NAL TR-492

UDC 62-503;
512.8
629.7.05

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-492

外乱を受ける線形状態フィードバック系の状態変数の共分散指定による設計法

永 安 正 彦

1977 年 2 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

外乱を受ける線形状態フィードバック系の状態変数の共分散指定による設計法*

永安　正彦**

Realization of Prescribed State Covariance for Linear State-Feedback Control Systems with Disturbances

By Masahiko NAGAYASU

This paper discusses optimal instantaneous state feedback control problems for time-invariant linear systems with additive white disturbances.

Linear stochastic control problems, based on the quadratic performance criterion, have been considered many times over the past years. The relationships, however, between performance criterion and behavior of the resultant closed loop system are still in question today.

The purpose of this paper is to present a design approach from the viewpoint, in which the state covariance matrix of the closed loop system is specified, and show the method of determining optimal constant feedback gains.

The primary design objective is to make the stationary state covariance matrix coincide with the prescribed covariance matrix.

As is shown, the state feedback gain matrix through which the state covariance of the closed loop system converges with that prescribed can be found as the time tends to infinity if and only if the dimension of the state variable is equal to the dimension of the control variable. If the former is greater than the latter, certain constraints imposed on the prescribing covariance matrix are derived.

Using gradient matrices, the optimal feedback gain matrix is obtained under the requirement of the state covariance coinciding with that prescribed for minimizing the control effort.

第1章　まえがき

本報告は，線形定係数システムに，白色外乱が加わっている場合の，固定ゲインの状態フィードバック制御系の設計法について述べているものである。本研究ではフィードバック制御系の設計に際して，閉ループ系の状態変数の共分散マトリクスに着目し，設計目標として，閉ループ系の状態変数の定常共分散マトリクスが，あらかじめ与えられたある望ましい共分散マトリクスに一致するように，フィードバック制御系を構成するという問題，すなわち"共分散指定の問題"を定式化し，閉ループ系の状態変数の定常共分散マトリクスが，望ましい値になるような，定係数状態フィードバック制御系の最適フィードバックゲインの求め方を示す。

本報告では，独立な制御変数の数がシステムの状態変数の数と等しい場合には，閉ループ系の状態変数の定常共分散マトリクスを任意の正定対称マトリクスに一致させることができることを示し，また，閉ループ系の定常共分散マトリクスを与えられた正定対称マトリクスに一致させるという条件の下に，エネルギ最小という意味で最適な状態フィードバック制御系を設計する手法を示す。さらに，制御変数の次元が状態変数の次元より小さい場合について，指定する共分散マトリクスに対する制約条件を検討し，この制約条件を満たすような共分散マトリクスを指定した時の最適な状態フィードバック系の設計法を示す。

制御対称に不規則な外乱が加わっている場合には，制御

* 昭和51年12月27日受付

** 計　測　部

系の状態変数および制御変数も不規則な変動を示す。このような不規則外乱を受ける制御系を設計する場合には，その設計目標として，状態変数や制御変数のばらつきの程度，すなわち分散を小さくしようとするのが一般的であろう。状態変数の分散を小さくするということは，外乱の影響を少なくして精度よく制御できるということであり，制御変数の分散を小さくするということは小さな操作量で制御しているという事を示している。　ただ，ここで，次のような問題が生じる。すなわち，得られた制御系の状態変数および制御変数の分散は共に小さい程望ましいのであるが，直感的にも理解できるように，状態変数の分散を小さくしようとすると大きな操作量をとって制御しなければならず，そのために制御変数の分散が大きくなってしまうのである。従って，状態変数と制御変数の分散をどの程度にしたらよいかというトレードオフが問題になる。このトレードオフを数学的に定式化したものとして，状態変数の分散と制御変数の分散の線形結合で表わされる評価関数　$J \triangleq E\{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\}$　を最小にするようなフィードバック制御系を構成しようとするものがある[2)]。この手法によると，ひとたび評価関数の重みマトリクス$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$が与えられれば一意的に最適フィードバックゲインを求めることができる。然しながら，どのような$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$を与えればよいかという問題が最後まで残される。というのは評価関数が与えられた段階では，得られる閉ループ系の状態変数の分散がどの程度の大きさになるかがわからないのである。望ましい閉ループ系を得るためには，結局，初めにある$\boldsymbol{Q}$と$\boldsymbol{R}$を与えてみて，それで得られた閉ループ系の分散を計算し，その結果をみて再び評価関数の重み$\boldsymbol{Q}$，$\boldsymbol{R}$を変えてみるというように，閉ループ系の分散が望ましい値になるまでこの試行錯誤をくり返してゆかなければならない。ここでも，相変らず最適制御理論の「重みマトリクスの問題」は解決されていないのである。

ところで，本来，制御系の設計に際しては，設計目標として，制御変数の分散を出来る限り小さくするというのではなく，制御変数の分散をどの程度にしたいかという，ある望ましい分散の値が示されるはずである。すなわち，実際の問題では，状態変数x_1，x_2 ……，x_nのそれぞれの分散について，その望ましい値が示されるものである。また，制御対象の操作上の問題から，状態変数の相関を零にしたいとか，または負にしたくないとか，状態変数の相関に対して制約が果せられる場合も考えられる。

このような場合，状態変数の分散を，評価関数にひとまとめにして設計しようとするのではなく，与えられた分散や共分散をよりどころとして，一つ一つの分散および共分散が望ましい値になるように制御系を設計するという，より直接的な設計法が望まれる。

本報告では，このような観点から，白色外乱が加わっている線形制御対象に対して，その閉ループ系の分散，共分散が，あらかじめ指定した望ましい値になるような，固定ゲインの状態フィードバック制御系の設計法について述べる。

設計の第１目標は，閉ループ系の状態変数の共分散マトリクスが，あらかじめ与えられた望ましい値になるようにすることであり，第２目標は，第１目標を満たした上で，制御変数の２次形式の期待値　$E\{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}\}$　すなわち，制御エネルギを最小にすることである。上記２つの設計目標に従って，定係数状態フィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$を見出すことが本研究の目的である。

本報告の構成は次のようになっている。第２章では，本研究で対象とするシステムの数学的記述を行ない，問題の定式化を行なう。また，指定すべき共分散マトリクスについての若干の考察を行なう。第３章では，まず，制御変数の数が状態変数の数に等しい場合には，設計目標の共分散マトリクスとして，任意の正定対称マトリクスを与えることができることを示し，この場合に制御エネルギを最小とするフィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$の求め方を，matrix Gradient 法を用いて示す。次に，制御変数が状態変数より少ない場合について，正準形を導き，この正準形について，設計目標の共分散マトリクスにどのような制約が加わるかを検討する。そして，制約を満たした共分散マトリクスを指定した時の，制御エネルギ最小という意味で最適なフィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$の求め方を示す。

記号の説明

普通の小文字a，α等はスカラー量を，ゴシック$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{a}$等はベクトルを表わす。大文字のゴシック$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{\Sigma}$等はマトリクスを表わす。記号の説明は本文中でも行なうが，主なものは次の通りである。

$E\{\boldsymbol{x}\}$　：確率変数$\boldsymbol{x}$の期待値

$\dot{\boldsymbol{x}}(t)$　：変数$\boldsymbol{x}(t)$の時間微分

$t\tau\boldsymbol{A}$　：マトリクス$\boldsymbol{A}$のトレース　$t\tau\boldsymbol{A}=\sum_{i=1}^{n}A_{ii}$

$\Lambda\{\boldsymbol{A}\}$　：マトリクス$\boldsymbol{A}$の固有値の集合

$\lambda_i\{\boldsymbol{A}\}$　：マトリクス$\boldsymbol{A}$のある固有値

$\dfrac{\partial L(\boldsymbol{X})}{\partial \boldsymbol{X}}$：グラディエント　マトリクス，$\left\{\dfrac{\partial L(\boldsymbol{X})}{\partial X_{ij}}\right\}$を（$i$，$j$）要素とするマトリクス

$\boldsymbol{x}\in R^n$　：$\boldsymbol{x}$がn次元ベクトル

$\boldsymbol{X}\in R^{m\times n}$：$\boldsymbol{X}$が$m\times n$マトリクス

$\boldsymbol{A}>0(\geq 0)$：マトリクス$\boldsymbol{A}$が正定（準正定）

$|\boldsymbol{A}|$　：マトリクス$\boldsymbol{A}$の行列式

A^T　：マトリクスAの転置マトリクス

A^*　：マトリクスAの共役転置マトリクス

第2章　問題の記述[4,5]

2.1　白色正規外乱を受ける線形フィードバック制御系

次の状態微分方程式で記述されるような，白色外乱が加わっているn次元の線形定係数システムを考える。（図1参照）

$$\dot{x}(t)=Ax(t)+Bu(t)+w(t) \tag{2.1.1}$$

$$x(0)=x_0 \tag{2.1.2}$$

ここで，$\dot{x}(t)$は$x(t)$の時間微分を表わしている。$x(t)$はn次元実ベクトルの状態変数であり，時刻$t=0$における値がx_0である。x_0はn次元実ベクトルの確率変数であり，平均値が零，共分散マトリクスがX_0であるとする。すなわち，

$$E\{x_0\}=0 \tag{2.1.3}$$

$$E\{x_0x_0^T\}=X_0 \tag{2.1.4}$$

とする。ここで，$E\{\cdot\}$は期待値を表わし，$(\quad)^T$はマトリクス又はベクトルの転置を表わす。また，$u(t)$はr次元実ベクトルの制御変数であり，$w(t)$はn次元実ベクトルの白色性定常確率過程である。連続な白色確率過程は正規分布をすることが知られており[7]，平均値とintensityで一意的に記述できる。いま$w(t)$は，$t\geq 0$に対して，平均値が零で，そのintensityが準正定対称マトリクス$W\in R^{n\times n}$であり，x_0とは無相関なものとする。すなわち，

$$E\{w(t)\}=0 \tag{2.1.5}$$

$$E\{w(t)w^T(\tau)\}=W\delta(t-\tau),\ W=W^T\geq 0 \tag{2.1.6}$$

$$E\{x_0w^T(t)\}=0 \tag{2.1.7}$$

であるとする。ここで，$\delta(\cdot)$はDiracのデルタ関数である。また，A，Bは$n\times n$，$n\times r$（$r\leq n$）の実マトリクスであり，

$$\mathrm{rank}\,A=n \tag{2.1.8}$$

$$\mathrm{rank}\,B=r \tag{2.1.9}$$

であるとする。さらに，システム（2.1.1）は完全可制御であるとする。

さて，システム（2.1.1）に

$$u(t)=Kx(t) \tag{2.1.10}$$

の定係数状態フィードバック（図2参照）をかけた時の，$x(t)$の平均値および共分散マトリクスがどのようになるかを考察する。今，$x(t)$の平均値を$\bar{x}(t)$，共分散マトリクスを$X(t)$とする。即ち，

$$E\{x(t)\}\triangleq\bar{x}(t) \tag{2.1.11}$$

$$E\{(x(t)-\bar{x}(t))(x(t)-\bar{x}(t))^T\}\triangleq X \tag{2.1.12}$$

である。こうすると，まず(2.1.10)式を（2.1.1）式に代入して，

$$\dot{x}(t)=(A+BK)x(t)+w(t) \tag{2.1.13}$$

が得られる。システム(2.1.13)の遷移マトリクスを$\Phi(t)$とすると$\Phi(t)$は，

$$\Phi(t)=e^{(A+BK)t} \tag{2.1.14}$$

で与えられ，$x(t)$は(2.1.13)式から$\Phi(t)$を用いて

$$x(t)=\Phi(t)x(0)+\int_0^t\Phi(t-\tau)w(\tau)d\tau \tag{2.1.15}$$

として得られる。従って$x(t)$の平均値は

$$\begin{aligned}\bar{x}(t)&\triangleq E\{x(t)\}\\&=\Phi(t)E\{x(0)\}+\int_0^t\Phi(t-\tau)E\{w(\tau)\}d\tau\\&=0\end{aligned} \tag{2.1.16}$$

