

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-497

超音速乱流底面熱伝達の一近似解法

——境界層厚さを考慮した場合——

井上安敏 ・ Robert H. Page

1977年4月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

目 次

1. まえがき	1
2. 記 号	2
3. 解 析	3
3.1 流れ場のモデル	3
3.2 膨張過程	4
3.3 混合領域 (free jet mixing region)	5
3.4 再圧縮領域と再循環流領域	8
3.5 熱伝達	8
3.5.1 bulk temperature, T_b , の決定	8
3.5.2 エネルギー輸送	9
4. 計算の手順	10
5. 計算結果および実験との比較	11
6. あとがき	16
文 献	17
付録 I. クロッコ数 C と無次元速度 ϕ によるマッハ数および温度, 密度プロ フィルの表示式	19
II. isentropic streamtube method による膨張後の境界層の速度プロ フィルおよび各種境界層厚さの計算	19
III. 基準座標系 (X, Y) と固有座標系 (x, y) の関係	20
IV. 圧縮性乱流ジェット混合領域に対する Korst の解 (圧力一定)	20
V. 境界層が存在する際の相似解の origin shift, x_0, y_0 の決定	21
VI. 境界層のない場合の jet boundary streamline の位置, η_j , の決 定 (fully developed jet profile)	21
VII. 境界層が有限の厚さをもつときの jet boundary streamline の位 置, η_J , (displaced origin solution)	22
VIII. 底面加熱パラメータ $q_B / P_{01a} \sqrt{T_{0a}}$, (50)式, の導出と A との関 係	22

超音速乱流底面熱伝達の一近似解法*

—— 境界層厚さを考慮した場合 ——

井上安敏**・ Robert H. Page***

An Approximate Analysis of Supersonic Turbulent Base Heat Transfer With Special Regard to The Effect of Boundary Layer Thickness

By Yasutoshi INOUE and Robert H. PAGE

ABSTRACT

Base heat transfer of a two-dimensional bluff body in supersonic and hypersonic flows is analysed by the component analysis method, paying special attention to the effect of the approaching turbulent boundary layer thickness on the heat transfer rate.

Turbulent mixing between the quiescent fluid in the wake and adjacent isentropic supersonic flow under constant pressure is assumed. Hill's origin shift method for the mixing layer is employed in order to deal with the finite thickness effect of the turbulent boundary layer. Heat transfer from the uniform flow to the base wall is analysed by taking account of two resistive elements: (1) heat transfer across the mixing layer, and (2) heat transfer between the recirculating flow and the base wall. The Prandtl number of the turbulent flow is assumed to be unity, and radiation is neglected.

The base heat transfer rate is given in terms of the ratio of the boundary layer thickness to the base half-height, wall temperature ratio, and Mach number, stagnation pressure and stagnation temperature of an approaching uniform flow.

Variations in the base heat transfer rate versus Mach number, wall temperature and boundary layer momentum thickness ratio are shown and compared with a certain available experimental data. The heat transfer rate shows the initial rapid increase and subsequent tendency to level-off with the increase in boundary layer thickness.

Effects of boundary layer thickness on base pressure ratio and wake angle are also discussed.

1. まえがき

極超音速輸送機やスペース・シャトルのような高速飛行体の設計には、鈍い後部形状をもつ物体の底部の圧力、

いわゆる底面圧、のみならず底面への空気力学的加熱、言わば底面加熱を知ることが重要である。しかし底面付近の流れ、いわゆる *near wake* の解析は、流れの剥離と再付着によって支配される場における粘性効果と非粘性効果との強い相互作用のために非常に困難で、数値解法による解はいくつか出されているが^{1),2)} 完全な解析解はない。

1950年代に、主に二つの解析的近似解法が提唱され、

* 昭和52年3月2日 受付

** 空気力学第一部

*** Rutgers—the State University of New Jersey, U.S.A.

その後改良を加えられながら多くの剝離・再付着流の問題に適用されている。その一つは Crocco-Lees-Reeves 理論(例えば文献3)で, Crocco と Lees による混合過程(mixing process)の解析⁴⁾を基に, 境界層の積分関係式を用いるものであり, 他の一つは Chapman-Korst 理論とよばれ, 流れ場をいくつかの要素に分けて解析する方法で要素解析法(component analysis method)ともいわれる。(例えば文献5,6,7)いずれの方法もwake 外側の非粘性流とwake 中の粘性流との干渉を混合過程としてとらえ, これをwake の流れの支配的機構とみなす点では同じであるが, 前者においては解をユニークに決める条件は超音速ノズル流れにおけるスロート条件に相当する微分方程式の特異点に関する数学的条件となり, 後者の理論においては再圧縮領域での後方に流れ去る流体と, 圧力上昇によって逆流させられ再循環流体とを分ける, いわゆる escape criterion とよばれる圧力に対する条件式によって解が決まる。

要素解析法によれば, 各要素および他要素との干渉の解は, 実験的に, あるいは新しい解析などによって検討することができ, 流れの構造がより明らかである。

要素解析法を用いた例として, 超音速流における2次元物体の底面圧問題が, 剝離点での境界層厚さが無視できる場合⁸⁾および有限の厚さをもつ場合^{9),10)}について乱流の条件で解かれている。Nash は底面圧に対する境界層厚さの効果がかなり大きいことを報告している⁹⁾。また Page と Dixon は, 超音速流における2次元物体の底面加熱を, 境界層厚さが無視できる場合について, 乱流混合の条件で解析し, 実験と良い一致を示す結果を得ている¹¹⁾。

本報告では, 超音速から極超音速の範囲の定常な一様流の場合の2次元物体の乱流底面加熱を, 要素解析法を用いた Page と Dixon の解析を境界層厚さが有限の場合に拡張して解析し, 得られた底面加熱に及ぼす乱流境界層厚さの影響について報告する。

2. 記号

A	流管の断面積
A_*	音速点における流管断面積
C	クロッコ数, $u/\sqrt{2C_p T_0}$
C_p	定圧比熱
dA	control surface の面積素ベクトル
E	(48)式右辺で表わされる熱伝達函数
h	底面高さの1/2
H_0	よどみ点エンタルピー
L	底面と合流領域のよどみ点との間の距離

M	マッハ数
n	乱流境界層速度プロファイルの指数, (8)式
P	静圧
P_B	底面圧力
q_B	底面平均熱伝達率
R	一様流中の点のX軸よりの距離
R	ガス定数
T	温度
T_b	再循環流領域の静止流体の温度
T_w	底面壁温度
u, v	一様流とそれに垂直方向の流速成分
V	速度ベクトル
x, y	固有座標, (23), (24)式参照
X, Y	基準座標, 図3参照
x_0, y_0	相似解の原点移動距離, (21), (22)式参照
y_1, y_2	膨張前後の境界層を記述するy-座標
y_m	固有座標系と基準座標系のy方向のずれ
γ	比熱比
δ_1, δ_2	膨張前後の境界層厚さ
δ^*	排除厚
δ^{**}	運動量厚
ϵ	高粘性係数
η	相似解の無次元変数, (26)式
η_m	y_m に対応する η の値
η_p	形状パラメータ, (17)式参照
θ	流れの角度
A	無次元エネルギー流束, (A47)式
ρ	密度
σ	jet spread parameter, (20)式
φ	無次元速度, u/u_a
Φ_1, Φ_2	膨張前後の境界層の速度分布
Q_c	剝離点から合流領域のよどみ点までの jet boundary streamline を横切るエネルギー

添字

0	よどみ点状態
1, 2, 3, 4	図1に示す各領域に対応する
a	非粘性一様流(考えている領域に接する)
cal	混合層の計算に用いる量
d	dividing streamline 上の量
j	$\delta \approx 0$ の jet boundary streamline 上の量
J	$\delta \neq 0$ の jet boundary streamline 上の量
R	$Y = R$ の点に対応する量
refl	reflected image approximation による量
s	剝離点上流の壁上の条件
y	垂直衝撃波下流の状態

3. 解析

3.1 流れ場のモデル

図1に示すような直角の底面をもつ2次元物体のnear wake の流れを考察する。物体および流れは平面对称であるので、以下の解析では上半面について議論を進める。

底面に近づく流れは壁に沿って完全に発達した乱流境界層とその外側の定常な超音速あるいは極超音速一様流から成り、これが剥離点の角[†]をまわって膨張した後、その下流に剥離した乱流ジェット混合領域(turbulent free jet mixing region)を形成し、それが両側から合流(realignment)して下流へ進む。合流領域での流れの再圧縮による圧力上昇に打ち勝つに足る運動エネルギーを持たない流体粒子は、物体底面と混合層との間に囲まれた領域内にとり込まれ、再循環流を形成し、運動エネルギーの大きい部分は圧力上昇に打ち勝って合流した後下流へ流れ続ける。

一方、境界層、混合層および合流点下流のjetのそれぞれ外側の流れは一様な等エントロピ超音速流である。

以上のモデルに基づいて、流れを次のいくつかの要素に分けることができる。これらの要素はそれぞれが互いの初期条件なり境界条件を与えることにより相互に依存するが、一つ一つ個別に解析ができるものであり、それらは

- (a) 剥離点上流①における一様な超音速流と、完全に発達した乱流境界層
- (b) 境界層および一様流の角をまわる膨張, ①—②
- (c) 一定圧力の乱流混合層, ②—③
- (d) 合流による再圧縮領域, ③—④
- (e) 再循環流領域
- (f) 合流後の流れ, ④

から成り立つ。

これらの各要素を個々に解析した後、全要素を統合してユニークな解を決定する。この要素解析法によれば、各要素の解の信頼性と精度が問題の解の良否を左右する。

なお以下の解析においては次のような仮定をもうける

- (1) 境界層、混合層、再循環流および下流のjetはすべて乱流である。
- (2) 境界層、混合層および下流のjetの外側の流れはそれぞれ一様な流れである。
- (3) 気体は理想気体とする。
- (4) 乱流プラントル数は1.0である。
- (5) 底面壁温度 T_w は一定とする。
- (6) 輻射は考えない。

以上の流れにおいては、剥離・膨張直後から合流領域中のよどみ点(以下、この点を合流点(realignment point)と言う)までの流れにおいては、一様流、混合

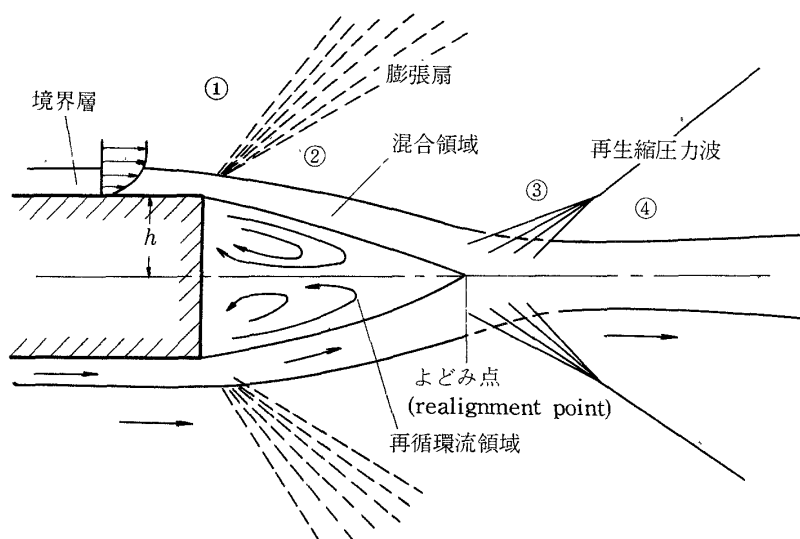


図1 流れ場のスケッチ

註† 層流においては、流れはコーナーで剥離せず over expansion して底面に沿って流れ、境界層厚さのオーダーの距離だけコーナーから下がったあたりで剥離すると、Hamaの実験¹²⁾やRoacheの数値計算²⁾などで報告されているが、乱流の場合には、おおむね底面コーナーで剥離が起ると考えて良い。この点はPageの実験報告など^{7), 10)}述べられている。

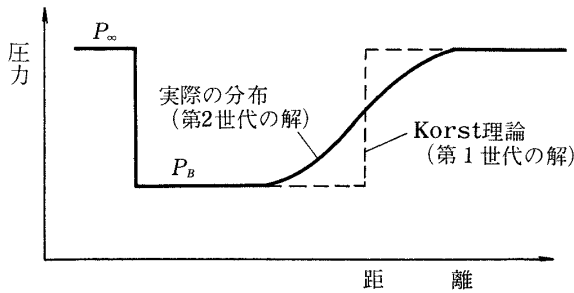


図2 再圧縮のモデル

層および再循環流領域を通じて静圧は一定となる。これは流れが角をまがる際の over-expansion による圧力降下を回復させるための lip shock による再圧縮過程¹²⁾および合流点近傍での流れ方向および横方向の圧力勾配の存在を考慮しないことになる。このため、膨張波直後②から再圧縮領域の先頭圧縮波直前③までの領域では一樣流の状態は全く同一となる。後者の効果のうち、流れ方向の圧力上昇については、この解析では合流点において静圧は P_3 からステップ的に P_4 に上昇すると考えており、再圧縮が剝離領域の代表的長さ比べて十分に短い区間で完了する場合に担当する。このステップ的圧力上昇のモデルは最初に Korst によって用いられ⁸⁾、Page の命名に従って第1世代の解とよぶ。しかし実験で観測されるように、実際には静圧は合流点の上流のある距離から、両側の混合層が内側で干渉し始めるとともに上昇し始め、その下流のある距離で一定値 P_4 になる。したがって合流点での静圧は P_4 の何割かの値にしかならない。これを図示すると、図2のようになる。このなだらかな再圧縮過程を考慮する解を第2世代の解とよぶと、剝離点における境界層厚さが無視できる程度に薄いときには第1世代の解によって解析された底面圧力、底面加熱は実験とかなり良い一致を示し^{7),11)}、かなり厚いときには第2世代の解が良く合うことが報告されている⁷⁾。本報告では、境界層の厚さは有限ではあるが、near wake の代表的長さ比べて充分小さい範囲を考え、第1世代の解を用いる。

