

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-502

円筒シェルの梁状曲げ振動について

小松 敬治・戸田 勸

1977 年 6 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

円筒シェルの梁曲げ振動について*

小松 敬治** 戸田 勸**

Beam-type Vibrations of Short Thin Cylindrical Shells

By Keiji KOMATSU and Susumu TODA

The present study presents both analytical and experimental results of beam-type vibrations of short thin cylindrical shells with/without cutouts.

Exact analytical results were obtained utilizing Flügge's shell theory and Timoshenko beam theory for the following three sets of boundary conditions; (1) clamped-clamped (2) shear diaphragm-shear diaphragm (3) clamped-free.

The Timoshenko beam theory results are in good agreement with those of the Flügge's shell theory and with all experimental values except those for extreme short cylindrical shells.

Finally, the effect of cutouts on the beam-type vibrations of cylindrical shells were studied, and within the geometry of the cutouts and shells studied, the beam-type mode frequency were found to be significantly affected by the cutouts.

1 まえがき

円筒シェルとみなしうる構造物で梁状曲げ振動をおこすような外力を受ける構造は多くの分野においてみられる。たとえば航空機の胴体、ロケットの機体はその代表的なものとしてあげられるし、地震による円筒貯水タンクの振動もその一例である。

円筒シェルの振動についての研究は古くから数多くあるが、そのうちのほとんどが円周方向波数が2以上の振動（Breathing Vibration）に関するものであって円周方向波数が1の振動、すなわち梁状曲げ振動に関するものは少ない。理論的な研究としてはForsberg¹⁾, Korneccki²⁾等の研究があるが、短い円筒シェルの梁状曲げ振動を実験的に扱ったものはほとんどなく、液体タンクのスロッシングに関する文献³⁾, 原子力容器の耐震設計に関連する文献⁴⁾等に見られる程度である。

このように円筒シェルの梁状曲げ振動は実用上重要であるにもかかわらず、多くの場合には梁理論が用いられてきたようであるが、それらの理論の適用限界、シェル理論を用いた場合との相違、及び実験との妥当性を確認しておくことは重要であると思われる。

本研究の目的は上記のような円筒シェルの梁状曲げ振動

に関する一つの実験資料の提供とそれに対応する解析理論の検討にある。

まず、チモシェンコの梁理論とフリューゲのシェル理論を用いて円筒シェルの梁状曲げ振動に対する解を三種類の境界条件の場合に求めて解を比較検討する。境界条件は(1)固定～固定、(2)単純支持～単純支持、(3)固定～自由の三種類であり、解法は微分方程式をそれぞれの条件の下に解いた厳密解法である。

次に(3)の固定～自由の境界条件での円筒シェルの共振実験をおこない解析結果と比較する。また、他の研究者によって指摘されている非線形性の影響による共振振動数の低下現象を検討し、その影響がほとんど認められず、上端集中荷重の影響が著しいことを示す。

最後に開口のある円筒の梁状曲げ振動についても実験、および解析をおこなう。解析にはチモシェンコ梁理論に基づく有限要素法を用いた。

2 理論解析

Bernoulli-Eulerの仮定による実用梁理論は断面の代表寸法が梁の軸方向の寸法と同程度になると精度が著しく悪くなる。ここではシェル理論とチモシェンコ梁理論による固有振動数の厳密解を求め、固定～固定、単純支持～単純支持、固定～自由の境界条件の下での理論の比較検討をおこなう。本報告で使用する記号を以下にまとめる。

* 昭和52年3月9日受付

** 機体才二部

R 円筒の半径

L 円筒の長さ

h 円筒の厚さ

n 円周方向波数

(x, θ, z) 図1に示す座標

(u, v, w) (x, θ, z) 方向のシェルの中央面の変位

k $k = (h/R)^2 / 12$

ν ポアソン比

E, G シェルのヤング率, 及び剪断弾性係数

ρ シェルの単位体積当りの質量

τ $\tau = \rho(1-\nu^2)R^2/E$

ω, f 円筒の固有角振動数, 及び固有振動数

K, D シェルの曲げ剛性, 伸び剛性

$$K = Eh^3 / 12(1-\nu^2),$$

$$D = Eh / (1-\nu^2)$$

2.1 シェル理論による解

シェル理論としてフリーゲの理論⁵⁾を用いる。図1のように座標系 (x, θ, z) をとると, 円筒シェルの平衡方程式はシェルの中央面変位 (u, v, w) により次のように書きあらわすことができる。

$$u'' + \frac{1-\nu}{2}(1+k)u'' + \frac{1+\nu}{2}v'' - kw'' + \frac{1-\nu}{2}kw'' + \nu w' = \tau^2 u^{**} \tag{1.1}$$

$$\frac{1+\nu}{2}u' + v'' + \frac{1-\nu}{2}(1+3k)v'' - \frac{3-\nu}{2}kw'' + w' = \tau^2 v^{**} \tag{1.2}$$

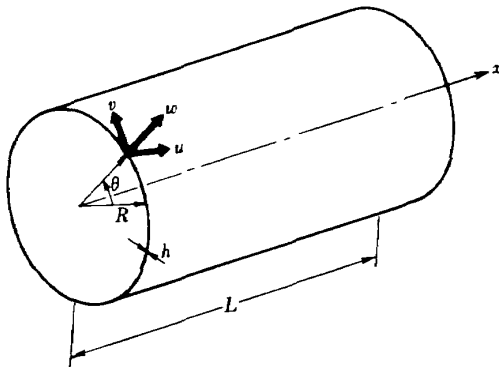


図 1 円筒シェルの座標系と変位

$$-ku'' + \frac{1-\nu}{2}ku'' + \nu u' - \frac{3-\nu}{2}kv'' + v' + w + k(w'' + 2w'' + w'' + 2w'' + w) = -\tau^2 w^{**} \tag{1.3}$$

