

UDC 534.12:  
624.072/.073:  
532.526

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-401

## 境界層内圧力変動による板の振動解析（II）

——周辺固定板、両端固定梁——

藤 森 義 典

1975年1月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 境界層内圧力変動による板の振動解析 (II)\*

—— 周辺固定板、両端固定梁 ——

藤 森 義 典\*\*

## Response Analysis of a Clamped Plate to Boundary Layer Pressure Fluctuations

By Yoshinori FUJIMORI

### ABSTRACT

The response formulae to calculate r.m.s. displacement of both a rectangular panel and a beam with clamped boundaries have been derived by modal analysis. The quantitative estimations of r.m.s. displacement can be done with the knowledge of physical constants of the boundary layer and those of a beam or a plate. Numerical examples have clarified how the dynamic r.m.s. values of displacement are influenced by the edge conditions.

In order to make clear the effect of clamping the boundaries dynamic r.m.s. value of a clamped plate or a beam and static deflection of a clamped plate or a beam are to be expressed in terms of percentage share over dynamic r.m.s. displacement of a supported plate or a beam and static deflection of a supported plate or a beam respectively.

The results for dynamic r.m.s. displacement ratio and static deflection ratio take 30%, 20% on the beam problem and 67%, 31% on the plate problem respectively. The discrepancy between those figures means physically that:

- 1) On the whole considerable reduction in the response level is attained by constraining the edges.
- 2) But precisely speaking clamping the edges is less effective to the dynamic loading than to the static loading.
- 3) And it is less effective in the plate problem than in the beam problem for both dynamic and static loading.

### NOMENCLATURE

$A_{i,mn}$	Coefficients of the eigen function of the plate
$a_{\ell,rm}$	Known coefficients
$b_{\ell,rm}$	Known coefficients
$D$	Bending rigidity of the plate
$DEF$	Defined by Eq. (11) or (36)
$E$	Young's modulus

$f(x, y, t)$	Boundary layer pressure fluctuations
$G_{i\ell}(\omega)$	Double integral of the product of the spectrum, $i$ -th and $\ell$ -th eigen function. See Eq. (1-19) of Ref. 1.
$g$	Gravity constant
$g_c$	$2L_x\ell_y$
$H_i(\omega)$	Frequency response function
$h$	Thickness of a beam or a plate
$I$	Moment of inertia of the beam section
$j$	Complex unit $\sqrt{-1}$
$k_i$	Eigen value of a beam/beam length

\* 昭和 49 年 10 月 22 日 受付

\* 機体二部

$L_x$	X-wise eddy size
$L_y$	Y-wise eddy size
$\ell_x$	Length of a beam or a plate
$\ell_y$	Width of a beam or plate
$M_B$	Mass per unit length of a beam
$M_p$	Mass per unit area of a plate
$\langle p^2 \rangle$	Mean square value of boundary layer pressure fluctuations
$p_1 \sim p_6$	Known constants
$t$	Time
$U$	Coincidence speed
$V$	Convection speed that makes the response maximum
$v$	Convection speed of boundary layer pressure fluctuations
$w(x, t)$	Dynamic displacement of a beam
$w(x, y, t)$	Dynamic displacement of a plate
$w(x)$	Static deflection of a beam
$w(x, y)$	Static deflection of a plate
$x$	Coordinate parallel to the air flow
$y$	Coordinate vertical to the air flow
$z$	Coordinate vertical to $(x, y)$ plane
$\beta$	Damping factor
$r_i$	Known constant
$\Delta_{mn}$	Kronecker delta
$\delta(\quad)$	Delta function
$\zeta$	Temporal damping coefficient of boundary layer pressure fluctuations
$\eta$	$y_1 \cdot y_2$
$K_f(\xi, \eta, \tau)$	Space-time cross correlation of the boundary layer pressure fluctuations
$\lambda_i$	Eigen value of a beam
$\nu$	Poisson's ratio
$\xi$	$x_1 - x_2$
$\rho$	Density of a beam or plate material
$\tau$	$t_1 - t_2$
$\phi_i(x \text{ or } y)$	Eigen function of a beam $\times \sqrt{\ell_x}$ or $\sqrt{\ell_y}$
$\psi_i(x \text{ or } y)$	Eigen function of a beam or plate
$\mathcal{Q}$	Complex frequency
$\omega$	Circular frequency
$\langle \quad \rangle$	Time average
Superscript	
$S, B$	Simply supported beam
$C, B$	Clamped beam
$S, P$	Simply supported plate
$C, P$	Clamped plate

## Subscript

$i$	} Positive integer
$\ell$	
$m$	
$n$	
$r$	
$s$	

## 緒 言

先に周辺単純支持板の解析結果について報告<sup>1)</sup>したが、実際の構造要素としては周辺が固定されている板が多いので、ここでは A) 両端が固定されている梁、B) 周辺が固定されている板、についての解析結果を報告する。周辺固定板の固有関数を両端固定梁の固有関数の級数表示としたので、両端固定梁の振動解析も計算の途中で必然的に行われる。理論的には A, B, 同じであるが、見かけ上 B の方が式が複雑になる。数式の導出の順序に従い、まず A について詳しく述べ、B については結果だけ説明する。従来は計算上の容易さから、理論の説明のためには周辺単純支持として解析される場合が多く、実際に近い周辺固定として解析される例が少ないので、多くの動的な問題の場合固定の時支持のどのくらいになるかについて基本的資料を得ることがこの研究の目的である。

## 1. 両端固定梁の解析

梁の運動方程式は

$$\frac{EI}{M_B} \frac{\partial^4 w(x, t)}{\partial x^4} + 2\beta \frac{\partial w(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial t^2} = \frac{f(x, t)}{M_B} \quad (1)$$

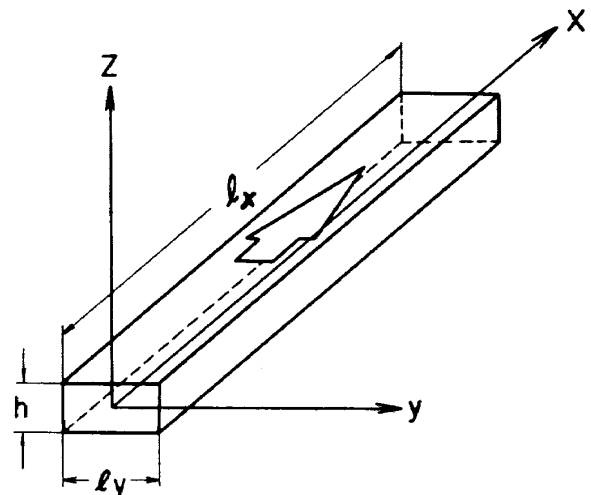


図 1 梁の座標

$w(x, t)$  は  $z$ -方向の変位 (Fig. 1)。  $M_B$  は単位長さ当たりの質量である。 Fig. 1 の矢印は気流の向き。

両端固定の場合の固有関数は

$$\psi_i^{C.B.}(x) = \frac{1}{\sqrt{L_x}} \left\{ \cosh k_i^{C.B.} x - \cos k_i^{C.B.} x - \gamma_i (\sinh k_i^{C.B.} x - \sin k_i^{C.B.} x) \right\} \quad (2)$$

で与えられている<sup>2)3)</sup> 但し  $k_i^{C.B.}$ ,  $L_x = L_i^{C.B.}$ ,  $\lambda_i^{C.B.}$  は  $\cosh \lambda \cos \lambda = 1$  の解,

$$\gamma_i = (\cosh \lambda_i^{C.B.} - \cos \lambda_i^{C.B.}) / (\sinh \lambda_i^{C.B.} - \sin \lambda_i^{C.B.})。$$

外力  $f(x, t)$  の相関々数は前報と同じく

$$K_f(\xi, \tau) = g_c \pi L_x \langle p^2 \rangle \delta(\xi - v\tau) e^{-|\tau|/\zeta} \quad (3)$$

とする。但し  $g_c = 2L_y/L_x$ ,  $\xi = x_1 - x_2$ ,  $\tau = t_1 - t_2$ 。以下,  $\psi_i^{C.B.}(x)$ ,  $k_i^{C.B.}$ ,  $\lambda_i^{C.B.}$  の添字  $C.B.$  は省略する。また  $\beta$ ,  $\zeta$  は各々のモードにより異なる値となるため  $\beta_i$ ,  $\zeta_i$  とすべきであるが, この添字も省略する。

両端固定梁についての  $G_{il}(\omega)$  は

$$G_{il}(\omega) = \pi L_x \langle p^2 \rangle g_c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-j\omega\tau - |\tau|/\zeta} d\tau \times \int_0^{L_x} dx_1 \int_0^{L_x} \psi_i(x_1) \psi_l(x_2) \delta(\xi - v\tau) dx_2 \quad (4)$$

積分範囲を考慮して(4)式は次のようになる。

$$G_{il}(\omega) = \pi L_x \langle p^2 \rangle g_c \left[ \int_{-L_x/v}^0 e^{j\omega\tau - \tau/\zeta} d\tau \times \int_0^{L_x+v\tau} \psi_i(x_1) \psi_l(x_1 - v\tau) dx_1 + \int_0^{L_x/v} e^{-j\omega\tau - \tau/\zeta} d\tau \times \int_{v\tau}^{L_x} \psi_i(x_1) \psi_l(x_1 - v\tau) dx_1 \right] \quad (4-a)$$

今非常に減衰の小さい梁を考えてモード間の干渉が無視できる程小さい時は  $G_{il}(\omega)$  の  $i \neq l$  の場合につき計算する必要はなく  $i = l$  についてのみ計算するだけでよい。このとき

$$\int_0^{L_x+v\tau} \psi_i(x_1) \psi_i(x_1 + v\tau) dx_1 = \int_{v\tau}^{L_x} \psi_i(x_1) \psi_i(x_1 - v\tau) dx_1 \quad (5)$$

の関係を利用して

$$G_{ii}(\omega) = 2\pi L_x \langle p^2 \rangle g_c \int_0^{L_x/v} P e^{-\tau/\zeta} \cos \omega\tau d\tau \quad (6)$$

