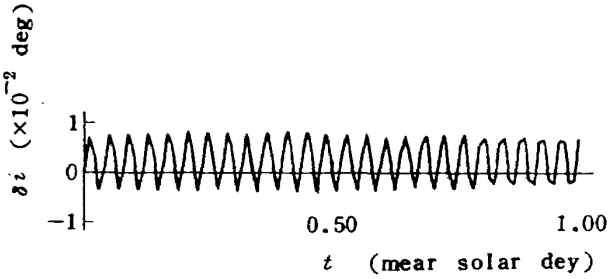

図 3.2　tとδiとの関係

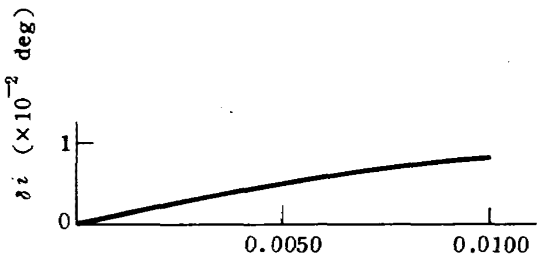

図 3.3　tとδiとの関係

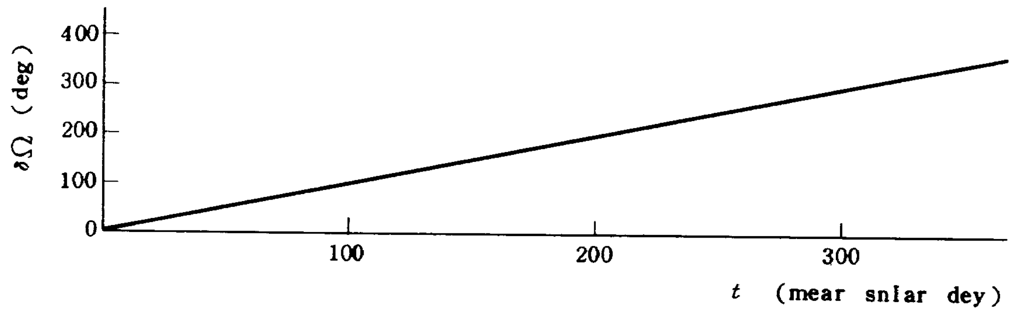

図4 tと$\delta\Omega$との関係

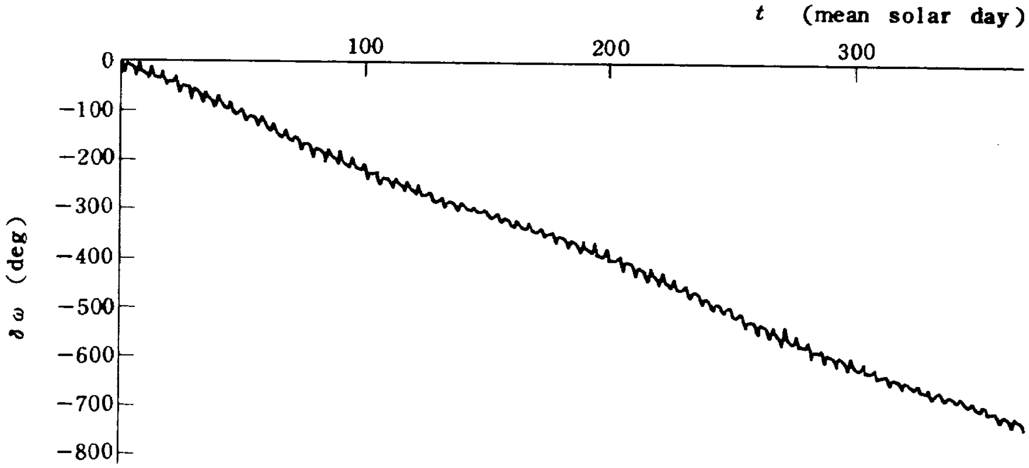

図5.1 tと$\delta\omega$との関係

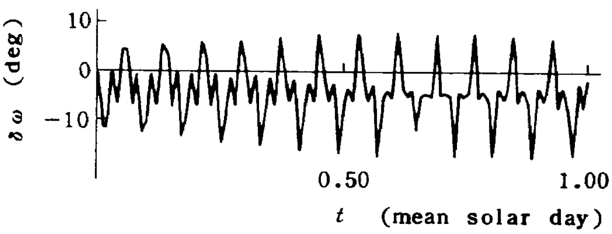

図5.2 tと$\delta\omega$との関係