ここに演算子として

$$(\dot{}) = \partial() / \partial x$$

$$(\overset{\circ}{}) = \partial() / R\partial\theta$$

$$(\overset{*}{}) = \partial() / \partial t$$

と定義する。

式(1.1), (1.2)を式(1.3)に代入して u, v を消去すると次のような w に対しての8階の偏微分方程式を得る。

$$a_{80}w'''''' + a_{62}w'''''' + a_{44}w'''''' + a_{26}w'''''' + a_{08}w'''''' + a_{60}w'''''' + a_{42}w'''''' + a_{24}w'''''' + a_{06}w'''''' + a_{40}w'''''' + a_{22}w'''''' + a_{04}w'''''' + \{d_{60}w'''' + d_{42}w'''' + d_{24}w'''' + d_{06}w'''' + d_{40}w'''' + d_{22}w'''' + d_{04}w'''' + d_{20}w'''' + d_{02}w''''\}'' + \{c_{40}w'''' + c_{22}w'''' + c_{04}w'''' + c_{20}w'''' + c_{02}w'''' + c_{00}w''''\}'''' = 0 \tag{2}$$

式(2)の一般解を

$$w = \sum_{j=1}^8 c_j e^{\lambda_j x} \cos n\theta e^{i\omega t} \tag{3}$$

とおいて式(2)に代入すると λ_j に関する8次の代数方程式となり,

$$\lambda_j^8 + a_1 \lambda_j^6 + a_2 \lambda_j^4 + a_3 \lambda_j^2 + a_4 = 0 \tag{4}$$

を得る。

この式は λ_j の8次代数方程式であるが, λ_j^2 に対する4次の代数方程式とみなせば Ferrari の方法等によって代数的に解くことができ, 解は

$$\lambda_j = \pm a, \pm bi, \pm(c \pm di) \tag{5}$$

となる。¹³⁾ これらの8個の根を式(3)に代入して w を実数の形で書きあらわすと

$$w = c_1 e^{ax} + c_2 e^{-ax} + c_3 \cos bx + c_4 \sin bx + e^{-cx} (c_5 \cos dx + c_6 \sin dx) + e^{cx} (c_7 \cos dx + c_8 \sin dx) \tag{6}$$

となる。 u, v も式(1.1), (1.2)に式(6)を代入することにより w と同様な形であらわすことができる。

境界条件は円筒の両端 ($x = 0, L$) において

$$\begin{aligned}
 u &= 0 \quad \text{又は} \quad N_x = 0 \\
 v &= 0 \quad \text{又は} \quad N_{x\theta} - M_{x\theta} / R = 0 \\
 w &= 0 \quad \text{又は} \quad Q_x + \partial M_{x\theta} / R \partial \theta = 0 \\
 \partial w / \partial x &= 0 \quad \text{又は} \quad M_x = 0
 \end{aligned} \tag{7}$$

となる。ここに

$$\begin{aligned}
 N_x &= D/R (u' + \nu v' + \nu w) - K/R^3 w'' \\
 N_{x\theta} &= D/R \frac{1-\nu}{2} (u' + v') + K/R^3 \frac{1-\nu}{2} (v' - w') \\
 M_{x\theta} &= K/R^2 (1-\nu) (w' - v') \\
 Q_x &= K/R^3 (w'' + \nu w''' - u'' - \nu v'') \\
 M_x &= K/R^2 (w'' + \nu w''' - u' - \nu v')
 \end{aligned}$$

である。

上式のように境界条件は変位 u, v, w にて書きあらわすことができる。次に変位 u, v, w を8コの境界条件式に代入すれば c_i ($i = 1 \sim 8$) に関する8元連立一次方程式となる。これは斉次方程式であるので c_i ($i = 1 \sim 8$) が非自明解をもつ条件、すなわち c_i ($i = 1 \sim 8$) の係数行列式が0になる条件より固有角振動数 ω が決定される。実際の計算にあたっては、式(3)における ω に初期近以値を仮定して以上の手順で計算をおこない、 c_i に対する係数行列式が0になるまで繰り返し計算をおこなって解 ω を求めた。

2.2 梁理論による解

梁理論としては剪断歪と回転慣性を考慮に入れたチモシェンコの梁理論⁶⁾を用いる。式(2)に対応する偏微分方程式は次のような4階の偏微分方程式となる。

$$\begin{aligned}
 EI y'''' + \rho A y'' - (\rho l + \rho \frac{EI}{k'G}) y'' + \rho l (\frac{\rho}{k'G}) y'''' = 0
 \end{aligned} \tag{8}$$

ここに

- y 円筒シェルの梁とみなした場合のたわみ
- A 梁の断面積
- k' 剪断係数
- β 曲げによる傾き

であり、境界条件は両端で

$$\beta = 0 \quad \text{又は} \quad EI \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$$

$$y = 0 \quad \text{又は} \quad k'AG (\frac{\partial y}{\partial x} - \beta) = 0$$

である。

解法はシェル理論に用いた解法とまったく同じ方法もちいる。ただし梁の場合は未知係数 c_j の個数は4つである。

2.3 解析結果

短い円筒シェルについての数値計算例を以下に示す。表1が固定～固定、表2が単純支持～単純支持、表3が固定～自由の境界条件である。それぞれの境界条件の具体的な表示は表4に示す。表3には実用梁理論 (Bernoulli-Euler の仮定に基づく梁理論) による曲げ振動解と剪断振動解も併記した。剪断振動数 f_s 、曲げ振動数 f_B は

$$f_s = \frac{1}{4l} \sqrt{\frac{k'GA}{\rho A}}$$

$$f_B = \frac{1}{2\pi} \frac{1.875^2}{l^2} \sqrt{\frac{EI}{\rho A}}$$

である。計算に用いた数値は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
 R &= 10 \text{ cm} \\
 R/h &= 400 \\
 L/R &= 1.0 \sim 10.0
 \end{aligned}$$

表1 固定～固定条件での固有振動数 (Hz)

L/R	チモシェンコ梁理論	シェル理論
1.0	4023.7	
2.0	1989.1	1792.8
3.0	1301.9	1255.1
4.0	952.7	939.1
5.0	739.7	736.2
6.0	595.6	595.7
7.0	491.7	493.1
8.0	413.3	415.1
9.0	352.4	354.1
10.0	303.8	305.4

表2 単純支持～単純支持での固有振動数 (Hz)

