

UDC 518.61:
532.526:
533.6.011.5

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-503

超音速粘性・非粘性干渉を含む圧縮性剥離境界層の解法

河合伸坦

1977年8月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

超音速粘性・非粘性干渉を含む圧縮性剝離境界層の解法*

河合伸坦**

Solutions for Compressible Separated Boundary Layers Including Supersonic Interaction

By Nobuhiro KAWAI

ABSTRACT

This report first presents finite difference solutions for compressible laminar boundary-layer equations for flows with separation and reattachment. In order to avoid separation singularity, an inverse technique is used in which the displacement thickness is prescribed and the pressure is derived from the resulting solution. To eliminate unknown pressure from the whole formulation, a vorticity transfer equation and a modified stream function are introduced. To save computation time and storage, a forward marching procedure is adopted, for which streamwise convection terms must be neglected if the flow is reversed. Solutions are obtained by applying the Crank-Nicolson scheme and imposing certain conditions for convergence.

A numerical method is next presented for calculation of interaction between outer supersonic flow and laminar boundary-layer flow including separation and reattachment. An interaction equation is obtained by equating the pressure gradient deduced from the supersonic linear theory and that from the momentum equation evaluated at the wall. The interaction equation is modified by adding an artificial-time term to it, and is solved by applying the alternating direction implicit scheme and using the foregoing inverse technique. Results are shown for boundary-layer flow with reverse flow regions over smooth compression ramps.

1. まえがき

流れの剝離は、飛行物体のまわりにしばしば起こり表面摩擦、圧力分布、熱伝達といった空気力学的特性に大きな変化を起こすから、重要な現象である。剝離流の問題を扱う一つの方法は、非定常ナビア・ストークス方程式を陽的差分法によって解く方法である。この方法は種々の剝離問題に広く適用できるけれど、収束のために必要な CFL 条件によって時間刻みが非常に小さく制限されるから、定常解に達するまで膨大な計算時間を費やす。従ってこの方法は、最新の高速コンピュータをもってしても非実用的である。そこでいくつかの剝離問題に対しては、境界層方程式を緩和法で解く方法が最近研究されている。その解は短い計算時間で収束し、精度も十分である。

境界層方程式を解く従来の方法は、圧力分布が規定される順解法である。しかしながら、順解法による解はい

ったん剝離が検出されると発散してしまう事は良く知られている。剝離での特異性に基くこの計算困難性は逆解法によって避けることができる。逆解法とは、順解法では計算結果として得られるはずの表面摩擦、境界層端での垂直速度成分または排除厚を逆に規定し、一方規定されるはずの圧力分布を逆に計算結果として得るような解法である。干渉問題に応用しようとするなら、排除厚規定法は其中最も直接的かつ便利である。なぜなら、排除厚さを物体形状に加えるような方法で粘性・非粘性問題は通常定式化されるからである。また、支配方程式から未知な圧力項を消去する方が望ましい。これは運動量の式のかわりに渦度輸送式を使うことよりできる。排除厚さを規定し渦度輸送式を用いる逆解法は、Catherall と Mangler¹⁾が始めた。Carter²⁾も排除厚さ規定の逆解法を行ったが、その中で彼は変形流れ関数を導入して未知な境界端速度の消去を計り、流れの向きを考慮に入れるように逆流領域における差分法を修正した。Carter と Wornom³⁾は前進的解法を逆解法に採り入れた。これは、全体的解法のように全格子点を記憶し全格子点に対し計

* 昭和52年6月20日 受付

** 空気力学第二部

算を並列に進めるといった必要がないから、計算に対する容量および時間を相当節約することができる。Carter と Wornom⁴⁾ は乱流に対して境界層逆解法を行った。これらすべての研究は非圧縮の境界層に対してのみなされているから、圧縮性の境界層へ拡張する必要が生じる。そこで本報告の第2節から8節において、圧縮性層流境界層方程式を計算するための排除厚を規定する逆解法について述べられる。

もう一つの問題は、粘性・非粘性干渉を完全に記述するためにはどのように境界層逆解法と非粘性解とを組み込むかという事である。Carter と Wornom⁴⁾ は非圧縮の粘性・非粘性干渉を解くために、境界層の逆解法およびポテンシャル流の逆な解を使った。Werle と Vatsa^{5), 6)} は干渉方程式に人工時間項を導入し、交互方向陰解法 (ADI法) を適用する干渉超音速境界層の解法を考案出した。第9節では、Werle と Vatsa の方法を使い、本報告の逆解法の応用として、超音速境界層に対する干渉解法を述べる。

2. 支配方程式

剝離領域が小さくレイノルズ数が十分に大きい問題に限定すると、ナビア・ストークス方程式は剝離流に対しても近似的に境界層方程式になる。ということが漸近的解析⁷⁾によって示されている。この事実はいくつかの数値計算^{2), 6)}によっても支持されている。

便宜上変数を次の定義により正規化し引伸ばす。

$$R_e = \frac{\rho_\infty u_\infty c}{\mu_\infty}, \quad \bar{\rho} = \frac{\rho}{\rho_\infty}, \quad \bar{\mu} = \frac{\mu}{\mu_\infty}$$

$$\bar{x} = \frac{x}{c}, \quad \bar{y} = \frac{y}{c} \sqrt{R_e}, \quad \bar{u} = \frac{u}{u_\infty}, \quad \bar{v} = \frac{v}{u_\infty} \sqrt{R_e}$$

$$\bar{p} = \frac{p}{\rho_\infty u_\infty^2}, \quad \bar{H} = \frac{H}{H_\infty}, \quad E_\infty = \frac{u_\infty^2}{2H_\infty} \quad (2.1)$$

そうすると、圧縮性層流境界層方程式を無次元の形で次のように書くことができる。

$$(\bar{\rho} \bar{u})_{\bar{x}} + (\bar{\rho} \bar{v})_{\bar{y}} = 0 \quad (2.2)$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \bar{u}_{\bar{x}} + \bar{\rho} \bar{v} \bar{u}_{\bar{y}} = -\bar{p}_{\bar{x}} + (\bar{\mu} \bar{u}_{\bar{y}})_{\bar{y}} \quad (2.3)$$

$$\bar{\rho} \bar{u} \bar{H}_{\bar{x}} + \bar{\rho} \bar{v} \bar{H}_{\bar{y}} = \frac{1}{P_r} (\bar{\mu} \bar{H}_{\bar{y}})_{\bar{y}}$$

$$+ 2E_\infty \left(1 - \frac{1}{P_r}\right) (\bar{\mu} \bar{u} \bar{u}_{\bar{y}})_{\bar{y}} \quad (2.4)$$

ただし簡単のためにプラントル数 P_r は一定と仮定した。

これらの式に課せられる境界条件は

$$\bar{u} = 0, \quad \bar{v} = 0, \quad \bar{H} = \bar{H}_w \quad \text{at} \quad \bar{y} = 0 \quad (2.5)$$

$$\bar{u} \rightarrow \bar{u}_e, \quad \bar{H} \rightarrow 1 \quad \text{as} \quad \bar{y} \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

である。ただし \bar{u}_e と \bar{H}_w はそれぞれ境界層端での速度成分および壁面での全エンタルピをさす。変数の上に付けている横棒は記載がめんどうなので、今後すべて落すことにする。

これらの式を Carter²⁾の方法にならって変形しよう。まず流れ関数 Ψ を通常行われるように

$$\Psi_y = \rho u, \quad \Psi_x = -\rho v \quad (2.7)$$

として導入する。(2.7)により連続の式(2.2)は自動的に満たされる。渦度 ω を普通の定義から $-v_x$ の項を落して、

$$\omega = u_y \quad (2.8)$$

と定義する。こうすると、 y に関する運動量式(2.3)の微分は次のような渦度輸送方程式になる。

$$(\rho u)_y u_x - (\rho u)_x \omega + \rho u \omega_x - \Psi_x \omega_y = (\mu \omega)_{yy} \quad (2.9)$$

ここで、逆解法手順では未知量である圧力傾斜項を微分操作によって消去した事に注目されたい。さらに未知な速度 u_e を境界条件から消去するために、変形流れ関数 ψ を

$$\psi = \Psi - \rho u (y - \delta) \quad (2.10)$$

として導入する。ただし δ は排除厚であり、

$$\delta = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy \quad (2.11)$$

のように定義される。それから流れ関数についての境界条件を(2.5b), (2.6a)から

$$\psi = 0 \quad \text{at} \quad y = 0$$

$$\psi \rightarrow 0 \quad \text{as} \quad y \rightarrow \infty \quad (2.12)$$

と導く。(2.10)と(2.8)によって、流れ関数の定義式(2.7a)は次のようになる。

$$\psi_y = (\delta - y)(\rho_y u + \rho \omega) \quad (2.13)$$

境界層厚さが剝離領域上で厚くなるのに対応して適当な計算メッシュを得るために、独立変数を次のように変換する。

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{y}{\delta} \quad (2.14)$$

このスケーリングで(2.10)は、

$$\Psi = \psi + \rho u \delta (\eta - 1) \quad (2.15)$$

となる。同様に(2.9), (2.13), (2.8)および(2.4)は

$$\delta u (\rho_\eta u_\xi - \rho_\xi \delta \omega) + \delta^2 \rho u \omega_\xi - \delta \Psi_\xi \omega_\eta = (\mu \omega)_{\eta\eta} \quad (2.16)$$

$$\psi_\eta = \delta (1 - \eta) (\rho_\eta u + \delta \rho \omega) \quad (2.17)$$

$$u_\eta = \delta \omega \quad (2.18)$$

$$2E_\infty \left(\frac{1}{P_r} - 1\right) \delta (\mu u \omega)_\eta + \delta^2 \rho u H_\xi - \delta \Psi_\xi H_\eta$$

$$= \frac{1}{P_r} (\mu H_\eta)_\eta \quad (2.19)$$

となる。そして境界条件 (2.5), (2.6) および (2.12) は

$$\psi = 0, u = 0, H = H_w \quad \text{at } \eta = 0 \quad (2.20)$$

$$\psi \rightarrow 0, \omega \rightarrow 0, H \rightarrow 1 \quad \text{as } \eta \rightarrow \infty \quad (2.21)$$

となる。式 (2.16) から (2.19) は (2.15) を補助式として、4 個の未知数 ω, ψ, u, H に対する偏微分方程式の完全なる組を構成する。そしてその境界条件は (2.20) および (2.21) である。この定式化は未知パラメータ、すなわち圧力傾斜または境界層端速度、を含まない点に注目されたい。 ω に対する境界条件 (2.21b) を導くのに、 u の漸近的性質 (2.6a) を用いた。