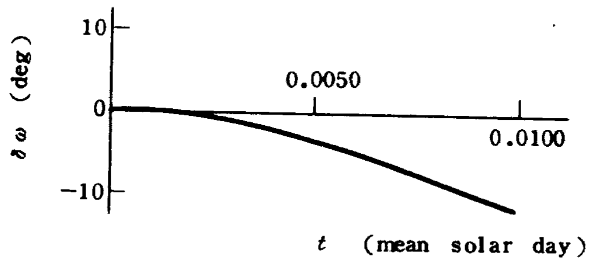

図5.3 tと$\delta\omega$との関係

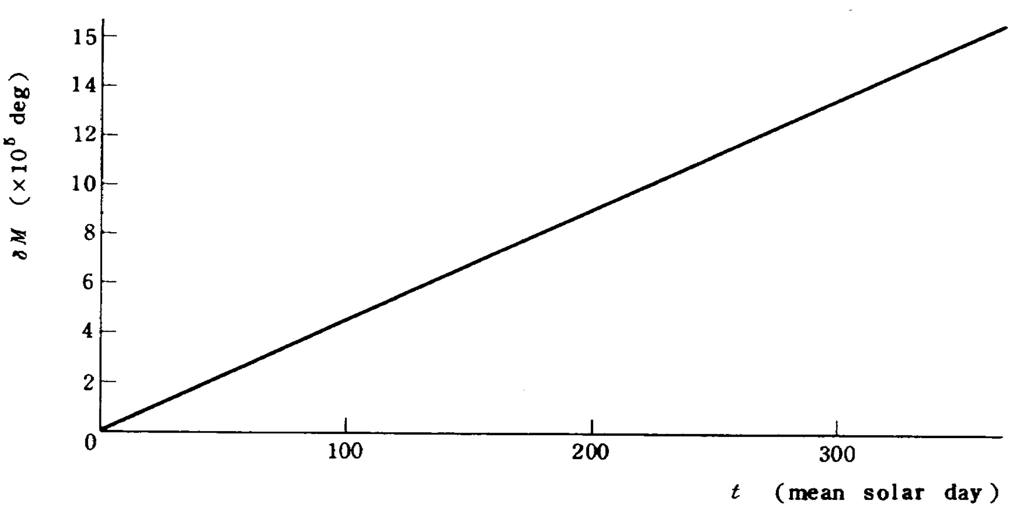

図6 tとδMとの関係

8. 考　察

第6章までの所論によって人工衛星のzonal harmonicsによる摂動をvon Zeipelの方法による一次理論の範囲内において求めることが可能となった。ここで摂動はepochにおけるmean elementsと時刻の初等関数として与えられ，したがって任意の時刻の軌道要素を直ちに決定することができる。またこの理論の精度はpotentialの中心項の約10^{-6}までを摂動関数において考慮した程度となっている。