となる。

次に$\bar{x}(t)=0$である事を考慮して，(2.1.12)式の共分散マトリクス$X(t)$を時間で微分し，(2.1.13)(2.1.15)および(2.1.6)式を代入すると

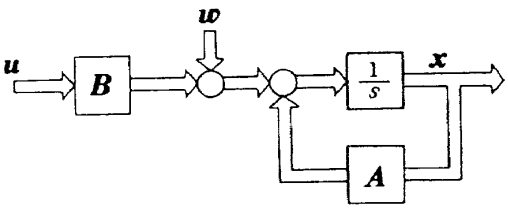


図 1　外乱を受けるシステム

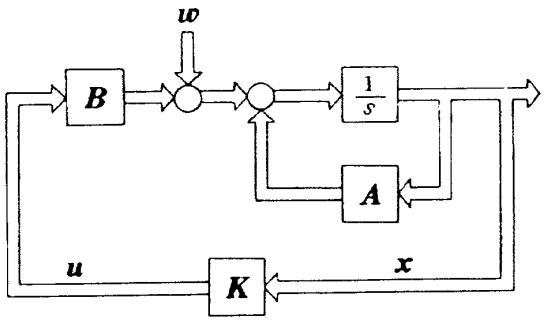


図 2　外乱を受ける状態フィードバック制御系

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{X}}(t)&=E\{\dot{\boldsymbol{x}}(t)\boldsymbol{x}^T(t)+\boldsymbol{x}(t)\dot{\boldsymbol{x}}^T(t)\}\\&=E\{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)+\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{x}^T(t)\\&\quad+\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T+\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{w}^T(t)\}\\&=E\{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)+\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)\\&\quad\times(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T+\int_0^t\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^T(\tau_1)\boldsymbol{\Phi}^T(t-\tau_1)d\tau_1\\&\quad+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau_2)\boldsymbol{w}(\tau_2)\boldsymbol{w}^T(t)d\tau_2\}\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{X}(t)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T\\&\quad+\boldsymbol{W}\int_0^t\delta(t-\tau_1)\boldsymbol{\Phi}^T(t-\tau_1)d\tau_1\\&\quad+\int_0^t\boldsymbol{\Phi}(t-\tau_2)\delta(t-\tau_2)d\tau_2\boldsymbol{W}\\&=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{X}(t)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T+\boldsymbol{W}\end{aligned}\tag{2.1.17}$$

の関係を得る。従って$\boldsymbol{x}(t)$の共分散マトリクス$\boldsymbol{X}(t)$は次の微分方程式を満たすことがわかる。

$$\dot{\boldsymbol{X}}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}(t)+\boldsymbol{X}(t)(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T+\boldsymbol{W}\tag{2.1.18}$$

ただし，$\boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0$ (2.1.19)

ここで，マトリクス（$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$）の全ての固有値の実部が負であれば，$t\to\infty$で$\boldsymbol{X}(t)$は定常解に収束する。従って定常解を$\boldsymbol{X}$と表わすことにすれば，$\boldsymbol{X}$は(2.1.18)式の$\boldsymbol{X}(t)=0$とおいた式を満足する。即ち$\boldsymbol{X}$は

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{X}+\boldsymbol{X}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T+\boldsymbol{W}=0\tag{2.1.20}$$

の解である。また，(2.1.20)式は（$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK}$）の全ての固有値の実部が負であれば一意解をもち，(2.1.14)式の遷移マトリクスを用いて

$$\boldsymbol{X}=\int_0^\infty\boldsymbol{\Phi}(t)\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Phi}^T(t)dt\tag{2.1.21}$$

で与えられることが知られている。

2.2 共分散指定最適フィードバック制御問題

本研究で扱う問題は，まず第一に，システム(2.1.13)の状態変数の定常共分散マトリクス$\boldsymbol{X}$が，与えられた望ましい共分散マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$に一致するようにフィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$を定めることである。第二に，この条件を満たす$\boldsymbol{K}$の中で，評価関数

$$J=E\{\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{R}\boldsymbol{u}(t)\}\tag{2.2.1}$$

（$\boldsymbol{R}$は正定対称な$r\times r$ 実マトリクス）

を最小にするような最適フィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$を見出すことである。

(2.2.1)式に$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)$を代入すると

$$\begin{aligned}J&=E\{\boldsymbol{x}^T(t)\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)\}\\&=E\{\mathrm{tr}\,\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)\}\\&=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\boldsymbol{X}\end{aligned}\tag{2.2.2}$$

となる。ここで，$\boldsymbol{X}$が$\boldsymbol{\Sigma}$と等しくなるのであるから，

$$J=\mathrm{tr}\,\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Sigma}\tag{2.2.3}$$

を得る。ただしtrはマトリクスのトレースを表わす。

2.3 共分散指定問題の妥当性について

本節では，指定すべき共分散マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$について若干の考察を行なう。というのは，$\boldsymbol{\Sigma}$としてどのようなマトリクスを与え得るのかという点を明らかにしておく必要があるからである。まず，n次元確率変数の共分散マトリクス$\boldsymbol{X}$が準正定対称実マトリクスであることを示す。次に，準正定対称実マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$に対して，共分散マトリクスがそれに一致するような確率変数が存在すること，即ち，任意の準正定対称実マトリクスが共分散マトリクスとしての資格を有していることを示す。これらの点を明らかにするために次の3つの補題を示しておく。

補題2.3.1 [6]

実対称マトリクスの固有値は実数であり，その固有値を対角要素とする対角マトリクスに直交相似である。

補題2.3.2 [6]

(準)正定実行列の固有値は全て（非負）正の実数である。

以上2つの補題から次の補題が得られる。

補題2.3.3 [6]

(準)正定対称実マトリクスは（非負）正の固有値を対角要素とする対角行列に直交相似である。

即ち，準正定対称マトリクス　が与えられた時，直交マトリクス$\boldsymbol{P}$，および$\boldsymbol{A}$の固有値$\lambda_i\geq 0(i=1,\cdots n)$を対角要素とする対角マトリクス$\boldsymbol{\Lambda}$が存在し，

$$\boldsymbol{\Sigma}=\boldsymbol{P}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}\tag{2.3.1}$$

と表わすことができる。

さて，共分散マトリクス$\boldsymbol{X}$について次の命題が成り立つ。

命題2.3.1

平均値が0のn次元実ベクトル確率変数$\boldsymbol{x}$の共分散マトリクス$\boldsymbol{X}\triangleq E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\}$は準正定対称実マトリクスである。

証明

$\boldsymbol{X}$の(i,j)要素をX_{ij}とすると

$$\begin{aligned}X_{ij}&=E\{x_ix_j\}\\&=E\{x_jx_i\}\\&=X_{ji}\end{aligned}\tag{2.3.2}$$

であり，x_i，x_j が実数であるから$\boldsymbol{X}$は対称実マトリクスとなる。次に$\boldsymbol{a} \neq 0$なる任意のn次元ベクトル$\boldsymbol{a}$を考える。そして，

$$z = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x} = \boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a} \tag{2.3.3}$$

として，新たにスカラーの確率変数zを考えると，zの分散は

$$E\{z^2\} = E\{\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{a}\} = \boldsymbol{a}^T \boldsymbol{X} \boldsymbol{a} \tag{2.3.4}$$

となる。zの分散は負の値にはならないから

$$\boldsymbol{a}^T \boldsymbol{X} \boldsymbol{a} \geq 0 \tag{2.3.5}$$

の関係が得られ，$\boldsymbol{X}$が準正定対称マトリクスになることがわかる。これにより，任意のn次元確率変数の共分散マトリクスが準正定対称マトリクスになることがわかった。

QED

次に，$\boldsymbol{\Sigma}$に関して次の命題が成り立つ

命題2.3.2

任意の準正定対称な$n \times n$実マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$に対して，その共分散マトリクス$\boldsymbol{X}$が$\boldsymbol{\Sigma}$と等しくなるようなn次元確率変数$\boldsymbol{x}$が存在する。

証明

補題2.3.3より$\boldsymbol{\Sigma}$に対し

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{P} \tag{2.3.6}$$

となる直交マトリクス$\boldsymbol{P}$および非負の対角要素をもつ対角マトリクス$\boldsymbol{\Lambda}$が存在する。今，平均値が零で，それぞれの分散が λ_i（$i = 1, \cdots n$）となるn個の独立な確率変数の組$\{y_i\}$（$i = 1, \cdots n$）を考える。そして，新たにn次元確率変数$\boldsymbol{y}$を次のように定義する。

$$\boldsymbol{y} \triangleq (y_1, y_2, \cdots\cdots, y_n)^T \tag{2.3.7}$$

こうすると，

$$E\{\boldsymbol{y}\} = 0 \tag{2.3.8}$$

$$E\{\boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T\} = \boldsymbol{\Lambda} \tag{2.3.9}$$

となる。ここでさらに，n次元確率変数$\boldsymbol{x}$を次のように定義する。

$$\boldsymbol{x} \triangleq \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{y} \tag{2.3.10}$$