上記の方程式を各繰返しステップで解いたあとで、エンタルピ h を関係式

$$h = (1 + 0.2 M_\infty^2) (H - E_\infty u^2) \quad (2.22)$$

から計算する。その次に、粘性係数をサザーランドの公式

$$\mu = h^{\frac{3}{2}} \frac{1 + \tilde{s}}{h + \tilde{s}}, \quad \tilde{s} = \frac{117}{T_\infty (^{\circ}K)} \quad (2.23)$$

によって計算する。密度を計算するには、境界層を横切って圧力は一定と仮定し、完全気体の法則を使う。そうすると

$$\rho = \rho_e h_e / h \quad (2.24)$$

を得る。ここで ρ_e は等エンタルピの関係式などによって計算すればよい。

3. 数値計算法 (手法 I)

支配方程式 (2.16) から (2.19) は非線型な性質をもつから、線型化および繰返し計算が必要である。(2.16) の δu ($\rho_\eta u_\xi - \rho_\xi \delta \omega$) 項、(2.17) の $\rho_\eta u$ 項ならびに (2.19) 式は非圧縮の定式化の中には現れなかったから、どのように線型化するかに注意を払わねばならない。擬似線型化法によると、非圧縮の場合には解の急速な収束が得られたが、著者の試みの限りでは、圧縮性では収束解が得られなかった。成功を修めた線型化の一つは、(2.16) から (2.19) を次のように書き直すことによって表現される。

$$\delta u (\rho_\eta u_\xi^{q-1} - \rho_\xi \delta \omega^{q-1}) + \delta^2 \rho u \omega_\xi^q - \delta \Psi_\xi \omega_\eta^q = (\mu \omega^q)_{,\eta} \quad (3.1)$$

$$\psi_\eta^q = \delta (1 - \eta) (\rho_\eta u^q + \delta \rho \omega^q) \quad (3.2)$$

$$u_\eta^q = \delta \omega^q \quad (3.3)$$

$$2 E_\infty \left(\frac{1}{P_\tau} - 1 \right) \delta (\mu u \omega^{q-1})_{,\eta} + \delta^2 \rho u H_\xi^q - \delta \Psi_\xi H_\eta^q = \frac{1}{P_\tau} (\mu H_\eta^q)_{,\eta} \quad (3.4)$$

ただし q は繰返しステップ番号を示す。そして $q-1$ の上添字が付くべきいくつかの変数について、 $q-1$ が省かれている。この線型化によると、Carter²⁾ が導いた非圧縮の線型化式とよく似た式になっている点に注目されたい。御覧のとおり (2.16) から (2.19) は放物型の偏微分方程式に似ているから、もしも $\delta^2 \rho u$ が負ならば ξ 方向の初期値問題として不適切になるであろう。従って ξ の増す方向のみに計算を進めれば、逆流において数値解が不安定になり発散するであろう。そこで不安定性を避けるために、逆流に対して $\delta^2 \rho u \omega_\xi$ および $\delta^2 \rho u H_\xi$ の項を局所的に落とす前進的解法をここで採用する。本報告では全体の解法は使わない。次の節でこの不安定性について詳しく議論する。

対流項を局所的に無視した線型化微分方程式は、メッシュ間隔を $\xi = i \Delta \xi, \eta = j \Delta \eta$ のように一定にして、差分表現に置き換える。順流および逆流のどちらにおいても、点 $\xi = \xi_{i-\frac{1}{2}}, \eta = \eta_j$ を中心とするクランク・コルソソ法を適用する。簡単のために添字 i を落して書くと、(3.1) から (3.4) はそれぞれ次のように差分表現することができる。

$$A_j \omega_{j-1}^q + B_j \omega_j^q + C_j \omega_{j+1}^q = D_j \quad (3.5)$$

$$\psi_j^q = \psi_{j+1}^q + E_j (\omega_j^q + \omega_{j+1}^q) + F_j (u_j^q + u_{j+1}^q) \quad (3.6)$$

$$u_{j+1}^q = u_j^q + G (\omega_j^q + \omega_{j+1}^q) \quad (3.7)$$

$$\hat{A}_j H_{j-1}^q + \hat{B}_j H_j^q + \hat{C}_j H_{j+1}^q = \hat{D}_j \quad (3.8)$$

ここで、

$$A_j = -\frac{1}{2} (C_\eta + \mu_{j-1}), \quad B_j = \mu_j + C_\xi, \quad (3.9, 10)$$

$$C_j = \frac{1}{2} (C_\eta - \mu_{j+1}) \quad (3.11)$$

$$D_j = -A'_j \omega_{i-1, j-1} - B'_j \omega_{i-1, j} - C'_j \omega_{i-1, j+1} + \Delta \eta^2 (\delta u)_{i-\frac{1}{2}, j} (\delta \rho_\xi \omega^{q-1} - \rho_\eta u_\xi^{q-1})_{i-\frac{1}{2}, j} \quad (3.12)$$

$$E_j = \frac{\Delta \eta \delta^2}{4} (\eta_{j+\frac{1}{2}} - 1) (\rho_j + \rho_{j+1}), \quad (3.13)$$

$$F_j = \frac{\delta}{2} (\eta_{j+\frac{1}{2}} - 1) (\rho_{j+1} - \rho_j), \quad G = \frac{\Delta \eta \delta}{2} \quad (3.14, 15)$$

$$\hat{A}_j = -\frac{1}{2} \left(C_\eta + \frac{\mu_{j-\frac{1}{2}}}{P_\tau} \right), \quad (3.16)$$

$$\hat{B}_j = C_\xi + \frac{\mu_{j-\frac{1}{2}} + \mu_{j+\frac{1}{2}}}{2 P_\tau} \quad (3.17)$$

$$\hat{C}_j = \frac{1}{2} \left(C_j - \frac{\mu_{j+\frac{1}{2}}}{P_r} \right) \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} D_j = & -\hat{A}'_j H_{i-1j-1} - \hat{B}'_j H_{i-1j} - \hat{C}'_j H_{i-1j+1} \\ & + C_\xi \left[(\mu u \omega^{q-1})_{j+1} - (\mu u \omega^{q-1})_{j-1} \right. \\ & \left. + (\mu u \omega)_{i-1j+1} - (\mu u \omega)_{i-1j-1} \right] \end{aligned} \quad (3.19)$$

そして,

$$C_\xi = \frac{\Delta \eta^2}{2 \Delta \xi} (\delta^2 \rho_j u_j + \delta^2_{i-1} \rho_{i-1j} u_{i-1j}) \quad (3.20)$$

$$C_j = \frac{-\Delta \eta}{4 \Delta \xi} (\delta + \delta_{i-1}) (\Psi_j - \Psi_{i-1j}) \quad (3.21)$$

$$C_\xi = \frac{E_\infty \Delta \eta}{2} \left(1 - \frac{1}{P_r} \right) (\delta + \delta_{i-1}) \quad (3.22)$$

$$A'_j = -\frac{1}{2} (C_j + \mu_{i-1j-1}) \quad (3.23)$$

$$B'_j = \mu_{i-1j} - C_\xi \quad (3.24)$$

$$C'_j = \frac{1}{2} (C_j - \mu_{i-1j+1}) \quad (3.25)$$

$$\hat{A}'_j = -\frac{1}{2} \left(C_j + \frac{\mu_{i-1j-\frac{1}{2}}}{P_r} \right) \quad (3.26)$$

$$\hat{B}'_j = \frac{\mu_{i-1j-\frac{1}{2}} + \mu_{i-1j+\frac{1}{2}}}{2 P_r} - C_\xi \quad (3.27)$$

$$\hat{C}'_j = \frac{1}{2} \left(C_j - \frac{\mu_{i-1j+\frac{1}{2}}}{P_r} \right) \quad (3.28)$$

しかしながら, もしも流れが局所的に逆流ならば, (C_ξ の符号によって検出される。) C_ξ に対する式(3.20)は変更しなければならぬ。すなわち,

$$C_\xi < 0 \quad \text{ならば,} \quad C_\xi = 0 \quad \text{と置く。} \quad (3.29)$$

そうすると, 不安定性なしに ξ が増す方向に計算を進めることができる。

この段落内では差分式(3.5)から(3.6)を互いに連鎖してないものと見なそう。それらの全系についての厳密な議論はとて複雑だからである。そうすると優対角性

$$|B_j| > |A_j| + |C_j| \quad (3.30)$$

を課して, 丸め誤差が増大しないようにせねばならぬ。しかし不等式(3.30)はそのままで必ずしも満足されない。そこで, 代数方程式の繰返し解によくなされるように, 非負パラメータ α を B_j に加えなければならぬ。従って(3.5)は

$$A_j \omega_{j-1}^q + (B_j + \alpha) \omega_j^q + C_j \omega_{j+1}^q = D_j + \alpha \omega_j^{q-1} \quad (3.31)$$

によって置き換える。(3.31)を(3.5)と比べると, 相異点は $\alpha(\omega_j^q - \omega_j^{q-1})$ の項である。これは人工時間項 $\Delta t \alpha \partial \omega / \partial t$ の差分表現として説明することができる。 α の値は

$$\alpha = \alpha_0 + |\rho_j \Delta \eta| \quad (3.32)$$

によって与えられる。ただし α_0 は

$$|C_j| > 1 \quad \text{ならば,} \quad \alpha_0 = |C_j| \quad (3.33)$$

$$|C_j| \leq 1 \quad \text{ならば,} \quad \alpha_0 = 0 \quad (3.34)$$

によって決められる。パラメータ α_0 は, 非圧縮と圧縮のどちらにも必要なものである。Carter²⁾ は C_j のどのような値に対しても(3.33)式だけを使用した。しかし上記のように, C_j の絶対値に応じて公式を変える方がより良い収束を得ることができる。マッハ数が高くなる程, その収束改良度は顕著になる。非圧縮の定式に対しては, (3.33)と(3.34)は優対角性を満たすだけでなく, ノイマンの安定条件をも満たす。エネルギー差分式(3.8)も同様

$$\hat{A}_j H_{j-1}^q + (\hat{B}_j + \hat{\alpha}) H_j^q + \hat{C}_j H_{j+1}^q = \hat{D}_j + \hat{\alpha} H_j^{q-1} \quad (3.35)$$

によって置き換える。ただし $\hat{\alpha}$ は

$$\hat{\alpha} = \alpha_0 + |C_\xi / P_r| \cdot (|\mu_{j-1} u_{j-1}| + |\mu_{j+1} u_{j+1}|) \quad (3.36)$$

によって与えられる。それから便宜上($B_j + \alpha$)を B_j に, ($D_j + \alpha \omega_j^{q-1}$)を D_j に, そして($\hat{B}_j + \hat{\alpha}$)を \hat{B}_j に, ($\hat{D}_j + \hat{\alpha} H_j^{q-1}$)を \hat{D}_j にそれぞれ置き換える。そうすると(3.31)と(3.35)はそれぞれ(3.5)と(3.8)に戻る。