但し

$$P = p_1 e^{k_i v \tau} + p_2 e^{-k_i v \tau} - p_3 \frac{v\tau}{L_x} e^{k_i v \tau}$$

$$-p_3 \frac{v\tau}{L_x} e^{-k_i v \tau} - p_4 \frac{v\tau}{L_x} \cos k_i v \tau + p_5 \cos k_i v \tau + p_6 \sin k_i v \tau \quad (7)$$

$$p_1 = [2(1-\gamma_i^2)(1+\lambda_i) - (1-\gamma_i)^2 + (1+\gamma_i)^2 e^{-2\lambda_i} - 2\{(1+\gamma_i)^2 \sin \lambda_i - (1-\gamma_i^2) \cos \lambda_i\} e^{-\lambda_i}] / 8\lambda_i$$

$$p_2 = [(1-\gamma_i^2) e^{2\lambda_i} + (1+\gamma_i)^2 + 2(\lambda_i - 2)(1-\gamma_i^2) - 2\{(1-\gamma_i)^2 \sin \lambda_i - (1-\gamma_i^2) \cos \lambda_i\} e^{\lambda_i}] / 8\lambda_i$$

$$p_3 = (1-\gamma_i^2) / 4$$

$$p_4 = (1+\gamma_i^2) / 2$$

$$p_5 = [-2\lambda_i(1+\gamma_i^2) - 2\gamma_i + (1-\gamma_i^2) \sin 2\lambda_i + 2\gamma_i \cos 2\lambda_i + (1-\gamma_i^2)(e^{-\lambda_i} - e^{\lambda_i}) \cos \lambda_i - \{(1-\gamma_i)^2 e^{\lambda_i} + (1+\gamma_i)^2 e^{-\lambda_i}\} \sin \lambda_i] / 4\lambda_i$$

$$p_6 = [1 + 3\gamma_i^2 - (1-\gamma_i^2) \cos 2\lambda_i + 2\gamma_i \sin 2\lambda_i + (1-\gamma_i^2)(e^{-\lambda_i} - e^{\lambda_i}) \sin \lambda_i + \{(1-\gamma_i)^2 e^{\lambda_i} + (1+\gamma_i)^2 e^{-\lambda_i}\} \cos \lambda_i] / 4\lambda_i$$

$\lambda_i$ ,  $\gamma_i$ ,  $p_1 \sim p_6$  を表 1-a, 1-b, 1-c に示す。 $\lambda_i$  の値は Ref 3 のものを使用した。(6)式の積分で  $e^{-L_x/v\zeta}$ ,  $e^{-\lambda_i - L_x/v\zeta}$  などを含んだ項を無視すると

$$G_{ii}(\omega) = \pi L_x \langle p^2 \rangle g_c \left[ -2p_1 \frac{k_i v - 1/\zeta}{\omega^2 + (k_i v - 1/\zeta)^2} + 2p_2 \frac{k_i v + 1/\zeta}{\omega^2 + (k_i v + 1/\zeta)^2} + \frac{2p_3 v}{L_x} \left[ \frac{\omega^2 - (k_i v - 1/\zeta)^2}{\{\omega^2 + (k_i v - 1/\zeta)^2\}^2} + \frac{\omega^2 - (k_i v + 1/\zeta)^2}{\{\omega^2 + (k_i v + 1/\zeta)^2\}^2} \right] + \frac{p_4 v}{L_x} \left[ \frac{(\omega - k_i v)^2 - 1/\zeta^2}{\{\omega^2 + (k_i v + 1/\zeta)^2\}^2} + \frac{(\omega + k_i v)^2 - 1/\zeta^2}{\{\omega^2 + (k_i v - 1/\zeta)^2\}^2} \right] + p_5 \left[ \frac{1/\zeta}{(\omega + k_i v)^2 + 1/\zeta^2} + \frac{1/\zeta}{(\omega - k_i v)^2 + 1/\zeta^2} \right] + p_6 \left[ \frac{k_i v - \omega}{(\omega + k_i v)^2 + 1/\zeta^2} + \frac{k_i v + \omega}{(\omega - k_i v)^2 + 1/\zeta^2} \right] + 2(p_1 - p_2) \times \left[ \frac{(k_i v - 1/\zeta) \cos \omega\tau_1 + \omega \sin \omega\tau_1}{\omega^2 + (k_i v - 1/\zeta)^2} \right] e^{\lambda_i - \tau_1/\zeta} + \frac{2p_3 v}{L_x} \left[ \frac{\{(k_i v - 1/\zeta)^2 - \omega^2\} \cos \omega\tau_1 + 2(k_i v - 1/\zeta) \times \omega \sin \omega\tau_1}{\{\omega^2 + (k_i v - 1/\zeta)^2\}^2} \right] e^{\lambda_i - \tau_1/\zeta} \right] \quad (8)$$

但し  $\tau_1 = L_x/v$

$i$ -th モードの相関々数は

$$\langle w_i(x_1, t_1) w_i(x_2, t_2) \rangle = \psi_i(x_1) \psi_i(x_2) \times \frac{1}{M_B^2} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G_{ii}(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega}{(\omega - \Omega_i)(\omega + \Omega_i^*)(\omega + \Omega_i)(\omega - \Omega_i^*)} \quad (9)$$

全次数についての相関々数は近似的に次式で求まる。

表 1-a 梁の固有値 ( $\lambda_m$ ) と  $\gamma_m$ ,  $m = 1 \sim 14$ 

Mode NO. (m)	$\lambda_m$	$\gamma_m$	EXP ( $\lambda_m$ )	EXP ( $-\lambda_m$ )
1	0.473004080 E+01	0.982502214 E+00	0.113300184 E+03	0.882611092 E-02
2	0.785320460 E+01	0.100077731 E+01	0.257396965 E+04	0.388504968 E-03
3	0.109956078 E+02	0.999966450 E+00	0.596117391 E+05	0.167752193 E-04
4	0.141371655 E+02	0.100000144 E+01	0.137940871 E+07	0.724948296 E-06
5	0.172787596 E+02	0.999999937 E+00	0.319205193 E+08	0.313278111 E-07
6	0.204203522 E+02	0.100000000 E+01	0.738662922 E+09	0.135379747 E-08
7	0.235619449 E+02	0.999999999 E+00	0.170931716 E+11	0.585028934 E-10
8	0.267035375 E+02	0.100000000 E+01	0.395547831 E+12	0.252813925 E-11
9	0.298451302 E+02	0.999999999 E+00	0.915325078 E+13	0.109250803 E-12
10	0.329867228 E+02	0.100000000 E+01	0.211812562 E+15	0.472115527 E-14
11	0.361283155 E+02	0.999999999 E+00	0.490148941 E+16	0.204019618 E-15
12	0.392699081 E+02	0.100000000 E+01	0.113423860 E+18	0.881648711 E-17
13	0.424115008 E+02	0.999999999 E+00	0.262470668 E+19	0.380994953 E-18
14	0.455530934 E+02	0.100000000 E+01	0.607375305 E+20	0.164642847 E-19

表 1-b  $1 - \gamma_m$  と  $1 + \gamma_m$ ,  $m = 1 \sim 14$ 

Mode NO. (m)	$1 - \gamma_m$	$(1 - \gamma_m) \text{EXP}(\lambda_m)$	$1 + \gamma_m$	$(1 + \gamma_m) \text{EXP}(-\lambda_m)$
1	0.174977854 E-01	0.198250232 E+01	0.198250221 E+01	0.174977844 E-01
2	-0.777311907 E-03	-0.200077726 E+01	0.200077731 E+01	0.777311925 E-03
3	0.335498745 E-04	0.199996637 E+01	0.199996645 E+01	0.335498758 E-04
4	-0.144989765 E-05	-0.200000146 E+01	0.200000144 E+01	0.144989764 E-05
5	0.626556166 E-07	0.199999982 E+01	0.199999993 E+01	0.626556202 E-07
6	-0.270759496 E-08	-0.200000000 E+01	0.200000000 E+01	0.270759495 E-08
7	0.117005786 E-09	0.199999999 E+01	0.199999999 E+01	0.117005786 E-09
8	-0.505627851 E-11	-0.200000000 E+01	0.200000000 E+01	0.505627851 E-11
9	0.218501606 E-12	0.199999999 E+01	0.199999999 E+01	0.218501606 E-12
10	-0.944231055 E-14	-0.200000000 E+01	0.200000000 E+01	0.944231055 E-14
11	0.408039236 E-15	0.199999999 E+01	0.200000000 E+01	0.408039236 E-15
12	-0.176329742 E-16	-0.199999999 E+01	0.200000000 E+01	0.176329742 E-16
13	0.761989906 E-18	0.199999999 E+01	0.200000000 E+01	0.761989906 E-18
14	-0.329285695 E-19	-0.199999999 E+01	0.200000000 E+01	0.329285695 E-19