こうすると$\boldsymbol{x}$の平均値および共分散マトリクスは

$$E\{\boldsymbol{x}\} = \boldsymbol{P}^T E\{\boldsymbol{y}\} = 0 \tag{2.3.11}$$

$$E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\} = E\{\boldsymbol{P}^T \boldsymbol{y}\boldsymbol{y}^T \boldsymbol{P}\} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{P} = \boldsymbol{\Sigma} \tag{2.3.12}$$

となり，$\boldsymbol{x}$の共分散マトリクスは$\boldsymbol{\Sigma}$になる。これで，$\boldsymbol{\Sigma}$を共分散とする確率変数$\boldsymbol{x}$が存在しうることがわかった。

QED

命題2.3.1で任意の確率変数の共分散マトリクスが準正定対称実マトリクスであることが示されたが，それだけでは，任意の準正定対称実マトリクスが共分散マトリクスとしての資格を有しているかどうか，すなわち，任意の準正定対称実マトリクスに対して，それを共分散マトリクスとする確率変数が存在しているかどうかが問題として残る。というのも，確率変数が存在しえないようなマトリクスを共分散マトリクスとして与えることは意味がないからである。これに対して，命題2.3.2において，常に対応する確率変数が少くとも一つ存在しうることが示された。

第3章　共分散指定によるフィードバック制御系の設計法

3.1　問題の定式化

2.3節で，一般に$\boldsymbol{\Sigma}$は準正定対称マトリクスでなければならない事がわかった。他方，$\boldsymbol{W}$は準正定マトリクスであるから，$n \times p$マトリクス$\boldsymbol{D}$（$\mathrm{rank}\,\boldsymbol{D} = p$）が存在して$\boldsymbol{W} = \boldsymbol{D}\boldsymbol{D}^T$と表わすことができる。このときマトリクス対$\{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}), \boldsymbol{D}\}$が可制御対であれば(2.1.20)式において$\boldsymbol{X} > 0$となることが知られている。[6] マトリクス対$\{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}), \boldsymbol{D}\}$が可制御という事は，閉ループ系(2.1.13)式において，状態変数の全てのモードが外乱によって駆動されている事を示しているわけである。逆に，$\{(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}), \boldsymbol{D}\}$が，可制御でない場合には，外乱の影響を受けないモードがあることになり，$\boldsymbol{X}$は準正定となる。この事は，閉ループ系を適当に設計する事により，あるモードに対して，外乱の影響が現れないようにする事が可能な場合もあるという事を示している。このような設計問題は別の機会に論じることにし，本研究では，以下，$\boldsymbol{X} > 0$，したがって，$\boldsymbol{\Sigma}$としては正定対称なマトリクスの範囲で論じることにする。こうすると，2.2節で述べた問題は次のように述べることができる。

問題1

与えられた正定対称マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$に対して，等式拘束条件

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{\Sigma} + \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})^T + \boldsymbol{W} = 0 \tag{3.1.1}$$

の下に，評価関数

$$J = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{K}^T \boldsymbol{R} \boldsymbol{K} \boldsymbol{\Sigma} \tag{3.1.2}$$

を最小にするようなフィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$を求めよ

(3.1.1)，(3.1.2)式において未知パラメータは$\boldsymbol{K}$だけである。従って，問題は，$\boldsymbol{K}$をパラメータとする等式拘束条件つきの極値問題になる。ただし，$\boldsymbol{\Sigma}$を与えた時に，(3.1.1)式の解$\boldsymbol{K}$が存在しなければならない。本章では，

(3.1.1)式の解$\boldsymbol{K}$が存在するためには$\boldsymbol{\Sigma}$にどのような拘束条件が課せられるかを検討し，さらに，$\boldsymbol{\Sigma}$を与えた時の最適フィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$の求め方について検討する。まず，独立な制御変数の次元rが状態変数の次元nに等しい場合には，$\boldsymbol{\Sigma}$として任意の正定対称マトリクスを与えることができる事を示し，次に制御変数の次元rが状態変数の次元nより少ない場合について検討を行なう。

3.2 準　　備

本節では次節以下の準備として次の命題を示しておく。

命題3.2.1 [6)]

(3.1.1)式で$\boldsymbol{W}$が正定対称である場合には，正定対称な$\boldsymbol{\Sigma}$を与えた時に，解$\boldsymbol{K}$が存在すれば，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$は漸近安定である。

証明

$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$の固有値のうち，任意の一つを$\lambda_i$とする。$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$の固有値と$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T$の固有値は等しいから，$\lambda_i$は$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T$の固有値でもある。$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T$の固有値$\lambda_i$に対応する固有ベクトルを$\boldsymbol{l}_i$とする。こうすると，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T\boldsymbol{l}_i=\lambda_i\boldsymbol{l}_i$，$\boldsymbol{l}_i^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})=\lambda_i^*\boldsymbol{l}_i^*$　となる。

(3.1.1)式の左から$\boldsymbol{l}_i^*$を，右から$\boldsymbol{l}_i$をかけると，

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{l}_i^*(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{l}_i+\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T\boldsymbol{l}_i+\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{W}\boldsymbol{l}_i\\&=\lambda_i^*\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{l}_i+\lambda_i\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{l}_i+\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{W}\boldsymbol{l}_i\\&=2R_e\lambda_i\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{l}_i+\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{W}\boldsymbol{l}_i\\&=0\end{aligned}\tag{3.2.1}$$

となり

$$R_e\lambda_i=-\frac{\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{W}\boldsymbol{l}_i}{2\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{l}_i}\quad\dagger\tag{3.2.2}$$

を得る。

$\boldsymbol{W}$も$\boldsymbol{\Sigma}$も正定だから，(3.2.2)式の右辺は負であり，従ってλ_iの実部は負となる。以上の事は，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$の全ての固有値について成り立つから，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$は漸近安定であることが示される。　QED．

命題3.2.2

(3.1.1)式で$\boldsymbol{W}$が準正定対称である場合には，正定対称な$\boldsymbol{\Sigma}$を与えた時に，解$\boldsymbol{K}$が存在すれば，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$はリアプノフの意味で安定である。

証明

前の命題の証明と同様にして

$$R_e\lambda_i=-\frac{\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{W}\boldsymbol{l}_i}{2\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{l}_i}\tag{3.2.3}$$

† $R_e\lambda_i$は複素数λ_iの実数部を表わす。

が得られる。$\boldsymbol{\Sigma}$は正定であり，$\boldsymbol{W}$は準正定であるから，(3.2.3)式の右辺は非正である。この事は，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$の全ての固有値について成り立つから，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$がリアプノフの意味で安定であることが示される。QED．

このように$\boldsymbol{W}\geq 0$なる場合には$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$の固有値の中に$R_e\lambda_i=0$なるものが存在することがある。この場合について考察すると以下の如くである。

いま，$rank\boldsymbol{W}=p<n$ならば

$$\boldsymbol{W}=\boldsymbol{CVC}^T,\quad \boldsymbol{V}>0\tag{3.2.4}$$

$$\boldsymbol{C}\in R^{n\times p},\quad \boldsymbol{V}=\mathrm{diag}\{v_1,\cdots,v_p\}\in R^{p\times p}\quad\dagger$$

とおくことができる。ここで

$$E\{\boldsymbol{v}(t)\}=0,\quad E\{\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^T(\tau)\}=\boldsymbol{V}\delta(t-\tau)\tag{3.2.5}$$

となるような確率過程$\boldsymbol{v}(t)$を考えると，(2.1.13)式の$\boldsymbol{w}(t)$を

$$\boldsymbol{w}(t)=\boldsymbol{C}\boldsymbol{v}(t)\tag{3.2.6}$$

と表わすことができる。実際

$$\begin{aligned}&E\{\boldsymbol{w}(t)\}=\boldsymbol{C}E\{\boldsymbol{v}(t)\}=0\\&E\{\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^T(\tau)\}=\boldsymbol{C}E\{\boldsymbol{v}(t)\boldsymbol{v}^T(\tau)\}\boldsymbol{C}^T\\&\qquad=\boldsymbol{CVC}^T=\boldsymbol{W}\end{aligned}\tag{3.2.7}$$

となる。こうすると，(3.2.3)式から$R_e\lambda_i=0$となるのは

$$\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{W}\boldsymbol{l}_i=0\tag{3.2.8}$$

となることであり，(3.2.4)式を(3.2.8)式に代入すると

$$\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{CVC}^T\boldsymbol{l}_i=0\tag{3.2.9}$$

となる。いま$\boldsymbol{V}$は正定であるから，(3.2.9)式が成り立つためには

$$\boldsymbol{l}_i^*\boldsymbol{C}=0\tag{3.2.10}$$

でなければならない。

また，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$が単純マトリクスである場合に限定するならば，さらに次の事が云える。

λ_iと$\boldsymbol{t}_i$を$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T$の固有値とそれに対応する固有ベクトルとすると，$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})$は次のように書ける。

$$\begin{aligned}&(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})=\boldsymbol{T}^{*-1}\Lambda\boldsymbol{T}^*\\&\Lambda=\mathrm{diag}\{\lambda_1,\cdots,\lambda_n\}\\&\boldsymbol{T}=(\boldsymbol{t}_1\cdots\boldsymbol{t}_n)\end{aligned}\tag{3.2.11}$$

そして，(2.1.13)式において

$$\boldsymbol{z}(t)=\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{x}(t)\tag{3.2.12}$$

の座標変換を行なうと(2.1.13)式は

† $\mathrm{diag}\{v_1,\cdots v_p\}$は$v_1,\cdots v_p$を対角要素とする対角マトリクス

$$z(t)=\Lambda z(t)+T^{*}Cv(t) \tag{3.2.13}$$

となる。いま $R_e\lambda_i=0$ であるとする。λ_i は $(A+BK)^T$ の固有値であり，t_i は λ_i に対応する固有ベクトルであるから，(3.2.10) 式の l_i^* は t_i^* でおきかえられ，結局次式を得る。

$$t_i^{*}C=0 \tag{3.2.14}$$

従って，(3.2.13) 式においてマトリクス $T^{*}C$ の第 i 行目の要素は0となる。このことは，(3.2.13) 式で，固有値の実部が零のモードには外乱の影響が入らないことを示している。すなわち，$\lambda_i=0$ の場合には，

$$z_i=0 \tag{3.2.15}$$

となり，$\lambda_i=\omega_i j$　$(j=\sqrt{-1})$ の場合には，

$$\dot{z}_i=\omega_i j z_i \tag{3.2.16}$$

となって単振動系となる。どちらの場合も，$t\to\infty$ とした時の z_i の分散の値が系の初期分布のみによって決まり，外乱の影響を受けないことがわかる。