L/R	チモシェンコ梁理論	シェル理論
1.0	3946.2	
2.0	1854.5	1760.4
3.0	1135.4	1145.5
4.0	773.8	789.5
5.0	561.0	572.8
6.0	424.2	432.3
7.0	331.0	336.6
8.0	264.9	268.7
9.0	216.3	219.0
10.0	179.7	181.7

$$\nu = 0.3$$

$$E = 45000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho = 1.326 \times 10^{-6} \text{ kgsec}^2/\text{cm}^4$$

チモシェンコ梁理論解 f_T とシェル理論解 f_{shell} の比 f_T/f_{shell} の値を表1, 2, 3からプロットしたのが図2である。図2からわかるように L/R の値が5よりも大きい範囲ではチモシェンコ梁理論による解はシェル理論による解に対して誤差が2%程度以内で収まっている。この解析例は $R/h = 400$ の場合であるが薄肉シェルであれば R/h が異なってもこのような傾向は得られる。なぜならば円筒シェルの梁状曲げ振動は境界近傍を除いては

膜応力状態が支配的であり、曲げ剛性、慣性ともシェルの板厚 h の一次関数となって、固有振動計算の場合、両者は打ち消しあって結局固有振動数はシェルの板厚 h には余り影響されないからである。

3 実験

実験に用いた円筒は三酢酸セルローズフィルムを巻いて作製した。厚さ0.25mm, 半径は10cmであり、接着剤はアラルダイトを用いて、のりしろは7mmとした。この材料のヤング率は引張実験をおこなうと43000~46500 kg/cm²で、計算には45000 kg/cm²の値を用いた。またポアソン比 ν は0.3を用いた。

実験は下端固定、上端自由の境界条件のものについておこなった。下端の固定には低融合金を用い、固定治具の溝に低融合金を溶かし、その上に円筒を埋め込んで冷やして固定した。 n が2以上のBreathing Vibrationについては上端が自由であれば振動現象をおこしやすいが、 $n = 1$ の梁状曲げ振動については上端が完全に自由であると $n = 1$ の振動現象が発生しにくく、自由端が円形を保つようにリング状の補強をして梁状曲げ振動を出やすくした(図3)。

固有振動の測定には二つの方法を併用した。一つは円筒シェル下部を加振機で加振して共振させる方法であり、もう一つは加振機を用いず、上端に小さな衝撃を加えて自由減衰振動をさせ、電磁オシログラフに記録して、その記録から固有振動数を求める方法である。この二つの方法による結果はよく一致し、両者間での誤差は3%以内であった。

表3 固定~自由での固有振動数(Hz)

L/R	剪断振動理論	実用梁理論	チモシェンコ梁理論	シェル理論
1.0	2019.6	7288.6	1938.8	1698.5
2.0	1009.8	1822.1	874.4	844.8
3.0	673.2	809.8	511.0	503.2
4.0	504.9	455.5	333.8	331.1
5.0	403.9	291.5	233.6	232.5
6.0	336.6	202.5	171.7	171.2
7.0	288.5	148.8	131.1	130.8
8.0	252.5	113.9	103.1	102.9
9.0	224.4	90.0	83.0	82.9
10.0	202.0	72.9	68.2	68.2

表4 境界条件の表示

境界条件	シェル理論	チモシェンコ梁理論
固定 (CL)	$u = 0$ $v = 0$ $w = 0$ $\frac{\partial w}{\partial x} = 0$	$y = 0$ $\beta = 0$
単純支持 (SD)	$N_x = 0$ $v = 0$ $w = 0$ $M_x = 0$	$y = 0$ $EI \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$
自由 (FR)	$N = 0$ $N_{x0} - \frac{M_{x0}}{R} = 0$ $Q_x + \frac{\partial M_{x0}}{R \partial \theta} = 0$ $M_x = 0$	$k' AG (\frac{\partial y}{\partial x} - \beta) = 0$ $EI \frac{\partial \beta}{\partial x} = 0$

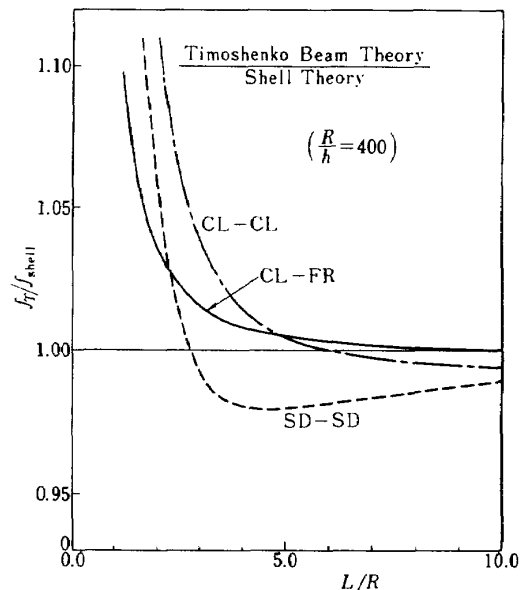


図2 チモシェンコ梁理論解とシェル理論解との比較

まず最初に円周方向波数が2以上の実験結果を図5に示す。円筒の長さは25.5cmであり、この場合、自由端は完全に自由である。図5からわかるように n が小さいところでは実験値が計算値より低く、 n が大きいくところでは計算値の方が実験値より低い。この理由としては、円筒をシートから巻いて作製したことによるのりしろ等の不完全性、シェル厚の0.25mmの値が計算においてもう一桁精度がほしいこと、ヤング率の値の不確かさ等があげられる。

次に $n=1$ の梁状曲げ振動の実験結果を示す。この場合、自由端には図3に示すように剛なアルミ製のリングをつけて梁状曲げ振動を出やすくしている。図6はリングの特性をパラメータとし、円筒の振動数を L/R について示した

ものである。丸印が実験値、実線と点線が計算値である。計算は式(8)のチモシェンコの梁の方程式を2.2で示した方法により解いたもので自由端における境界条件は

$$EI \frac{\partial \beta}{\partial x} = I_M \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2} \tag{11}$$

$$k'AG \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \beta \right) = M \frac{\partial^2 \beta}{\partial t^2}$$