表 1-c 係数  $P_1 \sim P_6$ 

Mode NO. (n)	$P_1$	$P_2$	$P_3$	$P_4$	$P_5$	$P_6$	$P_1 \text{ EXP } (\lambda \text{ m})$	$P_3 \text{ EXP } (\lambda \text{ m})$
1	0.1232309 E-01	0.2182368 E+00	0.8672350 E-02	0.9826553 E+00	0.7694245 E+00	0.4118286 E+00	0.1396208 E+01	0.9825788 E+00
2	-0.4878449 E-03	0.1269972 E+00	-0.3988070 E-03	0.1000778 E+01	0.8734906 E+00	0.2549702 E+00	-0.1255698 E+01	-0.1000777 E+00
3	0.1982579 E-04	0.9096065 E-01	0.1677466 E-04	0.9999665 E+00	0.9090195 E+00	0.1818817 E+00	0.1181830 E+01	0.9999664 E+00
4	-0.8275088 E-06	0.7073487 E-01	-0.7249494 E-06	0.1000000 E+01	0.9292660 E+00	0.1414714 E+00	-0.1141473 E+01	-0.1000001 E+01
5	0.3495397 E-07	0.5787455 E-01	0.3132781 E-07	0.9999999 E+00	0.9421254 E+00	0.1157490 E+00	0.1115749 E+01	0.9999999 E+00
6	-0.1486390 E-08	0.4897075 E-01	-0.1353797 E-08	0.1000000 E+01	0.9510293 E+00	0.9794150 E-01	-0.1097942 E+01	-0.1000000 E+01
7	0.6346877 E-10	0.4244132 E-01	0.5850289 E-10	0.1000000 E+01	0.9575587 E+00	0.8488264 E-01	0.1084883 E+01	0.1000000 E+01
8	-0.2717488 E-11	0.3744822 E-01	-0.2528139 E-11	0.1000000 E+01	0.9625518 E+00	0.7489644 E-01	-0.1074896 E+01	-0.1000000 E+01
9	0.1165720 E-12	0.3350630 E-01	0.1092508 E-12	0.1000000 E+01	0.9664937 E+00	0.6701261 E-01	0.1067013 E+01	0.1000000 E+01
10	-0.5007401 E-14	0.3031523 E-01	-0.4721155 E-14	0.1000000 E+01	0.9696848 E+00	0.6063045 E-01	-0.1060630 E+01	-0.1000000 E+01
11	0.2153138 E-15	0.2767912 E-01	0.2040196 E-15	0.1000000 E+01	0.9723209 E+00	0.5535824 E-01	0.1055358 E+01	0.1000000 E+01
12	-0.9265507 E-17	0.2546479 E-01	-0.8816487 E-17	0.1000000 E+01	0.9745352 E+00	0.5092958 E-01	-0.1050930 E+01	-0.1000000 E+01
13	0.3989615 E-18	0.2357851 E-01	0.3809950 E-18	0.1000000 E+01	0.9764215 E+00	0.4715702 E-01	0.1047157 E+01	0.1000000 E+01
14	-0.1718715 E-19	0.2195241 E-01	-0.1646428 E-19	0.1000000 E+01	0.9780476 E+00	0.4390481 E-01	-0.1043905 E+01	-0.1000000 E+01

$$\langle w(x_1, t_1) w(x_2, t_2) \rangle = \sum_i \langle w_i(x_1, t_1) w_i(x_2, t_2) \rangle \quad (10)$$

応答の速度依存性を示す量としての DEF は、 $i$ -次の振動について

$$\begin{aligned} DEF_i^{C.B.} &= \frac{\langle w_i^2(x, t) \rangle}{\phi_i^2(x) g_c \pi L_x \langle \dot{p}^2 \rangle / M_B^2} \\ &= 2P_1 DFS_0 + 2P_2 DFP_0 - \frac{2P_3 v}{L_x} (EFS_0 + EFP_0) \\ &\quad - \frac{P_4 v}{L_x} BFR_0 + P_5 AFR_0 + P_6 CFR_0 + 2(P_1 - P_2) \\ &\quad \times (DFS_{\tau_1} + RZS_{\tau_1}) e^{\lambda_i - \tau_1 / \zeta} + 2P_3 (EFS_{\tau_1} + RDS_{\tau_1}) e^{\lambda_i - \tau_1 / \zeta} \end{aligned} \quad (11)$$

但し  $\tau_1 = L_x / v$ ,  $DFS_0 = DFS_{\tau=0}$ ,  $DFS_{\tau_1} = DFS_{\tau=\tau_1}$   
上記の関数 AFR, BFR, CFR, DFS, DFP, EFS, RZS, RDS は  $k_i$ ,  $v$ ,  $\zeta$ ,  $\omega_i$ ,  $\beta_i$ ,  $\tau$  等が分っていれば求められる。

AFR, BFR, CFR の求め方と結果は前報<sup>1)</sup>に述べてある。

ここで新たに加わったものを書くと、

$$\begin{aligned} DFP(k_i, v, \zeta, \omega, \beta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{e^{j\theta\tau}}{(\varrho - \varrho_i)(\varrho + \varrho_i^*)(\varrho + \varrho_i)(\varrho - \varrho_i^*)} \\ &\quad \times \frac{\varepsilon_1}{(\varrho - \varrho_i)(\varrho + \varrho_i)} d\varrho = \frac{e^{-\varepsilon_1\tau}}{2(U_1^2 + U_2^2)} \\ &\quad + \frac{e^{-\beta\tau} \varepsilon_1 (U_3 \cos \tau + U_4 \sin \omega\tau)}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2)(U_1^2 + U_2^2)} \end{aligned} \quad (12)$$

但し  $\varepsilon_1 = k_i v + 1/\zeta$ ,  $\varrho_i = j\varepsilon_1$

$$U_1 = \omega^2 - \beta^2 + \varepsilon_1^2, \quad U_2 = 2\omega\beta$$

$$U_3 = \omega U_1 - \beta U_2, \quad U_4 = \beta U_1 + \omega U_2$$

$$\begin{aligned} DFS(k_i, v, \zeta, \omega, \beta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{e^{j\theta\tau}}{(\varrho - \varrho_i)(\varrho + \varrho_i^*)(\varrho + \varrho_i)(\varrho - \varrho_i^*)} \\ &\quad \times \frac{\varepsilon_2}{(\varrho - \varrho_i)(\varrho + \varrho_i)} d\varrho = \frac{e^{-\varepsilon_2\tau}}{2(W_1^2 + W_2^2)} \\ &\quad + \frac{e^{-\beta\tau} \varepsilon_2 (W_3 \cos \omega\tau + W_4 \sin \omega\tau)}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2)(W_1^2 + W_2^2)} \quad \varepsilon_2 > 0 \\ &= 0 \quad \varepsilon_2 = 0 \\ &= -\frac{e^{-\varepsilon_2\tau}}{2(W_1^2 + W_2^2)} + \frac{e^{-\beta\tau} \varepsilon_2 (W_3 \cos \omega\tau + W_4 \sin \omega\tau)}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2)(W_1^2 + W_2^2)} \quad \varepsilon_2 < 0 \end{aligned} \quad (13)$$

但し  $\varepsilon_2 = k_i v - 1/\zeta$ ,  $\varrho_i = j\varepsilon_2$

$$W_1 = \omega^2 - \beta^2 + \varepsilon_2^2, \quad W_2 = 2\omega\beta$$

$$W_3 = \omega W_1 - \beta W_2, \quad W_4 = \beta W_1 + \omega W_2$$

$$EFS(k_i, v, \zeta, \omega, \beta, \tau)$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{e^{j\theta\tau}}{(\varrho - \varrho_i)(\varrho - \varrho_i^*)(\varrho + \varrho_i)(\varrho + \varrho_i^*)} \\ &\quad \times \frac{\varepsilon_2^2 - \varrho^2}{(\varrho - \varrho_i)^2(\varrho + \varrho_i)^2} d\varrho \\ &= \left[ \frac{\tau \{ (\varepsilon_2^2 + \omega^2 - \beta^2)^2 + 4\omega^2\beta^2 \} + 4\varepsilon_2^3 + 4\varepsilon_2(\omega^2 - \beta^2)}{2 \{ (\varepsilon_2^2 + \omega^2 - \beta^2)^2 + 4\omega^2\beta^2 \}^2} \right] \\ &\quad e^{-|\varepsilon_2|\tau} + \frac{e^{-\beta\tau} (G_1 H_1 + G_2 H_2)}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2)(A_1^2 + B_1^2)} \end{aligned} \quad (14)$$

但し  $A_1 = (\omega^2 - \beta^2 + \varepsilon_2^2)^2 - 4\omega^2\beta^2$ ,  $A_2 = \varepsilon_2^2 - \omega^2 + \beta^2$

$$B_1 = 4\omega\beta(\omega^2 - \beta^2 + \varepsilon_2^2), \quad B_2 = 2\omega\beta$$

$$H_1 = A_1 A_2 - B_1 B_2, \quad H_2 = A_1 B_2 + A_2 B_1$$

$$G_1 = \omega \cos \omega\tau + \beta \sin \omega\tau, \quad G_2 = \omega \sin \omega\tau - \beta \cos \omega\tau$$

EFP は EFS と同じであるが  $\varepsilon_2$  を  $\varepsilon_1$  で置き換えて計算する。

$$\begin{aligned} RZS(k_i, v, \zeta, \omega, \beta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{\varrho \sin \varrho\tau}{(\varrho - \varrho_i)(\varrho - \varrho_i^*)(\varrho + \varrho_i)(\varrho + \varrho_i^*)} \\ &\quad \times \frac{1}{(\varrho - \varrho_i)(\varrho + \varrho_i)} d\varrho \\ &= C_1 e^{-\varepsilon_2\tau} \quad \varepsilon_2 > 0 \\ &= -C_1 e^{\varepsilon_2\tau} \quad \varepsilon_2 < 0 \end{aligned} \quad (15)$$

但し  $C_1 = \{ \omega^2 + (\beta - k_i v + 1/\zeta)^2 \} \{ \omega^2 + (\beta + k_i v - 1/\zeta)^2 \} / 2$

$$\begin{aligned} RDS(k_i, v, \zeta, \omega, \beta, \tau) &= \frac{1}{2\pi} \oint_C \frac{2\varepsilon_2 \varrho \sin \varrho\tau}{(\varrho - \varrho_i)(\varrho - \varrho_i^*)(\varrho + \varrho_i)(\varrho + \varrho_i^*)} \\ &\quad \times \frac{1}{(\varrho - \varrho_i)^2(\varrho + \varrho_i)^2} d\varrho \\ &= D_1 e^{\varepsilon_2\tau} \quad \varepsilon_2 < 0 \\ &= 0 \quad \varepsilon_2 = 0 \\ &= D_1 e^{-\varepsilon_2\tau} \quad \varepsilon_2 > 0 \end{aligned} \quad (16)$$

但し  $D_1 = \frac{\tau \{ (\varepsilon_2^2 + \omega^2 - \beta^2)^2 + 4\varepsilon_2(\varepsilon_2^2 + \omega^2 - \beta^2) \}}{2 \{ (\varepsilon_2^2 + \omega^2 - \beta^2)^2 + 4\omega^2\beta^2 \}^2}$