3.3 設計法（制御変数の次元が状態変数の次元と等しい場合）

本節では，制御変数の次元 r が状態変数の次元 n に等しい場合，すなわち，（3.1.1）式のマトリクス B が，$n\times n$ の正則なマトリクスの場合について検討する。(3.1.1) 式で Σ が，正定対称なマトリクスとすると，

$$K=-B^{-1}\left(\frac{1}{2}W\Sigma^{-1}+A\right) \tag{3.3.1}$$

とおけば，この K は（3.1.1）式を満たしていることがわかる。従って，任意の正定対称マトリクス Σ に対して，（3.1.1）式の解 K が少なくとも一つ存在していることがわかる。そして解 K が存在すれば，命題3.2.2により，閉ループ系はリアプノフ安定になっている。

さて，（3.1.1）式の拘束条件のもとで，（3.1.2）の評価関数を最小にするような最適フィードバックゲイン K を求めよう。これは，K をパラメータとする，等式拘束条件つきの極値問題であるから，ラグランジ乗数法によって解くことができる。

まず，ラグランジ係数マトリクス M を導入する。ここで，M は $n\times n$ の実対称マトリクスである。こうして，次のラグランジ関数を定義する。

$$L(K,M)=\mathrm{tr}\,K^TRK\Sigma+\mathrm{tr}\,M\{(A+BK)\Sigma+\Sigma(A+BK)^T+W\} \tag{3.3.2}$$

こうすると，もとの条件つき極値問題は，（3.3.2.）の L を K，M に関して最小化する条件なしの極値問題になる。L の極値条件は，*Gradient Matrix*[1] を用いて

$$\frac{\partial L}{\partial K}=2(RK+B^TM)\Sigma=0 \tag{3.3.3}$$

$$\frac{\partial L}{\partial M}=(A+BK)\Sigma+\Sigma(A+BK)^T+W=0 \tag{3.3.4}$$

となる。（3.3.3）式より

$$K=-R^{-1}B^TM \tag{3.3.5}$$

となり，（3.3.5）式を（3.3.4）式に代入すると，

$$BR^{-1}B^TM\Sigma+\Sigma MBR^{-1}B^T-(A\Sigma+\Sigma A^T+W)=0 \tag{3.3.6}$$

を得る。ここで，（3.3.6）の解の存在に関連して，次の3つの補題を示しておく。

補題3.3.1 [6]

次の線形マトリクス代数方程式を考える。

$$ES+SF+G=0 \tag{3.3.7}$$

ただし，$E\in R^{n\times n}$，$F\in R^{m\times m}$，$G\in R^{n\times m}$，$S\in R^{n\times m}$

ここで，（3.3.7）式の解 S が一意的に存在するための必要十分条件は，E，F の固有値が

$$\lambda_i(E)+\lambda_j(F)\neq 0 \quad i=1,\cdots n;\ j=1,\cdots m \tag{3.3.8}$$

を満たすことである。

証明　付録参照

補題3.3.2 [6]

A が実対称マトリクスならば，$x\neq 0$ に対して

$$\min_x\frac{x^TAx}{x^Tx}=\lambda_{\min}(A) \tag{3.3.9}$$

ここで $\lambda_{\min}(A)$ はマトリクス A の最小固有値を表わす。

証明　付録参照

補題3.3.3 [6]

A，B が実対称マトリクスで，さらに，B が正定であるとすると，

$$\min_x\frac{x^TAx}{x^TBx}=\lambda_{\min}(AB^{-1}) \tag{3.3.10}$$

が成立する。

証明　付録参照

以上のことから次の補題が得られる。

補題3.3.4

A，B が正定対称実マトリクスとすると，マトリクス (AB^{-1}) および (AB) の固有値は正となる。

証明　付録参照

さて，（3.3.6）式の左と右から Σ^{-1} をかけると

$$\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{M}+\boldsymbol{M}\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = (\boldsymbol{A}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}+\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{A}+\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{\Sigma}^{-1}) \tag{3.3.11}$$

を得る。いま，$\boldsymbol{R}$は正定対称マトリクスであるから，$\boldsymbol{R}^{-1}$も正定対称マトリクスとなる。さらに，$\boldsymbol{B}$が正則であることから，マトリクス $\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T$ も正定対称であることがわかる。$\boldsymbol{\Sigma}$も正定であるから，補題3.3.4より$\boldsymbol{B}\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{B}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}$の固有値は全て正となることが示される。すなわち，（3.3.11）式は，補題3.3.1の条件を満たしていることになり，解$\boldsymbol{M}$が一意的に存在することがわかった。

以上の検討により，$r=n$ の場合には，任意の正定対称マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$に対して，（3.1.1）の拘束条件のもとに（3.1.2）の評価関数を最小にする$\boldsymbol{K}$が唯一つ存在することが示された。

3.4 設計法（制御変数の次元が状態変数の次元より少ない場合）

本節では，制御変数の次元rが，状態変数の次元nよりも少ない場合について検討する。すなわち，入力マトリクス$\boldsymbol{B}$が$n\times r$マトリクスの場合である。$r<n$の場合に問題になるのは，（3.1.1）式において，任意の正定対称マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$を与えた時に，解$\boldsymbol{K}$の存在が必ずしも保証されないところにある。まず，システムを正準形に変換することによって，どのような$\boldsymbol{\Sigma}$を与えれば解$\boldsymbol{K}$が存在するかを検討し，次に，フィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$の求め方を示す。

3.4.1 正準形

rank$\boldsymbol{B}=r$ であるから，(2.1.13)式において，適当な座標の入れかえを行なえば，一般性を失うことなく，$\boldsymbol{B}$は次のようなブロックマトリクスに表わされるとしてよい。

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{B}_1\\ \hdashline \boldsymbol{B}_2\end{bmatrix} \tag{3.4.1}$$

ただし，ここで$\boldsymbol{B}_1$ は$r\times r$の正則マトリクス，$\boldsymbol{B}_2$ は$p\times r$マトリクス（$p=n-r$）である。ここで，次の変換マトリクス$\boldsymbol{T}$を考える。

$$\boldsymbol{T}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}_1 & 0\\ \hdashline \boldsymbol{B}_2 & \boldsymbol{I}_p\end{array}\right] \tag{3.4.2}$$

$$\boldsymbol{T}^{-1}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}_1^{-1} & 0\\ \hdashline -\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1^{-1} & \boldsymbol{I}_p\end{array}\right]$$

(2.1.13)式に対して，

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{x}}(t) \tag{3.4.3}$$

の座標変換を行なうと

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t)=(\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T}+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}\boldsymbol{T})\tilde{\boldsymbol{x}}(t)+\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{w}(t) \tag{3.4.4}$$

を得る。ここで

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{A}\boldsymbol{T} \tag{3.4.5}$$

$$\tilde{\boldsymbol{B}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix}\boldsymbol{I}_r\\ 0\end{pmatrix} \tag{3.4.6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{K}}=\boldsymbol{K}\boldsymbol{T} \tag{3.4.7}$$

$$\tilde{\boldsymbol{w}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{w} \qquad \tilde{\boldsymbol{W}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{W}\boldsymbol{T}^{-1^T} \tag{3.4.8}$$

とおくと，(3.4.4)式は

$$\dot{\tilde{\boldsymbol{x}}}(t)=(\tilde{\boldsymbol{A}}+\tilde{\boldsymbol{B}}\tilde{\boldsymbol{K}})\tilde{\boldsymbol{x}}(t)+\tilde{\boldsymbol{w}}(t) \tag{3.4.9}$$

と表わされることになる。また，定常共分散マトリクスは，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{X}&=\lim_{t\to\infty}E\{\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{x}^T(t)\}\\ &=\lim_{t\to\infty}\boldsymbol{T}E\{\tilde{\boldsymbol{x}}(t)\tilde{\boldsymbol{x}}^T(t)\}\boldsymbol{T}^T\\ &=\boldsymbol{T}\tilde{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{T}^T\end{aligned} \tag{3.4.10}$$

となる。ちなみに，$\boldsymbol{X}$と$\tilde{\boldsymbol{X}}$の関係について，

$$\boldsymbol{X}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{X}_{12}^T & \boldsymbol{X}_{22}\end{array}\right] \qquad \tilde{\boldsymbol{X}}=\left[\begin{array}{c:c}\tilde{\boldsymbol{X}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{X}}_{12}\\ \hdashline \tilde{\boldsymbol{X}}_{12}^T & \tilde{\boldsymbol{X}}_{22}\end{array}\right] \tag{3.4.11}$$

とブロックマトリクスに分割して(3.4.10)式を展開すると

$$\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{X}_{11} & \boldsymbol{X}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{X}_{12}^T & \boldsymbol{X}_{22}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}_1\tilde{\boldsymbol{X}}_{11}\boldsymbol{B}_1^T & \boldsymbol{B}_1\tilde{\boldsymbol{X}}_{11}\boldsymbol{B}_2^T+\boldsymbol{B}_1\tilde{\boldsymbol{X}}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{B}_2\tilde{\boldsymbol{X}}_{11}\boldsymbol{B}_1^T+\tilde{\boldsymbol{X}}_{12}^T\boldsymbol{B}_1^T & \boldsymbol{B}_2\tilde{\boldsymbol{X}}_{11}\boldsymbol{B}_2^T+\tilde{\boldsymbol{X}}_{12}^T\boldsymbol{B}_2^T+\boldsymbol{B}_2\tilde{\boldsymbol{X}}_{12}+\tilde{\boldsymbol{X}}_{22}\end{array}\right] \tag{3.4.12}$$

となり，逆に$\tilde{\boldsymbol{X}}$を$\boldsymbol{X}$で表わすと

$$\tilde{\boldsymbol{X}}=\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{X}\boldsymbol{T}^{-1^T} \tag{3.4.13}$$