である。ここに M は自由端リングの質量、 I_M は回転慣性である。

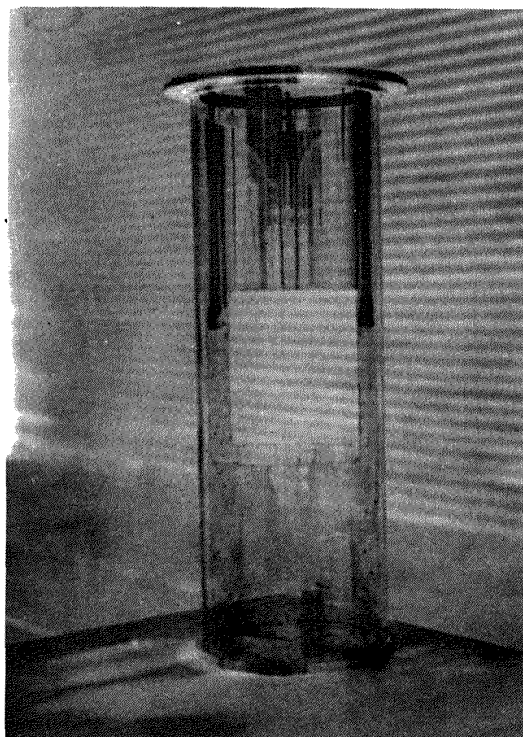


図3 円筒シェル試験体 ($\beta = 57^\circ$ の開口があるもの)

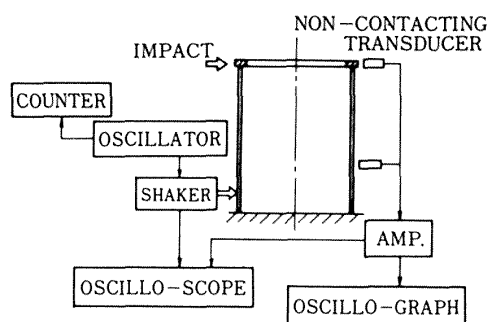


図4 振動実験概観図

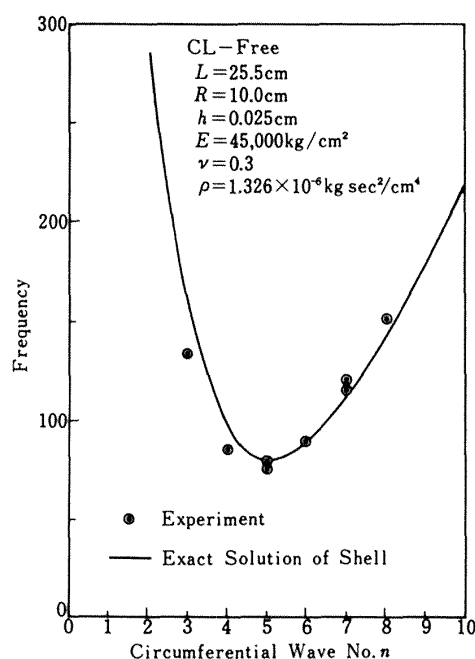


図5 円筒シェルの Breathing Vibration の固有振動数

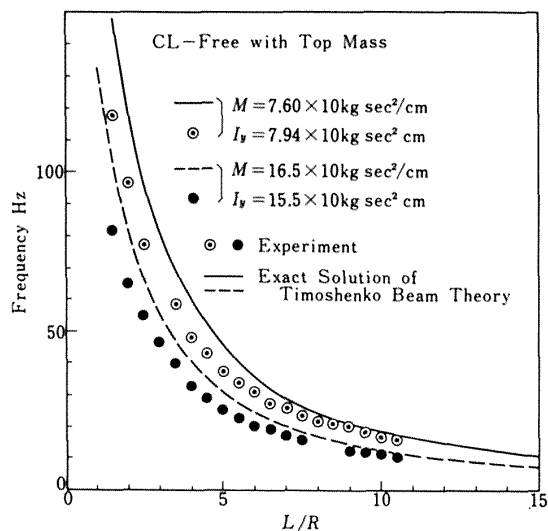


図6 円筒シェルの梁状曲げ振動固有振動数

$n = 1$ の場合も図 5 での $n \leq 5$ の場合と同程度に計算値より実験値の方が低く出ている。しかし L/R がかなり小さくなくても実験値，計算値の相関は良好である。

図 7 には円筒の長さを一定 ($L/R = 2.0$) として自由端リングの質量を変化させた実験と計算値をまとめた。実線はチモシェンコ梁理論の厳密数値解であり，点線はシェル理論から近似的に求められたものである(付録参照)。先に指摘したように⁸⁾ $n = 1$ の振動のときは短い円筒シェルにおいても，フランジ，補強リング等は質量が大きいきいて振動数を下げることが実験においても確認された。

次に $L/R = 6$ ，自由端リングの重量 $W = 7.45 \text{ g}$ のときの共振曲線を図 8 に示す。×印と・印とは加振機の加振電流をそれぞれ一定として共振点付近を掃引したもので縦軸は上端での振巾をシェルの板厚 h で無次元化した w/h である。また○印は各加振電流での振巾が最大となる点であり，この実験例ではソフトニングタイプを示す結果は得ら

れなかった。文献 4), 11) 等では $n = 1$ と $n = 2$ の振動モードが達成して $n = 1$ の振動数が下がる可能性があることが説明され， $n = 1$ の共振特性もソフトニングの非線形性を示すことが示されているが，本実験例においてみるかぎり非線形性は連成するほど大きなものではなく，しかもどちらかといえばハードニングタイプの非線形特性であった。本研究では図 6，図 7 に示したごとく線形解析と実験との質量増大に伴う共振振動数の低下の傾向が一致しており，文献 4), 11) 等で指摘された $n = 1$ の振動数の低下は $n = 2$ との非線形連成振動に起因すると考えるよりも，上端の補強物の質量によると考えた方が妥当である。