一樣流の再圧縮は、斜め衝撃波を通して起こるものと、等エントロピ圧縮波群によるものが考えられるが、高マッハ数の流れでは再圧縮がゆるやかに行なわれる傾向があるので、(例えば文献13)本報告では等エントロピ再圧縮を仮定した。

なお、底面圧の剝離点上流への影響、いわゆる底面圧の“這い上り”の効果は、境界層厚さの数倍程度のオー

ダーの距離にわたって存在することが報告されているが、本報告では無視した。

また、乱流の実効プラントル数を 1.0 とすることは良い近似であると考えられ¹⁴⁾、したがって圧力勾配のない領域に Crocco 積分が存在し、温度場の決定が簡単になる。

3.2 膨張過程

流れは底面のコーナーで P_1 から P_2 へと膨張した後剝離するが、この膨張過程は境界層とその外側の一樣流とは異なる。

外側の一樣流は、通常の等エントロピ的膨張によって①から②へと進むと考える。したがって、マッハ数、圧力、流れの角度の間に Prandtl-Meyer の関係式

$$M_{2a} = M_{1a} (M_{1a}, \theta_2 - \theta_1, \gamma) \quad (1)$$

$$P_2/P_1 = P_2/P_1 (M_{1a}, \theta_2 - \theta_1, \gamma) \quad (2)$$

が成り立つ。ここで添字の数字は図1に示す各領域に対応し、 a は adjacent を意味し、粘性領域の外側の一樣流に対応する量を示す。

境界層も P_1 から P_2 へと膨張する。この過程は、外側の一樣流との dissipative な相互作用の下で行なわれる複雑なものであるが、膨張する際の流れ方向の圧力勾配は、通常の境界層近似で想定される程度の数倍のオーダーとなり、粘性力による寄与は、圧力勾配による寄与に比べて無視できると考える。さらに、膨張過程での熱伝達の影響が小さいものとみて、本論文では境界層膨張の近似解法として Nash によって提唱された⁹⁾ 簡単な isentropic streamtube method を用いる。すなわち、境界層内を無限小断面積の流管の集合と考え、各流管は等エントロピ的に P_1 から P_2 へと膨張すると考える。この方法はより複雑な inviscid rotational characteristics による解法と比較しても、jet boundary streamline (後述) 近傍で良く一致することが報告されている¹⁵⁾。膨張後の流れの角度は決まらないが、それはすべての流管に対して一定で、一樣流の角度、 θ_2 に等しいとした。

この解析にはマッハ数の代わりに $C = u/\sqrt{2C_p T_0}$ で定義されるクロッコ数が便利なので、これを用いる。クロッコ数とマッハ数の間には

$$M^2 = \frac{2}{\gamma - 1} \frac{C^2}{1 - C^2} \quad (3)$$

の関係が成り立つ。クロッコ数表示を用いると以下の解析に γ が陽的に表われなくなり、より一般的な結果が得られるという利点がある。(付録Iを参照)

この方法によれば、膨張前後の境界層速度分布および対応する各流管の shear layer 内の位置について次の式が得られる。(付録IIを参照)

$$\phi_2 = \frac{u_2}{u_{2a}} = \left[\frac{C_{1a}^2 (1 - C_{2a}^2) \phi_1^2 + (C_{2a}^2 - C_{1a}^2) T_0 / T_{0a}}{C_{2a}^2 (1 - C_{1a}^2)} \right]^{1/2} \quad (4)$$

$$\frac{y_2}{\delta_1} = \left(\frac{1 - C_{1a}^2}{1 - C_{2a}^2} \right)^{1/r-1} \frac{C_{1a}}{C_{2a}} \int_0^{y_1} \frac{\phi_1}{\phi_2} \frac{dy_1}{\delta_1} \quad (5)$$

ここで ϕ_1, ϕ_2 は膨張前後の速度プロフィール ($\phi_1 = \frac{u_1}{u_{1a}}$),

y_1, y_2 は膨張前後の流れに垂直な方向の座標, δ_1 は膨張直前の境界層の厚さである。

δ_2 を膨張直後の境界層厚さとし, $\delta_1^{**}, \delta_2^{**}$ をそれぞれ膨張前後の運動量厚さとする

$$\delta_2 = \left(\frac{1 - C_{1a}^2}{1 - C_{2a}^2} \right)^{1/r-1} \frac{C_{1a}}{C_{2a}} \int_0^{\delta_1} \frac{\phi_1}{\phi_2} dy_1 \quad (6)$$

$$\frac{\delta_1^{**}}{\delta_2^{**}} = \left(\frac{1 - C_{1a}^2}{1 - C_{2a}^2} \right)^{1/r-2} \frac{C_{2a}}{C_{1a}} \times \frac{\int_0^1 \frac{\phi_1^n (1 - \phi_1)}{T_0/T_{0a} - C_{1a}^2 \phi_1^2} d\phi_1}{\int_0^1 \frac{\phi_1^n (1 - \phi_2)}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \phi_2^2} d\phi_1} \quad (7)$$

となる。なお、本報告では膨張直前の境界層の速度プロフィールとして、べき乗則分布：

$$\phi_1(y_1) = u_1 / u_{1a} = (y_1 / \delta_1)^{1/n} \quad (8)$$

を用いて諸式の計算を行なった。

また、(4)式から分かるように、 $\phi_2(y_2)$ は T_0/T_{0a} の関数でもあるが、各流管毎に T_0 は保存されるので、対応する y_1 の T_0/T_{0a} で表わされる。さらに①の領域には Crocco 積分が存在するので、 ϕ_1 表示による次式を得る。

$$\frac{T_0}{T_{0a}} = \frac{T_s}{T_{0a}} + \left(1 - \frac{T_s}{T_{0a}} \right) \phi_1 \quad (9)$$

ここで T_s は剝離点上流の壁温（一定とする）であり、同一流管上で $T_{01} = T_{02} = T_0(\phi_1)$ が成り立つ。

したがって、 $\phi_1(y_1)$ を与えて(6)、(7)式の右辺を評価すると、 δ_2 および $\delta_1^{**}/\delta_2^{**}$ は、 C_{1a}, C_{2a} および T_s/T_{0a} の関数となるが、 C_{1a} は M_{1a} を与えれば決まり、 C_{2a} は(1)と(2)および(3)式から、 P_2/P_1 を与えれば決まるので、結局(8)式のプロフィールを仮定すると、 δ_2 と $\delta_1^{**}/\delta_2^{**}$ は、 $M_{1a}, P_2/P_1$ および T_s/T_{0a} を与えると決まる。

3.3 混合領域 (free jet mixing region)

near wake の状態を決定する粘性-非粘性干渉は、外側の等エントロピー様流と wake 中の静止流体との間の

free jet mixing として表われる。この混合を通して、質量、運動量およびエネルギーの輸送が支配され、底面圧力および底面加熱が定まる。

Korst らは、圧縮性乱流混合層の混合過程を記述する運動方程式を、Pai¹⁷⁾ の方法を拡張することによって定式化し、一定圧力下の混合領域の解を、剝離点での境界層のプロフィールを考慮に入れて与えた。¹⁶⁾ これは Pai の逐次近似法とは異なり、第零次近似の方程式を固有座標（後述）で記述された基礎方程式とみて、逆に基準座標系（物理座標系）と固有座標系との関係を求めるものである。以下、その概略を示す：

混合過程を記述する方程式は

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho \varepsilon \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (10)$$

で与えられる。ここに、 x, y は固有座標、 ε は apparent kinematic eddy viscosity であり、 x のみの関数と考えられる。¹⁸⁾ これに微少変動法を適用して簡単化すると

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\varepsilon}{u_{2a}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (11)$$

が得られる。

Korst は、この方程式を基礎方程式として解き、 x, y と基準座標 X, Y の関係は、別に運動量保存則から求めた。

ここで基準座標系とは、 P_1/P_2 が実際の流れと同じ値をもつ理想 jet の境界を X -座標にとり、それに垂直に Y -座標をとる直交座標系である。座標系の原点は剝離点のコーナーにとる。これに対して、固有座標系とは、実際の jet が運動量保存則を満たすという条件で決まる直交座標系であり、境界層厚さが無視できるときには、

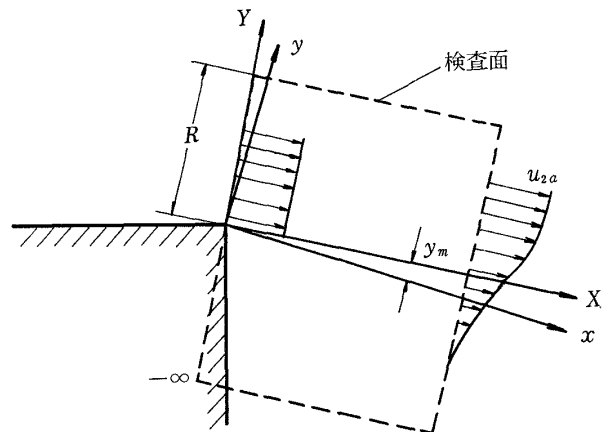


図3 基準座標系 (X, Y) と固有座標系 (x, y) の関係および $y_m(x)$

図3に示すように、control volume technique を用いることによって、基準座標系との間に次の関係が得られる。(付録IIIを参照)ただし、この場合には原点は共通である。

$$X = x \quad (12)$$

$$Y = y - y_m(x) \quad (13)$$

ここに

$$y_m(x) = y_R - (1 - C_{2a}^2) \int_{-\infty}^{y_R} \frac{\varphi_2^2 dy_2}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} \quad (14)$$

$$y_m(0) = 0 \quad (15)$$

であり、 $\varphi_2 = \frac{u_2}{u_{2a}}$ は混合層の速度分布であり、 y_R は一様流中の任意の点である。以下では、添字 2 は②と③の間の領域を意味する。

(12)、(13)式の関係は、座標系相互の微小な回転と考えられ、流速 u_2 は両座標系で実質的に等しく、垂直方向速度成分 v は非常に小さい。¹⁹⁾

Korstらは、固有座標で書かれた(11)式の解を次のように与えた。(付録IVを参照)

$$\begin{aligned} \varphi(\Phi_2, \eta_p, \eta) &= \frac{1}{2} \{ 1 + \operatorname{erf}(\eta - \eta_p) \} \\ &+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta - \eta_p}^{\eta} \Phi_2 \left(\frac{\eta - \beta}{\eta_p} \right) e^{-\beta^2} d\beta \end{aligned} \quad (16)$$

ここで、 η_p は剝離点における境界層の効果と ϵ の項を含む形状パラメータであり、

$$\eta_p = \frac{1}{2\sqrt{C} \int_0^{\phi} \phi f(\phi) d\phi} \quad (17)$$

と表わされるが、 $\phi = x/\delta_2$ であり $f(\phi)$ は ϵ に関する函数、 C は定数である。また $\eta = (\eta_p/\delta_2)y$ であり、 $\operatorname{erf}(\eta)$ は誤差函数で、次のように定義する：

$$\operatorname{erf}(\eta) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\eta} e^{-\beta^2} d\beta \quad (18)$$

この解、(16)式は境界層の厚さが wake 中の代表長と比較して無視できる場合には、漸近解としての fully developed jet profile :

$$\varphi = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \eta) \quad (19)$$

となる。ここに $\eta = \sigma \frac{y}{x}$ であり、この σ は jet spread parameter とよばれ、この相似解の相似パラメータで、主流マッハ数の函数である。超音速領域での σ の実

験値にはバラツキも多いが、本報告ではKorstとTrippによる実験式²⁰⁾

$$\sigma = 12.0 + 2.758 M_{2a} \quad (20)$$

を用いる。

一方、(19)式の漸近解を用いてこれまで多くの解析がなされ、底面圧などに実験と良く合う結果が報告されている。(これらは境界層の厚さの影響を無視した場合に正しいので、Korstはこれを restricted theory とよんでいる。)

本報告のように境界層の厚さが無視できないときには、 η_p を含んだ(16)式の解を使って、いくつかの剝離・再付着流が取扱われたが、この解の複雑さのために、最近ではこれを用いるよりも、むしろ境界層の存在による非相似性の効果を、等価な吹出しを考慮したり、原点を移動したりして補正した相似解(漸近解、(19)式)を用いることによって取り入れる傾向がある。Hill²¹⁾らによると、等価吹出し法よりも、彼等の displaced origin method の方が精度が良く、剝離点で jet boundary streamline(後述)上の速度が0となって特異性が無い上、彼等の混合領域の速度分布に関する実験によって、 x/δ_2^{**} が75以上で displaced origin をもつ相似解が良く分布を記述することが示されており、またその適用も非常に簡単である。そこで、本報告では、有限の厚さの境界層が存在する場合の乱流混合領域の解として、Hillらの displaced origin method を用いた相似解(誤差函数型の解)を採用する。