両端支持梁の場合の DEF を参考までに書くと

$$DEF_i^{S.B.} = AFR_0 - \frac{v}{L_x} BFR_0 + \frac{1}{k_i^{S.B.} L_x} CFR_0 \quad (17)$$

但し

$$\phi_i^{S.B.}(x) = \sqrt{\frac{2}{L_x}} \sin k_i^{S.B.} x$$

$$k_i^{S.B.} = i\pi / L_x \quad i: \text{正の自然数}$$

#### 数値計算例

導いた式を具体的な応答計算に適用してみる。

表 2 に与えられている数値を使って  $DEF_i^{C.B.}$ ,  $DEF_i^{S.B.}$  を求めてみる。まず固有振動数の比  $\omega^{C.B.}/\omega^{S.B.}$  を参考のために Fig. 2 に示す。これは梁の物理定数に關係な

く、端部の条件が振動数にどのように影響を及ぼすかを示すものである。Fig.2から分るように低い次数で端部の影響を受けるが、次数が高くなると端部の影響は減少し無限の高い次数において両者は漸近的に一致する。 $i$  一次の屈曲波の伝播速度は

表2 梁の物理定数

	①	②
$l_x$ cm	27.8	47.5
$l_y$ cm	2.5	=
$h$ cm	0.1585	=
$\rho$ gm/cm <sup>3</sup>	8.96	=
$E$ gm/cm <sup>2</sup>	$9.2 \times 10^8$	=
$g$ cm/sec <sup>2</sup>	980	=

$$\beta/\omega = 0.006 \quad \zeta/4 = \{(\alpha v)^2 + 4f^2\}^{-1/2}$$

$$\alpha = 1$$

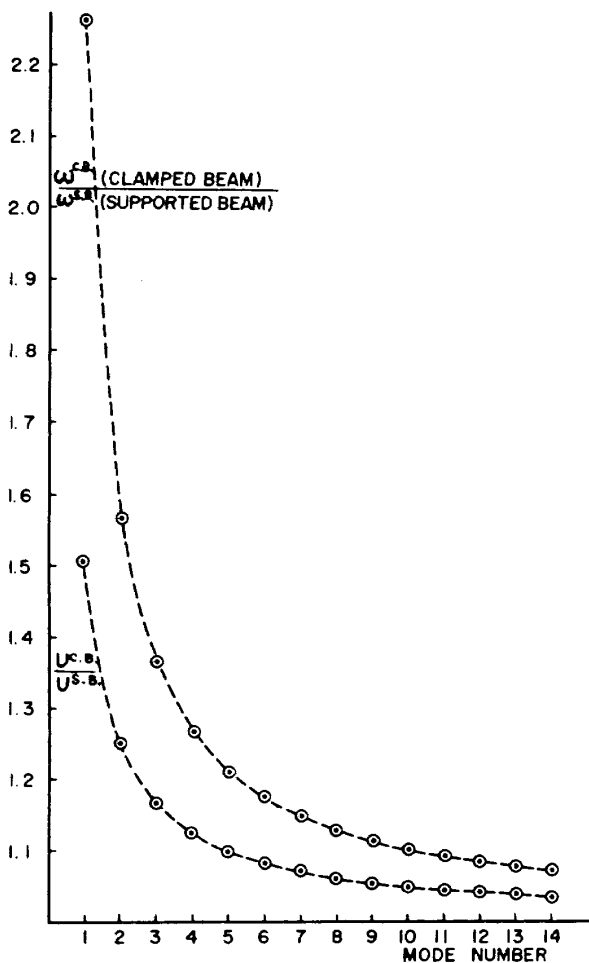


図2 両端支持と固定の振動数比

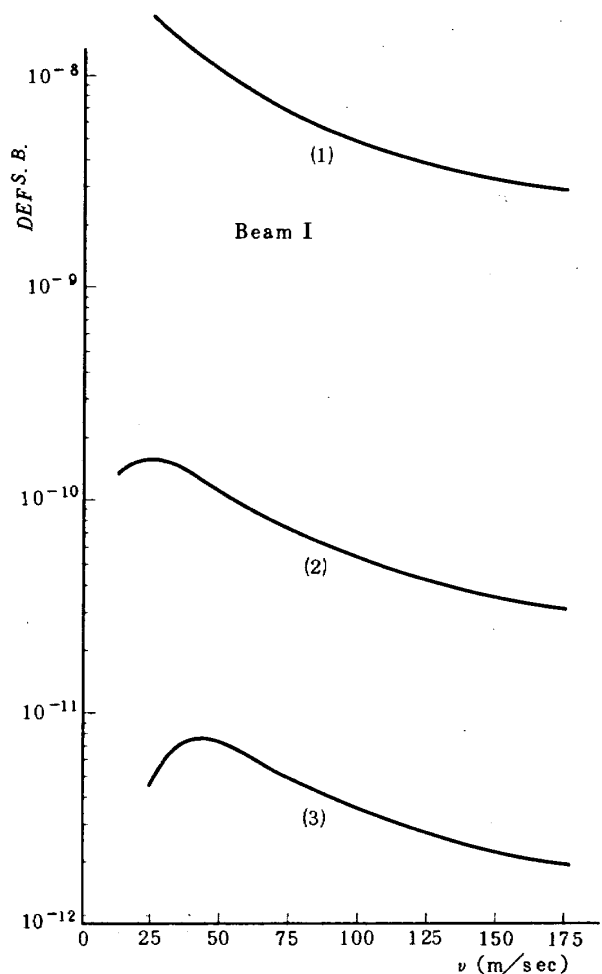
$$U_i = \omega_i / k_i \quad (18)$$

与えられるから  $U_i^{C.B.}$  と  $U_i^{S.B.}$  の比は

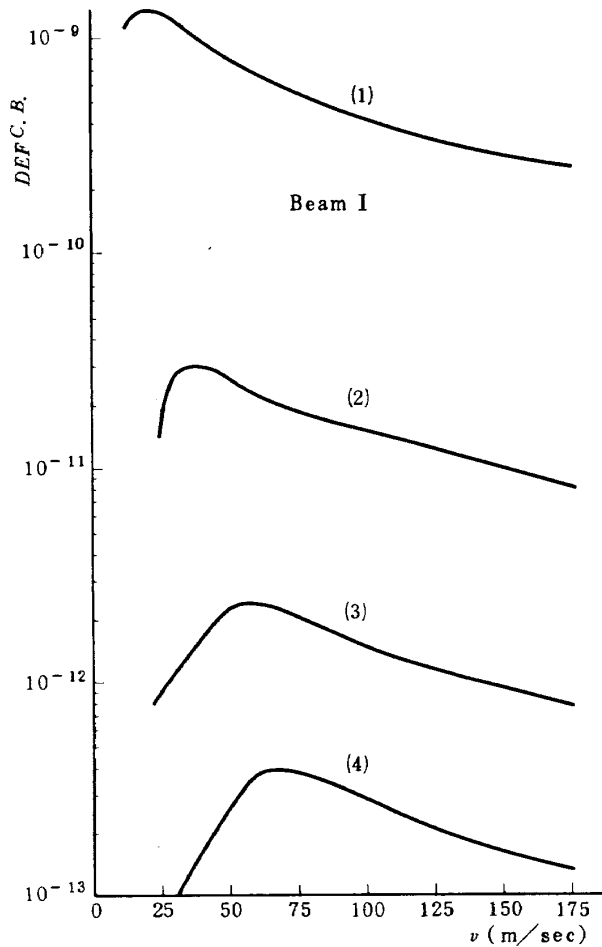
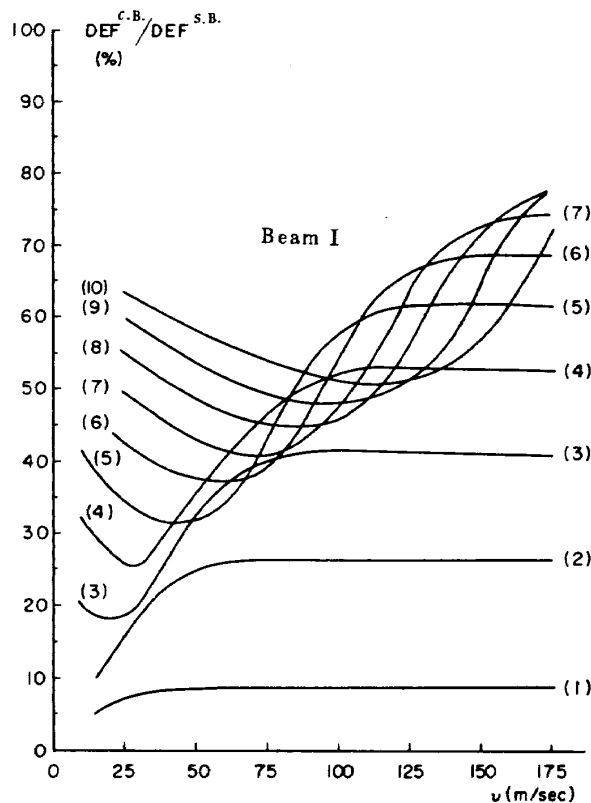
$$U_i^{C.B.} / U_i^{S.B.} = \sqrt{\omega_i^{C.B.} / \omega_i^{S.B.}} \quad (19)$$

となる。この結果も Fig.2 に示してある。(18) 式は応答を最大にする移動荷重の速度と解釈してよいが、梁の減衰、寸法の有限性については考慮されていない。表2の(I), (II)の梁につき求めた  $DEF_i^{S.B.}$ ,  $DEF_i^{C.B.}$ ,  $DEF_i^{C.B.} / DEF_i^{S.B.}$  を Fig.3 から Fig.8 に示す。図中のカッコの中の数は振動次数を表わす。高い次数の  $DEF$  は極端に小さくなるので、それらを Fig.3, 4, 6, 7 の中に描くことはできなかった。また  $v < 20$  m/sec の領域においては圧力変動の力が弱くなり実際上あまり意味がないので図中に曲線を書いていない。これらの計算結果から云えることは、1)  $DEF^{S.B.}$ ,  $DEF^{C.B.}$  は圧力変動の移動速度  $v$  の関数であって各々のモードについて共振点のようなピークがある。2) 絶対値について見れば、基本次数のものが他のモードにくらべ圧倒的に大きい。等である。