代数方程式(3.5)から(3.8)を解くにあたり, 視察により(3.8)は他と連結してないことがわかる。それに反して, (3.5), (3.6)および(3.7)は連結しているから, いっしょに解かなければならない。ただし非圧縮性境界層を解く場合には, 係数 F_j が零であるから, (3.7)に相当する式は他の2式とは別に解くことができた点に注意。連結した式を解くために, トーマス法を次のように修正し応用する。未知数についての漸化式を

$$\omega_j^q = D'_j + C'_j \omega_{j-1}^q \quad (3.37)$$

$$\psi_j^q = K_j + L_j \omega_{j-1}^q + M_j u_j^q \quad (3.38)$$

として置くならば, 未定係数についての漸化式は, (3.37)を(3.5)に代入することにより, 次のようになる。

$$C'_j = -A_j / (B_j + C_j C'_{j+1}) \quad (3.39)$$

$$D'_j = (D_j - C_j D'_{j+1}) / (B_j + C_j C'_{j+1}) \quad (3.40)$$

また他の未定係数についての漸化式は, (3.5), (3.6),

(3.7), (3.37)および(3.38)を組み合わせることにより

$$K_j = K_{j+1} + e_j D'_{j+1} + l_j D'_j \quad (3.41)$$

$$L_j = l_j C'_j \quad (3.42)$$

$$M_j = M_{j+1} + 2F_j \quad (3.43)$$

のように得られる。ただし

$$e_j = (M_{j+1} + F_j)G + E_j \quad (3.44)$$

$$l_j = L_{j+1} + e_j (1 + C'_{j+1}) \quad (3.45)$$

である。境界層端の境界条件から、

$$D'_m = C'_m = K_m = L_m = M_m = 0 \quad (3.46)$$

を得る。ただし m は添字 j の境界層端での値である。

(3.46)を使って境界層端から計算を始めると、未定係数 C'_j, D'_j, K_j, L_j および M_j のすべての値は、(3.39)から(3.45)によって逐次に壁面へと計算することができる。

壁での渦度 ω_1 はそこでの境界条件(2.20a)から

$$\omega_1 = - \frac{K_2 + e_1 D'_2}{L_2 + e_1 (1 + C'_2)} \quad (3.47)$$

として与えられる。さて ω_1 とすべての未定係数が既知となったから、変数 ω_j, ψ_j および u_j は(3.37), (3.38)および(3.7)を用いて、未定係数の計算とはちょうど逆に、壁から境界層端へと逐次計算することができる。残っているのは(3.8)の計算法であるが、(3.8)は単純な三項方程式であり境界条件が両端で与えられるから、その計算法は良く知られておりここでは記載しない。 ω, ψ, u, H だけでなくそれらに従属する ρ, μ に対しても0.5の緩和係数を掛けるのが適当であることが数値計算上の経験からわかった。

4. 前進的解法の条件

前進的解法手順は多くの境界層計算に使われる。なぜならその手順は全体的繰返し解法手順より少ない計算容量および時間で済むからである。その手順が適切である理由は、境界層方程式の系が放物型のような偏微分方程式系である事にある。多くの数値計算研究者が経験したところによると、ある条件を課しないとその手順は逆流に対して適用できなくなる。ある人は、逆流領域において流れ方向の対流項を局部的に落とすことにより成功を修めた。⁸⁾ またある人は、正の係数をもつ人工的な対流項をさらに付け加えなければならなかった。⁸⁾ どの場合にも、数学の分野では良く知られた問題であるのに、今までのところこれらの条件について数学的な議論はされてない。

前進的解法手順を採る限り、支配方程式(2.16)から(2.19)の系は ξ 方向の初期値問題を構成するものとみる

ことができる。初期値は相似解で規定すればよいであろう。一般的に言って、初期値問題が「不適切」であれば、その数値解は発散する。そして「適切」であるか「不適切」であるかは Hadamard の条件で調べることができる。⁹⁾

渦度輸送式(2.16)とエネルギー式(2.19)は次のように書き直すことができる。

$$a_0 \int_0^{\eta} \omega_\xi d\eta + a_1 \omega + a_2 \omega_\xi + a_3 \omega_\eta = \mu \omega_{\eta\eta} \quad (4.1a)$$

$$(b_1 \omega)_\eta + b_2 H_\xi + b_3 H_\eta = b_4 H_{\eta\eta} \quad (4.1b)$$

ただし

$$a_0 = \delta^2 \rho_\eta u, \quad a_1 = -\delta^2 \rho_\xi u - \mu_{\eta\eta} \quad (4.2a, b)$$

$$a_2 = \delta^2 \rho u, \quad a_3 = -\delta \Psi_\xi - 2\mu_\eta \quad (4.2c, d)$$

$$b_1 = 2E_\infty \left(\frac{1}{P_r} - 1 \right) \delta \mu u, \quad b_2 = \delta^2 \rho u \quad (4.2e, f)$$

$$b_3 = -\delta \Psi_\xi - \frac{\mu_\eta}{P_r}, \quad b_4 = \frac{\mu}{P_r} \quad (4.2g, h)$$

(4.1)を線型化するために、全ての係数 $a_0, a_1 \dots b_4$ は一定であると仮定する。 ω と H のフーリエ変換をそれぞれ $\tilde{\omega}, \tilde{H}$ とすると、(4.1)から

$$\frac{a_0}{i\phi} \tilde{\omega}_\xi + a_1 \tilde{\omega} + a_2 \tilde{\omega}_\xi + a_3 i \phi \tilde{\omega} = -\mu \phi^2 \tilde{\omega} \quad (4.3a)$$

$$b_1 i \phi \tilde{\omega} + b_2 \tilde{H}_\xi + b_3 i \phi \tilde{H} = -b_4 \phi^2 \tilde{H} \quad (4.3b)$$

を得る。ただし ϕ は波数を表わす。これらの方程式は次のようにマトリクス形で書くことができる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{d\xi} = \mathbf{L}\mathbf{v} \quad (4.4)$$

ただし

$$\mathbf{v} = \begin{pmatrix} \tilde{\omega} \\ \tilde{H} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{L} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ l_3 & l_2 \end{pmatrix} \quad (4.5a, b)$$

そして

$$l_1 = \frac{-(a_1 + a_3 i \phi + \mu \phi^2)}{(a_0 / i \phi) + a_2} \quad (4.5c)$$

$$l_2 = \frac{-(b_3 i \phi + b_4 \phi^2)}{b_2} \quad (4.5d)$$

$$l_3 = -b_1 i / b_2 \quad (4.5e)$$

である。マトリクス \mathbf{L} の固有値は l_1 と l_2 であるから、(4.4)の基本解は $\exp(l_1 \xi)$ および $\exp(l_2 \xi)$ である。故に(4.4)の逆フーリエ変換が存在する条件は、すべての ϕ に対して正定数 P_k, C_k に対し

$$\mathcal{P}_o(l_k) \leq P_k \log(|\phi| + 1) + C_k \quad (k=1,2) \quad (4.6)$$

である。逆フーリエ変換によって(4.4)から(4.1)を導

くことができるから、条件(4.6)は(4.1)の解の存在の条件と等価である。 l_k の実数部はそれぞれ

$$\mathcal{R}_e(l_1) = \frac{\phi^2 [a_0 a_3 - a_2 (a_1 + \phi^2 \mu)]}{a_0^2 + \phi^2 a_2^2} \quad (4.7a)$$

$$\mathcal{R}_e(l_2) = -\frac{\phi^2 b_4}{b_2} \quad (4.7b)$$

であるから、 $|\phi|$ が有限な時には P_k および C_k を適当に選べば(4.6)は無条件に満足される。しかし $|\phi|$ が無限に大きい時に不等式(4.6)が満たされるためには、 μ と b_4 が正である事に注意して、

$$a_2 > 0, \quad b_2 > 0 \quad (4.8a, b)$$

が成り立たなければならない。あるいは定義(4.2c, f)を思い起こすと、(4.8)はまとめられ、

$$\delta^2 \rho u > 0 \quad (4.9)$$

になる。ここで(4.9)の左辺は C_ϵ に比例することにより注意。

いま示した不等式(4.9)はHadamardの条件といい、初期値問題が適切であるための必要十分条件であることが証明されている。実際の計算において条件(4.9)が破られると、それは逆流領域で起こるのであろうが、解が発散するから、人為的に強制的に(4.9)を満たすように値を与えなければならない。即ち、もしも $\delta^2 \rho u$ が非正であれば、その値を、打ち切り誤差程度のある小さな正の定数で置き換える。この係数変更に基づく解の誤差は小さい。なぜなら $\delta^2 \rho u$ が負の時絶対値は小さいからである。数値計算例²⁾³⁾によってもこの変更の妥当性は支持されている。

5. ノイマン安定条件

支配方程式の解が収束するための条件をこの節で述べる。

手法Iはさておいて、支配方程式の有限差分表現はいくらか一般的な形で次のように書くことができる。

$$A_j \omega_{j-1}^q + (B_j + \alpha) \omega_j^q + C_j \omega_{j+1}^q + R_j u_j^q = D_j + (\bar{B}_j + \alpha) \omega_j^{q-1} + \bar{R}_j u_j^{q-1} \quad (5.1a)$$

$$-\psi_j^q + \psi_{j+1}^q + E_j (\omega_j^q + \omega_{j+1}^q) + F_j (u_j^q + u_{j+1}^q) = 0 \quad (5.1b)$$

$$u_j^q - u_{j+1}^q + G (\omega_j^q + \omega_{j+1}^q) = 0 \quad (5.1c)$$

$$\hat{R}_{j+1} \omega_{j+1}^q - \hat{R}_{j-1} \omega_{j-1}^q + \hat{A}_j H_{j-1}^q + (\hat{B}_j + \hat{\alpha}) H_j + \hat{C}_j H_{j+1}^q = \hat{D}_j + \hat{\alpha} H_j^{q-1} \quad (5.1b)$$

ただし q は繰返しステップ数を指し、 α と $\hat{\alpha}$ は正であり、

$$A_j = -\frac{1}{2} (\mu_{j-1} + C_\eta), \quad B_j = \mu_j + C_\epsilon, \quad C_j = \frac{1}{2} (C_\eta - \mu_{j+1}),$$

$$\hat{A}_j = -\frac{1}{2} \left(C_\eta + \frac{\mu_{j-\frac{1}{2}}}{P_r} \right), \quad \hat{B}_j = C_\epsilon + \frac{\mu_{j-\frac{1}{2}} + \mu_{j+\frac{1}{2}}}{2P_r}$$

$$\hat{C}_j = \frac{1}{2} \left(C_\eta - \frac{\mu_{j+\frac{1}{2}}}{P_r} \right) \quad (5.2)$$