これは上流側へ x_0 の距離、 y 方向に y_0 だけ原点を移動した相似解で、剝離後の fully turbulent jet の分布を置き換える方法であり、この origin shift x_0, y_0 は図5に示す通りであり、剝離点において実際の境界層の流れと、原点を移動された相似解とが同じ質量流、運動量流をもつという条件によって決められ(付録Vを参照)

$$x_0 = \frac{\sigma \delta_2^{**}}{\rho_2} \quad (21)$$

$$y_0 = \delta_2^* + \delta_2^{**} \quad (22)$$

と与えられる。 η_R は y_R に対応する η である。 x_0 と y_0 はともに境界層の速度プロファイルに依存すること、および境界層の厚さが0に近づくと、 x_0, y_0 もともに0になることが分かる。

この場合、固有座標と基準座標および origin shift との間に

$$x = X + x_0 \quad (23)$$

$$y = Y - y_0 + y_m(x) \quad (24)$$

の関係が成り立つ。(図5を参照)

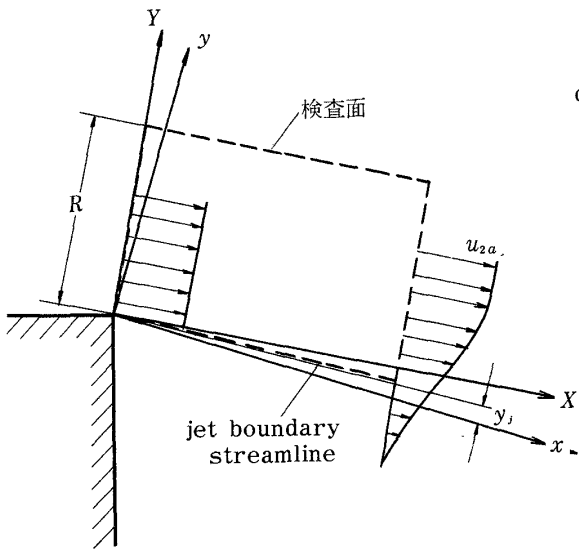


図4 jet boundary streamline の位置 y_J ($\delta=0$)

以上の議論から、乱流混合層を、境界層の存在する場合にも良い近似で記述する式は

$$\varphi_2 = \frac{u_2}{u_{2a}} = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \eta) \quad (25)$$

$$\eta = \sigma \frac{y}{x} = \sigma \frac{Y + y_m - y_0}{X + x_0} \quad (26)$$

で与えられることになる。ただし、 σ は(20)式で与えられる。また混合層内の温度、密度プロファイルは

$$\frac{T_2}{T_{0a}} = \frac{T_{02}}{T_{0a}} - C_{2a}^2 \varphi_2^2 \quad (27)$$

$$\frac{\rho_2}{\rho_{2a}} = \frac{1 - C_{2a}^2}{T_{02}/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} \quad (28)$$

と書ける。(付録I参照)

さらに、この領域にはCrocco積分が存在するので総温度プロファイルが

$$\frac{T_{02}}{T_{0a}} = \frac{T_b}{T_{0a}} + \left(1 - \frac{T_b}{T_{0a}}\right) \varphi_2 \quad (29)$$

のように得られる。ここに T_b はwake中のよどみ状態にある気体のbulk temperatureである。この T_b を T_w と T_{0a} の函数として表わすことができると、混合層内の温度プロファイルが決まり、速度プロファイルとあわせて②から③にいたる流れ場が決まることになる。これについては3.5.1で述べる。

次に、混合層内に特別な流線、すなわちjet boundary streamlineを位置づける。この流線は、剝離点の上流にあった気体を、再循環流およびentrainされる気体から分ける流線であり、境界層の厚さが無視できる場合には、剝離点から出発してrealignment領域のよどみ点、

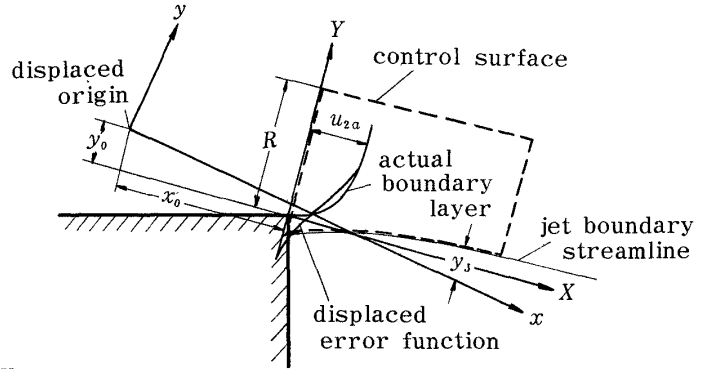


図5 jet boundary streamline の位置 y_J ($\delta \neq 0$) および origin shift, x_0, y_0

すなわち合流点で終る流線である。したがってjet boundary streamlineを横切って再循環流領域への質量輸送はない、ただしエネルギーはそれを横切って輸送される。

解析の便宜上、先ず境界層の厚さが無視できるときのjet boundary streamlineの位置、 η_j を求める。図4のようにcontrol volumeに質量保存則を適用することによって

$$\int_{\eta_j}^{\eta_R} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 d\eta = \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2^2 d\eta \quad (30)$$

または、

$$\int_{\eta_j}^{\eta_R} \frac{\varphi_2 d\eta}{T_{02}/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} = \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi_2^2 d\eta}{T_{02}/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} \quad (31)$$

という関係式によって決定できる。(付録VIを参照)

いま考慮しているように、境界層の厚さが有限のときには、任意のXにおけるjet boundary streamlineの位置、 η_j は図5のようなcontrol volumeに質量保存則を用いて

$$\int_{\eta_j}^{\eta_j} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 d\eta = \frac{\sigma \delta_2^{**}}{X + x_0} \quad (32)$$

あるいは、

$$(1 - C_{2a}^2) \int_{\eta_j}^{\eta_j} \frac{\varphi_2 d\eta}{T_{02}/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} = \frac{\sigma \delta_2^{**}}{X + x_0} \quad (33)$$

という決定方程式から得られる。(付録VIIを参照)ここで η は(26)式で定義されたものである。

この報告におけるように、定常で吹出しのないclosed wakeでは、このjet boundary streamlineは、いわゆるdividing streamlineに一致する。

3.4 再圧縮領域と再循環流領域

剝離した流れは膨張して、 $(\theta_2 - \theta_1)$ の角度で対称面方向へ向かうが、そこで合流して再び $\theta_4 = 0^\circ$ の方向へ流れる。(realignment) このとき、流れの圧縮が起こり、外側の速い流れ、つまり運動エネルギーの大きい流体部分は、この再圧縮による圧力上昇に打ち勝って下流へと流れ続けるが、内側の低速部分、つまり運動エネルギーの小さい部分は、圧力上昇に抗しきれず、再循環流となって中心軸に沿って上流へ向かう流れとなる。この両者を分けるのがdividing streamlineであり、既述のように、これはjet boundary streamlineに等しく、よどみ点で終わる。

Korstはjet boundary streamline上の粒子の等エントロピ的よどみ点圧力 P_{03d} が④の領域の静圧 P_4 に等しいと考えた。⁸⁾

本報告では次のように考える：

(i) dividing streamline上の気流のマッハ数 M_{3d} が1.0よりも小さいときにはKorstと同様に考える。すなわち

$$(P_{03})_d = P_4, \quad (M_{3d} \leq 1.0) \quad (34)$$

(ii) M_{3d} が1よりも大きいときには、dividing streamline上の気体は、いったん垂直衝撃波に相当する圧縮を経た後に、等エントロピ的によどみ点状態になるものとし、²²⁾

$$(P_{0y3})_d = P_4, \quad (M_{3d} > 1.0) \quad (35)$$

が成り立つと考える。したがって混合層中の流体で、垂直衝撃波後のよどみ圧の値が P_4 よりも大きいものは下流へ流れていくが、 P_4 よりも小さいものは再循環流へと取り込まれてしまう。

この条件(escape criterion)は、wakeの状態を決めるのに決定的な役割をにない、この条件によって、wakeに対する閉じた形のユニークな解を得ることができる。

一方、混合層の外側の等エントロピ流れは、①から②へ移るときPrandtl-Meyer膨張を行ない、再圧縮部では、等エントロピ圧縮波群による圧縮を経て下流へと向かう。この結果、3.2で述べた等エントロピ膨張と合わせて、 $P_1 = P_4$ および $P_2 = P_3$ 、あるいはは

$$P_1/P_2 = P_4/P_3 \quad (36)$$

となる。

したがって $M_d \leq 1$ に対して

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_4}{P_3} = \frac{P_{03d}}{P_3} = \left[1 + \frac{\gamma-1}{2} M_d^2 \right]^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$$

(37)

および、 $M_d > 1$ に対しては

$$\begin{aligned} \frac{P_1}{P_2} = \frac{P_4}{P_3} &= \frac{(P_{0y3})_d}{P_3} \\ &= \frac{\left(\frac{\gamma+1}{2} M_d^2 \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}}{\left[\frac{2\gamma M_d^2 - (\gamma-1)}{\gamma+1} \right]^{\frac{1}{\gamma-1}}} \end{aligned}$$

(38)

が成り立たねばならない。

3.5 熱伝達

3.5.1 bulk temperature, T_b , の決定

一樣流から底面への熱伝達には、図6に示すように、2つの“抵抗”が考えられる。ひとつは一樣流と再循環流との間の混合層であり、他のひとつは底面に沿う再循環流である。それらの抵抗の結果、 T_{0a} , T_b , T_w の間の関係が分かれば、 $T_b(T_w, T_{0a})$ と T_{0a} によって、混合層内の温度分布が(27), (29)式によって決まり、dividing streamlineを通して外部から再循環流領域への熱伝達が求められる。 T_b を T_w に等しいとする解析があるが、この両者が等しくないことを考慮することは重要である。

しかし、 T_b と T_w の関係を決めるための上流へ向かう再循環流の速度プロファイルは、多くの未知のメカニズムに依存しており、一般的な解は見出し得ない。

そこでPageによって提案された^{23), 11)} reflected image approximationを用いて $T_b(T_w, T_{0a})$ を求める：

この近似解法によると、再循環流は混合層のdividing streamlineより下の部分の鏡像だと考える。当然、これは質量保存の条件を満たしている。しかし、底面壁での滑りのない条件を満たさないが、解析の簡単さのためにその効果は無視した。そして、再循環流の熱伝達特性は、混合層のjet boundary streamlineとzero velocity streamlineの間の領域の熱伝達特性と相似だと考える。

再循環流は、対称面に沿って合流点から底面へと流れる部分と、底面に沿って剝離コーナーへ向って流れる部分とから成る。それに応じて、混合領域と、それぞれの

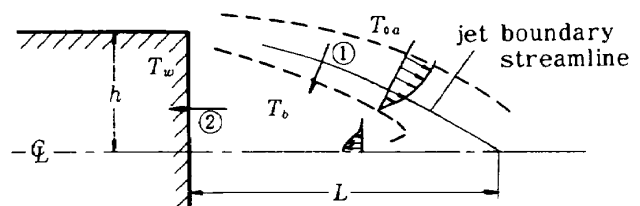


図6 底面加熱 q_B に対する二つの“抵抗”

①混合層 ②底面に沿う再循環流

部分との間の bulk temperature T_b は異なった値を持つと考えられる。

ここでは Page にならって、対称面に沿う流れの T_0 分布計算に用いられる T_b は T_{0a} に等しいと考える。一方、底面に沿う流れの鏡像分布の計算に用いられる $T_{b,refl}$ は、合流点直前の混合層の jet boundary streamline より下部の分布の鏡像(reflected image)を用いて決める。そして、混合層内の温度分布の計算に用いられる T_b (T_w) を $T_{b,cal}$ とすると、それはこの二つの T_b 、すなわち T_{0a} と $T_{b,refl}$ の path length に応じた重み平均値で近似することにする。

結局、

$$\left(\frac{T_b}{T_{0a}}\right)_{cal.} = \frac{h(T_b/T_{0a})_{refl} + L}{h + L} \quad (39)$$

$$h = L \tan(\theta_2 - \theta_1) \quad (40)$$

となる。一方、reflected image の仮定により

$$\left(\frac{T_w}{T_b}\right)_{refl} = \left(\frac{T_b}{T_{0J}}\right)_{refl} \quad (41)$$

が成り立ち、これより

$$\frac{T_w}{T_{0a}} = \left[\left(\frac{T_b}{T_{0a}}\right)^2 \frac{T_{0a}}{T_{0J}} \right]_{refl} \quad (42)$$

となり、(29)式より

$$\left[\frac{T_{0J}}{T_{0a}}\right]_{refl.} = \left[\frac{T_b}{T_{0a}} + \left(1 - \frac{T_b}{T_{0a}}\right) \varphi_J\right]_{refl.} \quad (43)$$

が成り立つ。以上の式から

$$\frac{T_w}{T_{0a}} = \left[\frac{(T_b/T_{0a})^2}{\varphi_J + (1 - \varphi_J)(T_b/T_{0a})} \right]_{refl.} \quad (44)$$

$$\left(\frac{T_b}{T_{0a}}\right)_{refl.} = \frac{[1 + \tan(\theta_2 - \theta_1)](T_b/T_{0a})_{cal.} - 1}{\tan(\theta_2 - \theta_1)} \quad (45)$$

が得られる。(44),(45)式より、 $(T_b/T_{0a})_{cal.}$ を与えると T_w/T_{0a} が決まる。しかし実際上の問題では、 T_w は与えられており T_b が求められるものである。