特に外力が White Noise のようなものであれば、全

図3  $DEF_i^{S.B.}(I) \sim v$



図4  $DEF_i^{C.B.}(I) \sim v$ 図5  $DEF_i^{C.B.}/DEF_i^{S.B.}(I) \sim v$ 

次数についての応答は

$$\langle w^2 \rangle_{\text{overall}} \approx \langle w_1^2 \rangle \quad (20)$$

で近似できる。また Fig. 5 や Fig. 8 を見てみると、 $DEF_i^{C.B.}/DEF_i^{S.B.}$  は基本次数のとき 9% ぐらいであり次数が大きくなると、この比は増加する傾向にある。しかし  $v$  の値によっては高い次数の比が小さくなることもあるので、次数が高くなれば、応答自体も端部の影響が一樣に少なくなるとは云えない。Fig. 5, 8 より  $v > 30$  m/sec において

$$DEF_1^{C.B.}/DEF_1^{S.B.} = 0.09 \quad (21)$$

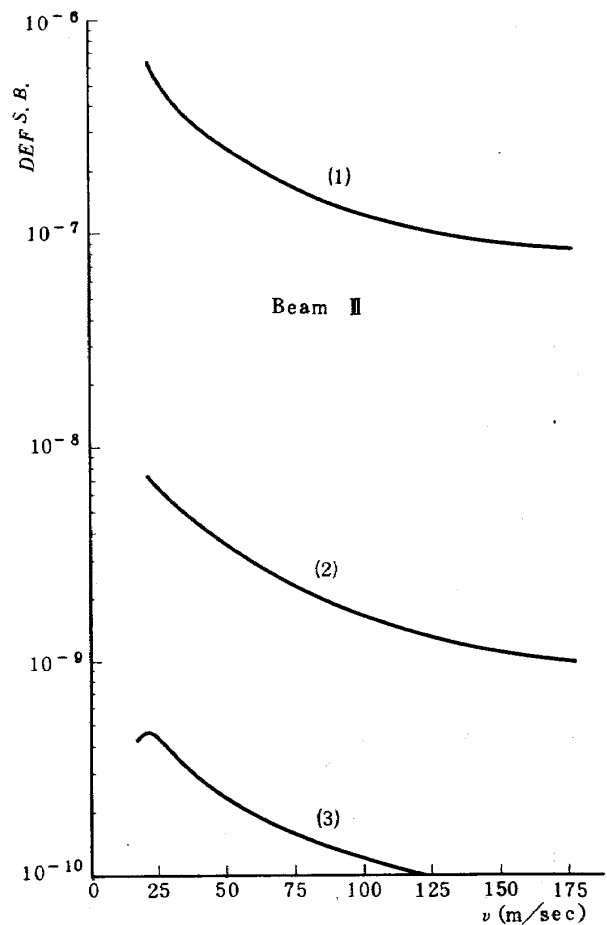
$g_c L_x \langle p^2 \rangle$  が同じとし、基本次数の r.m.s. 変位を梁の中央で比較すると、

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{\langle w_1^2 \rangle^{C.B.}}}{\sqrt{\langle w_1^2 \rangle^{S.B.}}} &= \sqrt{\frac{DEF_1^{C.B.}}{DEF_1^{S.B.}}} \frac{\psi_1^{C.B.}(l_x/2)}{\psi_1^{S.B.}(l_x/2)} \\ &= \sqrt{0.09} \times 1.12 = 0.33 \end{aligned} \quad (22)$$

参考までに静的変位の比を求めると、

$$w^{C.B.}(l_x/2)/w^{S.B.}(l_x/2) = 0.2 \quad (23)$$

これらの結果を表 3 に示す。表 3 より云えることは 1) 圧力変動の r.m.s. と同じ静的荷重が加わった場合の梁の

図6  $DEF_i^{S.B.}(II) \sim v$

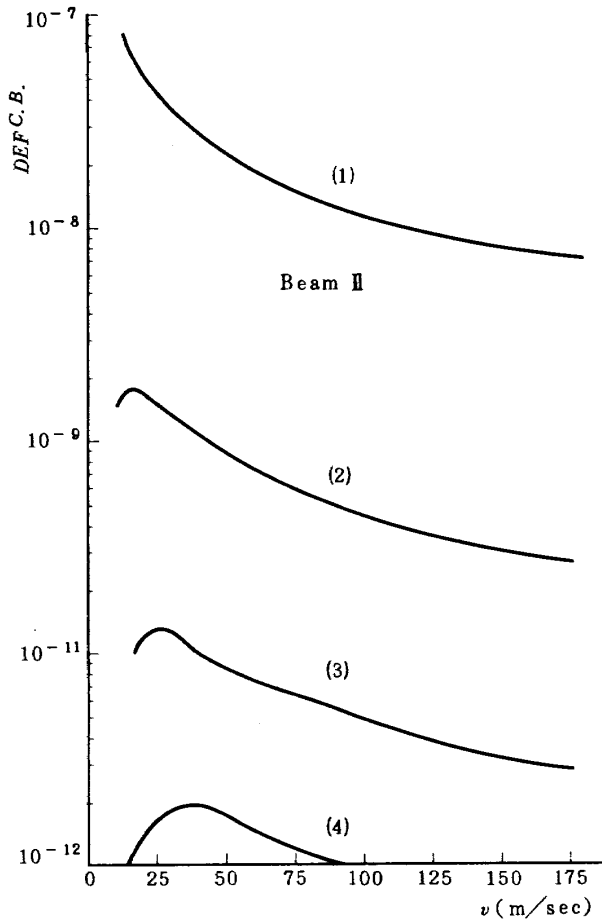
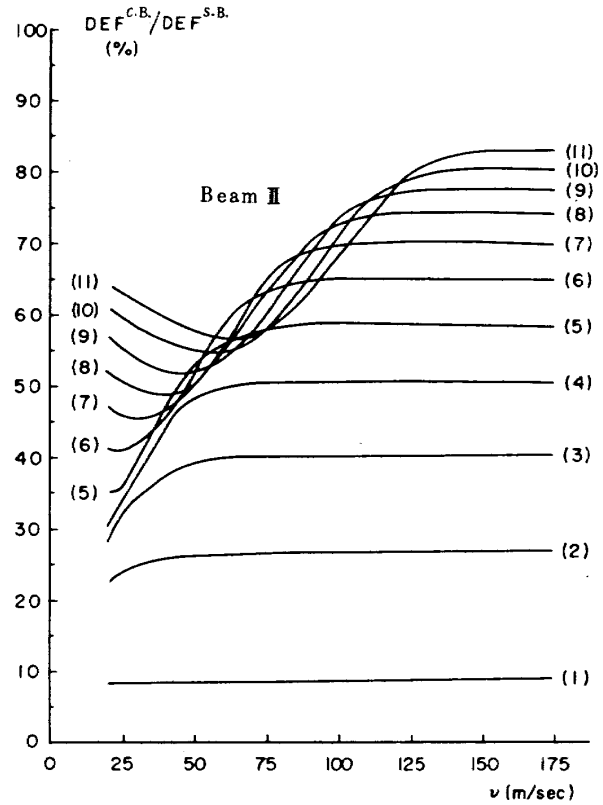
図7  $DEF_i^{C.B.} \text{ (II)} \sim v$ 図8  $DEF_i^{C.B.}/DEF_i^{S.B.} \text{ (II)} \sim v$ 

表3 梁中央におけるr.m.s. 変位と静的撓みの数値例

Numerical Examples of  $\sqrt{\langle w_1^2(l_x/2, t) \rangle}$  and  $w(l_x/2)$ 

Load type	Edge Condition	Support	Clamp	Clamp Support
R.M.S. Response due to Dynamic Load 120 dB ; $\sqrt{\langle p^2 \rangle} = 199.6 \text{ dyn/cm}^2$ at Beam Center	①	$\sqrt{\langle w_1^2 \rangle} = 6.11 \times 10^{-4} \text{ cm}$ $\sqrt{\langle w_1^2 \rangle}/h = 0.39 \%$	$1.99 \times 10^{-4} \text{ cm}$ 0.13 %	0.33
	②	$2.39 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 1.5 %	$7.99 \times 10^{-4} \text{ cm}$ 0.50 %	0.33
Static Deflection due to Static Load ; $p = 199.6 \text{ dyn/cm}^2$ at Beam Center	①	$w = 5.19 \times 10^{-3} \text{ cm}$ $w/h = 3.3 \%$	$1.04 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 0.66 %	0.20
	②	$3.84 \times 10^{-2} \text{ cm}$ 24.2 %	$7.70 \times 10^{-3} \text{ cm}$ 4.9 %	0.20
R. M. S. Response Static Deflection	①	0.12	0.19	
	②	0.062	0.10	

 $v = 50 \text{ m/sec}$

絶対変位は動的な r.m.s. 変位より大きい。2) 比で云えば、静的変位は両端固定のとき支持の 20% であるが、圧力変動のように動的荷重の場合には r.m.s. 変位で比較して固定でも支持のときの 33% になる。両者の差は、梁の両端を固定するということは静的荷重のとき変形を少なくするという意味でより効果的であることを示している。静的変形の撓み曲線と基本次数のモードを Fig. 9 に示すが、両者は大体一致している。動的な変位の波形のピークは r.m.s. 値よりはるかに大きいと思われるが、具体的な数値を出して比較することはここでは出来ない。