である。 ω, ψ, u および H のフーリエ係数を成分とする列ベクトルを \mathbf{x} とすると、フーリエ係数の単成分を(5.1)に代入することにより

$$\mathbf{N} \mathbf{x}^q = \mathbf{P} \mathbf{x}^{q-1} \quad (5.3)$$

が得られる。ただし

$$\mathbf{N} = \begin{pmatrix} A_j \bar{e}^{-i\phi} + B_j + \alpha + C_j \bar{e}^{i\phi}, & 0, & R_j, & 0 \\ -1 + e^{i\phi}, & E_j (1 + e^{i\phi}), & F_j (1 + e^{i\phi}), & 0 \\ G_j (1 + e^{i\phi}), & 0, & 1 - e^{i\phi}, & 0 \\ \hat{R}_{j+1} \bar{e}^{i\phi} - \hat{R}_{j-1} \bar{e}^{-i\phi}, & 0, & 0, & \hat{A}_j \bar{e}^{-i\phi} + \hat{B}_j + \hat{\alpha} + \hat{C}_j \bar{e}^{i\phi} \end{pmatrix} \quad (5.4a)$$

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \bar{B}_j + \alpha & 0 & \bar{R}_j & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{\alpha} \end{pmatrix} \quad (5.4b)$$

であり、 $\phi = k \Delta \eta$ 、 k は波数である。マトリクス \mathbf{N} の零成分を考慮して \mathbf{N} の行列式および逆行列を導出すると、

$$|\mathbf{N}| = n_{22} n_{44} (n_{11} n_{33} - n_{31} n_{13}) \quad (5.5)$$

$$|\mathbf{N}| \mathbf{N}^{-1} = \begin{pmatrix} m_1 & 0 & * & 0 \\ m_2 & * & * & 0 \\ m_3 & 0 & * & 0 \\ m_4 & 0 & * & m_5 \end{pmatrix} \quad (5.6)$$

となる。ただし

$$m_1 = n_{22} n_{33} n_{44}, \quad m_2 = (n_{31} n_{23} - n_{21} n_{33}) n_{44},$$

$$m_3 = -n_{31} n_{22} n_{44}, \quad m_4 = -n_{41} n_{22} n_{33}$$

$$m_5 = n_{22} (n_{11} n_{33} - n_{31} n_{13}) \quad (5.7)$$

であり、 $n_{11}, n_{21}, \dots, n_{44}$ は \mathbf{N} の成分であり、また*印は非零成分を表す。従って増幅マトリクス \mathbf{M} は

$$|\mathbf{N}| \mathbf{M} = |\mathbf{N}| \mathbf{N}^{-1} \mathbf{P} = \begin{pmatrix} P_{11} m_1 & 0 & P_{13} m_1 & 0 \\ P_{11} m_2 & 0 & P_{13} m_2 & 0 \\ P_{11} m_3 & 0 & P_{13} m_3 & 0 \\ P_{11} m_4 & 0 & P_{13} m_4 & P_{44} m_5 \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

となる。ただし P_{11}, \dots, P_{44} は \mathbf{P} の成分である。 \mathbf{M} の固有値を λ とし、 $\bar{\lambda} = |\mathbf{N}| \lambda$ とおくと、固有多項式は(5.8)から

$$[(P_{11}m_1 - \bar{\lambda})(P_{18}m_8 - \bar{\lambda}) - P_{11}P_{18}m_1m_8] \bar{\lambda}(P_{44}m_5 - \bar{\lambda}) = 0 \quad (5.9)$$

として導びかれる。故に固有値は

$$\lambda_1 = \frac{P_{11}m_1 + P_{18}m_8}{|\mathbf{N}|} = \frac{P_{11}n_{88} - P_{18}n_{81}}{n_{11}n_{88} - n_{81}n_{18}} \quad (5.10a)$$

$$\lambda_2 = \frac{P_{44}m_5}{|\mathbf{N}|} = \frac{P_{44}}{n_{44}} \quad (5.10b)$$

$$\lambda_3 = \lambda_4 = 0 \quad (5.10c,d)$$

として得られる。

ノイマンの安定性の条件とは、増幅マトリクス (\mathbf{M}) の固有値 (λ) の絶対値の最大が 1 を越えてはならない、という事であるから、ここでは

$$|\lambda_1| \leq 1 \quad (5.11)$$

$$\text{かつ} \quad |\lambda_2| \leq 1 \quad (5.12)$$

という条件によって表わすことができる。

まず(5.12)を調べよう。 n_{44} は

$$n_{44} = \hat{a} + i \hat{c}_q \quad (5.13a)$$

となる。ただし

$$\hat{a} = \hat{\alpha} + c_\epsilon + \frac{\mu_{j-\frac{1}{2}} + \mu_{j+\frac{1}{2}}}{2P_\tau} (1 - \cos \phi) \quad (5.13b)$$

$$\hat{c}_q = c_q + \frac{\mu_{j-\frac{1}{2}} - \mu_{j+\frac{1}{2}}}{2P_\tau} \quad (5.13c)$$

である。よって条件(5.12)は

$$\frac{|\hat{\alpha}|^2}{|\hat{a}|^2 + |\hat{c}_q|^2} \leq 1 \quad (5.14a)$$

となる。これは

$$|\hat{\alpha}|^2 \leq |\hat{a} + c_\epsilon + \frac{\mu_{j-\frac{1}{2}} + \mu_{j+\frac{1}{2}}}{2P_\tau} (1 - \cos \phi)|^2 + |\hat{c}_q|^2 \quad (5.14b)$$

と書き換えることもできる。 $\hat{\alpha}$ は正であるから、

$$c_\epsilon \geq 0 \quad (5.15)$$

が成り立てば(5.14)は満たされる。

次に(5.11)を調べよう。 n_{11} は

$$n_{11} = a + i \bar{c}_q \quad (5.16a)$$

となる。ただし

$$a = \alpha + c_\epsilon + \mu_j - \frac{1}{2} (\mu_{j-1} + \mu_{j+1}) \cos \phi \quad (5.16b)$$

$$\bar{c}_q = c_q + \frac{1}{2} (\mu_{j-1} - \mu_{j+1}) \quad (5.16c)$$

である。 $|\phi| \ll 1$ という特別な場合を考えて安定性の

一部の様子を探ることになると、(5.10a) は

$$\lambda_1 \doteq \frac{-iP_{11}\phi - 2\bar{R}_j G}{(a + i\bar{c}_q\phi)(-i\phi) - 2R_j G} \quad (5.17a)$$

によって近似され、よって

$$|\lambda_1|^2 \doteq \left(\frac{\bar{R}_j}{R_j} \right)^2 \quad (5.17b)$$

となる。(5.17b)と(5.11)を比べて見ると、 $R_j < \bar{R}_j$ ならば不安定であり、特に $R_j = 0$ ならば最も不安定であることがわかる。それに反して $\bar{R}_j = 0$ とすれば、 $|\phi|$ が非常に小さい限り、ノイマン安定性は保証される。 $\bar{R}_j = 0$ とした時安定か否かについての一般的な議論を次に述べる。

見通しを良くするため

$$r = -R_j G + C_q (1 - \cos \phi) \quad (5.18)$$

と置くと、(5.10a)は

$$\lambda_1 = \frac{P_{11}(1 - \cos \phi - i \sin \phi)}{a(1 - \cos \phi) + r(1 + \cos \phi) + i(r - a) \sin \phi} \quad (5.19a)$$

と展開される。故にその絶対値については

$$|\lambda_1|^2 = \frac{2P_{11}(1 - \cos \phi)}{2a^2(1 - \cos \phi) + 2r^2(1 + \cos \phi)} \quad (5.19b)$$

となる。これにより条件(5.11)は任意の ϕ の値に対して $(a^2 - P_{11}^2)(1 - \cos \phi) + r^2(1 + \cos \phi) \geq 0$ (5.20) として表される。もしも

$$|a| \geq |P_{11}| \quad (5.21)$$

ならば(5.20)は満足される。この不等式を元の係数で表わすために、(5.4b)、(5.16b)および(5.21)を思い起こすと、

$$C_\epsilon \geq |B_j + \alpha| - \alpha + \left| \frac{\mu_{j-1} + \mu_{j+1}}{2} - \mu_j \right| \quad (5.22)$$

が成り立てば(5.21)が満足されることがわかる。

さて、ノイマンの安定性の条件は(5.15)および(5.22)によって与えられた。しかしながら実際にはこれらの条件は破られることがあり、したがってそのままでは繰返し計算は発散するであろう。そこで C_ϵ の値が(5.15)または(5.22)により示される範囲を越える時には、その限界値によって C_ϵ の値を置き換える必要がある。なおノイマン安定の条件は安定のための十分条件ではなく必要

条件である。もしも

$$\cos \phi = 1 \text{ のときに} \quad r \doteq 0, \text{ かつ } \bar{c}_q \doteq 0 \quad (5.23)$$

と仮定することができるならば、

$$|\lambda_1| < 1 \quad \text{および} \quad |\lambda_2| < 1 \quad (5.24)$$

が成り立つ。従って、(5.15)と(5.22)は安定のための十分条件になる事を証明することができる。(文献10の定

理 4 を用いる。)

6. 数値計算法(手法 II)

第 5 節の結論に鑑みると、安定性のため $R_j \approx 0$, $\bar{R}_j = 0$ とする計算法を用いるとよい。そして \bar{B}_j は安定性に本質的な役割を果さないから、 ω_j^q の係数の一部として \bar{B}_j を取り扱うことができる。そのような計算法をこの節で示す。クランク・ニコルソン法と前進的解法も使う。公式のいくつかは手法 I と変わらないから、相異点のみを述べることにする。

渦度輸送方程式の差分表現を (3.5) のかわりに

$$A_j \omega_{j-1}^q + B_j \omega_j^q + C_j \omega_{j+1}^q + R_j u_j^q = D_j \quad (6.1)$$

と書けば、次のように B_j, D_j に対する公式(3.10),(3.12) は変更され、そして R_j についての公式が追加される。

$$B_j = C_\varepsilon + \mu_j - \bar{B}_j + \alpha \quad (6.2)$$

$$D_j = -A'_j \omega_{i-1,j-1} - (B'_j - \bar{B}_j) \omega_{i-1,j} - C'_j \omega_{i-1,j+1} + R_j u_{i-1,j} + \alpha \omega_j^{q-1} \quad (6.3)$$

$$R_j = \frac{\Delta \eta^2}{\Delta \xi} [\delta u \rho_\eta]_{i-\frac{1}{2},j} \quad (6.4)$$

ただし

$$\bar{B}_j = \Delta \eta^2 [\delta^2 u \rho_\varepsilon]_{i-\frac{1}{2},j} \quad (6.5)$$