したがって、逆解法となるが、繰返し法を避けるため、 T_b を独立変数とみて T_w を計算する方法をとる。

3.5.2 エネルギー輸送

熱力学第一法則を図7に示す control volume に適用すると、単位巾当たり

$$\begin{aligned} & \text{検査面を通しての volume へのエネルギー入力} \\ & = \text{内部エネルギーおよび運動エネルギーの増加} \\ & + \text{検査面を通しての圧力による仕事} \\ & + \text{検査面を通しての剪断応力による仕事} \end{aligned}$$

の関係が成り立たねばならない。しかし volume 内にエネルギーの発生・消滅がないこと、および左辺の項に上面からの寄与がないことを考えると

$$-\Omega_c = \int_s \rho H_0 (\mathbf{V} \cdot d\mathbf{A}) \quad (46)$$

が得られる。ここに、 Ω_c は $X=0$ から $X=X$ までの jet boundary streamline を横切って、control volume の外側へ流出する単位巾当たりの熱伝達と剪断仕事の和であり、 H_0 は局所よどみ点エンタルピ、 \mathbf{V} は流速ベクトル、 $d\mathbf{A}$ は面積素ベクトルであり、 s は jet boundary streamline 以外の検査面であり、いまは上面の寄与はないので、2側面からの寄与を意味する。その結果

$$\begin{aligned} -\Omega_c = & \left[- \int_{Y_J}^R \rho u H_0 dY \right]_{X=0} \\ & + \left[\int_{Y_J}^R \rho u H_0 dY \right]_X \quad (47) \end{aligned}$$

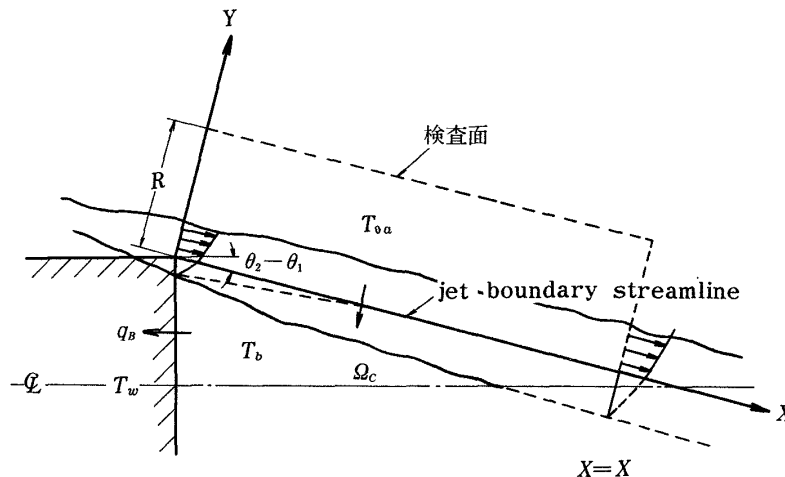


図7 エネルギーの輸送

を得る。右辺第一項の積分の下限 Y_j ($X=0$) は displaced origin をもつ相似解の $X=0$ における Y_j である。(47) 式を変形すれば

$$\frac{-Q_c}{\rho_{2a} u_{2a} C_p T_{0a}} = - \left[\int_{Y_j}^R \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 \frac{T_0}{T_{0a}} dY \right]_{X=0} + \left[\int_{Y_j}^R \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 \frac{T_0}{T_{0a}} dY \right]_{X=X}$$

あるいは、付録Vなどと同様に積分変数を η に変換し、(28) 式を用いると

$$\frac{\sigma Q_c}{(1-C_{2a}^2) C_p \rho_{2a} u_{2a} T_{0a} X} = \left(1 + \frac{x_0}{X}\right) \left[\int_{\eta_j}^{\eta_R} \frac{(1-T_{02}/T_{0a}) \varphi_2}{T_{02}/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} d\eta \right]_X - \frac{x_0}{X} \left[\int_{\eta_j}^{\eta_R} \frac{(1-T_{02}/T_{0a}) \varphi_2}{T_{02}/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} d\eta \right]_{X=0} \quad (48)$$

となる。

T_b の議論の際にも述べたように、対称面に沿う再循環流を横切つての熱伝達はないので、 Q_c なるエネルギー輸送は、底面熱伝達に等しい。したがって、底面への平均熱伝達率を q_B とすると

$$q_B = Q_c / h \quad (49)$$

となり、さらに底面加熱パラメータとして $q_B / P_{01a} \sqrt{T_{0a}}$ を定義すると

$$\frac{q_B}{P_{01a} \sqrt{T_{0a}}} = \frac{Q_c}{h P_{01a} \sqrt{T_{0a}}} = \frac{C_p M_{2a} (1 - C_{2a}^2) E}{\sigma \sqrt{\frac{R}{\gamma}} \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{2a}^2\right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sin(\theta_2 - \theta_1)} \quad (50)$$

と表わせる。ここに R はガス定数、 E は (48) 式右辺である。この底面加熱パラメータは、付録VIIIで示すように、一種の Stanton 数である無次元エネルギー流束 A との間

$$\frac{q_B}{P_{01a} \sqrt{T_{0a}}} = C_p \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left(\frac{\gamma+1}{2}\right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} A \quad (51)$$

の関係がある。ただし、 A は次のように定義される：

$$A = \frac{\text{底面へのエネルギー流束}}{\text{外部の最大質量流の運ぶエネルギー流束}}$$

4. 計算の手順

3.において、流れ場の各要素が、隣り合う場によって境界条件や初期条件を与えられる形で個別に解析された。したがって問題全体の解は、いくつかの物理量を指定すればその函数として定まる。剝離点上流の量を与えて下流の値を求めるのが通常であるが、本解析では、②から③にいたる領域、つまり混合層の解析によってその上流、下流および再循環流が規定される形になっているため、その領域での物理量を与えて、①の物理量等は逆に求める方法が便利である。もちろん、①の量を与えて②-③での一様流の諸量を仮定し、iteration で解く方法をとってもよい。

計算の手順を図8の流れ図に示す。与える条件は、

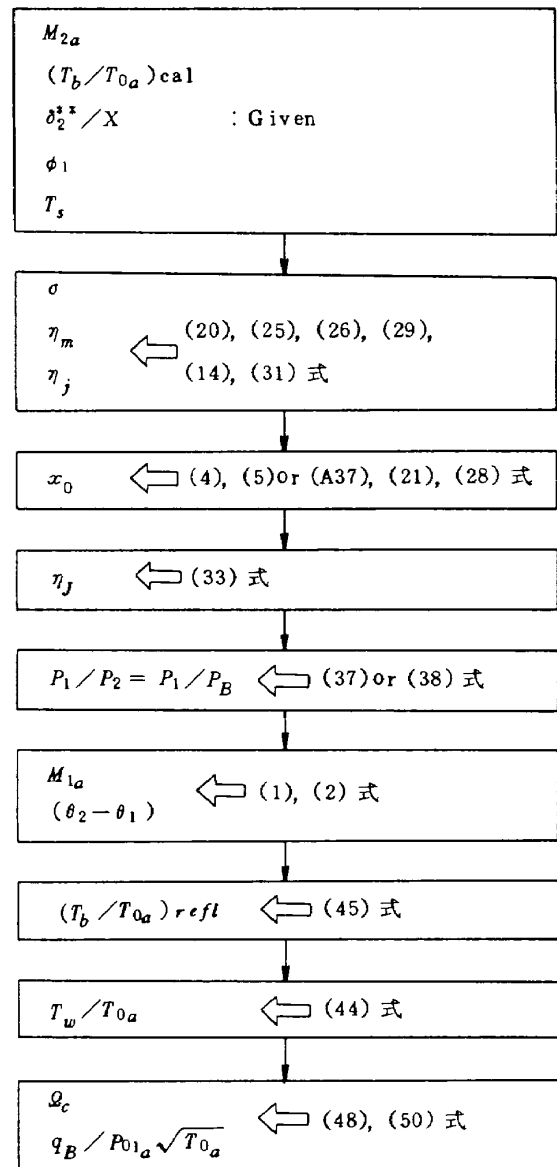


図8 計算の流れ図

$M_{2a}, (T_b/T_{0a})_{cal}$ および δ_2^{**}/X である。ここで X は剥離点から合流点までの X 軸に沿って測った距離である。さらに、膨張直前の境界層の速度分布 ϕ_1 、つまり n の値、および剥離点上流の壁温、 T_s も与える。

計算結果は δ_2^{**}/h を独立変数として表わされる。しかし、 $\phi_1(y_1)$ は与えられ、 P_1/P_2 が計算されたので T_0/T_{0a} に対する関係、(9)式、を用いれば、 δ_1/δ_1^{**} 、 $\delta_1^{**}/\delta_2^{**}$ などは簡単に評価できる。したがって上で得られた結果は、独立変数として δ_2^{**}/h の代わりに、 δ_1^{**}/h あるいは δ_1/h を用いて示すこともできる。

また、相似解の origin shift y_0 は (22) 式で求められるので、固有座標系と基準座標系との位置関係が、(23)、(24) 式のように定まる。

5. 計算結果および実験との比較

本報告には、 $r = 1.4$ で $T_w/T_{0a} < 1$ の場合、つまり熱が気体から物体底面へ伝達される場合の結果を示す。

なお、混合層の解析に表われる jet spread parameter σ は底面圧に対しては (33) 式から明らかなように、 η_J が σ に依存するため影響を及ぼすが、境界層の厚さが無視できるときには直接の影響を及ぼさない。しかし底面加熱に対しては、(50) 式から明らかなように、境界層の存否に拘らず、 σ は分母の項と E 中の η_J による影響とを通して直接に影響を及ぼす。本報告では、高超音速および極超音速流領域における σ の信頼できる実験値が乏しいことから、超音速領域での線型実験式、

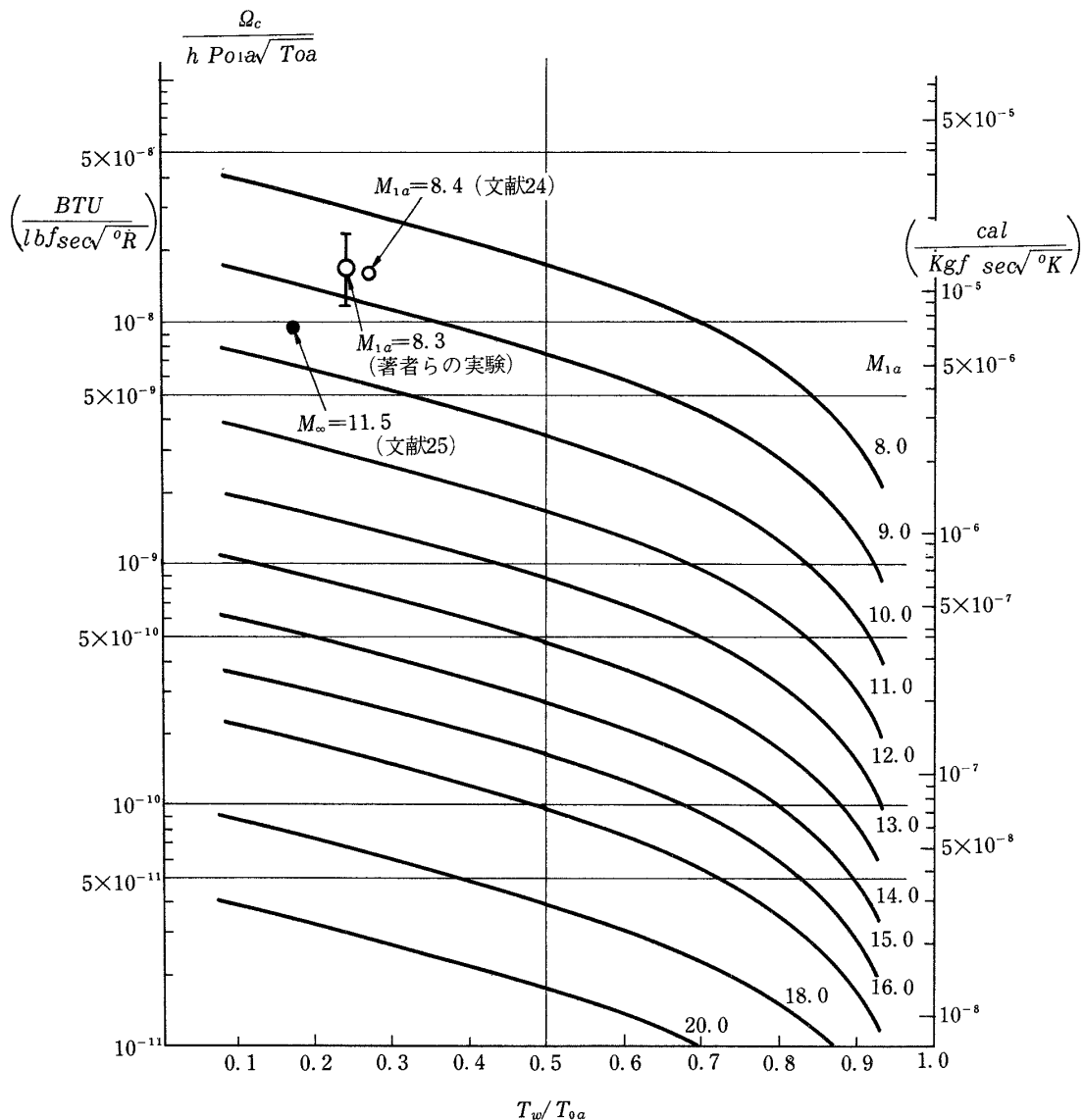


図9 底面加熱パラメータ $q_B / P_{01a} \sqrt{T_{0a}}$ の計算値および実験値との比較

(20) 式をそのまま使用した。

図9に境界層厚さが無視できる場合の底面加熱パラメータの T_w/T_{0a} に対する変化を、剝離点上流の主流マッハ数 M_{1a} をパラメータとして示す。(M_{1a} は8から20までの範囲について示す)