$DEF_i^{S.B.}$ ,  $DEF_i^{C.B.}$  はある圧力変動の移動速度  $v = V_i^{S.B.}$ ,  $V_i^{C.B.}$  で最大となる。これらは (18) 式より求められる  $U_i^{S.B.}$  や  $U_i^{C.B.}$  とは少し異なる。(応答曲線が最大値をとる)  $V_i^{S.B.}$ ,  $V_i^{C.B.}$  と (18) 式で求める  $U_i^{S.B.}$ ,  $U_i^{C.B.}$  を Fig. 10 に示す。これから分るように次数が大きくなるにつれてこれらの値は直線的に増大する。即ち高い振動次数は圧力変動の移動速度  $v$  が大きい所で加振されやすい。Fig. 10 より一般に

$$U_i^{C.B.} > V_i^{S.B.}, \quad U_i^{S.B.} > V_i^{C.B.} \quad (24)$$

である。不等号は梁の減衰や寸法の有限性のためである。無限に長い梁を考えると

$$\lim_{l_x \rightarrow \infty} DEF^{S.B.} = AFR \quad (25)$$

$$\lim_{l_x \rightarrow \infty} DEF^{C.B.} = (\lim_{i \rightarrow \infty} p_i) AFR = AFR \quad (26)$$

となり  $DEF$  は一項のみで表わされ  $DEF^{S.B.}$  と  $DEF^{C.B.}$  は一致する。

## 2. 周辺固定板の解析

周辺が固定されている板の解析は前報<sup>1)</sup>と同じ振動方程式を用い、圧力変動の相互相関々数などはすべて同じとする。今周辺固定板のモード ( $i$ -th mode) を次式のよう仮定する。

$$\phi_i^{C.P.}(x, y) = \sum_m \sum_n A_{i,mn} \phi_m^{C.B.}(x) \phi_n^{C.B.}(y) \quad (27)$$

以上簡単のため  $\phi_m(x) = \phi_m^{C.B.}(x) \sqrt{l_x}$ ,  $\phi_n(y) = \phi_n^{C.B.}(y) \sqrt{l_y}$  を用いる。 $\phi_m^{C.B.}(x)$ ,  $\phi_n^{C.B.}(y)$  はそれぞれ長さ  $l_x$ ,  $l_y$  の両端固定梁のモードで (2) 式で与えられている。 $A_{i,mn}$  は正規化された係数である。この節で梁の固有モードに関連して  $k_m$ ,  $\lambda_m$ ,  $\gamma_m$  等が現れるが、すべて前節で定義されたものである。前報(1-19)式で定義される  $G_{il}(\omega)$  は今考えている周辺固定板の場合には次のようになる。

$$\begin{aligned} G_{il}(\omega) &= 2\pi L_x L_y \langle p^2 \rangle \frac{1}{l_x l_y} \sum_m \sum_n \sum_r \sum_s \\ &\times A_{i,mn} A_{l,rs} \\ &\times \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\tau/\zeta - j\omega\tau} d\tau \times \int_0^{l_x} dx_1 \int_0^{l_x} dx_2 \delta(\xi - v\tau) \\ &\times \int_0^{l_y} dy_1 \int_0^{l_y} dy_2 \delta(\eta) \phi_m(x_1) \phi_n(y_1) \phi_r(x_2) \phi_s(y_2) dy_2 \end{aligned} \quad (28)$$

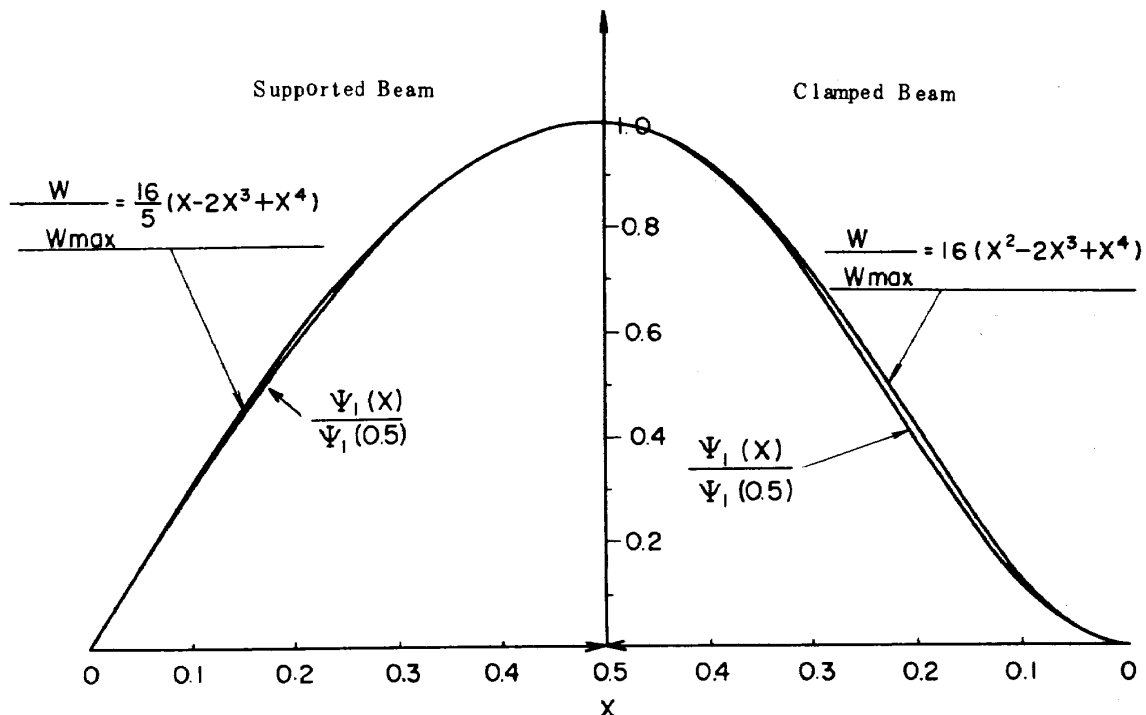


図9 静的な撓み曲線と基本振動モードの関係



$$\begin{aligned}
& + \frac{j}{\omega - j(k_r v - 1/\zeta)} \} \\
& + a_{2,rm} \left\{ \frac{j}{\omega + j(k_m v + 1/\zeta)} \right\} \\
& + b_{2,rm} \left\{ \frac{j}{\omega + j(k_r v + 1/\zeta)} \right\} \\
& + a_{3,rm} \left\{ \frac{j/2}{\omega + k_m v + j/\zeta} + \frac{j/2}{\omega - k_m v - j/\zeta} \right\} \\
& + b_{3,rm} \left\{ \frac{j/2}{\omega + k_r v + j/\zeta} + \frac{j/2}{\omega - k_r v - j/\zeta} \right\} \\
& + a_{4,rm} \left\{ \frac{j/2}{\omega + k_m v + j/\zeta} - \frac{j/2}{\omega - k_m v + j/\zeta} \right\} \\
& + b_{4,rm} \left\{ \frac{j/2}{\omega + k_r v + j/\zeta} - \frac{j/2}{\omega - k_r v + j/\zeta} \right\} \quad (34)
\end{aligned}$$

$\hat{F}_{mr} \Big|_{m=r, \tau=0} = (8) \text{式の} \left[ \begin{array}{c} \phantom{0} \\ \phantom{0} \end{array} \right] \text{の部分で } k_i = k_m \text{と置いたもの。}$

$i$  - 次の変位の相関々数は

$$\begin{aligned}
& \langle w_i(x_1, y_1, t_1) w_i(x_2, y_2, t_2) \rangle \\
& = 2\pi L_x L_y \langle p^2 \rangle \psi_i(x_1, y_1) \psi_i(x_2, y_2) \sum_m \sum_n \sum_r A_{i,mn} \\
& \times A_{i,rn} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F_{mr} H_i(\omega) H_i^*(\omega) e^{j\omega\tau} d\omega \right\} \quad (35)
\end{aligned}$$

と書かれるから、周辺固定板の  $DEF_i^{C.P.}$  は次式となる。

$$\begin{aligned}
DEF_i^{C.P.} & = \frac{\langle w_i^2(x, y, t) \rangle}{(2\pi L_x L_y \langle p^2 \rangle / M_p^2) \psi_i^2(x, y)} \\
& = \sum_m \sum_n \sum_r A_{i,mn} A_{i,rn} J_{mr} \quad (36)
\end{aligned}$$

但し

$$J_{mr} = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{J_{mr} e^{j\omega\tau} d\omega}{(\omega - \mathcal{Q}_i)(\omega - \mathcal{Q}_i^*)(\omega + \mathcal{Q}_i)(\omega + \mathcal{Q}_i^*)} \right\}_{\tau=0} \quad (37)$$

$M_p$  : 板の単位面積当りの質量

(37)式の積分は留数計算により求める。結果を書くと

$$\begin{aligned}
J_{mr}(m \neq r) & = a_{1,mr} (e^{\lambda_r - \lambda_x / v \zeta} F1 F_{r, \tau_1} - F1 F_{r, 0}) \\
& + b_{1,mr} (e^{\lambda_m - \lambda_x / v \zeta} F1 F_{m, \tau_1} - F1 F_{r, 0}) \\
& + a_{1,rm} (e^{\lambda_m - \lambda_x / v \zeta} F5 F_{m, \tau_1} + F5 F_{m, 0}) \\
& + b_{1,rm} (e^{\lambda_r - \lambda_x / v \zeta} F5 F_{r, \tau_1} + F5 F_{r, 0}) \\
& + a_{2,mr} F2 F_{r, 0} + b_{2,mr} F2 F_{m, 0} + a_{2,rm} F6 F_{m, 0} \\
& + b_{2,rm} F6 F_{r, 0} \\
& + a_{3,mr} F3 F_{r, 0} + b_{3,mr} F3 F_{m, 0} + a_{3,rm} F7 F_{m, 0} \\
& + b_{3,rm} F7 F_{r, 0} \\
& + a_{4,mr} F4 F_{r, 0} + b_{4,mr} F4 F_{m, 0} + a_{4,rm} F8 F_{m, 0} \\
& + b_{4,rm} F8 F_{r, 0} \quad (38)
\end{aligned}$$