である。 \hat{D}_j についての式(3.19)は少しだけ修正する。即ち ω_j に付いてる添字 $q-1$ を q に変えるのである。エネルギーの式(3.8)を解こうとする時には、 ω_j^q は既知である点に注意されたい。

要求される条件(4.9),(5.15)および(5.22)は一つにまとめる。すなわち

$$C_{\varepsilon \min} = \text{Max} \left(\varepsilon, \bar{B}_j + \frac{\mu_{j-1} + \mu_{j+1}}{2} - \mu_j \right) \quad (6.6)$$

を定義し、(3.29)のかわりに

$$C_\varepsilon < C_{\varepsilon \min} \quad \text{ならば} \quad C_\varepsilon = C_{\varepsilon \min} \quad (6.7)$$

と置く。ただし Max は引数の最大値を示し、 ε は 10^{-5} の程度の小さな正の定数とする。

パラメータ $\alpha, \hat{\alpha}$ は

$$\alpha = \hat{\alpha} = |C_\varepsilon| \quad (6.8)$$

によって与える。しかし

$$\alpha < \text{Min}(\mu_{j-1}, \mu_{j+1}) \quad \text{ならば} \quad \alpha = \varepsilon \quad (6.9)$$

また

$$\hat{\alpha} < \text{Min}(\mu_{j-\frac{1}{2}}, \mu_{j+\frac{1}{2}}) \quad \text{ならば} \quad \hat{\alpha} = \varepsilon \quad (6.10)$$

と置き換える。ただし Min は引数の最小値を示す。

7. 差分式の解法

上添字 q を変数から落して差分式(6.1),(3.6),(3.7)を再現すると、

$$A_j \omega_{j-1} + B_j \omega_j + C_j \omega_{j+1} + R_j u_j = D_j \quad (2 \leq j \leq m-1) \quad (7.1a)$$

$$-\psi_j + \psi_{j+1} + E_j(\omega_j + \omega_{j+1}) + F_j(u_j + u_{j+1}) = 0 \quad (1 \leq j \leq m-1) \quad (7.1b)$$

$$u_j - u_{j+1} + G(\omega_j + \omega_{j+1}) = 0 \quad (1 \leq j \leq m-1) \quad (7.1c)$$

となり、その境界条件は

$$u_1 = \psi_1 = \psi_m = \omega_m = 0 \quad (7.2)$$

である。ただし m は η 方向の格子点数である。

(7.2) を条件とする代数方程式(7.1)の一般的な解法から説明を始めると、まず

$$\begin{aligned} v_j &= \begin{pmatrix} u_j \\ \psi_j \\ \omega_j \end{pmatrix} (1 \leq j \leq m), \quad B_1 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ F_1 & -1 & E_1 \end{pmatrix}, \\ C_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ F_1 & 1 & E_1 \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} 1 & 0 & G \\ 0 & 0 & A_j \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (2 \leq j \leq m-1), \\ B_j &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & G \\ R_j & 0 & B_j \\ F_j & -1 & E_j \end{pmatrix} (2 \leq j \leq m-1), \\ C_j &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & C_j \\ F_j & 1 & E_j \end{pmatrix} (1 \leq j \leq m-1), \\ A_m &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & G \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} -1 & 0 & G \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \\ d_1 &= d_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad d_j = \begin{pmatrix} 0 \\ D_j \\ 0 \end{pmatrix} (2 \leq j \leq m-1) \end{aligned} \quad (7.3)$$

とおくと(7.1)および(7.2)はマトリクス形式で

$$B_1 v_1 + C_1 v_2 = d_1$$

$$A_j v_{j-1} + B_j v_j + C_j v_{j+1} = d_j \quad (2 \leq j \leq m-1) \quad (7.4)$$

$$A_m v_{m-1} + B_m v_m = d_m$$

としてまとめて書くことができる。(7.4)の系はブロック三対角分解法¹⁰⁾により解くことができる。すなわち逐次に

$$d'_m = B_m^{-1} d_m, \quad A'_m = B_m^{-1} A_m,$$

$$d'_j = (B_j - C_j A'_{j+1})^{-1} (d_j - C_j d'_{j+1}) \quad (j=m-1, \dots, 1),$$

$$A'_j = (B_j - C_j A'_{j+1})^{-1} A_j \quad (j=m-1, \dots, 2) \quad (7.5)$$

においてブロック三対角行列の右上方を消去すると、解は次の代入によって逐次得ることができる。

$$v_1 = d'_1$$

$$v_j = d'_j - A'_j v_{j-1} \quad (j=2, \dots, m) \quad (7.6)$$

なお後退消去・前進代入を用いたのは、手法 I したがって Carter の方法²⁾の計算順序にならったためである。 $|B_m|$ の絶対値が1であるのに対して、 $|B_1|$ の絶対値が $\Delta\eta$ の程度である事からも、この計算順序はその逆より優れているものと推察される。

(7.5) および (7.6) で示した計算法は、マトリクスの零成分を全く考慮してないから、非常に非効率的であり計算時間を浪費するものである。そこでもっと効率の良い計算法を示すべきである。(7.5b, d) および (7.3d) から、 A'_j の形が

$$A'_j = \begin{pmatrix} * & * & * \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ 0 & 0 & * \\ 0 & 0 & * \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * & 0 & * \\ * & 0 & * \\ * & 0 & * \end{pmatrix} \quad (7.7)$$

となる事がわかる。ただし*印は非零成分を表わす。すなわち A_j の第2列が全て零である特徴に基づき、 A'_j の第2列も全て零である。

(7.7)の特徴を生かすために、(7.3)から(7.6)の算法をやめて、最初から ψ_{j-1} の項を欠く漸化式を次のように仮定する。

$$\omega_j = d_j + a_j \omega_{j-1} + b_j u_{j-1} \quad (j=2, \dots, m) \quad (7.8a)$$

$$\psi_j = K_j + L_j \omega_{j-1} + M_j u_{j-1} \quad (j=2, \dots, m) \quad (7.8b)$$

(7.8a)と(7.1c)を(7.1a)に代入すると、未定係数についての漸化式が

$$a_j = -(A_j + \bar{R}G)/X, \quad b_j = -\bar{R}/X, \quad d_j = \bar{D}/X$$

$$(j=m-1, \dots, 2) \quad (7.9)$$

のように導かれる。ただし一時的な変数は添字を付けないで、

$$X = \bar{B} + \bar{R}G, \quad \bar{B} = B_j + C_j a_{j+1},$$

$$\bar{R} = R_j + C_j b_{j+1}, \quad \bar{D} = D_j - C_j d_{j+1} \quad (7.10)$$

として定義する。 ψ_{j+1} , u_{j+1} および ω_{j+1} を消去するために、それぞれ(7.8b), (7.1c) および(7.8a)を(7.1b)に代入すると、

$$\psi_j = k + l \omega_j + m u_j \quad (j=m-1, \dots, 1) \quad (7.11)$$

となる事がわかる。ただし、

$$k = K_{j+1} + e d_{j+1}, \quad l = L_{j+1} + e(1 + a_{j+1})$$

$$m = M_{j+1} + e b_{j+1} + 2F_j, \quad e = E_j + F_j G \quad (7.12)$$

であり添字を付けずに書いてある。(7.11)における ω と u の添字 j を $j-1$ に減ずるために、(7.1c)と(7.8a)を(7.11)に代入する。そうして得られる式を(7.8b)と係数比較すると、残りの未定係数についての漸化式が次の通り導びかれる。

$$K_j = k + \bar{l} d_j, \quad L_j = \bar{l} a_j + m G,$$

$$M_j = m + \bar{l} b_j \quad (j=m-1, \dots, 2) \quad (7.13)$$

ただし

$$\bar{l} = l + m G \quad (7.14)$$

である。壁面での境界条件(7.2a, b)を $j=1$ に対する(7.11)に適用すると、

$$\omega_1 = -k_1 / l_1 \quad (7.15)$$

を得る。ただし k_1 および l_1 は、添字が $j=1$ の時の k および l のそれぞれの値を表わす。 $j=m$ に対する漸化式(7.8)は u_{m-1} および ω_{m-1} にかかわらず境界層端における境界条件(7.2c, d)に一致しなければならないから、係数について

$$d_m = a_m = b_m = 0, \quad K_m = L_m = M_m = 0 \quad (7.16)$$

を満たさなければならない。

(7.8)から(7.16)と(7.1c)を実行する手順は、第3節で述べたのと同様に、 $j=m, \dots, 1$ の順に係数 d_j, a_j, \dots, M_j を定め、次に $j=1, \dots, m$ の順に変数 ω_j, ψ_j, u_j を求める。それから、(7.4)から(7.6)の形式によく似た三対角分解法によってエネルギー式を解く。

8. 緩和係数

支配方程式は非線型であるから、ノイマンの安定性解析は厳密には無意味である。しかしほとんどの非線型方程式の繰返し計算は、その線型化方程式についてノイマン安定性が保証されている限り、適当な緩和パラメータを掛けることにより収束する。1より小さい緩和係数が安定性の余裕を生み出すからである。

数値計算の経験によると、図1に描かれた壁での緩和係数はほとんど全ての場合に適切である。大きな逆向き摩擦に対して緩和係数は非常に小さくなければならない事を図1は示す。この主な理由は、逆流領域が大きくなるほど、ノイマン安定性の余裕が少なくなる事であろう。順流に対して ω_1 が増すと r_1 が減る理由は明らかでないが、そのような高表面摩擦における緩和係数の低下は、付着境界層流の多くの計算法においても経験される。

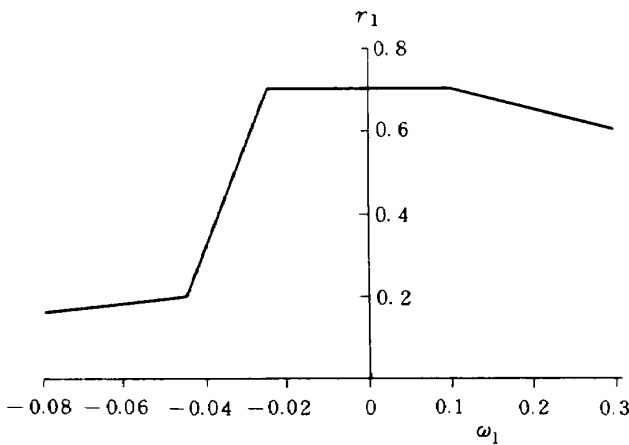


図1 壁面温度の関係としての壁面緩和係数

境界層を横切る他の格子点において緩和係数は、順流に対して

$$r_j = r_1 \quad (j=2, 3, \dots, m) \quad (8.1)$$

によって与えられる。しかし、逆流に対して緩和係数は

$$r_j = r_1 + (r_{1max} - r_1) u_j \quad (j=2, 3, \dots, m) \quad (8.2)$$

によって与えられる。ただし図1から $r_{1max} = 0.7$ である。(8.2) のようにするのは、逆流領域の内と近くにおいてだけ非常に小さな緩和係数が必要なのであり、不必要に小さな緩和係数は繰返し計算の収束率を下げるからである。