底面加熱パラメータの値は、 M_{1a} が大きくなるほど減少することがわかる。この図から明らかなように、低速の流れでよく用いられる $q_B \propto (T_w - T_{0a})$ の関係が成り立たないこと、つまり q_B が T_w/T_{0a} の一次関数ではないことが分かる。なお、 M_{1a} が7までの計算値は文献11にある。

この図にはいくつかの実験値も示した。著者は底面への空力加熱の実験データと比較する目的で文献調査を行ったが、高マッハ数での入手できる実験データは非常に少なく、僅かに文献24,25のみであった。この両者のデータも、2次元物体についてではなく、軸対称物体に関するものである。底面圧については、軸対称物体の方が2次元物体よりも高くなることが分かっている。底面加熱についても同様の傾向が考えられるが、あまり大きな差はないと考えられるので、比較のため示した。文献24のデータは半頂角 9° の円錐底面の実測データである。この M_{1a} は一様流のマッハ数と円錐の半頂角から計算した。境界層厚さは与えられていないが、2次元の理論値との間に、オーダー的に良い一致を示している。文献25のデータは、半頂角 60° の鈍頭円錐と短い円錐台後部をもつ軸対称物体底面のデータである。この文献には測定部一様流と壁温のデータのみしか与えられていないため、 M_{1a} が算出できず、そのままでは比較できないが、大体の M_{1a} のオーダーを推算してみると、このデータはほぼ一致している。

さらにこの図には著者らの2次元平板バック・ステップのステップ面に対する極超音速流での熱伝達データも加えた。このステップを過ぎる流れは、対称面が壁であるため流れが slip しないことと、その壁面での熱伝達の影響が存在する点で、本論文で考察している wake の上半面の流れとは異なる。Roache²⁾ によると、いわゆる splitter plate に相当する壁面の存在の効果は、合流点あるいは再付着点(いずれもよどみ点)を上流側へ移動させることになり、底面圧は高めになるようである。実験では、剝離した流れは層流と考えられ、turbulent

free jet ではない効果を、近似的に jet 中の x に対する依存性の違いという点でのみ考慮し[†]、それを φ_2 の形は不変として、 σ の差異にのみ繰込むと、jet 巾に対応する y および η の値を y_e, η_e とし、($y_e = \eta_e x / \sigma$ である)乱流 jet では $y_e \propto x$ 、層流では $y_e \propto \sqrt{x}$ であるから、 $\sigma = C_1 \eta_e$ (乱流) および $\sigma = C_2 \eta_e \sqrt{x}$ (層流) となる。(η_e は2.0ととれば充分であろう。)したがって、層流剝離流の場合の q_B にも(50)式が近似的に使えたとすると、この σ の差より、乱流の q_B よりも小さくなる傾向がわかる。以上の点を考慮しても、この実験値は理論値とオーダーとしては合っているように思われる。データの巾はステップ面上の分布を示すと同時に、境界層厚さの効果を示している。後者の効果は、平板先端からステップ(剝離点)までの距離を変えて境界層厚さを変えたことによるが、 q_B は境界層厚さの増加とともに増加する傾向を示し、次に示す図10の傾向と一致する。

以上の実験データには、境界層厚さのデータが与えられていないが、底面加熱に及ぼす境界層厚さの影響は大きく、それを図10に示す。

図10(a), (b), (c)には、 M_{1a} がそれぞれ3,7,15の場合の底面加熱パラメータ $q_B / P_{01a} \sqrt{T_{0a}}$ に対する境界層の運動量厚さ δ_2^{**} / h の影響を示す。加熱率は、境界層が比較的薄いときに、その厚さの増大とともに急激に上昇し、やがて上昇が止まる傾向をすべての例について示している。この境界層厚さに対する加熱量増大の傾向は、再突入物体を用いた自由飛行法による $M_\infty = 18$ の実験データ²⁷⁾ と定性的に一致している。この急激な上昇の程度はマッハ数が大きいほど著しい。さらに、 q_B の上昇が止まる δ_2^{**} / h の値は、マッハ数が大きいほど小さい。しかしこれは後述するように、 δ_1 / h に対する変化に換算してみると、 q_B の上昇が止まる点に対応する δ_1 / h の値は、マッハ数にあまり依存しないか、むしろマッハ数とともに増大する。ここで、解析の項で述べたように、この解法の有効なのは、 δ_1 / h が小さいところであることに留意しなければならない。

図11には運動量厚さに対する底面圧 P_B / P_1 の変化を M_{1a} が3,7,15の場合について示した。高マッハ数の場合には、 T_w / T_{0a} の変化による P_B / P_1 の変化は比較的小さい。 T_w / T_{0a} が0.1から0.9まで変わると熱伝達量は非常に大きく変化する(図10を参照)にもかかわらず、

註† 昭和45年度日本航空宇宙学会年会講演会「平板のバック・ステップへの熱伝達の実験」(井上安敏, 松崎利一)で発表。これは当所の70φガンタンネルを用いた $M_\infty = 10.4$ の流れで測定した。図8中の M_{1a} の値は、先端衝撃波の角度から計算したものである。

註†† free jet が層流のときの解析は D. R. Chapman によってなされている。(文献26)

圧力はこの熱伝達量の変化に鈍感であることが分かる。
 P_B/P_1 も境界層厚さの増加とともに急激に上昇し、その度合はマッハ数が高いほど顕著であるが、 q_B の場合とは異なり増加傾向は続く。なお P_B/P_1 は、境界層厚さが無視できるときには M_{1a} が増加するほど小さくなるが、境界層が厚いときには、この傾向が逆になったりする。しかし q_B のときと同様に、 δ_1/h に対する変化に直してみると、 P_B/P_1 は全ての δ_1/h の値に対して、 M_{1a} が増加するにつれて小さくなると言える。底面圧が境界層厚さとともに増大するという結果は、超音速領域における Nash の底面圧に関する理論の結果⁹⁾ および実験の傾向とよく一致している。

図12は wake angle, つまり①の流れ方向 θ_1 と②の流れ方向 (X軸方向) θ_2 とのなす角度, $\theta_2 - \theta_1$ に対する運動量厚さの影響を示す。ただし代表的に $T_w/T_{0a} = 0.3$ の場合のみを示す。この図より、運動量厚さが増すとともに角度は小さくなっていくことが分かる。すなわち、同一の h に対して、合流点の底面よりの距離(あるいは wake のサイズ)は、境界層が厚くなるとともに長くなっていくことを示している。マッハ数が高くなるにつれて、 $\theta_2 - \theta_1$ は小さくなり、したがって wake サイズは増大する。

図13は、合流点における jet boundary streamline の

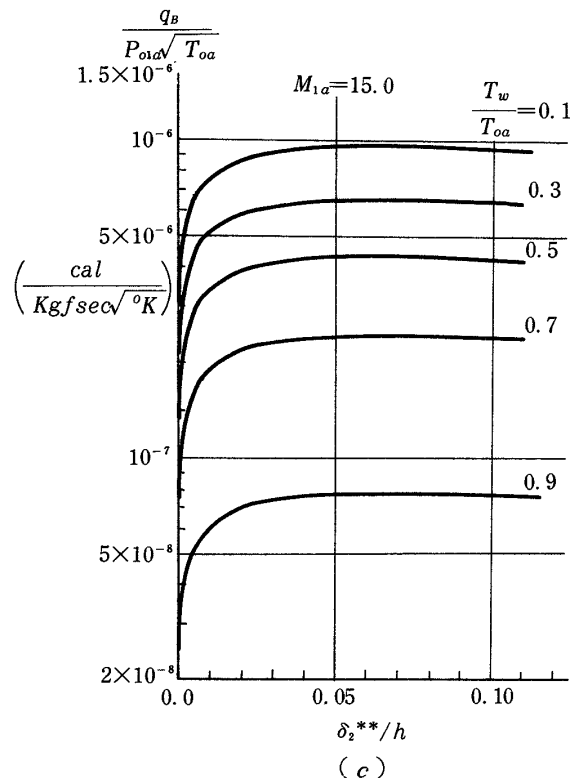
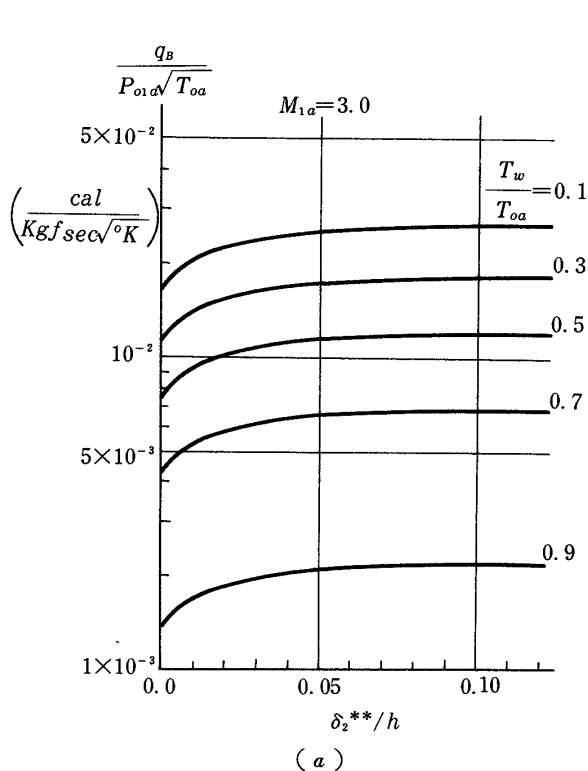
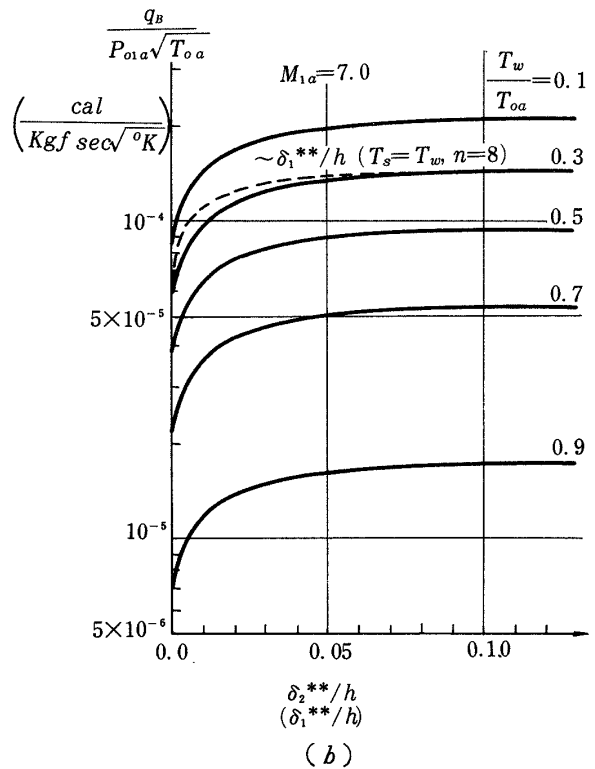


図10 底面熱伝達率に対する運動量厚さの影響

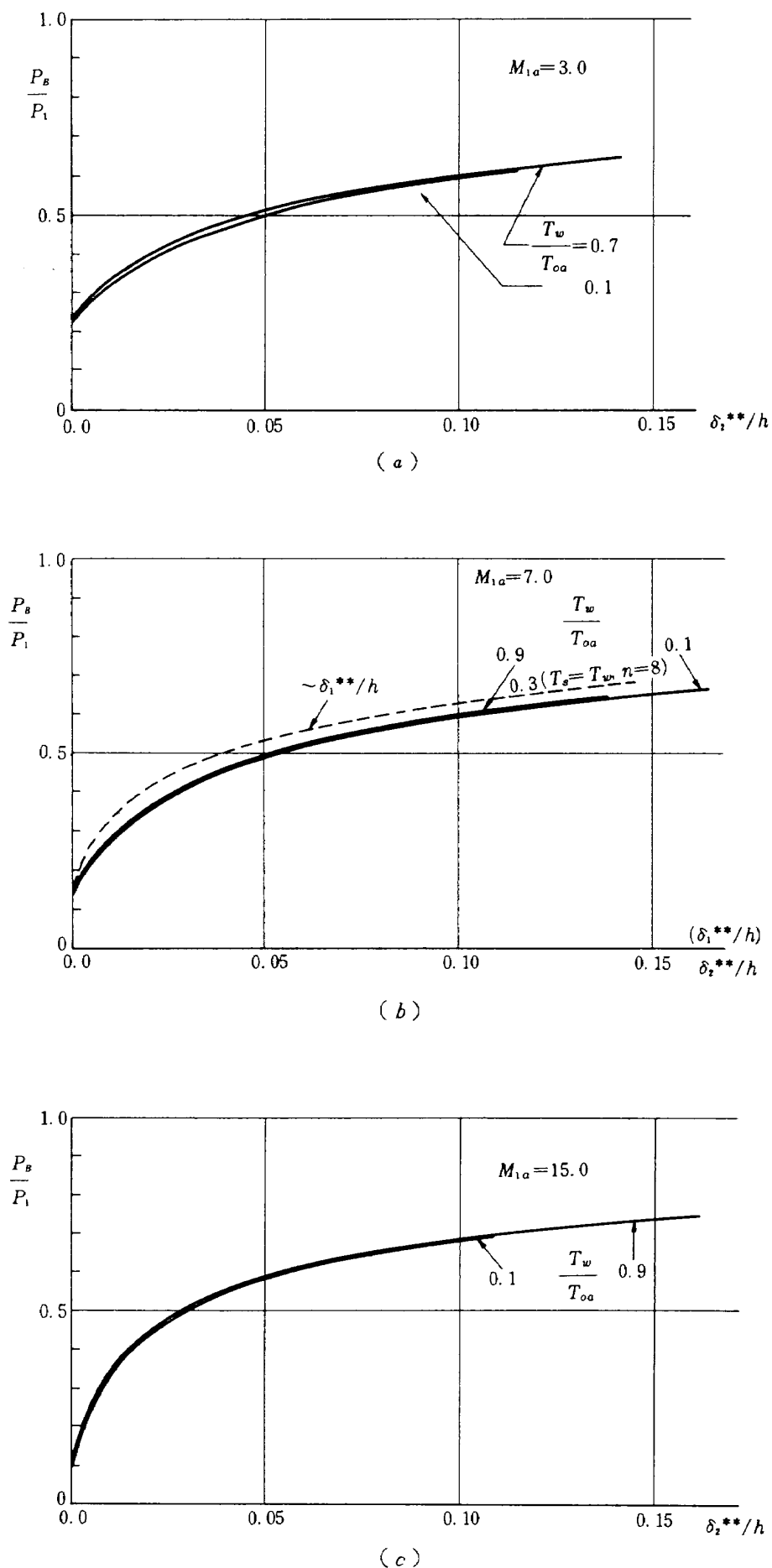


図 11 底面圧 P_B に対する運動量厚さの影響

位置 η_J の変化である。ここでは代表例として、 $T_w/T_{0a} = 0.3$ の場合のみを示す。境界層厚さが増すほど jet boundary streamline は、混合層のより内側に移動している。