となるから，これを展開して

$$\left[\begin{array}{c:c}\tilde{\boldsymbol{X}}_{11} & \tilde{\boldsymbol{X}}_{12}\\ \hdashline \tilde{\boldsymbol{X}}_{12}^T & \tilde{\boldsymbol{X}}_{22}\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{X}_{11}\boldsymbol{B}_1^{-1^T} & -\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{X}_{11}\boldsymbol{B}_1^{-1^T}\boldsymbol{B}_2^T+\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{X}_{12}\\ \hdashline -\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{X}_{11}\boldsymbol{B}_1^{-1^T}+\boldsymbol{X}_{12}^T\boldsymbol{B}_1^{-1} & \boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{X}_{11}\boldsymbol{B}_1^{-1^T}\boldsymbol{B}_2^T-\boldsymbol{X}_{12}^T\boldsymbol{B}_1^{-1^T}\boldsymbol{B}_2^T-\boldsymbol{B}_2\boldsymbol{B}_1^{-1}\boldsymbol{X}_{12}+\boldsymbol{X}_{22}\end{array}\right] \tag{3.4.14}$$

の関係が得られる。

また，（3.1.2）式の評価関数は

$$J = \mathrm{tr}\, \boldsymbol{T}^{-1^T}\widetilde{\boldsymbol{K}}^T\boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{T}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}\boldsymbol{T}^T$$
$$= \mathrm{tr}\, \widetilde{\boldsymbol{K}}^T\boldsymbol{R}\widetilde{\boldsymbol{K}}\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \qquad (3.4.15)$$

となる。従って，3.1節で定式化された問題は，与えられた正定対称マトリクス $\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}} \triangleq \boldsymbol{T}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{T}^{T_1}$ に対して，

$$(\widetilde{\boldsymbol{A}}+\widetilde{\boldsymbol{B}}\widetilde{\boldsymbol{K}})\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}+\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}(\widetilde{\boldsymbol{A}}+\widetilde{\boldsymbol{B}}\widetilde{\boldsymbol{K}})^T+\widetilde{\boldsymbol{W}}=0 \qquad (3.4.16)$$

の等式拘束条件のもとに，評価関数（3.4.15）を最小にするようなフィードバックゲインマトリクス $\widetilde{\boldsymbol{K}}$ を求めよ。という問題と等価になる。

従って，以下本節では，正準形の場合についてのみ扱うことにする。$\widetilde{\boldsymbol{A}}$，$\widetilde{\boldsymbol{B}}$，$\widetilde{\boldsymbol{K}}$，$\widetilde{\boldsymbol{\Sigma}}$，$\widetilde{\boldsymbol{W}}$，$\widetilde{\boldsymbol{x}}$，$\widetilde{\boldsymbol{w}}$ をあらためて，$\boldsymbol{A}$，$\boldsymbol{B}$，$\boldsymbol{K}$，$\boldsymbol{\Sigma}$，$\boldsymbol{W}$，$\boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{w}$ と書き表わすことにし，それぞれを次のようなブロックマトリクスに分割する。

$$\boldsymbol{A}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right],\quad \boldsymbol{B}=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{I}_r\\ \hdashline 0\end{array}\right],\quad \boldsymbol{K}=\left[\boldsymbol{K}_1 \vdots \boldsymbol{K}_2\right]$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{\Sigma}_{21} & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{array}\right],\quad \boldsymbol{W}=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{W}_{11} & \boldsymbol{W}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{W}_{12}^T & \boldsymbol{W}_{22}\end{array}\right],$$

$$\boldsymbol{x}=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_r\\ \hdashline \boldsymbol{x}_p\end{array}\right],\qquad \boldsymbol{w}=\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{w}_r\\ \hdashline \boldsymbol{w}_p\end{array}\right] \qquad (3.4.17)$$

ここで，$\boldsymbol{A}_{11}, \boldsymbol{I}_r, \boldsymbol{K}_1, \boldsymbol{\Sigma}_{11}, \boldsymbol{W}_{11}$ は $r\times r$ マトリクス，$\boldsymbol{x}_r$，$\boldsymbol{w}_r$ は r 次元ベクトルである。こうすると，開ループ系は

$$\left[\begin{array}{c}\dot{\boldsymbol{x}}_r\\ \hdashline \dot{\boldsymbol{x}}_p\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}_{11} & \boldsymbol{A}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_r\\ \hdashline \boldsymbol{x}_p\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{I}_r\\ \hdashline 0\end{array}\right]\boldsymbol{u}$$
$$+\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{w}_r\\ \hdashline \boldsymbol{w}_p\end{array}\right] \qquad (3.4.18)$$

となり，閉ループ系は

$$\left[\begin{array}{c}\dot{\boldsymbol{x}}_r\\ \hdashline \dot{\boldsymbol{x}}_p\end{array}\right]=\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{K}_2\\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{x}_r\\ \hdashline \boldsymbol{x}_p\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c}\boldsymbol{w}_r\\ \hdashline \boldsymbol{w}_p\end{array}\right] \qquad (3.4.19)$$

と表わされる。また，指定する共分散マトリクス $\boldsymbol{\Sigma}$ は，

$$\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{K}_2\\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right]\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{\Sigma}_{12}^T & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{array}\right]+\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{\Sigma}_{12}^T & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{array}\right]$$
$$\times\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{A}_{11}+\boldsymbol{K}_1 & \boldsymbol{A}_{12}+\boldsymbol{K}_2\\ \hdashline \boldsymbol{A}_{21} & \boldsymbol{A}_{22}\end{array}\right]^T+\left[\begin{array}{c:c}\boldsymbol{W}_{11} & \boldsymbol{W}_{12}\\ \hdashline \boldsymbol{W}_{12}^T & \boldsymbol{W}_{22}\end{array}\right]=0 \qquad (3.4.20)$$

を満たさなければならない。ここで，あらためて問題を記述しなおすと次のようになる。

問題2

与えられた正定対称マトリクス $\boldsymbol{\Sigma}$ に対して，

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})\boldsymbol{\Sigma}+\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})^T+\boldsymbol{W}=0 \qquad (3.4.21)$$

の等式拘束条件のもとに，評価関数

$$J=\mathrm{tr}\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{RK}\boldsymbol{\Sigma} \qquad (3.4.22)$$

を最小にする $\boldsymbol{K}=(\boldsymbol{K}_1 \vdots \boldsymbol{K}_2)$ を求めよ

3.4.2　マトリクス $\boldsymbol{\Sigma}$ に関する考察

さて，(3.4.20)式を展開すると，

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{\Sigma}_{11}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T+\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{11}+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T+\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{A}_{11}^T$$
$$+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{A}_{12}^T+\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{K}_1^T+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{K}_2^T+\boldsymbol{W}_{11}=0 \qquad (3.4.23)$$

$$\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{\Sigma}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}+\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{12}+\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{\Sigma}_{22}+\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{A}_{21}^T$$
$$+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^T+\boldsymbol{W}_{12}=0 \qquad (3.4.24)$$

$$\boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{\Sigma}_{12}+\boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{\Sigma}_{22}+\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T\boldsymbol{A}_{21}^T+\boldsymbol{\Sigma}_{22}\boldsymbol{A}_{22}^T+\boldsymbol{W}_{22}=0 \qquad (3.4.25)$$

となる。(3.4.25)式は $\boldsymbol{K}$ を含んでおらず，従って，$\boldsymbol{\Sigma}$ は(3.4.25)式を満たしていなければならないことになる。このことは，$r<n$ の場合には，$\boldsymbol{\Sigma}$ として任意の正定対称マトリクスを与えることはできず，(3.4.25)式の拘束条件をあらかじめ満たしていなければならないことを示している。以下，$r<n$ の場合に，解 $\boldsymbol{K}$ が存在するためには $\boldsymbol{\Sigma}$ にどのような拘束条件が課せられるかを検討する。

（3.4.24）式から

$$\boldsymbol{K}_2=-(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{12}+\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{\Sigma}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}+\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{A}_{21}^T$$
$$+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^T+\boldsymbol{W}_{12})\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}$$
$$\triangleq-(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}+\boldsymbol{D}) \qquad (3.4.26)$$

が得られる。ただし

$$\boldsymbol{D}=(\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{\Sigma}_{12}+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}+\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{A}_{21}^T+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{A}_{22}^T$$
$$+\boldsymbol{W}_{12})\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \qquad (3.4.27)$$

である。解 $\boldsymbol{K}_1$ が求まれば，(3.4.27)式から，$\boldsymbol{K}_2$ は一意的に定まることがわかる。

(3.4.26)式を(3.4.23)式に代入して整理すると

$$\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T)+(\boldsymbol{\Sigma}_{11}-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T)\boldsymbol{K}_1^T$$
$$+\boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{\Sigma}_{11}+\boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{A}_{11}^T+\boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T+\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{A}_{12}^T+\boldsymbol{W}_{11}$$
$$-\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{D}^T-\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T=0 \qquad (3.4.28)$$

となり，

$$\boldsymbol{\Gamma} \triangleq \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T} \tag{3.4.29}$$

$$\boldsymbol{V} \triangleq \boldsymbol{A}_{11}\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{\Sigma}_{11}\boldsymbol{A}_{11}^{T} + \boldsymbol{A}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T} + \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{A}_{12}^{T} + \boldsymbol{W}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{D}^{T} - \boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T} \tag{3.4.30}$$

とおくと，(3.4.28)式は

$$\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{K}_1^{T} + \boldsymbol{V} = 0 \tag{3.4.31}$$

と表わすことができる。(3.4.31)式の解$\boldsymbol{K}_1$の存在に関連して次の補題を示しておく。

補題3.4.1 [6]

$\boldsymbol{\Sigma} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \in R^{n\times n}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{11} \in R^{r\times r}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{12} \in R^{r\times p}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{22} \in R^{p\times p}$ として，$\boldsymbol{\Sigma}_{11}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{22}$が正定であるとき，$\boldsymbol{\Sigma}$が正定であるための必要十分条件は，$\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T}$が正定となることである。

証明

正則なマトリクス

$$\boldsymbol{T} \triangleq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}_r & 0 \\ -\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T} & \boldsymbol{I}_p \end{bmatrix} \tag{3.4.32}$$

を考える。$\boldsymbol{\Sigma}$の左から$\boldsymbol{T}^{T}$，右から$\boldsymbol{T}$をかけると，

$$\boldsymbol{T}^{T}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \tag{3.4.33}$$

となり，$\boldsymbol{T}^{T}\boldsymbol{\Sigma}\boldsymbol{T}$も正定になるから，右辺の固有値は全て正となる。従って$\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T}$の固有値は全て正となり，よって，$\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T}$は正定となる。

逆に，$\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T}$が正定であれば，$\boldsymbol{\Sigma}_{22}$が正定であるから，(3.4.33)式の右辺のマトリクスは正定となる。(3.4.33)式の左と右から，それぞれ，正則マトリクス$\boldsymbol{T}^{-1^{T}}$と$\boldsymbol{T}^{-1}$をかけると

$$\boldsymbol{\Sigma} = \boldsymbol{T}^{-1^{T}} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T} & 0 \\ 0 & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix} \boldsymbol{T}^{-1} \tag{3.4.34}$$