図1に示した壁面緩和係数は多少安全側すぎる。例えば r_1 の最大値はもっと高く(約0.8)でもよい。そうすると収束は速くなる。

9. 超音速流干渉計算法

干渉の効果を正しく勘案するためには、有効形状すなわち物体プラス排除厚さの上で非粘性流の関係式を評価しなければならない。超音速流の場合には、この関係式は線型理論から次のように表現される。

$$p = p_\infty + \frac{1}{\lambda} (\theta + \epsilon \delta_x) \quad (9.1a)$$

ただし θ は物体表面の傾きを表わし、 $\lambda = \sqrt{M_\infty^2 - 1}$ 、 $\epsilon = 1/\sqrt{R_e}$ である。(9.1a)の x 微分をとると、圧力傾斜は

$$p_x = \frac{1}{\lambda} (\theta_x + \epsilon \delta_{xx}) \quad (9.1b)$$

として導びかれる。他方では、圧力傾斜は壁で評価した運動量の式(2.3)からも導びかれ

$$\tilde{p}_x = (\mu u_y)_y |_{y=0} \quad (9.2a)$$

となる。ここで(9.2a)の p_x と(9.1b)の p_x とを区別するために波記号 \sim を付けた。(2.8)と(2.14)によって(9.2a)は

$$\tilde{p}_x = (\mu \omega)'_0 / \delta \quad (9.2b)$$

に変形される。ここで記号' は η についての微分を表わす。なお δ が与えられると、今までの節に述べてきた境界層逆解法によって、 μ および ω を計算することができる点に注意。即ち δ から \tilde{p}_x が算出できるのである。

(9.1b)と(9.2b)を等置して干渉方程式を次のように導びく。

$$p_x = \tilde{p}_x \quad (9.3a)$$

あるいは

$$\frac{1}{\lambda} (\theta_x + \epsilon \delta_{xx}) = \frac{1}{\delta} (\mu \omega)'_0 \quad (9.3b)$$

である。(9.3)の左辺は双曲型、右辺は放物型の計算をするのであるから、(9.3)は上流端から下流端へ計算が進む初期値問題として扱われる。そしてこの扱いは不適切な発展系をなし、ある下流端境界条件が必要であることが知られている。(9.3)のような干渉方程式を上流端・下流端の両境界条件をもつ境界値問題として扱うために、WerleとVatsa⁵⁾⁶⁾は交互方向陰解法(ADI法)を使い、干渉方程式が楕円型の偏微分方程式に似ている点に着目し、擬似楕円的な取扱いをした。彼らのやり方にならって、人工時間 t を導入し次のように(9.3)に非定常項を加える。

$$p_x = \tilde{p}_x + \partial h \delta / \partial t \quad (9.4a)$$

あるいは

$$\frac{1}{\lambda} (\theta_x + \epsilon \delta_{xx}) = \frac{1}{\delta} (\mu \omega)'_0 + \frac{\partial h \delta}{\partial t} \quad (9.4b)$$

ただし h は少し後で定義する。もしも(9.4)の解が定常状態に収束すれば、(9.4)は(9.3)に一致するから、(9.3)の解の一意性を仮定すれば、(9.4)の定常解をもって(9.3)の解とすることができる。別の見方をすると、(9.3)を解く緩和過程の一つが、(9.4)のような人工時間に関する初期値問題によって表現されると見ることもできる。(9.4)と本質的に変わらないはずの式について、WerleとVatsa⁶⁾はその収束性を調べたから、ここで改めて(9.4)そのものについて収束性を確かめる必要もないであろう。

ADI法を応用して(9.4b)の差分表現を得るために、人工時間の刻み Δt を2つに分ける。初めの半刻み ($t^n \rightarrow t^* = t^n + \Delta t/2$)の間で、 δ^n は既知とし、(9.4b)は

$$\frac{1}{\lambda} (\theta_x + \epsilon \delta_{xx}^n) = \frac{1}{\delta^*} (\mu \omega)'_0 + \frac{h^* \delta^* - h^n \delta^n}{\Delta t/2} \quad (9.5)$$

によって表わす。ただし

$$h^n = \left(\frac{1 - \bar{e} \delta_x^*}{1 - \bar{e} \delta_x^n} \right)^3, \quad h^* = \left(\frac{1 + \bar{e} \delta_x^*}{1 + \bar{e} \delta_x^n} \right)^3, \quad \bar{e} = \text{const} \quad (9.6)$$

である。(9.6)はWerleとVatsaが剝離点での困難さを取り除くのに提案したものと全く同一の形である。ただし \bar{e} の値は彼らの用いたものとかなり異なる。

(9.5)は未知数 δ^* についての非線型代数方程式をなすから、ニュートン・ラフソン法で解くことができる。まず誤差を

$$E(\delta^*) = h^*(\delta^*)\delta^* - h^n(\delta^*)\delta^n + \frac{dt}{2} [\tilde{p}_x^*(\delta^*) - p_x^n] \quad (9.7)$$

と定義する。次に(9.7)を微分して

$$\frac{dE}{d\delta^*} = h^* + \frac{3\hat{e}h^*\delta^*}{1+\hat{e}(\delta^*-\delta_{i-1}^*)} + \frac{3\hat{e}h^n\delta^n}{1-\hat{e}(\delta^*-\delta_{i-1}^*)} + \frac{dt}{2} \frac{d\tilde{p}_x^*}{d\delta^*} \quad (9.8)$$

とする。ただし $\hat{e} = \bar{e}/dx$ であり、

$$\frac{d\tilde{p}_x^*}{d\delta^*} \stackrel{(\nu)}{=} \frac{\tilde{p}_x^{*(\nu)} - \tilde{p}_x^{*(\nu-1)}}{\delta^{*(\nu)} - \delta^{*(\nu-1)}} \quad (9.9)$$

により近似する。ここで ν は繰返しステップ数である。それから新しい δ^* の値を

$$\delta^{*(\nu+1)} = \delta^{*(\nu)} - E^{(\nu)} / \left(\frac{dE}{d\delta^*} \right)^{(\nu)} \quad (9.10)$$

によって推定する。誤差 E が許容範囲に収まるまでこの繰返しをするわけである。

\tilde{p}_x^* は数値微分の結果として得る。例えば4点数値微分公式

$$\tilde{p}_x^* = \frac{[-11(\mu\omega)_1^* + 18(\mu\omega)_2^* - 9(\mu\omega)_3^* + 2(\mu\omega)_4^*]}{(6\Delta\eta\delta^*)} \quad (9.11)$$

によって得るのだから、特に $\delta^{*(\nu)}$ と $\delta^{*(\nu-1)}$ の間の差が小さい時に、 $d\tilde{p}_x^*/d\delta^*$ の数値微分(9.9)に大きな誤差が生じることがある。そこで

$$\frac{dE}{d\delta^*} \geq \left(\frac{dE}{d\delta^*} \right)_{min} \quad (9.12)$$

という拘束を設ける。ただし $(dE/d\delta^*)_{min}$ は、 $dE/d\delta^*$ が正であると予測される事を考慮して規定する正の定数である。(9.10)を見てもわかるように、ニュートン・ラフソン法が成功するためには、誤差の傾き $dE/d\delta^*$ の絶対値が小さくなり過ぎてはならない。傾きが連続な場合しか取扱わないから、ゼロを許さなければ特定の解の近傍で傾きは正か負のどちらかであって正負の両方が現れることはない。そのような観点からも(9.12)の拘束は許されるし必要でもある。

第2の半刻み($t^* \rightarrow t^{n+1}$)の間で、(9.4b)は

$$\frac{1}{\lambda}(\theta_x + \varepsilon\delta_{xx}^{n+1}) = \frac{1}{\delta^*}(\mu\omega)_0^{*'} + \frac{h^n\delta^{n+1} - h^*\delta^*}{\Delta t/2} \quad (9.13)$$

となる。この段階では t^* 時のすべての変数は既知であるから、(9.13)は未知数 δ^{n+1} についての2階の常微分方程式であり、係数行列が優対角性をもつ三項方程式になる。故に(9.13)は容易に解くことができる。方程式(9.5)、(9.13)は両端における境界条件を必要とする。上流端では境界条件を相似解により与える。下流の境界条件は

$$\delta_{xx}^n = \delta_{xx}^{n+1} = 0 \quad (9.14)$$

により与える。しかし、 δ^* の下流端の値は与えられるのではなく、自動的に決められる。

干渉計算の手順は次のように書くことができる。

1. $n=0$ と置き初期分布 $\delta^0(x)$ を規定する。
2. (9.5)を解いて $\delta^n(x)$ から $\delta^*(x)$ を得る。
3. (9.13)を解いて $\delta^*(x)$ から $\delta^{n+1}(x)$ を得る。
4. 排除厚さ用の緩和係数を r_d とし、新しい排除厚分布を

$$\delta^n + r_d(\delta^{n+1} - \delta^n) \quad (9.15)$$
 によって規定する。そして $\delta(x)$ が一樣に収束していなければ、 n を1だけ増してステップ2へ戻る。

なお、 r_d の値は

$$\begin{aligned} r_d &= 0.5 & (n=0) \\ r_d &= 0.7 & (n \geq 1) \end{aligned} \quad (9.16)$$

によると適当である。

10. 数値計算例

10-1 逆解法の結果

逆解法の計算は $M_\infty, H_w, P_r, T_\infty$ などのパラメータをセットすることにより始められる。それから相似方程式を付録Aに示す方法で解く。相似解はLevy-Lees変数で表わされているから、本文にて使用する変数へ変換する。(付録B参照。)相似解から算出される排除厚 δ_{ST} に接続する排除厚分布 $\delta(x)$ を代数関数

$$\delta(x) = \delta_{ST} + d \left[\operatorname{sech} \left\{ b(X-a) \right\} - \operatorname{sech}(ba) \right] + (g/4a^2)X(4a-X) \quad (10.1)$$