なお η_m については(14)式、あるいは

$$\eta_m = \eta_R - (1 - C_{2a}^2) \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi_2^2 d\eta}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2}$$

によって求める際に、これを以下のように微分方程式に

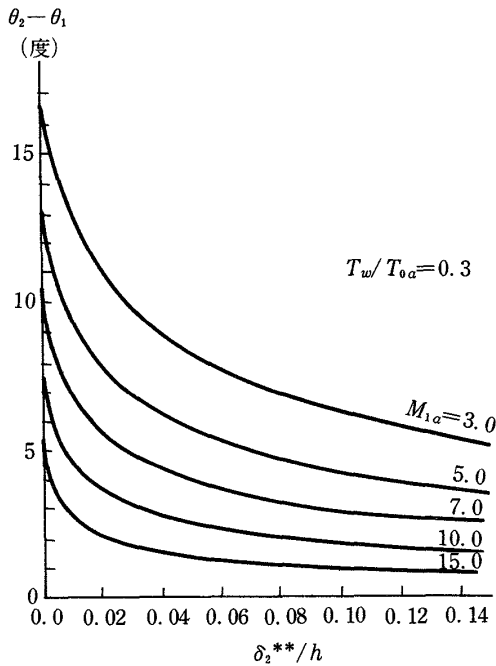


図 12 膨張による一様流の方向変化, $\theta_2 - \theta_1$, ($T_w/T_{0a} = 0.3$)

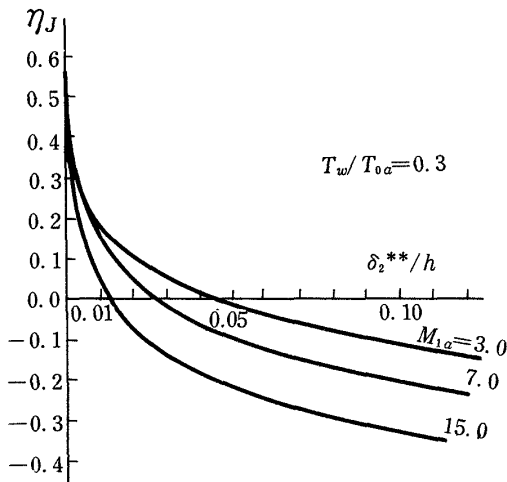


図 13 合流点における jet boundary streamline の位置, η_J ($T_w/T_{0a} = 0.3$)

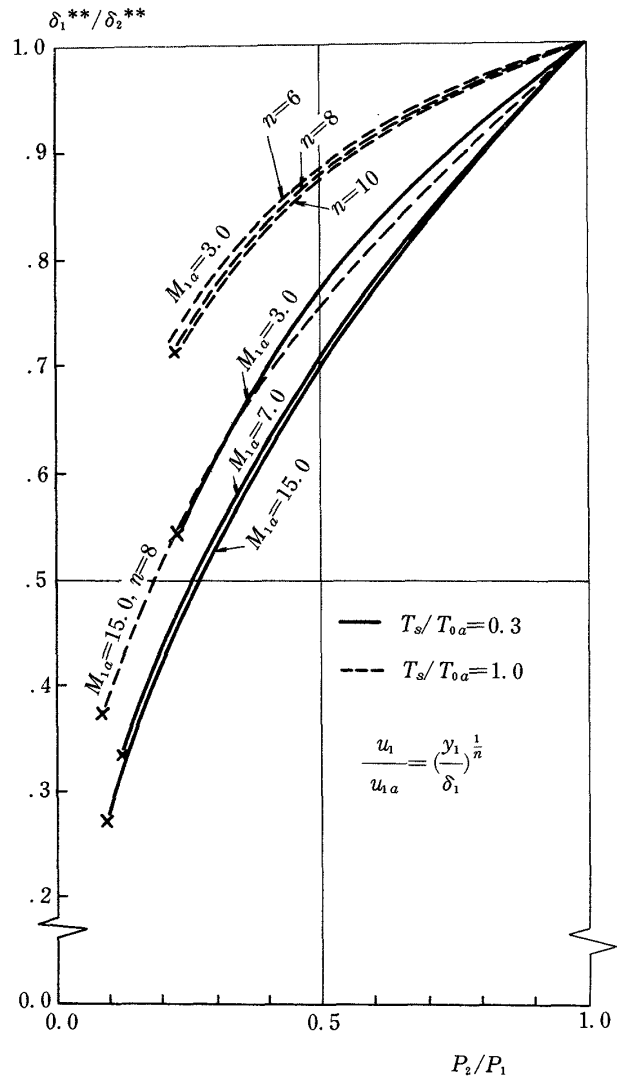


図 14 膨張前後の境界層の運動量厚さ比, $\delta_1^{**}/\delta_2^{**}$

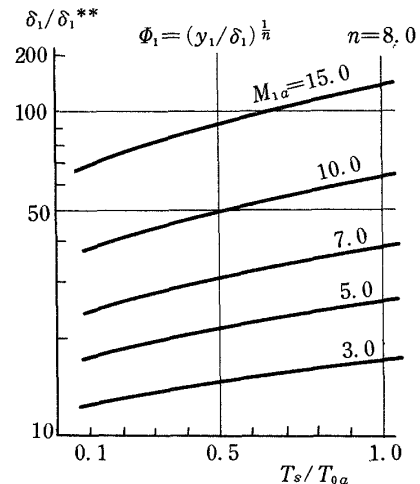


図 15 膨張前の境界層厚さと運動量厚さの比, δ_1/δ_1^{**}

変換して²⁸⁾ Milne 法によって解いた:

$$\frac{dq}{dr} = \frac{(1 - C_{2a}^2) \varphi_2^2(r)}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2(r)}$$

ただし, $r=5$ のとき $q=5$, $r=-5$ のとき $q=\eta_m$ となる。 φ_2 の形から $\eta=-\infty$, η_R はそれぞれ 5.0, -5.0 として充分であることを考慮した。

こうして求めた η_m から $y_m/x (= \eta_m/\sigma)$ を用いて固有座標系と基準座標との間の微小な回転角 ($\approx \tan^{-1}(y_m/x)$) を求めると, 大体 1.4° から 2.6° の間の値になる。これは十分に小さく, 両座標系で u が実質的に等しいとおいたことの妥当性が確かめられた。

図14では, 乱流境界層の速度プロファイルを $\phi_1 = (y_1/\delta_1)^{\frac{1}{n}}$ と仮定した場合の剥離前後の境界層の運動量厚さの比 $\delta_1^{**}/\delta_2^{**}$ を示す。剥離点上流の壁温 T_s と n による影響も示した。

図10から図13までの結果は, δ_2^{**}/h を横軸にとり, それに対する変化として表わしているが, 各 M_{1a} に対して δ_2^{**}/h に応じて P_B/P_1 が計算できているので(図11を参照), 図14から $\delta_1^{**}/\delta_2^{**}$ が得られ δ_1^{**}/h に対する変化に直すことができる。その結果の例として, 底面加熱パラメータと底面圧について, それぞれ図10(b)と図11(b)に, 横軸を δ_1^{**}/h として読むときの変化を破線で示した。ここに $T_w/T_{0a}=0.3$, $T_s/T_{0a}=0.3$ および $n=8$ とした。

なお図15には, $n=8$ のときの δ_1/δ_1^{**} の変化を T_s/T_{0a} に対して示す。これと図14の結果を用いれば, $\delta_1/h = (\delta_1/\delta_1^{**})(\delta_1^{**}/\delta_2^{**})(\delta_2^{**}/h)$ によって, 図10~13の結果を, δ_1/h に対する変化として表わすことができる。以上の計算には, 剥離点上流の境界層の速度分布 ϕ_1 として, べき乗則分布, $\phi_1 = (y_1/\delta_1)^{\frac{1}{n}}$, (8) 式を仮定したが, この代わりに実験的に測定された乱流境界層の速度分布を用いてもよい。

この解析にはレイノルズ数が表われていないが, その効果は境界層の厚さとプロファイルを通じて表わされていると考えてよい。

以上の結果は, 一様流についての等エントロピ的再圧縮と, jet の再圧縮に対する第1世代の解を仮定して得られたが, 斜め衝撃波による一様流の再圧縮を仮定して解いた結果では, 底面圧も底面加熱もともに等エントロピ再圧縮の場合よりも減少することが分かった。

なお, (25), (26) 式から分かるように, 剥離点 ($X=0$) において, displaced origin をもつ相似解は, 実際の流れとは異なり, 壁を貫く仮想的な流れを表現するが, この影響は境界層厚さが wake 領域の代表的長さ (例えば h, L) に比べて小さいときには無視できると考えられ

る。逆に δ/h が大きいときには, この解析の結果は, 無視できない誤差を含むことになる。同じ結論が, 再圧縮過程に第1世代の解を用いたことに関する 3.1 で述べた議論からも帰結される。

6. あとがき

鈍い後部形状をもつ2次元物体の底面への空力加熱を求める近似解法として, Korst にはじまる要素解析法 (component analysis method) を用いて, 高超音速流から極超音速流領域での底面加熱を, 乱流混合層を仮定して解析し, 乱流境界層厚さの底面加熱に及ぼす影響を明きらかにした。

解析においては, 圧縮性乱流混合層に対する境界層の存在による効果を, Hill の origin shift method を適用することによって考慮した。さらに流れの再圧縮は等エントロピ圧縮とした。再循環流領域の温度場の決定には, Page による reflected image approximation を用いた。

解析の結果, 底面への熱伝達率 q_B が, 境界層の運動量厚さと底面高さとの比 δ^{**}/h , 壁温と一様流のよどみ点温度との比 T_w/T_{0a} , さらに剥離点上流の一様流のマッハ数 M_{1a} , よどみ点圧力 P_{01a} によって表わされた。

$\gamma=1.4$, $T_w/T_{0a} < 1$ の場合の主な結果を述べると

- (1) 平均熱伝達率 q_B を, 底面加熱パラメータ $q_B/P_{01a} \sqrt{T_{0a}}$ なる量で表わすと, それはマッハ数 M_{1a} が大きくなるにつれて減少し, 壁温に関しては, T_w/T_{0a} の一次関数とはならない。
- (2) q_B は境界層厚さが増すと急激に増大し, ある厚さであまり上昇しなくなる。
- (3) 実験データとの比較では, オーダー的に良い一致を示している。
- (4) 底面圧については, q_B と同様に境界層厚さとともに高くなり, P_B/P_1 は M_{1a} が大きくなるほど減少する。この傾向は Nash の理論およびデータと一致する。
- (5) wake angle は M_{1a} が大きくなるほど小さくなり, 境界層厚さが増すとともに小さくなる。
- (6) 乱流混合層中の jet boundary streamline の位置は, 境界層厚さが増すにつれ, より内側に移動する。
- (7) 一様流の再圧縮が斜め衝撃波を通して起こるときには, 等エントロピ再圧縮の場合に比べて, P_B も q_B も小さくなる。
- (8) 底面熱伝達率に及ぼす乱流境界層厚さの影響は大きく, 図10に示すように境界層厚さが無視できる場

合の値に比べて、大きいときには3倍程度の q_B になる。この結果から、境界層厚さの不明な底面熱伝達率の実験データはあまり意味がないことが分かる。

(9) 本解析では、境界層厚さがwake中の代表長に比べて大きくなると、精度が悪くなると考えられる。

以上の解析に表われる唯一の実験的数値は jet spread parameter σ であるが、この値として(20)式を用いた。しかし、高マッハ数領域でのより信頼できる σ のデータが強く望まれる。

この解法の2次元から軸対称問題への拡張は重要であり、ロケット等の底面圧、底面加熱問題への応用が期待できる。今後の課題として、ロケットのバック・ステップ形状部分における再付着領域近傍の圧力・熱伝達特性の研究も重要であり、現在検討中である。