次にこの所論によって表9の場合について行なわれた計算の結果を示す図1.1から図6までに関して考えてみる。まず図1.1から図1.3まではδaのtに対する関係を示す。摂動は短周期項のみから成るので微小である。この短周期項の内で周期が約0.039日のものが主要部分を構成している。これはaの短周期摂動を表わす式$a-a'$において$2M$を引数とする項が主要部分を占めるためである。図2.1から図2.3まではδeのtに対する関係を示す。長周期摂動としては周期が約180日のものがみられる。これはeの長周期摂動を表わす式$e'-e''$において主要部分が三次のharmonicにもとづくωを引数とする項であり，このωが図5.1に示されるように約180日で360°変化するためである。しかしこの長周期摂動は短周期摂動に比べてもたいして大きなものではない。また短周期摂動の内では周期が約0.079日と約0.026日のものが主要部分をなしている。これはeの短周期摂動を表わす式$e-e'$においてMと$3M$を引数としてもつ項が主要部分を占めるためである。図3.1から図3.3まではδiのtに対する関係を示す。長周期摂動はほとんどみられない。これは，iの長周期摂動を表わす式$i'-i''$において主要部分が三次のharmonicに基づくωを引数にもつ項であり約180日の周期をもっているのであるが，この大きさが非常に小さいために図に表われていないためである。また短周期摂動の内では周期が約0.039日のものが主要部分を構成している。これはiの短周期摂動を表わす式$i-i'$において$2M$を引数にもつ項が主要部分を占めるためである。図4は$\delta\Omega$のtに対する関係を示す。図においては長年摂動がみられ，これに対して長周期摂動と短周期摂動は小さいために表われていない。Ωは一太陽年に360°増大し，太陽同期軌道の条件をみたしている。図5.1から図5.3までは$\delta\omega$のtに対する関係を示す。図5.1には長年摂動が表われているがその変化率は一日に約$-2°$となっている。また図5.1には長周期摂動として周期が約180日のものがわずかにみられる。これはωの長周期摂動を表わす式$g'-g''$において主要部分が三次のharmonicに基づくωを引数とする項であり，約180日の周期をもっているためである。なお短周期摂動の内では周期が約0.079日と約0.026日のものが主要部分をなしている。これはωの短周期摂動を表わす式$g-g'$においてMと$3M$を引数としてもつ項が主要部分を占めるためである。図6はδMのtに対する関係を示す。図においては長年摂動がみられ，これに対して長周期摂動と短周期摂動は小さいために全く表われていない。

9. 結　論

地球の重力のpotentialの中心項とzonal harmonicsのみの作用下にある人工衛星の運動を決定するために正準変換の理論にvon Zeipelの方法をとった一次理論を適用した。そして主問題に関してはBrouwerの解を用いた。また二次をこえるharmonicsを一般項表示して，これに基づく長年および長周期摂動を求めた。この際に二次をこえるp次のharmonicの定数J_pの絶対値はすべてJ_2に関して二次の微小量とみなして論じた。

この理論において線型および非線型の摂動はepochにおけるmean elementsと時刻の初等関数として与えられる。したがって任意の時刻の軌道要素を直ちに求めうる。

またこの理論の精度はpotentialの中心項の約10^{-6}までを摂動関数において考慮した程度である。

なおharmonicsの二十一次までをとった場合の摂動の計算式を示した。

この計算式を用いて，太陽同期軌道を例にとり，その軌道要素の変化を数値計算した。

最後に，本研究に関して教示をされた東京大学の古在由秀教授および堀源一郎教授ならびに助力をされた当研究所の松島弘一主任研究官に対し，謝意を表明する。

引 用 文 献

1) 武内澄夫，松島弘一；地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究，航技研報告，TR-255，1971.

2) 武内澄夫；地球の重力の作用下にある人工衛星の運動に関する研究——運動が長期間にわたる場合，航技研報告，TR-320，1973.

3) D. Brouwer; Solution of the Problem of Artificial Satellite Theory without Drag, Astronomical J., 64, 1959, 378 – 397.

4) G.E.O. Giacaglia; The Influence of High-Order Zonal Harmonics on the Motion of an Artificial Satellite without Drag, Astronomical J., 69,

1964, 4, 303 – 308.

5) B. Garfinkel and G.T. McAllister; The Zonal Harmonic Perturbations of an Artificial Satellite, Astronomical J., 69, 1964, 7, 453 – 459.

6) Y. Kozai; The Motion of a Close Earth Satellite, Astronomical J., 64, 1959, 9, 367–377.

7) Y. Kozai; Second-Order Solution of Artificial Satellite Theory without Air Drag, Astronomical J., 67, 1962, 7, 446 – 461.

8) Y. Kozai; New Determination of Zonal Harmonics Coefficients of the Earth's Gravitational Potential, Publications of Astronomical Soc. of Japan, 16, 1964, 4, 263 – 284.

9) Y. Kozai; New Determination of Zonal Harmonics Coefficients of the Earth's Gravitational Potential, Smithonian Astrophysical Obs., Special Report No. 165, 1964.