但し  $F1 F_{r, \tau_1} = F1 F(k_r, v, \zeta, \omega, \beta, \tau_1)$ ,  $\tau_1 = \lambda_x / v$

他の関数も同じ。

$J_{mr} (m=r)$  は前出の (11) 式と同じものである。(38)式の中に新たに加わった関数を書き上げておく。

$$\begin{aligned}
F1 F(k_r, v, \zeta, \omega, \beta, \tau) & = \left[ \frac{\omega(2\beta + \varepsilon_1) \cos \omega\tau - (\omega^2 - \beta^2 - \beta \varepsilon_1)}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2) \{ \omega^2 + (\beta + \varepsilon_1)^2 \}} \right] e^{-\beta\tau} \quad \varepsilon_1 \geq 0 \\
& = \left[ \frac{\omega(2\beta + \varepsilon_1) \cos \omega\tau - (\omega^2 - \beta^2 - \beta \varepsilon_1)}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2) \{ \omega^2 + (\beta + \varepsilon_1)^2 \}} \right] e^{-\beta\tau} \\
& - \frac{e^{-\varepsilon_1\tau}}{\{ (\varepsilon_1 + \beta)^2 + \omega^2 \} \{ (\varepsilon_1 - \beta)^2 + \omega^2 \}} \quad \varepsilon_1 < 0 \quad (39)
\end{aligned}$$

但し  $\varepsilon_1 = k_r v - 1/\zeta$

$$\begin{aligned}
F2 F(k_r, v, \zeta, \omega, \beta, \tau) & = \left[ \frac{(\omega^2 - \beta^2 - \beta \varepsilon_2) \sin \omega\tau - \omega(2\beta - \varepsilon_2) \cos \omega\tau}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2) \{ \omega^2 + (\beta - \varepsilon_2)^2 \}} \right] e^{-\beta\tau} \\
& + \frac{e^{-\varepsilon_2\tau}}{\{ \omega^2 + (\beta + \varepsilon_2)^2 \} \{ \omega^2 + (\beta - \varepsilon_2)^2 \}} \quad (40)
\end{aligned}$$

但し  $\varepsilon_2 = k_r v + 1/\zeta$

$$\begin{aligned}
F3 F(k_r, v, \zeta, \omega, \beta, \tau) & = \left\{ \frac{A_1 \cos \omega\tau - A_2 \sin \omega\tau}{D_1} \right\} e^{-\beta\tau} \\
& + \left\{ \frac{A_3 \cos k_r v \tau + A_4 \sin k_r v \tau}{A_3^2 + A_4^2} \right\} e^{-\tau/\zeta} \quad (41)
\end{aligned}$$

但し  $A_1 = \omega/\zeta \{ \omega^2 - k_r^2 v^2 - (\beta - 1/\zeta)^2 \}$

$$+ 2\omega(\beta - 1/\zeta)(\omega^2 + \beta^2 - \beta/\zeta)$$

$$A_2 = (\omega^2 + \beta^2 - \beta/\zeta) \{ \omega^2 - k_r^2 v^2 - (\beta - 1/\zeta)^2 \}$$

$$- 2\omega^2/\zeta(\beta - 1/\zeta)$$

$$D_1 = 4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2) \{ (\omega - k_r v)^2 + (\beta - 1/\zeta)^2 \}$$

$$\times \{ (\omega + k_r v)^2 + (\beta - 1/\zeta)^2 \}$$

$$A_3 = (\omega^2 - k_r^2 v^2 + \beta^2 - 1/\zeta^2) + 4/\zeta^2 (\omega^2 - 2k_r^2 v^2 + k_r^2 v^2 \beta^2)$$

$$A_4 = 4k_r v (\beta^2 - \omega^2 + k_r^2 v^2 - 1/\zeta^2)/\zeta$$

$$F4 F(k_r, v, \zeta, \omega, \beta, \tau)$$

$$\begin{aligned}
& = \left\{ \frac{A_1 \cos \omega\tau + A_2 \sin \omega\tau}{D_1} \right\} e^{-\beta\tau} \\
& + \left\{ \frac{A_4 \cos k_r v \tau - A_3 \sin k_r v \tau}{k_r v \zeta (A_3^2 + A_4^2)} \right\} e^{-\tau/\zeta} \quad (42)
\end{aligned}$$

但し  $A_1 = \omega^2 - k_r^2 v^2 - (\beta - 1/\zeta)^2$

$$A_2 = \beta \{ \omega^2 - k_r^2 v^2 - (\beta - 1/\zeta)^2 \} + 2\omega^2(\beta - 1/\zeta)$$

$D_1, A_3, A_4$  は (41) 式と同じもの

$$F5 F(k_m, v, \zeta, \omega, \beta, \tau)$$

$$= \left[ \frac{\omega(2\beta - \varepsilon_1) \cos \omega\tau - (\omega^2 - \beta^2 - \beta \varepsilon_1) \sin \omega\tau}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2) \{ \omega^2 + (\beta - \varepsilon_1)^2 \}} \right] e^{-\beta\tau} \quad \varepsilon_1 < 0$$

$$= \left[ \frac{\omega(2\beta - \varepsilon_1) \cos \omega\tau - (\omega^2 - \beta^2 - \beta \varepsilon_1) \sin \omega\tau}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2) \{ \omega^2 + (\beta - \varepsilon_1)^2 \}} \right] e^{-\beta\tau}$$

$$+ \frac{e^{-\varepsilon_1\tau}}{\{ \omega^2 + (\beta - \varepsilon_1)^2 \} \{ \omega^2 + (\beta + \varepsilon_1)^2 \}} \quad \varepsilon_1 > 0 \quad (43)$$

但し  $\varepsilon_1 = k_m v - 1/\zeta$

$F6F(k_m, v, \zeta, \omega, \beta, \tau)$

$$= \left[ \frac{(2\beta + \varepsilon_2)\omega \cos \omega \tau - (\omega^2 - \beta^2 - \beta \varepsilon_2) \sin \omega \tau}{4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2)\{\omega^2 + (\beta + \varepsilon_2)^2\}} \right] e^{-\beta\tau} \quad (44)$$

但し  $\varepsilon_2 = k_m v + 1/\zeta$

$F7F(k_m, v, \zeta, \omega, \beta, \tau)$

$$= \left\{ \frac{A_1 \cos \omega \tau - A_2 \sin \omega \tau}{D_1} \right\} e^{-\beta\tau} \quad (45)$$

但し

$$A_1 = \omega/\zeta \{ \omega^2 - k_m^2 v^2 - (\beta + 1/\zeta)^2 \}$$

$$+ 2(\omega^2 + \beta^2 - \beta/\zeta)\omega(\beta + 1/\zeta)$$

$$A_2 = (\omega^2 + \beta^2 - \beta/\zeta) \{ \omega^2 - k_m^2 v^2 - (\beta + 1/\zeta)^2 \}$$

$$- 2\omega^3/\zeta(\beta + 1/\zeta)$$

$$D_1 = 4\omega\beta(\omega^2 + \beta^2) \{ (\omega + k_m v)^2 + (\beta + 1/\zeta)^2 \}$$

$$\times \{ (\omega - k_m v)^2 + (\beta + 1/\zeta)^2 \}$$

$F8F(k_m, v, \zeta, \omega, \beta, \tau)$

$$= \left\{ \frac{(-A_1 \cos \omega \tau + A_2 \sin \omega \tau) k_m v}{D_1} \right\} e^{-\beta\tau} \quad (46)$$

但し

$$A_1 = \omega^2 \beta - k_m^2 v^2 \beta - \beta(\beta + 1/\zeta)^2 + 2\omega^2(\beta + 1/\zeta)$$

$$A_2 = \omega^3 - k_m^2 v^2 \omega^2 - \omega(\beta + 1/\zeta)^2 - 2\omega\beta(\beta + 1/\zeta)$$

$D_1 = (45)$  式の  $D_1$  と同じ。

#### 数値計算例

(36) 式で与えられている応答量についての具体的な計算を行った。用いた板についての各定数を表4に示す。

係数  $A_{i,mn}$  は Ref. 4 のものである。

Fig. 11 には周辺単純支持の場合の  $DEF^{S.P.}$  を, Fig. 12 には周辺固定の場合の  $DEF^{C.P.}$  を, Fig. 13 には両者の比をそれぞれ示してある。 $DEF^{C.P.}$  の中で基本次数のものが他の次数のものより圧倒的に大きく, 次数が上るにつれて  $DEF^{C.P.}$  の値が小さくなるのは  $DEF^{S.P.}$  の傾向と同じである。また  $DEF^{C.P.}$  も  $DEF^{S.P.}$  と同じくある速度  $V$  で最大値をとる上に凸な放物線型の曲線である。

表4 板の物理定数および固有関数の係数

	1st	2nd	3rd	4th	5th	6th
$\frac{\omega}{\sqrt{D/\rho h \ell x^4}}$	35.99	73.41	108.27	131.64	132.25	165.15
Amplitude Coefficients	$A_{11} = 1.0000$	$A_{12} = 1.0000$	$A_{22} = 1.0000$	$A_{13} = 1.0000$	$A_{11} = -0.0280$	$A_{12} = 0.0406$
	$A_{13} = 0.0142$	$A_{14} = 0.0101$	$A_{24} = 0.0326$	$A_{15} = 0.0085$	$A_{13} = 1.0000$	$A_{14} = 0.0105$
	$A_{15} = 0.0020$	$A_{16} = 0.0020$	$A_{26} = 0.0073$	$A_{31} = -1.0000$	$A_{15} = 0.0055$	$A_{16} = -0.0017$
	$A_{31} = 0.0142$	$A_{32} = 0.0406$	$A_{42} = 0.0326$	$A_{35} = -0.0141$	$A_{31} = 1.0000$	$A_{32} = 1.0000$
	$A_{33} = -0.0031$	$A_{34} = -0.0022$	$A_{44} = -0.0019$	$A_{51} = -0.0085$	$A_{33} = 0.1267$	$A_{34} = 0.0560$
	$A_{35} = -0.0009$	$A_{36} = -0.0007$	$A_{46} = -0.0010$	$A_{53} = 0.0141$	$A_{35} = 0.0118$	$A_{36} = 0.0141$
	$A_{51} = 0.0020$	$A_{52} = 0.0070$	$A_{62} = 0.0073$		$A_{51} = 0.0055$	$A_{52} = 0.0238$
	$A_{53} = -0.0009$	$A_{54} = -0.0011$	$A_{64} = 0.0010$		$A_{53} = 0.0118$	$A_{54} = -0.0011$
	$A_{55} = -0.0004$	$A_{56} = -0.0005$	$A_{66} = -0.0006$		$A_{55} = -0.0018$	$A_{56} = -0.0009$
Mode Shape						
$f_c$ (Hz)	434.1	885.5	1306	1588	1595	1992
$f_s$ (Hz)	238.1	595.3	952.5	1191	1191	1548
$875 \times 8.75 \times 0.0375 \text{ cm}^3, \beta/\omega = 0.006, \zeta/4 = [4f^2 + (\alpha v)^2]^{-1/2}, \alpha = 1$ $E = 2.1 \times 10^9 \text{ grm/cm}^2, \rho = 7.87 \text{ grm/cm}^3, g = 980 \text{ cm/sec}^2, v = 0.3$						