4 開口のある円筒シェルの梁状曲げ振動

開口を持つ短い円筒シェルの実験および解析を以下に示す。このようなシェルに対する研究はほとんどみあたらず文献 9), 10) があるのみであるが，それらは n が 2 以上の

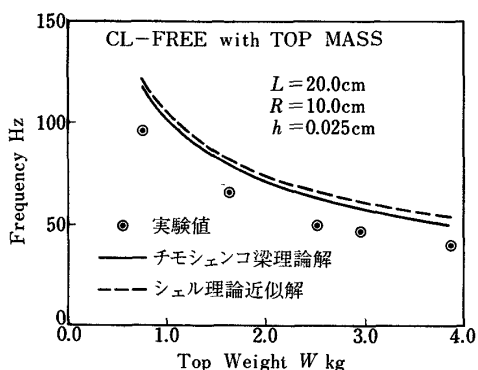


図 7 固有振動数に対する上端リングの重量の影響

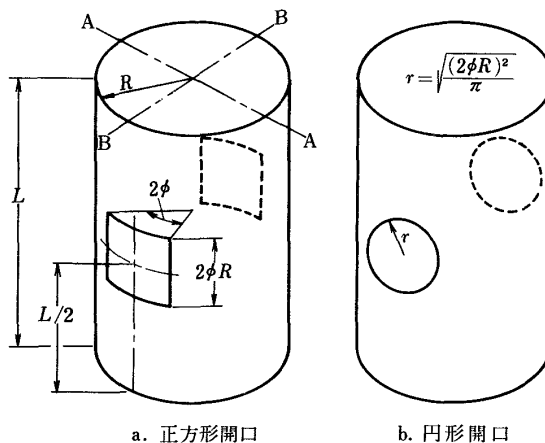


図 9 開口のある円筒シェル

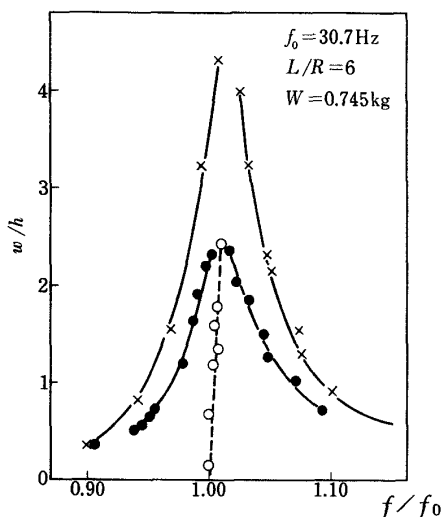


図 8 $L/R = 6$ の場合の共振曲線

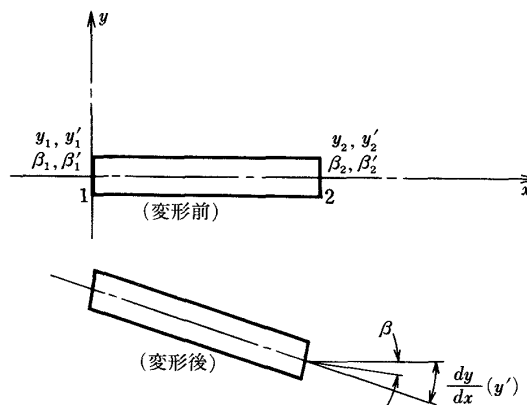


図 10 チモシェンコ梁要素

振動モードの振動に対する研究であり、 $n = 1$ の振動については文献がみあたらない。ここでは図9に示すように円筒の中央に腹と背の位置関係となるような正方形又は正円の開口をもつ円筒シェルの振動を考える。開口の影響は図9に示す開口角度 ϕ で整理する。理論解析にはチモシェンコ梁理論を用い、実験は2.3で用いたと同じ円筒シェルを用いる。

4.1 チモシェンコ梁要素を用いた有限要素解析

図9のような円筒は2.1, 2.2で示したような解法では解析が困難であるので、ここではチモシェンコ梁理論に基づく有限要素解析をおこなう。

用いた要素は図10に示すようなチモシェンコ梁要素⁷⁾で、節点変位として変位 y 、曲げによる傾き β 、およびそれらの x 方向の一階微分 y' 、 β' の4つをとり、要素としては8自由度要素である。

変位関数としては次のような三次のエルミート補間式を用いて

$$\begin{bmatrix} y \\ \beta \end{bmatrix} = \left\{ 1 - 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \begin{bmatrix} y_1 \\ \beta_1 \end{bmatrix} + \left\{ \left(\frac{x}{l}\right) - 2\left(\frac{x}{l}\right)^2 \right\}$$

$$\begin{aligned} & + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \begin{bmatrix} y_1' \\ \beta_1' \end{bmatrix} + \left\{ 3\left(\frac{x}{l}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \begin{bmatrix} y_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} \\ & + \left\{ -\left(\frac{x}{l}\right)^2 + \left(\frac{x}{l}\right)^3 \right\} \begin{bmatrix} y_2' \\ \beta_2' \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (12)$$

とあらわすことができる。

この要素の歪エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} EI \int_0^l \left(\frac{d\beta}{dx}\right)^2 dx + \frac{1}{2} k' AG \int_0^l \left(\frac{dy}{dx} - \beta\right)^2 dx \quad (13)$$

運動エネルギー K は

$$T = \frac{1}{2} \rho I \int_0^l \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dx + \frac{1}{2} \rho A \int_0^l \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 dx \quad (14)$$