10) D. Brouwer and G.M. Clemence; Methods of Celestial Mechanics, 1961, Academic Press.

11) W.M. Kaula; Analysis of Gravitational and Geometric Aspects of Geodetic Utilization of Satellites, Geophysical J., 5, 1961, 104 – 133.

12) F. Tisserand; Traité de Mécanique Céleste, Tome 1, 1889, Gauthier-Villars.

13) Nautical Almanac Offices; Explanatory Supplement to the Astronomical Ephemeris and the American Ephemeris and Nautical Almanac, Her Majesty's Stationery Office.

14) Y. Kozai; Revised Values for Coefficients of Zonal Spherical Harmonics in the Geopotential, Smithonian Astrophysical Obs., Special Report No. 295, 1969.

15) E.M. Gaposchkin and K. Lambeck; 1969 Smithonian Standard Earth (II), Smithonian Astrophysical Obs., Special Report No. 315, 1970.

付録　記　号

使用した主な記号を以下に示す。

a ：軌道の半長軸

a_e ：地球の平均赤道半径

a' ：aをLの関数として表わした式において，LをL'に換えた量

a'' ：mean element

a'/r' ：a/rをL，Gおよびlの関数として表わした式において，LとGをそれぞれL'とG'に換えた量

El ：軌道要素

e ：軌道の離心率

e' ：eをLとGの関数として表わした式において，LとGをそれぞれL'とG'に換えた量

e'' ：mean element

F ：Hamilton関数

F^* ：正準変換を一度行なった後のHamilton関数

F^{**} ：正準変換を二度行なった後のHamilton関数

$F_{p,0,u}$ ：傾斜角関数

f ：真近点離角

f' ：fをL，Gおよびlの関数として表わした式において，LとGをそれぞれL'とG'に換えた量

G ：万有引力の定数

G ：Delaunay 変数

G' ：正準変換を一度行なった後の正準変数

G'' ：正準変換を二度行なった後の正準変数

$G_{p,u,v}$ ：離心率関数

g ：Delaunay 変数

g' ：正準変換を一度行なった後の正準変数

g'' ：正準変換を二度行なった後の正準変数

H ：Delaunay 変数

H' ：正準変換を一度行なった後の正準変数

H'' ：正準変換を二度行なった後の正準変数

h ：Delaunay 変数

h' ：正準変換を一度行なった後の正準変数

h'' ：正準変換を二度行なった後の正準変数

i ：赤道面に対する軌道面の傾斜角

i' ：iをGとHの関数として表わした式において，GとHをそれぞれG'とH'に換えた量

i'' ：mean element

J_p ：p次の harmonic の定数

L ：Delaunay変数

L' ：正準変換を一度行なった後の正準変数

L'' ：正準変換を二度行なった後の正準変数

l ：Delaunay 変数

l' ：正準変換を一度行なった後の正準変数

l'' ：正準変換を一度行なった後の正準変数

M ：平均近点離角

Me ：地球の質量

n ：平均運動

n'' ：nをLの関数として表わした式において，LをL''に換えた量

O ：地心

P_p : Legendre関数
R : 摂動関数
r : 地心距離
S : determining function
S^* : determining function
t : 平均太陽時あるいは常用時
U : 単位質量の人工衛星に対する地球の重力の potential
$U_{p,0}$: degree p, order 0の harmonic term
$U_{p,0,u,v}$: $U_{p,0}$ を構成する各項
x : 直交座標
Y_T : 太陽年
y : 直交座標
z : 直交座標
β : 地心緯度
Δ_p : p次の harmonic に基づく附加量を示す
μ : 地心重力定数
χ : epochにおける平均近点離角
Ω : 昇交点の赤経
ω : 昇交点から近地点までの運動の向きにはかった角距離

添字

0 : 零次の微小量を示す
1 : 一次の微小量を示す
2 : 二次の微小量を示す
p : 長周期の変化をする部分を示す
s : 長年的な変化をする部分を示す

航空宇宙技術研究所報告384号

昭和49年8月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　株式会社　共進
東京都杉並区久我山4－1－7(羽田ビル)

Printed in Japan