が得られ，右辺は正定である。従って$\boldsymbol{\Sigma}$は正定である。

QED

さて，(3.4.29)式にもどる。いま，$\boldsymbol{\Sigma}$は正定であり，また，$\boldsymbol{\Sigma}_{11}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{22}$もまた正定であるから，補題3.4.1より

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T} > 0 \tag{3.4.35}$$

が得られ，$\boldsymbol{\Gamma}$が正定となることがわかる。(3.4.31)式で，$\boldsymbol{\Gamma}$が正定であるので，$\boldsymbol{\Sigma}$が(3.4.25)式を満たす正定対称なマトリクスであれば，解$\boldsymbol{K}_1$が存在することがわかった。

次に，(3.4.25)式について検討する。(3.4.25)式は

$$(\boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{L})\boldsymbol{\Sigma}_{22} + \boldsymbol{\Sigma}_{22}(\boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{L})^{T} + \boldsymbol{W}_{22} = 0 \tag{3.4.36}$$

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1} \tag{3.4.37}$$

と表わすことができる。ところで，システム(3.4.18)が完全可制御であるならば，マトリクス対$\{\boldsymbol{A}_{22}, \boldsymbol{A}_{21}\}$で表わされる系が，完全可制御対になっていなければならない。また，$\{\boldsymbol{A}_{22}, \boldsymbol{A}_{21}\}$が完全可制御対であれば，適当なマトリクス$\boldsymbol{L}$を選べば$(\boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{L})$の固有値を任意の値にすることができることが知られている。(3.4.36)式で$(\boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{L})$が安定なマトリクスになるように$\boldsymbol{L}$を選べば$\boldsymbol{\Sigma}_{22}$は一意に定まる。$\boldsymbol{\Sigma}_{22}$として，どのような正定対称マトリクスを選べるかという問題は，(3.4.36)式をみると，結局，システム

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \boldsymbol{A}_{22}\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{w}_p \tag{3.4.38}$$

$$\boldsymbol{\xi} \in R^{p}, \quad \boldsymbol{\eta} \in R^{r}$$

に対して，

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{L}\boldsymbol{\xi} \tag{3.4.39}$$

のフィードバックをかけて，状態変数$\boldsymbol{\xi}$の共分散マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}_{22}$をどの範囲にもっていくことができるか，という問題と等価になっている。

次に，(3.4.17)の正準形の$\boldsymbol{\Sigma}_{11}$に対して，どのような制約が課せられるかということが問題となるが，これに関して次のような点が明らかになる。

1) (3.4.25)式を満たす$\boldsymbol{\Sigma}_{12}$，$\boldsymbol{\Sigma}_{22}$および，(3.4.35)式を満たす$\boldsymbol{\Sigma}_{11}$を選び，共分散マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$を

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_{11} & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^{T} & \boldsymbol{\Sigma}_{22} \end{bmatrix}$$

とすると，(3.4.28)式で$\boldsymbol{K}_1$が存在し，(3.4.26)式から$\boldsymbol{K}_2$が求まる。すなわち，定常共分散が$\boldsymbol{\Sigma}$となるようなフィードバックゲイン$\boldsymbol{K} = (\boldsymbol{K}_1 \vdots \boldsymbol{K}_2)$が存在する。

2) マトリクス$\boldsymbol{A}_{22}$が漸近安定であれば，(3.4.36)式で$\boldsymbol{L} = 0$とおいても$\boldsymbol{\Sigma}_{22}$は有界な値をもつ。一方，$\boldsymbol{L} = 0$であれば，(3.4.37)式から$\boldsymbol{\Sigma}_{12} = 0$となるから，(3.4.35)式の拘束条件は，単に

$$\boldsymbol{\Sigma}_{11} > 0 \tag{3.4.40}$$

となり，$\boldsymbol{\Sigma}_{11}$は任意の正定対称マトリクスでよいことになる。

3) $\boldsymbol{A}_{22}$が不安定な固有値をもつ場合には，$\boldsymbol{L} = 0$とおくと，$\boldsymbol{\Sigma}_{11}$に対する条件は，(3.4.40)式になるが，$\boldsymbol{\Sigma}_{22}$は有界でなくなる。すなわち，閉ループ系が不安定になる。一方，$\boldsymbol{A}_{22}$が不安定な固有値をもっていても，

$$R_e\{\lambda_i(\boldsymbol{A}_{22} + \boldsymbol{A}_{21}\boldsymbol{L})\} < 0 \quad i = 1, \cdots, p \tag{3.4.41}$$

となるような$\boldsymbol{L}$が存在する。このような$\boldsymbol{L}$を選べば，(3.4.36)，(3.4.37)式から，一意的に Σ_{22}，Σ_{12}が定まる。こうすると，Σ_{11}に対する制約は $\Sigma_{11} > \Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{12}^T$ となる。すなわち，この場合には，Σ_{11}は任意の正定対称マトリクスにとることはできなくなる。

3.4.3 最適フィードバックゲイン

さて，(3.4.28)式の解$\boldsymbol{K}_1$が存在するような有界な(3.4.25)を満たす正定対称マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$が与えられたとしよう。このとき，(3.4.28)式の解$\boldsymbol{K}_1$は一意ではないので，評価関数(3.4.22)を最小にするような最適フィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$を見出すことにする。(3.4.22)式に(3.4.17)を代入して展開すると，

$$
\begin{aligned}
J &= \mathrm{tr}\,\boldsymbol{K}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}\boldsymbol{\Sigma} \\
&= \mathrm{tr}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1^T \\ \cdots \\ \boldsymbol{K}_2^T\end{bmatrix}\boldsymbol{R}\left[\boldsymbol{K}_1 \vdots \boldsymbol{K}_2\right]\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \vdots & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \cdots & & \cdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^T & \vdots & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix} \\
&= \mathrm{tr}\begin{bmatrix}\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1 & \vdots & \boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_2 \\ \cdots & & \cdots \\ \boldsymbol{K}_2^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1 & \vdots & \boldsymbol{K}_2^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_{11} & \vdots & \boldsymbol{\Sigma}_{12} \\ \cdots & & \cdots \\ \boldsymbol{\Sigma}_{12}^T & \vdots & \boldsymbol{\Sigma}_{22}\end{bmatrix} \\
&= \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{11} + \boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T) \\
&\quad + \mathrm{tr}\,(\boldsymbol{K}_2^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{12} + \boldsymbol{K}_2^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_2\boldsymbol{\Sigma}_{22})
\end{aligned}
\tag{3.4.42}
$$

となる。(3.4.42)式に(3.4.26)を代入すると

$$
\begin{aligned}
J = \mathrm{tr}\,(&\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T \\
&- \boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T) + \mathrm{tr}\,(-\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{12} \\
&- \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{12} + \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{12} \\
&+ \boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_{22} + \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Sigma}_{12} \\
&+ \boldsymbol{D}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_{22})
\end{aligned}
\tag{3.4.43}
$$

ここで，$\mathrm{tr}\,\boldsymbol{AB} = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{BA}$ であることを考えると，

$$
J = \mathrm{tr}\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1(\boldsymbol{\Sigma}_{11} - \boldsymbol{\Sigma}_{12}\boldsymbol{\Sigma}_{22}^{-1}\boldsymbol{\Sigma}_{12}^T) + \mathrm{tr}\,\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_{22}
\tag{3.4.44}
$$

となり，(3.4.29)から，結局Jは

$$
J = \mathrm{tr}\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Gamma} + \mathrm{tr}\boldsymbol{D}^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Sigma}_{22}
\tag{3.4.45}
$$

となる。いま(3.4.45)式の第2項は$\boldsymbol{K}_1$と独立だから，結局，問題は，次のように述べることができる。

問題3

(3.4.25)式を満たす正定対称マトリクスが与えられたとする。このとき，(3.4.31)式の拘束条件のもとで，評価関数

$$
J_2 = \mathrm{tr}\,\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Gamma}
\tag{3.4.46}
$$

を最小にするようなゲインマトリクス$\boldsymbol{K}_1$を見出せ

この問題は，前節と同様にラグランジ未定乗数法によって解くことができる。ラグランジ乗数マトリクス$\boldsymbol{M}$を導入する。$\boldsymbol{M}$は$p \times p$の実対称マトリクスである。そして，次のラグランジ関数を定義する。

$$
L = tr\boldsymbol{K}_1^T\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Gamma} + tr\boldsymbol{M}(\boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{K}_1^T + \boldsymbol{V})
\tag{3.4.47}
$$

Lの極値条件は，Gradient Matrix法を用いて

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{K}_1} = 2(\boldsymbol{R}\boldsymbol{K}_1 + \boldsymbol{M})\boldsymbol{\Gamma} = 0
\tag{3.4.48}
$$

$$
\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{M}} = \boldsymbol{K}_1\boldsymbol{\Gamma} + \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{K}_1^T + \boldsymbol{V} = 0
\tag{3.4.49}
$$

となる。(3.4.48)式から

$$
\boldsymbol{K}_1 = -\boldsymbol{R}^{-1}\boldsymbol{M}
\tag{3.4.50}
$$

となり，これを(3.4.49)式に代入すると

$$
(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma})\boldsymbol{M} + \boldsymbol{M}(\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma})^T - \boldsymbol{R}\boldsymbol{V}\boldsymbol{R} = 0
\tag{3.4.51}
$$

いま，$\boldsymbol{R}$は正定対称マトリクスであり，(3.4.35)の拘束条件から$\boldsymbol{\Gamma}$も正定対称マトリクスである。従って，補題3.3.4より，マトリクス($\boldsymbol{R}\boldsymbol{\Gamma}$)の固有値は全て正の値をもつ。また，このことと，補題3.3.1より(3.4.51)式の解$\boldsymbol{M}$は一意に存在することがわかる。こうして求まった$\boldsymbol{M}$と(3.4.50)式から最適な$\boldsymbol{K}_1$が求まり，また，(3.4.26)式から$\boldsymbol{K}_2$が求まる。こうして，正準形に対する最適フィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$を得ることができる。

3.5 例　題

前節までで，状態変数の共分散指定による最適状態フィードバック系の設計法について述べた。本節では，正規性白色外乱を受ける2次系の制御対象で，制御変数が2つある場合について，最適フィードバック系の設計法を数値例について示す。