となる。このエネルギー表示式に式(12)の変位関数を代入して通常の有限要素変位法の手法により

$[y_1 \ \beta_1 \ y_1' \ \beta_1' \ y_2 \ \beta_2 \ y_2' \ \beta_2']$ を節点変位とする剛性マトリックス $[K]$ 、質量マトリックス $[M]$ が得られる。 $[K]$ と $[M]$ は次のようになる。

$$[K] = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 504r & 210r & 42r & 42r & -504r & 210r & 42r & -42r \\ & 156r+504 & -42r & 22r+42 & -210r & 54r-504 & 42r & -13r+42 \\ & & 56r & 0 & -42r & 42r & -14r & -7r \\ & & & 4r+56 & -42r & 13r-42 & 7r & -3r-14 \\ & & & & 504r & -210r & -42r & 42r \\ & & & & & 156r+504 & -42r & -22r-42 \\ & & & & & & 56r & 0 \\ & & & & & & & 4r+56 \end{bmatrix}$$

symmetric

$$r = \frac{k'G}{E} \frac{Al^2}{I}$$

$$[M] = \frac{1}{420} \begin{bmatrix} 156 & 0 & 22 & 0 & 54 & 0 & -13 & 0 \\ & 156m & 0 & 22m & 0 & 54m & 0 & -13m \\ & & 4 & 0 & 13 & 0 & -3 & 0 \\ & & & 4m & 0 & 13m & 0 & -3m \\ & & & & 156 & 0 & -22 & 0 \\ & & & & & 156m & 0 & -22m \\ & & & & & & 4 & 0 \\ & & & & & & & 4m \end{bmatrix}$$

symmetric

$$m = \frac{I}{Al^2}$$

4.2 曲げ剛性と剪断係数

図9に示すように開口のある方向とそれに直角な方向とでは曲げ剛性、剪断係数が異なる。

曲げ剛性 $E I$ の I の計算は次の定義式から簡単に導くことができる。

$$I = \int \eta^2 ds$$

ただし η は断面の中心軸からの面素 ds までの距離である。この計算結果を開口角度 α をパラメータにしたものを図11に示す。ここに α は

$$\alpha = \frac{\pi}{2} - \phi$$

である。図中で A-A, B-B とあるのはそれぞれ A-A 軸, B-B 軸まわりの I であり, A-A 軸まわりの I の計算は上述した I の定義式から計算したものであるが, B-B 軸まわりの I の計算は次のようにおこなった。すなわち, 本来の中立軸は B-B 軸であるが, ここでは B-B 軸によって分割される二つの部分をそれぞれ独立な薄肉開断面梁とみなし, それぞれの断面について求めた中立軸に対する曲げ剛性を加え合わせて B-B 軸まわりの曲げ剛性とした。図11中の断面図からわかるように B-B 軸を中立軸とすれば I_{B-B} は I_{A-A} より大きくなるはずであるが I_{B-B} の方が小さくなっているのは以上のような計算方法を用いたためである。

剪断係数 k' は次の定義式から求める。

$$\frac{F}{k'GA} = \frac{1}{FG} \int \tau^2 dS$$

ここに

F 剪断荷重

τ F による一つの断面での剪断応力分布

である。A-A 軸に関する剪断係数 k'_A は

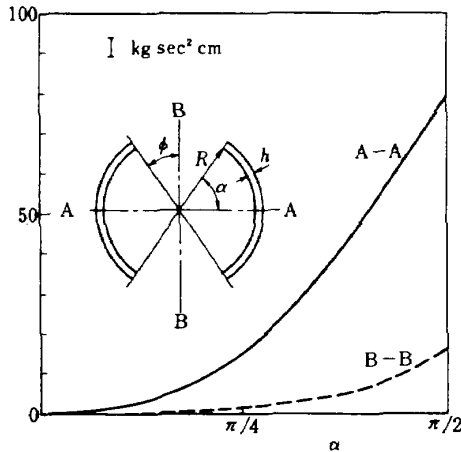


図 11 開口のある円筒の断面二次モーメント I

$$k'_A = \frac{\left(\alpha - \frac{\sin 2\alpha}{2}\right)^2}{4\alpha \left\{ \left(1 + \frac{\cos 2\alpha}{2}\right)\alpha + \frac{3}{4}\sin 2\alpha \right\}}$$

で, 開口がない場合 ($\alpha = \frac{\pi}{2}$) には $k' = 0.5$ となり, よく知られている結果¹²⁾と一致する。B-B 軸に関する剪断係数 k'_B は

$$\frac{1}{k'_B} = \frac{2R^5 h A}{I^2} \left\{ \frac{\alpha}{2} - \frac{\sin 2\alpha}{4} + \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} \cos \alpha - 2\pi - 2\sin \alpha + \alpha \cos \alpha \right) + \left(\frac{\sin \alpha}{\alpha} \right)^2 \times \left(-\frac{\pi^2}{2} \alpha + \pi \alpha^2 - \frac{\alpha^3}{3} \right) \right\}$$

で, 開口がない場合 ($\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$) のとき k'_B は 0.5 にはならない。この理由は剪断応力 τ_B が B-B 軸上でゼロとなるためであり, 本来 $\alpha = \frac{\pi}{2}$ のときには B-B 軸上で τ_B は最大となるはずであるが, ここでは極限 $\alpha \rightarrow \frac{\pi}{2}$ を考えており B-B 軸上では依然として $\tau_B = 0$ である。このような理由から k'_B の値は 0.5 にはならない。 k' の計算に用いた剪断応力分布 τ_A, τ_B は

$$\tau_A = \frac{FR^2}{I} (\cos \theta - \cos \alpha)$$

$$\tau_B = \frac{FR^2}{I} \left\{ \cos \theta - \frac{\sin \alpha}{\alpha} \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right\}$$

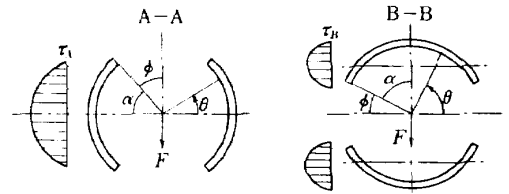


図 12 円筒の剪断応力分布

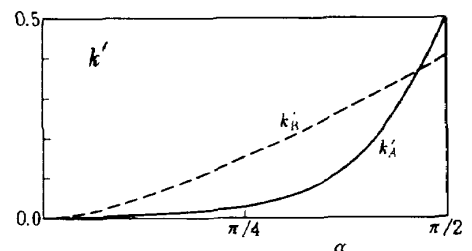


図 13 剪断応力係数 k'

である。この式から求めた剪断応力分布を図12に示す。
また、 k' の計算値を α をパラメータにとって図13に示す。

また、このチモシェンコ梁要素の精度検討のため表1～3に示した境界条件による計算例を表5に示す。要素分割はいずれも10等分割で、この程度の要素数で表1～3の正解に高精度で収束することが確認された。