Fig. 11, 12の中の矢印は気流の向きで、正方形の中の線は nodal line を示す。カッコの中の数値は気流方向、気流に垂直な方向についての板の振動半波数を示す。板の場合には(2.1)と(1.2)のモードのように周波数が同じでも応答の性質が異なることがある。即ち(2.1)が低速で加振されやすく、(1.2)が高速で加振されやすい。周辺固定板の応答の一般的性質は前報<sup>1)</sup>で詳しく述べた周辺単純支持板のものと変らない。

Fig. 5, 8, 13 を見くらべると、板の場合の比の変化は梁にくらべてはるかに複雑な曲線となることが分る。これは板の応答が振動次数(周波数)、モードの型、気流の向き等に左右され、梁のような一次元的な構造要素と違うことを示している。固定、支持の比較を行った結果を表5に示す。r.m.s. 変位で支持、固定と比較すると、 $v > 50 \text{ m/sec}$ の範囲で後者は前者の67%となった。静的な荷重の場合の板中心の変位の比が31%であることから、定性的には梁で得られた結論と同じく、静的な荷重の場合は静的な場合変形を小さくできない。

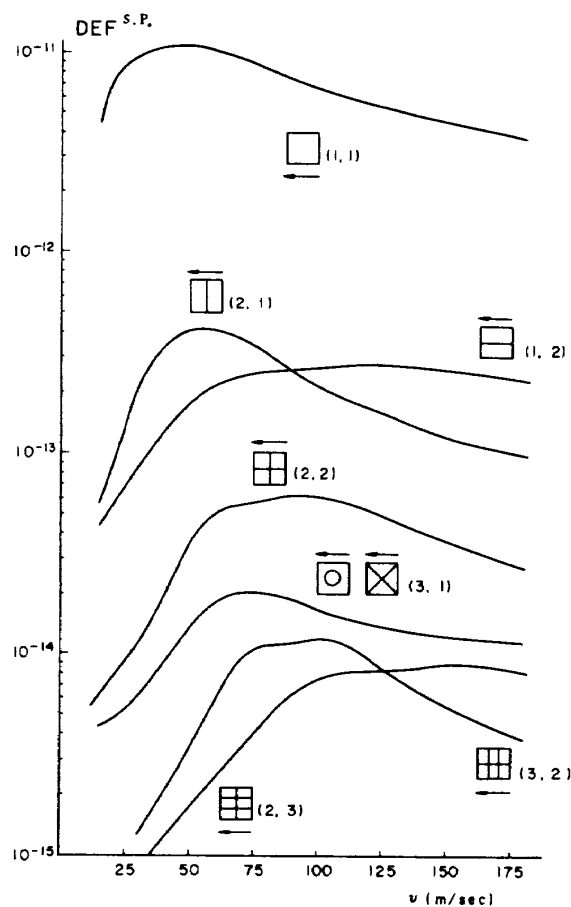


図 11  $DEF_i^{S.P.} \sim v$

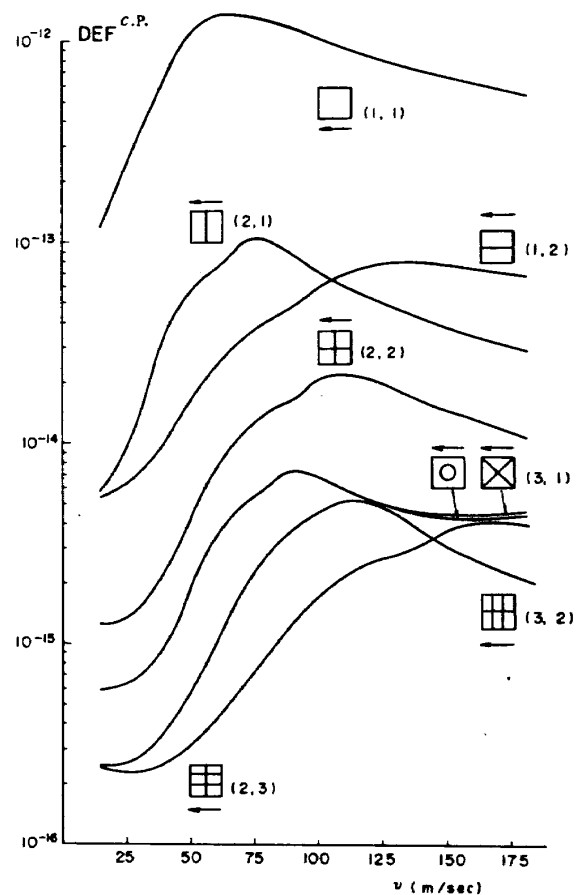


図 12  $DEF_i^{C.P.} \sim v$

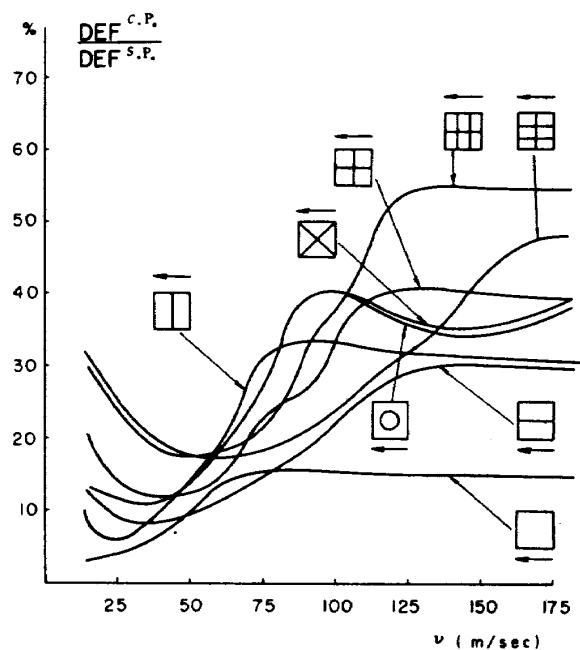


図 13  $DEF_i^{C.P.} / DEF_i^{S.P.} \sim v$

表5 板の中心における r.m.s. 変位と静的撓みの数値例

Numerical Examples of  $\sqrt{\langle w_1^2 \rangle} (l_x/2, l_x/2, t)$  and  $w (l_x/2, l_x/2)$ 

Load type \ Boundary Condition	Support	Clamp	Clamp Support
R.M.S. Response due to Dynamic Load; (120 dB), $\sqrt{\langle p^2 \rangle} = 199.6 \text{ dyn/cm}^2$ at plate Center	$\sqrt{\langle w_1^2 \rangle} = 6.13 \times 10^{-6} \text{ cm}$ $\sqrt{\langle w_1^2 \rangle}/h = 0.16 \%$	$4.09 \times 10^{-5} \text{ cm}$ 0.11 %	0.67
Static Deflection due to Static Load; $p = 199.6 \text{ dyn/cm}^2$ at plate Center	$w = 4.78 \times 10^{-4} \text{ cm}$ $w/h = 1.28 \%$	$1.49 \times 10^{-4} \text{ cm}$ 0.40 %	0.31
<u>R.M.S. Response</u> Static Deflection	0.13	0.27	

 $v = 50 \text{ m/sec}$ 

## 結 論

境界層内圧力変動により加振される周辺固定板の変位応答を求める式を導いた。同時に両端固定梁の解析も行った。計算に必要な各定数を実測により求めて導いた式に代入すれば、変位応答の具体的結果を r.m.s. 値で得ることができる。

固定の場合が支持の場合のどのくらいになるかを見るため、二三の数値計算を行った。r.m.s. 変位で比較して、梁については 33%，板については 67% であった。両者の差は板の方が端部の拘束効果が少ないことを意味する。

静的な問題の場合では端部を拘束すると最大変位量が、梁については 20%，板については 31% と小さくなる。これは静的な荷重の場合には静的荷重下の場合程端部を拘束することにより変形を小さくできないことを示していて、慣性力が存在すると端部の影響が少なくなると言える。

風洞実験により板の変位、歪みなどの測定も行なって計算との比較を行うことが今後の課題である。

## 参 考 文 献

- 1) 藤森：境界層内圧力変動による板の振動解析(I)  
周辺単純支持板，航技研研究報告 TR-207，1970 年 9 月
- 2) Bishop, R.E.D. and Jonson, D.C.  
*Vibration Analysis Tables*  
Cambridge University Press 1955
- 3) Young, D. and Felgar, R.P. Jr.  
*Tables of Characteristic Functions Representing Normal Modes of Vibration of a Beam*  
University of Texas Publication 1949
- 4) Young, D.  
Vibration of Rectangular Plates by the Ritz Method, Journal of Applied Mechanics, Vol. 72, 1950 pp. 448-453



---

## 航空宇宙技術研究所報告401号

昭和50年1月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)

---