最後に、底面圧も底面加熱もともに混合層の状態、つまり層流、遷移流、乱流のいずれであるかによって非常に大きな差を生ずるので、今後は lip shock の効果を考慮する他にも、膨張による混合層の relaminarization の効果なども解析に取り入れる必要があると思われる。また再圧縮機構のさらに詳しい解析も非常に重要である。

なお、本報告は著者の一人が科学技術庁長期在外研究員として、米国ラトガース大学機械工学・航空宇宙工学科において研究した内容³²⁾を拡張したものである。この研究を行なうに際して示された航空宇宙技術研究所およびラトガース大学の関係の方々の配慮に感謝の意を表したい。空気力学第一部和田勇部長および曾我国男室長には原稿に対する貴重な助言を頂いた。

REFERENCES

- 1) J. S. Allen & S. I. Cheng; Numerical Solutions of the Compressible Navier-Stokes Equations for the Laminar Near Wake, *Phys. Fluids*, Vol. 13, No. 1, (1970/1) pp. 37 ~ 52.
- 2) P. J. Roache & T. J. Mueller; Numerical Solutions of Laminar Separated Flows, *AIAA J.*, Vol. 8, No. 3, (1970/3) pp. 530 ~ 538.
- 3) I. E. Alber & L. Lees; Integral Theory for Supersonic Turbulent Base Flows, *AIAA J.*, Vol. 16, No. 7, (1971/7) pp. 1343 ~ 1351.
- 4) L. Crocco & L. Lees; A Mixing Theory for the Interaction Between Dissipative Flows and Nearly Isentropic Streams, *J. Aero. Sci.*, Vol. 19, No. 10, (1952/10) pp. 649 ~ 676.
- 5) D. R. Chapman, D. M. Kuehn & H. K. Larson; Investigation of Separated Flows in Supersonic and Subsonic Streams with Emphasis on the Effect of Transition, NACA Report 1356, (1958).
- 6) H. H. Korst; Dynamics and Thermodynamics of Separated Flows, *Proc. Intern. Semin. on Flows with Separated Regions*, Herceg-Novi, (1969) pp. 1 ~ 45.
- 7) R. H. Page; A Review of Component Analysis of Base Pressure for Supersonic Turbulent Flow, *Proc. 10th Intern. Symp. Space Tech. Sci.*, Tokyo, (1973) pp. 459 ~ 469.
- 8) H. H. Korst; A Theory for Base Pressures in Transonic and Supersonic Flow, *J. Appl. Mech.*, Vol. 23, No. 12, (1956/12) pp. 593 ~ 600.
- 9) J. F. Nash; An Analysis of Two-Dimensional Turbulent Base Flow, Including the Effect of the Approaching Boundary Layer, *A.R.C.R. & M. No. 3344*, (1963).
- 10) D. C. Reda & R. H. Page; Supersonic Turbulent Flow Reattachment Downstream of a Two-Dimensional Backstep, *AIAA Paper No. 70-108*, (1970) (also RU-TR 125-MAE-F, Rutgers Univ., May 1969).
- 11) R. H. Page & R. J. Dixon; Base Heat Transfer in a Turbulent Separated Flow, *Proc. 5th Intern. Symp. Space Tech. Sci.*, Tokyo, (1963) pp. 295 ~ 308.
- 12) F. R. Hama; Experimental Investigations of Wedge Base Pressure and Lip Shock, *JPL Technical Report 32-1033*, (1966) (also F. R. Hama; *Experimental Studies of the Lip Shock*, *AIAA J.*, Vol. 6, No. 2 (1968/2) pp. 212 ~ 219).
- 13) I. Wada & Y. Inoue; Heat Transfer behind the Backward Facing Step in the Hypersonic Flow, *Proc. 10th Intern. Symp. Space Tech. Sci.*, Tokyo, (1973) pp. 425 ~ 432.
- 14) H. Schlichting; *Boundary Layer Theory*, (1960) pp. 494, McGraw-Hill.
- 15) R. D. Small & R. H. Page; Turbulent Boundary Layer Shape After a Corner Expansion, *Aeronautical Journal*, (1973/3) pp. 146 ~ 147.
- 16) H. H. Korst, R. H. Page & M. E. Childs; Compressible Two-Dimensional Jet Mixing at Constant Pressure, *ME-TN-392-1*, Engineering Exp. Sta., Univ. of Illinois, (April 1954).

- 17) S. I. Pai; Two-Dimensional Jet Mixing of a Compressible Fluid, *J. Aero. Sci.*, Vol. 16, No. 8, (1949/8) pp. 463 ~ 469.
- 18) H. Schlichting; *Boundary Layer Theory* (2nd edition), (1960) Chap. 23, McGraw-Hill.
- 19) W. L. Chow & H. H. Korst; On the Flow Structure Within a Constant Pressure Compressible Turbulent Jet Mixing Region, NASA TN D-1894, (1963).
- 20) H. H. Korst & W. Tripp; The Pressure on a Blunt Trailing Edge Separating Two Supersonic Two-Dimensional Air Streams of Different Mach Number and Stagnation Pressure but Identical Stagnation Temperature, *Proc. of 5th Mid-western Conf. on Fluid Mech.*, (1957) pp. 187 ~ 199.
- 21) W. G. Hill, Jr. & R. H. Page; Initial Development of Turbulent Compressible Free Shear Layers, *J. of Basic Engineering, Trans., ASME, Series D*, Vol. 91, No. 1, (1969/3) pp. 67 ~ 73.
- 22) B. H. Goethert; Base Flow Characteristics of Missiles with Cluster-Rocket Exhausts, IAS Paper No. 60 - 89, (1960) (also *Aerospace Engineering* (1961/3), pp. 28 ~ 29 and 108 ~ 117).
- 23) R. H. Page; A Theory for Incipient Separation, *Developments in Mechanics*, Vol. 1 (1961) pp. 563 ~ 577, Plenum Press.
- 24) W. L. Francis & W. T. Davey; Base Heating Experiments on Slender Cones in Hypersonic Flow, IAS Paper No. 62 - 179, (1962).
- 25) O. L. Zappa & W. G. Reinecke; An Experimental Investigation of Base Heating on Typical Mars Entry Body Shapes, *J. Spacecraft*, Vol. 10, No. 4, (1973/4) pp. 273 ~ 276.
- 26) D. R. Chapman; A Theoretical Analysis of Heat Transfer in Regions of Separated Flow, NACA TN 3792, (1956).
- 27) B. M. Bulmer; Re-Entry Vehicle Base Pressure and Heat Transfer Measurements at $M_\infty=18$, *AIAA J.*, Vol. 13, No. 4, (1975/4) pp. 522 ~ 524.
- 28) R. H. Page & R. J. Dixon; Computer Evaluation of an Integral Treatment of Gas Mixing, *Proc. 3rd Conf. on Performance of High Temperature Systems*, (1964) pp. 345 ~ 370.
- 29) A. H. Shapiro; *The Dynamics and Thermodynamics of Compressible Fluid Flow*, (1953), Ronald Press, pp. 86.
- 30) H. Görtler; Berechnung von Aufgaben der freien Turbulenz auf Grund eines neuen Näherungsansatzes, *ZAMM*, Vol. 22, (1942) pp. 244 ~ 254.
- 31) Ref. 29, pp. 84.
- 32) Y. Inoue; Turbulent Base Heat Transfer with Finite Boundary Layer Thickness, RU-TR 150-MIAE-F, Rutgers - The State University of N. J., (1976).

付 録

I. クロッコ数 C と無次元速度 φ によるマッハ数および温度、密度プロフィルの表示式

境界層および混合層の外側の流れにおいては①～④の全領域で $T_0 = \text{一定} = T_{0a}$ である。

一方、エネルギーの式から、任意の流線に沿って

$$C_p T + u^2/2 = u_{\max}^2/2 = C_p T_0 \quad (A1)$$

が成り立つ。粘性層内では T_0 は一般に流線ごとに異なる。

クロッコ数 C を $C = u/u_{\max} = u/\sqrt{2C_p T_0}$ で定義し、

$\varphi = u/u_a$ とすると、 $C = C_a \varphi \sqrt{T_{0a}/T_0}$ より

$$T/T_{0a} = T_0/T_{0a} - C_a^2 \varphi^2 \quad (A2)$$

が (A1) 式より得られる。

C とマッハ数 M との間には定義により次の関係

$$M^2 = \frac{2}{\gamma-1} \frac{C^2}{1-C^2} \quad (A3)$$

が成り立つ。

クロッコ数を導入すると γ の影響が陽には表われなくなり、解析結果がより広い適用性をもつ。

密度比については、混合層では圧力は一定と考えているので、(A2) 式と気体の状態方程式から

$$\frac{\rho}{\rho_a} = \frac{1-C_a^2}{T_0/T_{0a} - C_a^2 \varphi^2} \quad (A4)$$

が成り立つ。

II. isentropic streamtube method による膨張後の境界層の速度プロフィルおよび各種境界層厚さの計算

膨張を通して流れは等エントロピなので、同一流線上で $P_{01} = P_{02}$ であり、したがって圧力比は

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{P_{02}/P_2}{P_{01}/P_1} = \left(\frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} \quad (A5)$$

と表わされる。一方 $C = C_a \varphi \sqrt{T_{0a}/T_0}$ の関係と (A3) 式を使って

$$1 + \frac{\gamma-1}{2} M_i^2 = (1 - C_{ia}^2 \varphi_i^2 T_{0a}/T_{0i})^{-1} \quad (i=1,2) \quad (A6)$$

を得るが、同一流線上では $T_{01} = T_{02} = \text{一定} = T_0$ となり、(A5) 式を代入して

$$\left(\frac{P_1}{P_2} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{T_0/T_{0a} - C_{1a}^2 \varphi_1^2}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} \quad (A7)$$

となる。混合層を横切って圧力は一定と考えているので、一様流 (adjacent flow) に対しても圧力比は同一である筈だから (A7) 式の右辺は $(1 - C_{1a}^2)/(1 - C_{2a}^2)$ に等しい。それゆえ

$$\varphi_2 = \left[\frac{C_{1a}^2 (1 - C_{2a}^2) \varphi_1^2 + (C_{2a}^2 - C_{1a}^2) T_0/T_{0a}}{C_{2a}^2 (1 - C_{1a}^2)} \right]^{\frac{1}{2}} \quad (A8)$$

を得る。

次に各流管について質量保存則を適用すれば、流管の断面積比

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_2/A_*}{A_1/A_*} = \frac{dy_2}{dy_1} \quad (A9)$$

は、 $\rho_1 u_1 / \rho_2 u_2$ に等しい。したがって

$$y_2 = \int_0^{y_1} \frac{A_2/A_*}{A_1/A_*} dy_1 \quad (A10)$$

なる積分中の被積分関数は局所マッハ数の函数であり

$$\frac{M_1}{M_2} \left\{ \frac{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_2^2}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_1^2} \right\}^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (A11)$$

と表わせる。²⁹⁾ なお { } 内は上述のように $(1 - C_{1a}^2)/(1 - C_{2a}^2)$ とおき、マッハ数を C_a, φ および T_0/T_{0a} で表わし (A10), (A11) に代入すると

$$y_2 = \left(\frac{1 - C_{1a}^2}{1 - C_{2a}^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \frac{C_{1a}}{C_{2a}} \int_0^{y_1} \frac{\varphi_1}{\varphi_2} dy_1 \quad (A12)$$

が得られる。ここで $\varphi_1(y_1) = (y_1/\delta_1)^{\frac{1}{n}}$ を用い、積分変数を y_1 から φ_1 に変換すると、(A8) を代入して

$$\begin{aligned} \delta_2 &= y_2 |_{y_1=\delta_1} \\ &= n \delta_1 \frac{C_{1a}}{C_{2a}} \left(\frac{1 - C_{1a}^2}{1 - C_{2a}^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} \\ &\quad \times \int_0^1 \frac{\varphi_1^n d\varphi_1}{\sqrt{\frac{C_{1a}^2 (1 - C_{2a}^2) \varphi_1^2 + (C_{2a}^2 - C_{1a}^2) T_0/T_{0a}}{C_{2a}^2 (1 - C_{1a}^2)}}} \end{aligned} \quad (A13)$$

を得る。さらに境界層の運動量厚さの定義から

$$\delta_1^{**} = n \delta_1 (1 - C_{1a}^2) \int_0^1 \frac{\varphi_1^n (1 - \varphi_1) d\varphi_1}{T_0/T_{0a} - C_{1a}^2 \varphi_1^2} \quad (A14)$$

$$\delta_2^{**} = n \delta_1 \frac{C_{1a}}{C_{2a}} \left(\frac{1 - C_{1a}^2}{1 - C_{2a}^2} \right)^{\frac{1}{\gamma-1}} (1 - C_{2a}^2)$$

$$\times \int_0^1 \frac{\phi_1^n (1-\phi_2)}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \phi_2^2} d\phi_1 \quad (\text{A15})$$

となり $\delta_1^{**}/\delta_2^{**}$ は(7)式となる。なお T_0/T_{0a} は、①の領域に Crocco 積分が存在するので

$$\frac{T_0}{T_{0a}} = \frac{T_s}{T_{0a}} + \left(1 - \frac{T_s}{T_{0a}}\right) \phi_1 \quad (\text{A16})$$

となる。ここで T_s は剝離点上流の壁温で一定と考えた。 δ_1^* も同様にして得られる。

III. 基準座標系 (X, Y) と固有座標系 (x, y) の関係
剝離点での境界層厚さが無視できる場合を考える。図3に示す control volume に運動量保存則を適用する。control volume の上面は $Y=Y_R=R$ にあり、これは混合層から充分離れた距離だとする。いま混合層は

$$\varphi = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \eta), \quad \eta = \sigma \frac{y}{x}$$