表5 チモシェンコ梁要素による円筒の固有振動数 (10等分割)

L/R	CL-CL	SD-SD	CL-FR
1.0	4026.5		1940.2
2.0	1990.5	1819.8	875.0
3.0	1302.8	1136.2	511.2
4.0	953.3	774.4	334.0
5.0	740.2	561.4	233.8
6.0	596.0	424.5	171.8
7.0	492.0	331.3	131.2
8.0	413.6	265.1	103.1
9.0	352.6	216.5	83.1
10.0	304.0	179.9	68.2
正解：	表 1	表 2	表 3

形状

$$R/h = 400 \quad \nu = 0.3$$

$$E = 45000 \text{ kg/cm}^2$$

$$\rho = 1.326 \times 10^{-6} \text{ kg/sec}^2/\text{cm}^4$$

4.3 実験

3と同様の方法で行った開口のある円筒の梁状曲げ振動の実験結果を図14に示す。用いた円筒の寸法と上端の補強リングの質量を次に示す。

$$R = 10.0 \text{ cm}$$

$$h = 0.025 \text{ cm}$$

$$L = 60.0 \text{ cm}$$

$$M = 7.60 \times 10^{-4} \text{ kgsec}^2/\text{cm}$$

図中における○●が円形開口で、□■が正方形開口の場合であり、開口の大きさ ϕ (単位radian) をパラメータにとって固有振動数をプロットした。図中の点線と実線は4.1と4.2の方法による有限要素解で、要素分割数は20でいずれも正方形開口の場合の計算値である。この試験体のL/Rは6であり、図2からわかるように開口のない場合にはチモシェンコ梁理論で十分な精度をもつ範囲である。また f_0 は開口のない場合の固有振動数であり、

$$f_{0A-A} = 31.1 \text{ Hz}$$

$$f_{0B-B} = 33.5 \text{ Hz}$$

である。 f_{0A-A} と f_{0B-B} の実験値が一致しないのは円筒をシートから巻いて作製したため、のりしろ部分が出てA-A方向とB-B方向との曲げ剛性などが等しくなくなったためである。

図14よりわかるように、 $\beta = 0.5 (30^\circ)$ 程度までの計算値と実験値との相関は良好である。また、 $n = 1$ の梁状振動の場合には固有振動数が開口の大きさに強く影響を受けることがわかる。 $n \geq 2$ の場合には固有振動数は開口がかなり大きくなっても影響されることが著者¹⁰⁾らの実験で明らかになっているが、 $n = 1$ の固有振動は開口にかなり影響されるのではないかとForsbergら⁹⁾が予想していたことが実験的に確かめられた。

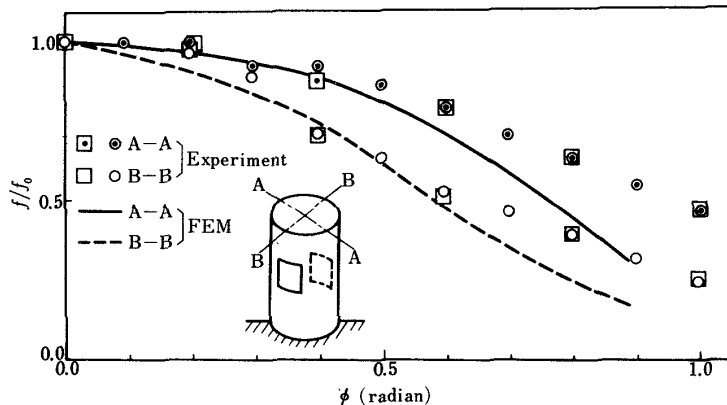


図14 開口のある円筒シェルの梁状曲げ振動の固有振動数

5 結 論

円筒シェルの梁状曲げ振動について実験と解析をおこなった。試験体は二種類で、一つは完全円筒（開口なし）であり、もう一つは開口のある円筒である。

完全円筒に対しては実用梁理論、チモシェンコ梁理論、フリューゲのシェル理論による厳密数値解を得て $R/h = 400$ の円筒について次のことがわかった。(1) $L/R = 10$ 程度以下の短い円筒に対して実用梁理論は適用できない。(2)チモシェンコ梁理論は短い円筒に対しても適用可能であるが、その場合、シェル理論との間に図2であらわされるような誤差があり、 L/R が小さい場合には誤差が大きくなる。以上の結論は R/h が400以外のものについても薄肉シェルであれば適用できると考えられる。また、薄肉で短い円筒で梁状曲げ振動を現出させるためには断面が円形を保つような拘束が必要であり、本実験の場合には固定～自由の境界条件での円筒シェルの自由端に補強リングをつけて固有振動数を求める実験をおこない、かなり短い円筒に対しても実験値と計算値との傾向が一致することを確認した。このような自由端をリングなどで補強するシェル構造物は広く用いられているが、振動については、 $n \geq 2$ の振動モードのときには補強効果があって振動数を上げるが $n = 1$ の振動モードの場合には補強効果よりもその補強物の質量のために構造物の振動数が下がる。円筒シェルの場合の例が図7である。

次に開口のある円筒（ $L/R = 6$, $R/h = 400$ ）に対して実験とチモシェンコ梁理論に基づく有限要素解析をおこない次の結論を得た。(1)梁状曲げ振動の場合は $n \geq 2$ の場合と異なって開口の振動数に対する影響が大きいことが実験と有限要素解析で明らかとなった。(2)本報告では正方形と円形の開口のある円筒シェルの対象としたが、この両者間では差異が認められず開口面積で開口の影響が処理できた。