によって与える。ただし $X = x - x_{ST}$ である。(10.1)のパラメータを

$$d = 0, 0.5, 1.0, 1.5, 2.0, 2.5 \quad (10.2a)$$

および

$$x_{ST} = 0.8, a = 0.75, b = 8.0, g = 1.2 \quad (10.2b)$$

とする6種の排除厚分布を図2(a)に描く。図2から4において各々の分布に番号を付けたが、それぞれの番号の値は $2d$ に等しくとってある。

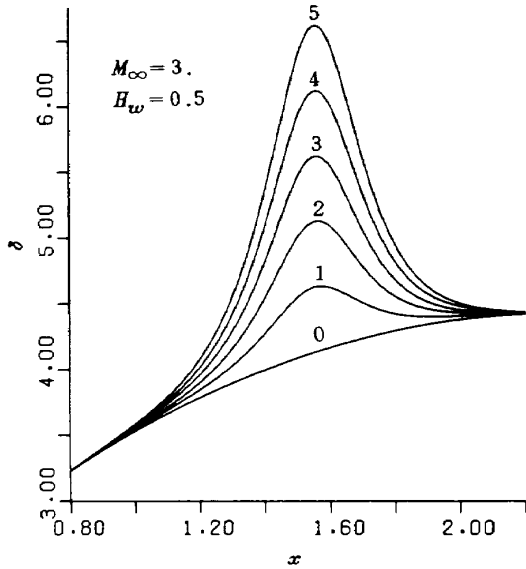


図2(a) 排除厚の規定分布

これらの準備がすべて整ったところで、手法IまたはIIによる計算を、解が収束に達するまである位置で繰り返す。手法Iは手法IIより要する計算時間がいくらか短くてすむが、手法Iを使うと収束解が得られないことがある。だからこの報告の中で示す結果はすべて手法IIによって計算したものである。もしも差分式の解法として(7.8)から(7.16)の方法を使わず、代わりに(7.3)から(7.6)のブロック三対角分解法を使ったとすると、計算時間が約5倍ほど要する事を付け加えておく。収束の判定は、代表的ないくつかの変数の新・旧の値の差が規定の許容差よりすべて小さくなるかどうか、例えば

$$|\omega_1^q - \omega_1^{q-1}| < 0.5 \times 10^{-5} \quad (10.3)$$

を調べることにより判定する。収束したら同様の繰り返しを次の位置で行なう。

図2(a)で描かれた排除厚分布に対する解を図2(b, c, d)にプロットする。無次元変数に冠した記号 $\bar{\quad}$ を復活すると、表面摩擦係数は

$$\bar{C}_f = \bar{\mu}_1 \bar{\omega}_1 = \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0} / (\sqrt{R_e} \rho_\infty u_\infty^2) \quad (10.4)$$

によって定義される。 \bar{C}_f の分布を図2(b)に示す。排除厚の最大が大きくなるにつれて、表面摩擦の最小が下がることがわかる。 \bar{C}_f の負の値(破線の下)は剝離を示す。剝離と再付着が困難なしに計算される。最も広い剝

離領域をもつ \bar{C}_f 分布は受け入れ難い。ノイマン安定性と前進的解法のために課した条件(6.6), (6.7)がこの分布ではかなり大きな誤差をもたらしたものと思われる。

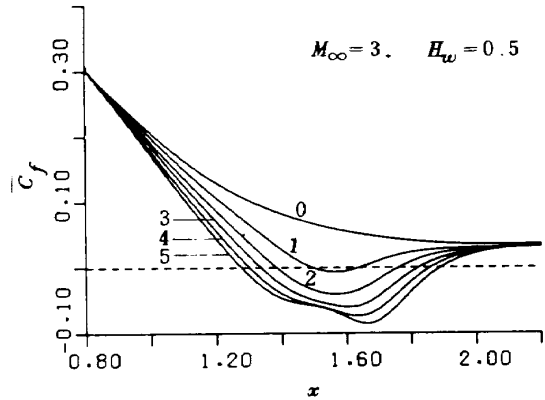


図2(b) 表面摩擦係数の分布

図2(c)は圧力分布を示す。ここで圧力分布は

$$\begin{aligned} \bar{C}_p &= (\bar{p}_e / \bar{p}_\infty - 1) / (\gamma M_\infty^2) \\ &= (p_e - p_\infty) / (\rho_\infty u_\infty^2) \end{aligned} \quad (10.5)$$

によって定義する。普通よく使われる定義は(10.5)と2倍だけ異なる。

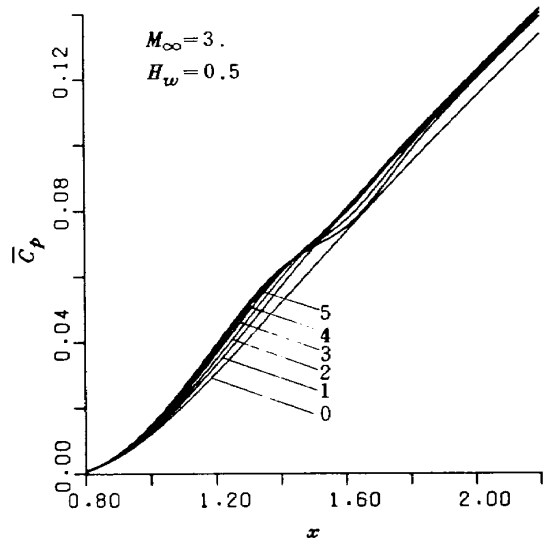


図2(c) 圧力係数の分布

熱伝達率分布を図2(d)に示す。熱伝達率係数を次のように定義する。

$$\bar{Q}_w = \frac{\bar{\mu}_1}{2 E_\infty P_r \delta} \left(\frac{\partial \bar{H}}{\partial \eta} \right)_{\eta=0} = \frac{\sqrt{R_e}}{\rho_\infty u_\infty} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=0} \quad (10.6)$$

ただし \bar{H} の η 微分は4点公式((9.11)参照)の数値微分によって近似する。逆流領域において \bar{Q}_w は大きく減少

するが、どの場合にも正に留まることがこの図からわかる。

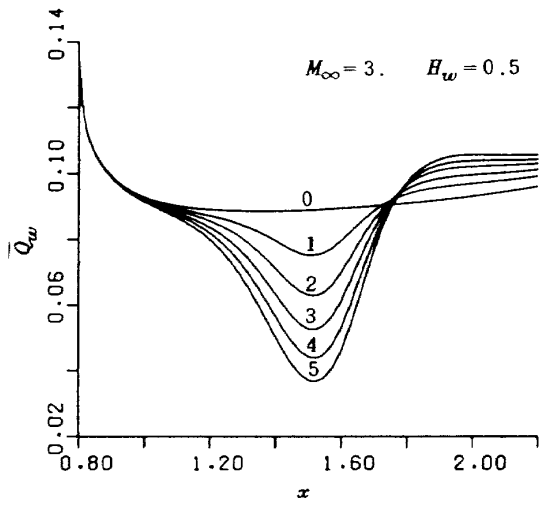


図 2(d) 熱伝達率係数の分布

異なるマッハ数に対する計算結果を図 3 および図 4 に表示する。マッハ数に基づく定性的な相異は圧力分布を除いて全くみられない。

上記の計算についての格子点は、境界層を横切る方向に 161 点であり、流れ方向に 201 点 (刻み $\Delta x = 0.007$) である。排除厚の 1 つの分布あたりの計算時間 (CPU time) は FACOM 23075 で 1 分 ($M_\infty = 1$) から 2 分 ($M_\infty = 3$) 程度であり、必要とする記憶容量は 49 キロ語である。