$\eta = 5.0$ に対応する点と考えてよい。下面は $-\infty$ だけ X 軸から離れている面を考える。上、下面を通しての運動量の出入りはないので、

$$\left[\int_{-\infty}^R \rho u^2 dY \right]_{X=0} = \left[\int_{-\infty}^R \rho u^2 dY \right]_X \quad (\text{A17})$$

が成り立たねばならない。

基準座標系と固有座標系の間には

$$\left. \begin{aligned} X &= x \\ Y &= y - y_m(x), \quad \text{ただし } y_m(0) = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A18})$$

の関係がある。

(A17) の両辺を $\rho_{2a} u_{2a}^2$ で割り、左辺の積分範囲は 0 から R までとなることを考慮すると、(A18) を代入し

$$R = \int_{-\infty}^{R+y_m} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi^2 dy$$

を得るが、この両辺に σ/x を乗じて、 $d\eta = \frac{\sigma}{x} dy$ を考慮すると

$$\begin{aligned} \eta_R &= \int_{-\infty}^{\eta_R + \eta_m} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi^2 d\eta \\ &= \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi^2 d\eta + \int_{\eta_R}^{\eta_R + \eta_m} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi^2 d\eta \end{aligned}$$

が成立し、結局 $y_m(x)$ に対応する η_m の決定式：

$$\eta_m = \eta_R - (1 - C_{2a}^2) \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi^2 d\eta}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi^2} \quad (\text{A19})$$

を得る。

IV. 圧縮性乱流ジェット混合領域に対する Korst の解 (圧力一定)

Korst¹⁶⁾ によると、一定圧力の二次元乱流 free jet の運動方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\epsilon}{u_{2a}} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (\text{A20})$$

となる。次のような無次元変数を導入する：

$$\varphi = \frac{u}{u_{2a}}, \quad \varphi = \frac{x}{\delta_2}, \quad \zeta = \frac{y}{\delta_2}$$

ここに、 δ_2 は膨張直後の境界層厚さである。よって

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \varphi} = \frac{\epsilon}{u_{2a} \delta_2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \zeta^2} \quad (\text{A21})$$

を得る。さらに eddy viscosity ϵ に対して

$$\epsilon(x) = \epsilon_\infty f(\varphi) \quad (\text{A22})$$

と仮定する。ここに ϵ_∞ は、 $x \rightarrow \infty$ での ϵ の値である。

ゆえに $f(\infty) \rightarrow 1$ が成り立つ。

Görtler³⁰⁾ によれば、Prandtl の理論から

$$\epsilon_\infty = C \delta_2 u_{2a} \quad (\text{A23})$$

と表わせるので (∞ は $\delta = 0$ の場合に対応する)

$$\epsilon = C \delta_2 u_{2a} \varphi f(\varphi)$$

となる。ここに C は定数である。いま

$$\xi = \xi(\varphi) = C \int_0^\varphi \varphi f(\varphi) d\varphi \quad (\text{A24})$$

なる新変数を導入すると (A21) は熱伝導方程式

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} \quad (\text{A25})$$

となる。これを以下の初期条件、境界条件の下に解く：

$$\varphi(0, \zeta) \equiv 0, \quad -\infty < \zeta < 0$$

$$\varphi(0, \zeta) = \phi_2(\zeta), \quad 0 < \zeta < 1$$

$$\varphi(0, \zeta) \equiv 1, \quad 1 < \zeta < \infty$$

$$\varphi(\xi, -\infty) \rightarrow 0, \quad \xi > 0$$

$$\varphi(\xi, +\infty) \rightarrow 1, \quad \xi > 0$$

この解は Korst によって

$$\varphi(\phi_2, \eta_p, \eta) = \frac{1}{2} [1 + \operatorname{erf}(\eta - \eta_p)]$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\eta - \eta_p}^{\eta} \phi_2 \left(\frac{\eta - \beta}{\eta_p} \right) e^{-\beta^2} d\beta$$

(A26)

と与えられた。ここに $\eta_p \equiv \frac{1}{2\sqrt{\xi}}$, $\eta = \zeta \eta_p$ である。

η_p は初期速度プロファイルと $\epsilon(x)$ に依存する形状パラメータ (position parameter) であるが、 $\delta_2 \rightarrow 0$ のと

き,あるいは $x \rightarrow \infty$ のとき 0 に近づく。このとき

$$\varphi = \frac{1}{2} (1 + \operatorname{erf} \eta) \quad (\text{A27})$$

となる。 $\eta_p \rightarrow 0$ のときには $f(\varphi) \rightarrow 1$ となり, Taylor 展開により $\varepsilon \rightarrow C\varphi^2/2$ となるので

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\frac{y}{x\sqrt{2C}} \right) \right) \quad (\text{A28})$$

を得るが, Görtler の解と比較すると $C = \frac{1}{2\sigma^2}$ となる。つまり

$$\varphi = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{erf} \left(\sigma \frac{y}{x} \right) \right) \quad (\text{A29})$$

が得られるが, この解は次の意味で全く一般的である。

つまり, 乱流混合機構を含んだ積分変換式, (A24) 式の積分核 $f(\varphi)$ は $\varphi \rightarrow \infty$ につれて単調に 1 に近づくという条件以外は全く一般的であることである。したがって, この解を使った結果には, $f(\varphi)$, つまり $\varepsilon(x)$ の形を考慮する必要がない。ただ, jet spread parameter σ には依存する。

V. 境界層が存在する際の相似解の origin shift

x_0, y_0 の決定

origin shift は, 実際の境界層 (ただし膨張直後のもの) と, この原点の移動を行なった相似解とが, 剥離点において同じ質量流, および運動量流をもつべき条件から決定される。(図5参照)

まず運動量流は, 流れ場に圧力勾配がないことからどの x でも同じ値をもつはずであり,

$$\left[\int_0^R \rho u^2 dY \right]_{x=x_0}^{\text{境界層}} = \left[\int_{y_0}^R \rho u^2 dY \right]_{x=0}^{\text{相似解}} \quad (\text{A30})$$

が成り立つ。ここに R は一様流中にある充分上方の点である。両辺を $\rho_{2a} u_{2a}^2$ で除し, さらに両辺に -1 を乗じた後 $\int_0^R dY$ を両辺に加えると,

$$\int_0^R \left(1 - \frac{\rho_2 u_2^2}{\rho_{2a} u_{2a}^2} \right) dY = y_0 \quad (\text{A31})$$

となる。左辺は $\int_0^R \left\{ \left(1 - \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2a} u_{2a}} \right) + \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2a} u_{2a}} \left(1 - \frac{u_2}{u_{2a}} \right) \right\} dY$ に等しいから

$$y_0 = \delta_2^* + \delta_2^{**} \quad (\text{A32})$$

が得られる。

次に剥離点での質量保存の条件より

$$\left[\int_0^R \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2a} u_{2a}} dY \right]_{x=x_0}^{\text{境界層}} = \left[\int_0^R \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2a} u_{2a}} dY \right]_{x=x_0}^{\text{相似解}} \quad (\text{A33})$$

が得られ, 再び上と同様の操作をすると

$$\delta_2^* = R - \int_{-\infty}^R \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2a} u_{2a}} dY \quad (\text{A34})$$

を得るが, (23), (24) 式の座標変換を行なうと

$$\delta_2^* = R - \int_{-\infty}^{R+y_m-y_0} \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2a} u_{2a}} dy$$

すなわち,

$$\delta_2^* = R - \int_{-\infty}^R \frac{\rho_2 u_2}{\rho_{2a} u_{2a}} dy - y_m + y_0$$

となる。 $x = x_0$ での η の定義より, $d\eta = \frac{\sigma}{x_0} dy$ で

あり, (A32) 式を代入すると, η_m の表示式を用いて

$$\frac{\sigma \delta_2^{**}}{x_0} = \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 (1 - \varphi_2) d\eta \quad (\text{A35})$$

あるいは

$$x_0 = \frac{\sigma \delta_2^{**}}{\int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 (1 - \varphi_2) d\eta} \quad (\text{A36})$$

もしくは

$$x_0 = \frac{\sigma \delta_2^{**}}{(1 - C_{2a}^2) \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi_2 (1 - \varphi_2) d\eta}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2}} \quad (\text{A37})$$

を得る。

VI. 境界層のない場合の jet boundary streamline の位置, η_j の決定 (fully developed jet profile)

jet boundary streamline は, それを横切って質量の輸送がない流線であり, 本モデルの場合, 上流から来た流体と, 再循環流領域の流体とを分ける dividing streamline と一致する。

これを位置づけるには, 図4に示す検査面を考えて, 質量保存則を適用すればよい。下面はこの流線とし, 上面は一様流中におく。($Y_R = R$)

$$\left[\int_0^R \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 dy \right]_{x=0} = \left[\int_{y_j - y_m}^R \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 dY \right]_{x=x}$$

となるが、付録Vと同様な操作をすると、

$$\eta_R = \int_{\eta_j}^{\eta_R} \left(\frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \right) \varphi_2 d\eta + \eta_m \quad (\text{A38})$$

を得る。これに η_m の決定式、 $\eta_R = \eta_m + \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2^2 d\eta$

を代入すると、 η_j の決定式として、

$$\int_{\eta_j}^{\eta_R} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 d\eta = \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2^2 d\eta \quad (\text{A39})$$

あるいは、

$$\int_{\eta_j}^{\eta_R} \frac{\varphi_2 d\eta}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} = \int_{-\infty}^{\eta_R} \frac{\varphi_2^2 d\eta}{T_0/T_{0a} - C_{2a}^2 \varphi_2^2} \quad (\text{A40})$$

が得られる。

VII. 境界層が有限の厚さをもつときの jet boundary streamline の位置, η_J (displaced origin solution)

このときも、jet boundary streamlineは、上流から流れてきた流体と、entrainされる流体とを分ける流線と定義される。図5に示す control volume に質量保存則を適用すれば(ただし下面はこの流線上)

$$\left[\int_0^R \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 dY \right]_{x=x_0} = \left[\int_{Y_J}^R \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 dY \right]_{x=x}$$

(A41)

が成り立たねばならない。ここで左辺は実際の境界層流れを考えているが、付録Vでのように、これはもちろん displaced origin をもつ相似解の $x=x_0$ における質量流に等しい。したがって

$$R - \delta_2^* = \int_{Y_J}^{R+y_m - y_0} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 dy = \int_{Y_J}^R \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 dy + y_m - y_0$$

となるが、(A32)を用い、さらに η を使うと(A38)を代入して

$$\frac{\sigma \delta_2^{**}}{x} = \int_{\eta_j}^{\eta_j} \frac{\rho_2}{\rho_{2a}} \varphi_2 d\eta \quad (\text{A42})$$

を得る。 η_j と δ_2^{**} は既知なので、任意の x における η_j

が計算できる。

VIII. 底面加熱パラメータ $q_B/P_{01a}\sqrt{T_{0a}}$, (50) 式,

の導出と A との関係

等エントロピーの関係から³¹⁾

$$\rho_a u_a = \left[\frac{A^*}{A} \right]_a \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{P_{0a}}{\sqrt{T_{0a}}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \quad (\text{A43})$$

が成り立つ。ここに、 $[A^*/A]_a$ は一様流の流管断面面積比であり、次式で与えられる。³¹⁾

$$\left[\frac{A^*}{A} \right]_a = M_a \left(\frac{\frac{\gamma+1}{2}}{1 + \frac{\gamma-1}{2} M_a^2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \quad (\text{A44})$$

(48)式の左辺は、(A43), (A44) 式を用いると

$$\frac{\sigma \Omega_c}{C_p \rho_{2a} u_{2a} T_{0a} X} = \frac{\sigma \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{2a}^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \Omega_c \sin(\theta_2 - \theta_1)}{C_p M_{2a} P_{02a} \sqrt{T_{0a}} \sqrt{R/\gamma} h} \quad (\text{A45})$$

となるが、これは E であるから、

$$\frac{\Omega_c}{h P_{01a} \sqrt{T_{0a}}} = \frac{C_p M_{2a} (1 - C_{2a}^2) E}{\sigma \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M_{2a}^2 \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \sin(\theta_2 - \theta_1)} \quad (\text{A46})$$

と表わせる。ここで $P_{01a} = P_{02a}$ を用いた。

この左辺を底面加熱パラメータとよぶと、このパラメータの物理的意味をみるには、次のような無次元エネルギー流束 A との関係を見るとよい。すなわち、

$$A \equiv \frac{\text{底面へのエネルギー流束}}{\text{外部の最大質量流の運ぶエネルギー流束}} = \frac{q_B}{\left(\frac{2}{\gamma+1} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} \frac{P_{02a}}{\sqrt{T_{0a}}} \sqrt{\frac{\gamma}{R}} C_p T_{0a}} = \frac{\Omega_c}{h C_p P_{01a} \sqrt{T_{0a}}} \sqrt{\frac{R}{\gamma}} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}}$$

(A47)

したがって、(A46)に代入すれば

$$\frac{\dot{Q}_c}{h P_{01a} \sqrt{T_{0a}}} = C_p \sqrt{\frac{\gamma}{R}} \left(\frac{\gamma+1}{2} \right)^{-\frac{\gamma+1}{2(\gamma-1)}} A$$

(A48)

が成り立ち、底面加熱パラメータが無次元エネルギー流束 A に結びついていることがわかる。この A は一種の Stanton 数と考えられる。

航空宇宙技術研究所報告 497号

昭和52年4月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)