6 参考文献

- (1) K.Forsberg ; " Axisymmetric and Beam-Type Vibrations of Thin Cylindrical Shells " AIAA J., Vol.7, No.2, 1969, PP.221-227
- (2) A.Kornecki ; " A Note on Beam-Type Vibrations of Circular Cylindrical Shells " J.of Sound and Vibration, 14 (1), 1971, PP.1-6
- (3) U.S.Lindholm, D.D.Kana and H.N.Abramson ; " Breathing Vibrations of a Circular Cylindrical Shell with an Internal Liquid " J.of the Aerospace Sciences, Vol.29, 1962, PP.1052-1059
- (4) 柴田耕一「断面の楕円化に伴う円筒殻の非線形振動に関する研究」日本建築学会論文報告集 第201号 1972, PP.41-50
- (5) W.Flügge ; STATIK UND DYNAMIK DER SCHALFN, Springer-Verlag, 3. Aufl., 1962, PP.268-277
- (6) S.P.Timoshenko ; VIBRATION PROBLEMS IN ENGINEERING, D.Van Nostrand Co., Inc., New York N.Y., 3rd Edition, 1955, PP.329-331, 335
- (7) J.Thomas and B.A.H.Abbas ; " Finite Element Model for Dynamic Analysis of Timoshenko Beam " J.of Sound and Vibration, 41 (3), 1975, PP.291-299
- (8) 小松敬治「片持ち円筒シェルの横揺れ振動」第16回構造強度に関する講演会講演集 1974, PP.79-82
- (9) F.Brogan, K.Forsberg, and S.Smith ; " Dynamic Behavior of a Cylinder with a Cutout " AIAA J., Vol.7, No.5, 1969, PP.903-911
- (10) S.Toda and K.Komatsu ; " Vibrations of Circular Cylindrical Shells with Cutouts " J. of Sound and Vibration, 52(4), 1977, pp.497-510
- (11) 皆川洋一, 半谷裕彦「回転シェルの非線形共振解析」第25回応用力学連合講演会講演集 1975, PP.91-92
- (12) K.Washizu ; VARIATIONAL METHODS IN ELASTICITY AND PLASTICITY, Pergamon Press, 2nd Edition, 1975, PP.258-261
- (13) K.Forsberg ; " Influence of Boundary Conditions on the Modal Characteristics of Thin Cylindrical Shells " AIAA J., Vol.2, No.12, 1964, PP.2150-2157

付 録

片持ち円筒シェルの横揺れ振動数を求める近似式⁸⁾

図1のような円筒の自由端に補強リングを持つ片持ち円筒筒を考え、次のように変位を仮定する。

$$\begin{aligned} u &= [c_1(\xi^2 - 2\xi)] \cos n\theta \\ v &= -[c_2(\xi^4 - 4\xi^3) + c_3\xi^2] / n \sin n\theta \\ w &= [c_2(\xi^4 - 4\xi^3) + c_3\xi^2] \cos n\theta \end{aligned} \quad (A-1)$$

ただし、 $\xi = x/L$, $n \geq 1$ である。

w には片持ち梁が等分布荷重を受けたときのたわみ曲線($\xi^4 - 4\xi^3 + 6\xi^2$)にリング等によるたわみの修正項 ξ^2 を加えたものを用い、 v には θ 方向の面内歪 ϵ_θ が0になるように変位を仮定した。

シェルの歪変位関係式には フリュージェ の理論を用い、補強リングの歪としては補強リングを曲り梁として θ 方向の面内歪とねじれだけを考える。ここでリングの断面形状

は任意であるが、パラメーターを少なくするため一辺 d の正方形断面をもったリングをシェルの内側につけることにする。

シェルとリングのポテンシャルエネルギー π を計算し、さらにエネルギーの各項の大きさを比較してエネルギー表示式を簡略化すると $n = 1$ の場合には

$$\pi = \frac{1}{2} \frac{Eh\pi}{1-\nu^2} [U_S] - \frac{1}{2} w^2 \rho h \pi L^2 [K_S + \left(\frac{R}{h}\right) \left(\frac{d}{R}\right)^2 K_R]$$

- ここに U_S : シェルの歪エネルギー
- K_S : シェルの運動エネルギー
- K_R : リングの運動エネルギー

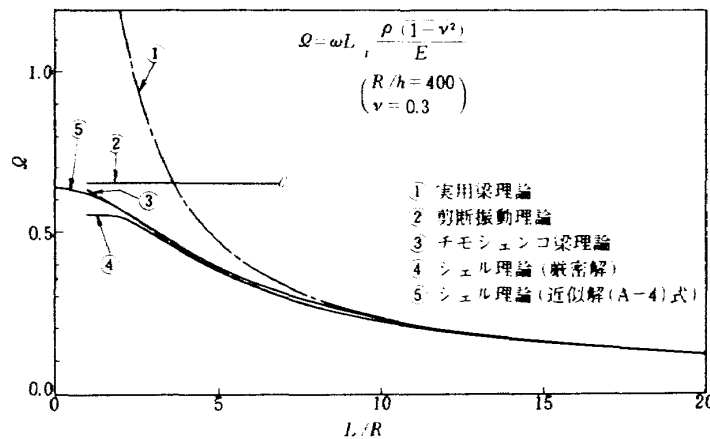
となる。最小ポテンシャルエネルギーの原理を用いて π を C_1, C_2, C_3 で最小化する。さらに無次元化振動数 Q を $Q^2 = w^2 \rho (1-\nu^2) L^2 / E$ (A-3) で定義すれば梁理論の知識から $Q < 1$ であるから $(Q^2)^2$ を1に比較して無視し、結局 π を最小化した方程式を Q について解くと

$$Q^2 = \frac{0.9856}{2.4106 + 0.1565 \left(\frac{L}{R}\right)^2 + \left(\frac{d^2}{Lh}\right) \{ 5.8592 + 0.6624 \left(\frac{L}{R}\right)^2 \}} \quad (A-4)$$

を得る。この式が片持ち円筒シェルの $n = 1$ の横揺れ振動の第1次振動モードの振動数をあらわす式である。この式から片持ちの補強リング付円筒は $n = 1$ の場合、第1近似としてはリングの質量が固有振動数を低下させることがわ

かる。

図7の一点鎖線はこの式を用いて解いたものである。また表3の結果とこの近似式($d = 0$ としたもの)によって得られる振動数を比較したものを付図1に示す。



付図1 各種振動理論の計算精度の比較

航空宇宙技術研究所報告 502号

昭和 52 年 6 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)●182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2~27~12