平均値0の2次元の正規性確率変数$\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^2$の確率密度分布は

$$
p(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2\pi|\boldsymbol{X}|^{\frac{1}{2}}}\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}\right\}
\tag{3.5.1}
$$

$$
\boldsymbol{x} = \begin{bmatrix}x_1 \\ x_2\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X} = \begin{bmatrix}X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22}\end{bmatrix}
$$

で表わされる。ここで$\boldsymbol{X}$は$\boldsymbol{x}$の共分散マトリクスであって$E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\}$で与えられ，$|\boldsymbol{X}|$はマトリクス$\boldsymbol{X} \in R^{2\times 2}$の行列式を表わす。(3.5.1)式の分布の形は，図3に示すようなつり鐘型をしている。ここで

$$
\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x} = k = \mathrm{const}
\tag{3.5.2}
$$

とおくと，(3.5.2)式を満足する$\boldsymbol{x}$として，楕円が得られる。一方，(3.5.1)式の右辺の $\exp\left\{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}\right\}$ は，$e^{-\frac{k}{2}}$ となって，$p(\boldsymbol{x})$は一定になる。すなわち，

（3.5.2）式による楕円は等密度を表わしている事になる。特に $k=1$, 2, 3の場合には，それぞれ1σ－，2σ－，3σ－等密度楕円として，$\boldsymbol{x}$がその楕円の中に現われる確率が0.394, 0.865, 0.989となることが知られている。（図4）。ということは，1σの楕円が小さいほど，$\boldsymbol{x}$は原点近くに現われやすいという事を示しており，設計の立場からすると，$\boldsymbol{x}$の精度を上げるためには，1σ－等密度楕円を小さくすればよいことになる。また，1σ－等密度楕円の主軸がx_1 x_2座標軸に対して傾いている場合には，x_1とx_2との間に相関がある事を意味しており，設計上の要求からx_1とx_2を無相関にしたい場合には，1σ－等密度楕円の主軸を座標軸に一致させなければならない。このことは，とりもなおさず，共分散マトリクス$\boldsymbol{X}$の非対角要素X_{12}を零にすることである。

さて，白色外乱を受ける2次の制御対象を考える。

$$\boldsymbol{x}(t)=\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{u}(t)+\boldsymbol{w}(t) \qquad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{3.5.3}$$

ここで　$\boldsymbol{x}(t)\in R^2$，$\boldsymbol{u}(t)\in R^2$，$\boldsymbol{w}(t)\in R^2$

$E\{\boldsymbol{x}_0\}=0 \qquad E\{\boldsymbol{x}_0\boldsymbol{x}_0^T\}=\boldsymbol{X}_0$

$E\{\boldsymbol{w}(t)\}=0 \quad E\{\boldsymbol{w}(t)\boldsymbol{w}^T(\tau)\}=\boldsymbol{W}\delta(t-\tau)$

である。

$$\boldsymbol{u}(t)=\boldsymbol{K}\boldsymbol{x}(t) \tag{3.5.4}$$

の状態フィードバックを与えると，閉ループ系は

$$\boldsymbol{x}(t)=(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K})\boldsymbol{x}(t)+\boldsymbol{w}(t) \qquad \boldsymbol{x}(0)=\boldsymbol{x}_0 \tag{3.5.5}$$

となる。　(3.5.5)式の閉ループ系の設計パラメータは，フィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$である。いま，ある$\boldsymbol{K}$を与えた時の，閉ループ系の状態変数$\boldsymbol{x}(t)$の共分散マトリクス$\boldsymbol{X}(t)$の時間応答を考えてみる。この事は，先ほどの，1σ－等密度楕円が，時間とともにどのように変化するかという事に相当する。（$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}$）が安定なマトリクスであれば，1σ－等密度楕円は，$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X}_0^{-1}\boldsymbol{x}=1$で表わされる初期値から，時間とともに

$$\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{\Sigma}^{-1}\boldsymbol{x}=1 \tag{3.5.6}$$

$$\boldsymbol{\Sigma}=\int_0^\infty\left\{e^{(A+BK)t}\boldsymbol{W}e^{(A+BK)^Tt}\right\}dt \tag{3.5.7}$$

で表わされる定常な楕円へ収束してゆく。（図5）

制御系の設計目標として，いま，定常状態でのx_1とx_2が無相関となり，かつ，x_1およびx_2の分散が与えられているとした時の数値例を考えてみる。

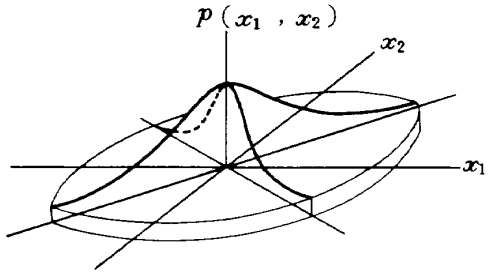
（3.5.3）式で

$$\boldsymbol{A}=\begin{bmatrix}0 & 1\\ -10 & -11\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{X}_0=\begin{bmatrix}6 & -10\\ -10 & 9\end{bmatrix}$$

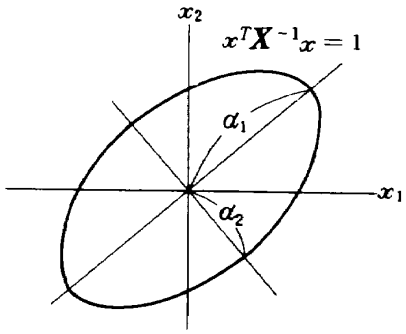
$$\boldsymbol{W}=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 1 & 9\end{bmatrix}$$



$$p(\boldsymbol{x})=\frac{1}{2\pi|\boldsymbol{X}|^{\frac{1}{2}}}e^{-\frac{1}{2}\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{X}^{-1}\boldsymbol{x}}$$

$$\boldsymbol{x}=\begin{bmatrix}x_1\\ x_2\end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{X}=E\{\boldsymbol{x}\boldsymbol{x}^T\}=E\left\{\begin{bmatrix}x_1^2 & x_1x_2\\ x_2x_1 & x_2^2\end{bmatrix}\right\}$$

図　3　2次元正規分布



$\lambda_1, \lambda_2 \in \{\lambda(\boldsymbol{X})\}$

$\alpha_1=\sqrt{\lambda_1}$，$\alpha_2=\sqrt{\lambda_2}$

図　4　1σ－等密度楕円

とする。また，望ましい定常共分散マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$としては，x_1 とx_2 が無相関で，x_1 の分散が4，x_2 の分散が1であるとする。すなわち，

$$\boldsymbol{\Sigma}=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

とする。すでに述べたように，定常共分散マトリクスが上記$\boldsymbol{\Sigma}$になるようなフィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$は唯一でないので，そのような$\boldsymbol{K}$の中から評価関数

$$J=\lim_{t\to\infty} E\{\boldsymbol{u}^T(t)\boldsymbol{u}(t)\}$$

を最小にするものを見出すことにする。

（3.3.5）式と（3.3.6）式から

$$\boldsymbol{K}=-\boldsymbol{M} \tag{3.5.8}$$

$$\boldsymbol{M\Sigma}+\boldsymbol{\Sigma M}=\boldsymbol{A\Sigma}+\boldsymbol{\Sigma A}^T+\boldsymbol{W} \tag{3.5.9}$$

が得られる。いま

$$\boldsymbol{M}\triangleq\begin{bmatrix} m_1 & m_2 \\ m_2 & m_3 \end{bmatrix} \tag{3.5.10}$$

とおいて（3.5.9）式を展開すると

$$\begin{bmatrix} 8m_1 & 5m_2 \\ 5m_2 & 2m_3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & -38 \\ -38 & -13 \end{bmatrix} \tag{3.5.11}$$

従って

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix} 0.5 & -7.6 \\ -7.6 & -6.5 \end{bmatrix} \tag{3.5.12}$$

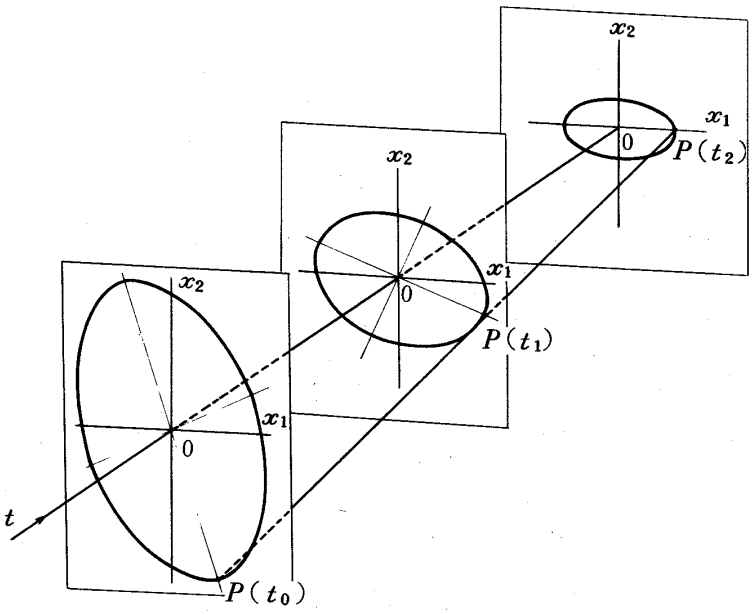


図 5　1σ－等密度楕円の時間履歴

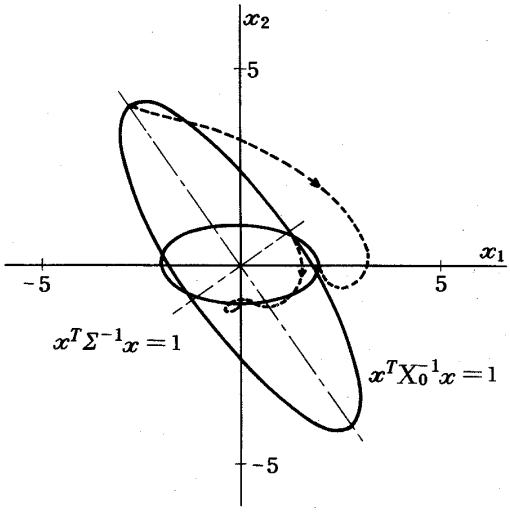


図 6（a）　1σ－等密度楕円の時間応答

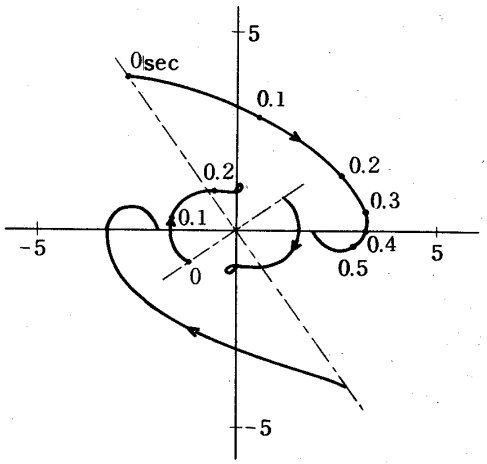


図 6（b）　楕円の停留点の時間応答

となり，(3.5.8)式から

$$\boldsymbol{K}=\begin{bmatrix}-0.5 & 7.6\\ 7.6 & 6.5\end{bmatrix} \tag{3.5.13}$$

が得られる。また，閉ループ系マトリクスは

$$(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{BK})=\begin{bmatrix}-0.5 & 8.6\\ -2.4 & -4.5\end{bmatrix} \tag{3.5.14}$$

となり，特性根は，$s=-2.5\pm 4.08i$ となり，ダンピング係数は$\zeta=0.522$ となっている。図6(a)に，1σ－等密度楕円の時間応答を示し，図6(b)に，楕円とその主軸との交点（停留点）の時間による軌跡を示してある。また，共分散マトリクス$\boldsymbol{X}(t)$の各要素の時間応答を図7に示す。

第4章　まとめ

本報告では，線形定係数システムに，白色外乱が加わっている場合に，閉ループ系の状態変数の定常共分散マトリクス$\boldsymbol{X}$が，ある望ましい値$\boldsymbol{\Sigma}$になるように，固定ゲインの状態フィードバック制御系を構成すると云う制御方式を提案し，制御エネルギ $E\{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Ru}\}$を最小にするようなフィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$の求め方を示した。

本研究の動機は，評価関数 $J=E\{\boldsymbol{x}^T\boldsymbol{Qx}+\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Ru}\}$ を最小にするという，レギュレータ問題における「重みマトリクスの問題」が，実際の設計問題でどのように解決されるのか，というところにある。本研究では，「設計仕様として閉ループ系の状態変数の定常共分散マトリクスが与えられる」として設計問題を定式化した場合について検討を行なったわけであるが，状態変数$\boldsymbol{x}(t)$の分散だけでなく，共分散をも同時に指定するということは，制御系設計に際しての新たな視点を与えるものであり，例えば，お互の状態変数を無相関にしたいとか，制御系の運用範囲の面から，相互相関を正の値にしたい，というような場合には，その有効性を現わすと思われる。

定係数の状態フィードバックによって，閉ループ系の状態変数$\boldsymbol{x}$の定常共分散マトリクス$\boldsymbol{X}$を，どの範囲まで変えられるか，すなわち，設計仕様として与える共分散マトリクス$\boldsymbol{\Sigma}$はどのようなものであればよいのか，ということは，制御対象の構造に依存している。本報告では，独立な制御変数の数が，状態変数の数に等しい場合には，$\boldsymbol{\Sigma}$として，任意の正定対称マトリクスを与えることができることを示した。また，制御変数の数が，状態変数の数より少ない場合には，正準形を導いて，$\boldsymbol{\Sigma}$が一定の制約を受けることを示した。さらに，以上の検討の下に，与えた$\boldsymbol{\Sigma}$に対して，制御エネルギ $E\{\boldsymbol{u}^T\boldsymbol{Ru}\}$ を評価関数Jとした時，閉ループ系の，定常共分散マトリクスが$\boldsymbol{\Sigma}$となり，かつ評価関数Jを最小にするという意味で最適なフィードバックゲイン$\boldsymbol{K}$の求め方を示した。

分散だけが与えられていたり，共分散が部分的に与えられている場合や，分散に対する制約が不等式拘束条件式で与えられる場合，ならびに，一部の状態量しか観測できない場合についての問題は，今後検討されるべき課題である。

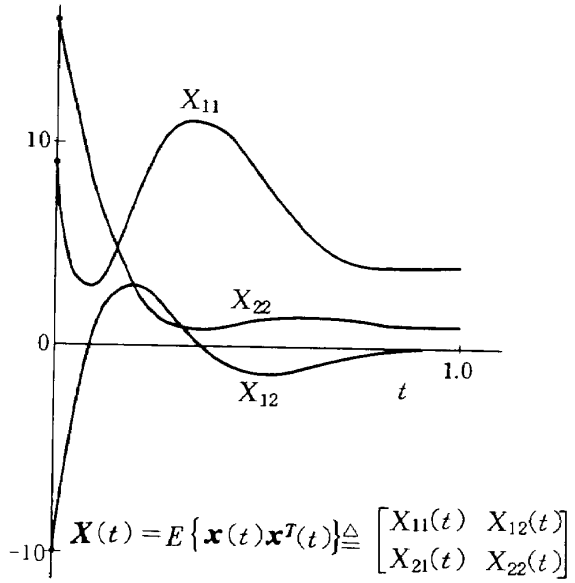


図 7　共分散の時間応答

REFERENCES

(1) M.Athans ; The Matrix Minimum Principle, Information and Control, Vol.11, 1968, pp.592-606.

(2) ……; The Role and Use of the Stochastic Linear-Quadratic-Gaussian Problem in Control System Design, IEEE Trans. on Automatic Control Vol.AC-16, No.6, 1971.

(3) ……; Optimal Control, McGrow-Hill, 1966.

(4) A.E.Bryson and Y.Ho ; Applied Optimal Control, Halsted Press, 1975.

(5) H.Kwakernaak and R.Sivan ; Linear Optimal Control Systems, Wiley-Interscience, 1972.

(6) 藤井，前田，須田，児玉他；制御工学者のためのマトリクス理論，システムと制御，Vol.15, No9. 1971～Vol.18, No.3, 1974.

(7) 伊藤清；確率論，岩波書店，1953.

付　録

A－1）　補題3.3.1の証明

（3.2.7）式を列展開すると

$$(\boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{E} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n)\, cs\, \boldsymbol{S} + cs\, \boldsymbol{G} = 0 \qquad (A.1)$$

と表わされる。ここで$cs\boldsymbol{S}$は$\boldsymbol{S}$の列展開を表わし，$\otimes$はマトリクスの直積を表わす。（A．1）式で解$cs\boldsymbol{S}$が一意的に存在するための必要十分条件はマトリクス（$\boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{E} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n$）が正則である事，すなわち，零の固有値をもたないことである。（$\boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{E} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n$）の固有値は

$$\lambda_k(\boldsymbol{I}_m \otimes \boldsymbol{E} + \boldsymbol{F} \otimes \boldsymbol{I}_n) = \lambda_i(\boldsymbol{E}) + \lambda_j(\boldsymbol{F}) \qquad (A.2)$$

$$k = 1, \cdots\cdots, mn$$

$$i = 1, \cdots\cdots, n$$

$$j = 1, \cdots\cdots, m$$

となるので，（3.2.8）式が必要十分条件となる。QED．

A－2）　補題3.3.2の証明

$\boldsymbol{A}$が実対称マトリクスだから，$\boldsymbol{A}$の固有値は実数となり，また直交マトリクス$\boldsymbol{P}$が存在して，$\boldsymbol{A} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{P}$と表わすことができる。ここで，$\boldsymbol{\Lambda}$は$\boldsymbol{A}$の固有値を対角要素とする対角マトリクス（$\boldsymbol{\Lambda} = \mathrm{diag}(\lambda_1, \cdots \lambda_n)$）である。ここで，$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{x}$とおくと

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} = \min_{\boldsymbol{z}} \frac{\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{z}}$$

$$= \lambda_{\min}(\boldsymbol{\Lambda}) = \lambda_{\min}(\boldsymbol{A}) \qquad (A.3)$$

QED．

A－3）　補題3.3.3の証明

$\boldsymbol{B}$は正定対称実マトリクスであるから，その固有値は正の実数であり，また，直交マトリクス$\boldsymbol{P}$が存在して

$$\boldsymbol{B} = \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{P} \qquad (A.4)$$

と表わすことができる。ここで$\boldsymbol{\Lambda}$は，$\boldsymbol{B}$の固有値を対角要素とする対角マトリクスである。いま$\lambda_i^{\frac{1}{2}}(\boldsymbol{A}) > 0$を対角要素とする対角マトリクスを$\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}}$とする。すなわち，

$$\boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \triangleq \mathrm{diag}\left\{\lambda_1^{\frac{1}{2}}, \cdots\cdots, \lambda_n^{\frac{1}{2}}\right\} \qquad (A.5)$$

と定義する。次に，マトリクス$\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$を

$$\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}} \triangleq \boldsymbol{P}^T \boldsymbol{\Lambda}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{P} \qquad (A.6)$$

と定義する。このとき$\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$が対称マトリクスとなっていることに注意しておく。$\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$が正則であることを考慮して，

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}} \boldsymbol{x} \qquad (A.7)$$

として座標変換を行なうと

$$\frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}} = \frac{\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{z}}{\boldsymbol{z}^T \boldsymbol{z}} \qquad (A.8)$$

補題3.2.2より，

$$\min_{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}} = \lambda_{\min}(\boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}}) \qquad (A.9)$$

ここで，

$$\det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}}) = \det\left\{\boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}}(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1})\boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}\right\}$$

$$= \det \boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}} \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}) \det \boldsymbol{B}^{\frac{1}{2}}$$

$$= \det(s\boldsymbol{I} - \boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}) \qquad (A.10)$$

従って，$\boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}} \boldsymbol{A} \boldsymbol{B}^{-\frac{1}{2}}$の固有値と$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$の固有値が等しいことがわかった。そして，（A．9）と（A．10）から（3.3.10）の関係が得られる。　QED

A－4）　補題3.3.4の証明

補題3.2.2で$\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}$が正定である事を考えると

$$\lambda_{\min}(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}) = \min_{\boldsymbol{x}} \frac{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{A} \boldsymbol{x}}{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{B} \boldsymbol{x}} > 0 \qquad (A.11)$$

が成り立つ。従って（$\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}^{-1}$）の固有値は全て正である。$\boldsymbol{B}$が正定対称実マトリクスの場合，$\boldsymbol{B}^{-1}$もまた，正定対称実マトリクスとなるから，同様にして$\lambda(\boldsymbol{A}\boldsymbol{B}) > 0$が証明される。　QED

航空宇宙技術研究所報告492号

昭和52年2月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　株式会社　東京プレス
東京都板橋区桜川2～27～12