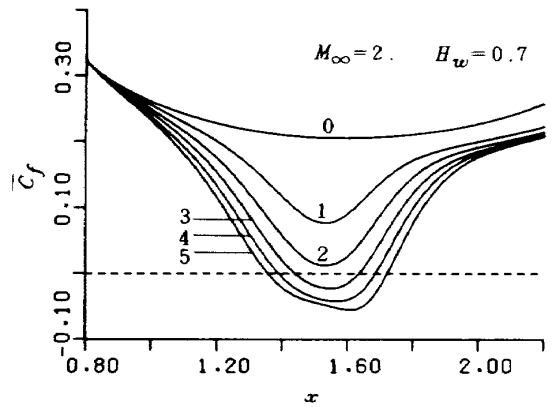


図 3(b) 表面摩擦係数の分布

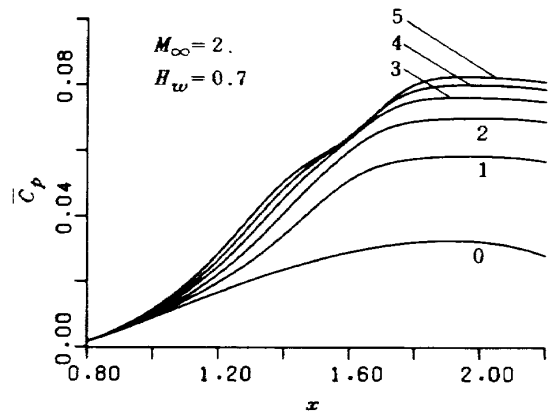


図 3(c) 圧力係数の分布

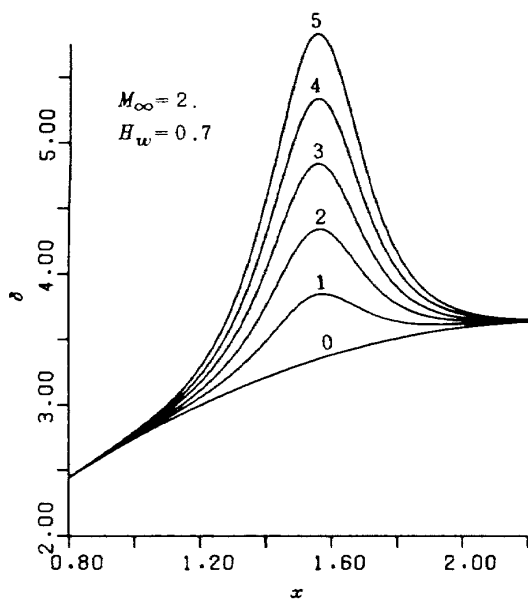


図 3(a) 排除厚の規定分布

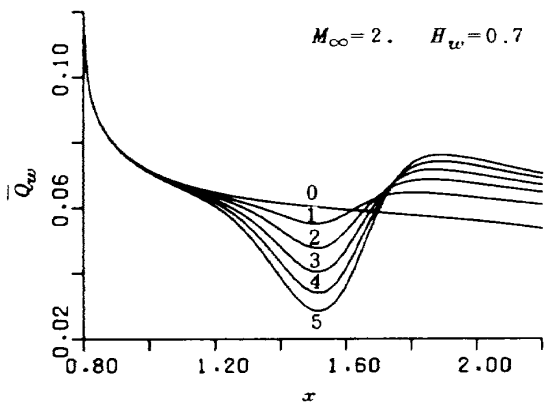


図 3(d) 熱伝達率係数の分布

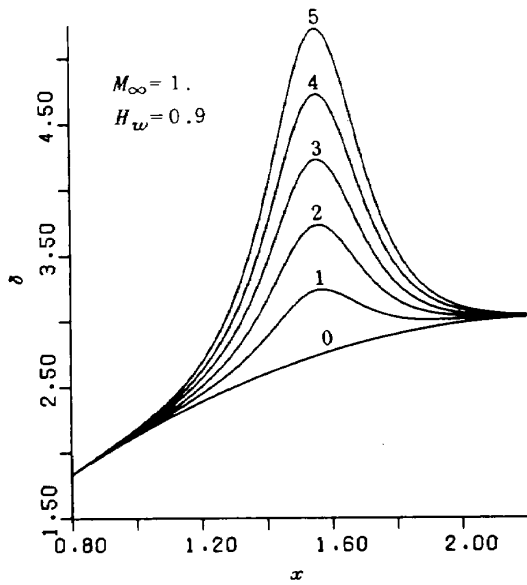


図 4(a) 排除厚の規定分布

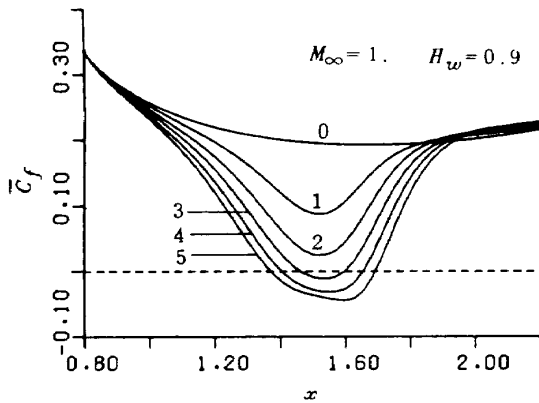


図 4(b) 表面摩擦係数の分布

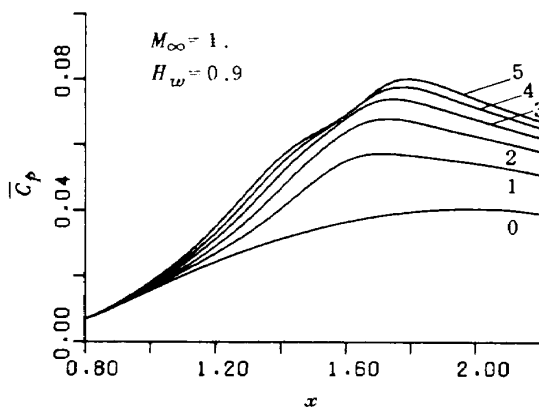


図 4(c) 圧力係数の分布

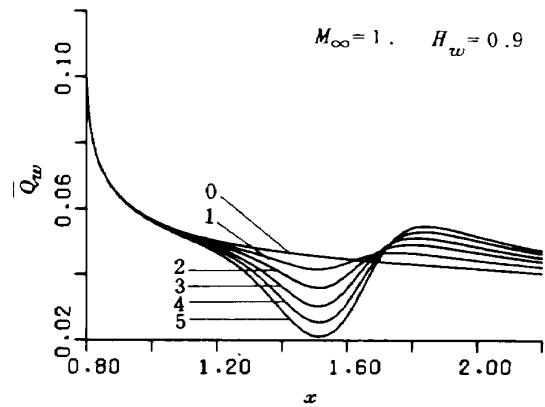


図 4(d) 熱伝達率係数の分布

10-2 干渉解法の結果

干渉計算をする物体形状は、図 5 に描かれた傾斜路によって与える。この傾斜路の形状は Werle と Vatsa⁵⁾⁶⁾ が使用したものと同一である。M_∞, H_w, R_e, T_∞, Δx などのパラメータも比較のために彼らの用いたものと一致させた。

収束の状況を排除厚に関して図 6 に示す。ここで、n は繰返しステップ数であり、n = 0 は排除厚の初期値すなわち、規定された値を意味する。計算時間を節約するために、粗いメッシュ (y 方向に 71 点, Δx = 0.02) を最初の 8 ステップに使用した。そして細かいメッシュ (y 方向に 101 点, Δx = 0.01) を残りのステップに使用した。全計算 CPU 時間は 1 ケースあたり 27 分になる。ただし収束は 10 ステップで得られ、そこでの計算 CPU time は 15 分であることがわかる。収束の後に 0.01 以下の振幅の振動が排除厚 δ に残る。使用した記憶容量はわずか 48 キロ語である。その理由は、前進的解法のおかげで x 方向にわずか 2 つの格子点だけを記憶すればよい点にある。なお人工時間の刻みおよびパラメータ \bar{e} はそれぞれ Δt = 20, $\bar{e} = 0.004$ に固定した。

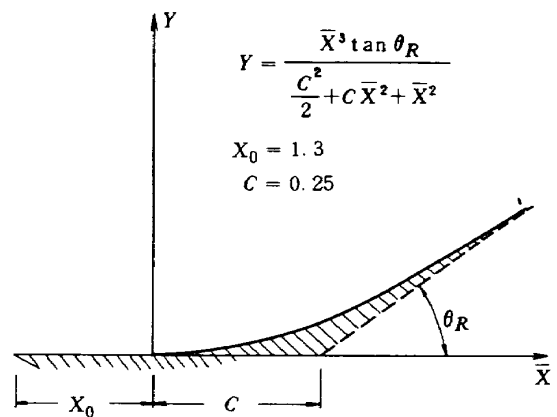


図 5 圧縮傾斜路の形状

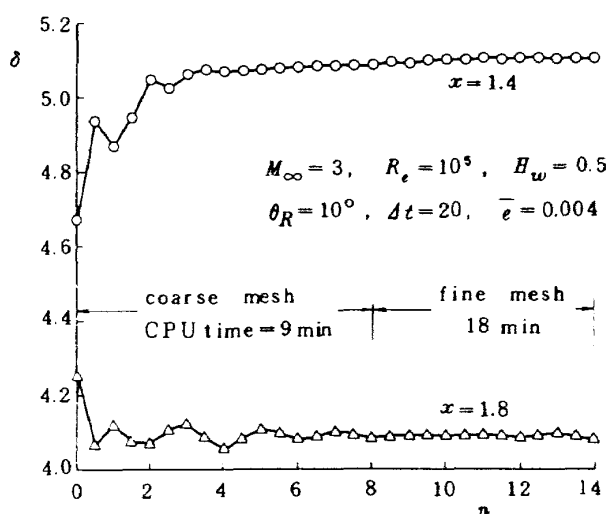


図6 粘性・非粘性干渉計算中の排除厚変化

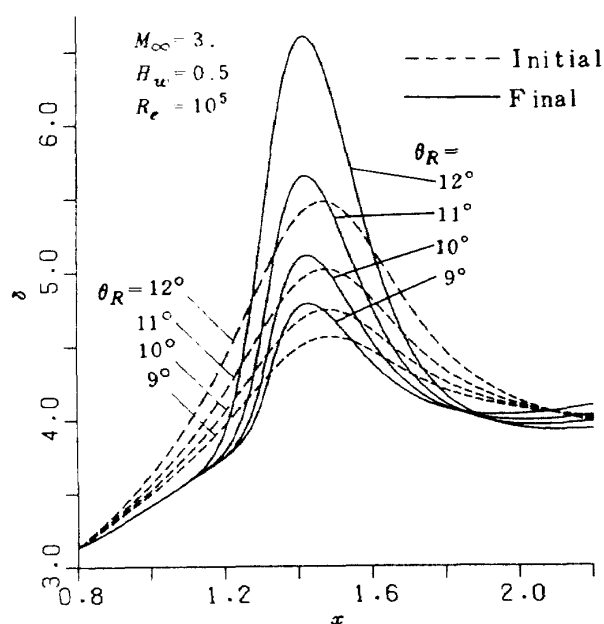


図7 排除厚の初期および最終分布

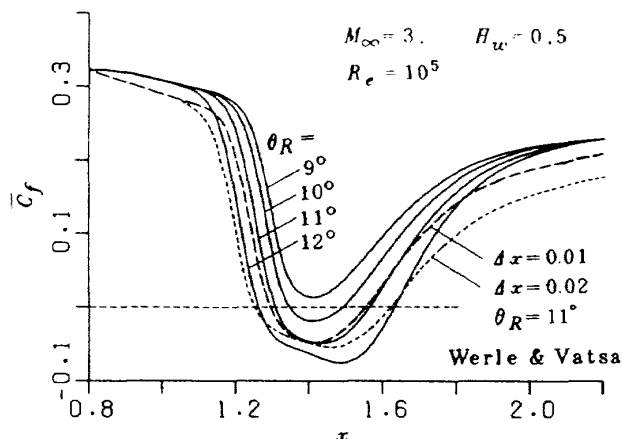


図8 表面摩擦係数の分布

一様に収束した排除厚分布を図7に実線でプロットする。初期分布も破線で描く。初期排除厚分布は(10.1)について、傾斜路角

$$\theta_R = 9^\circ, 10^\circ, 11^\circ, 12^\circ \quad (10.7a)$$

に対してそれぞれ

$$d = 0.8, 1.0, 1.3, 1.8 \quad (10.7b)$$

とすることにより規定する。ただし他のパラメータについては

$$x_{ST} = 0.8, a = 0.65, b = 5.0, g = 0.9 \quad (10.7c)$$

とする。傾斜路の輪郭に沿う距離を横軸にとる。傾斜路のすみ($x \sim 1.4$)付近で排除厚が非常に大きくなり、傾斜路角 θ_R が増すにつれて δ の最大値が増加する事がこの図にみられる。これらのふくらみは次の図にみえるように剝離領域にだいたい対応する。

図8は表面摩擦係数 \bar{C}_f 分布を示す(実線)。傾斜路のすみ付近で係数 \bar{C}_f は急速に低下し、 $\theta_R = 9^\circ$ を除くすべての傾斜路角に対して剝離($\bar{C}_f < 0$)が検出され、また θ_R が増すにつれて剝離領域が広がる事がこの図に見える。比較のために、WerleとVatsaの結果⁶⁾も図8に破線でプロットしてある。定性的な傾向は同じであるけれども、定量的には相異がみられる。その主な原因は、流れ方向の打ち切り誤差の相異であろう。すなわち、本方法の打ち切り誤差は $(\Delta x)^2$ の程度であるのに、彼らの方法は Δx の程度である。刻み Δx を0.02から0.01に変えることにより彼らの打ち切り誤差を減じると、結果の曲線は本方法の曲線に近づくように見える。

図9は圧力係数の分布を示し、またWerleとVatsa⁶⁾のものも加えてある。両者は互いにある程度一致している。 $\theta_R = 12^\circ$ についての両者の線にへこみがある理由は、本当は無限下流で成り立つ下流端境界条件(9.14)の不適当性であろう。WerleとVatsaの分布は傾斜路の開始点

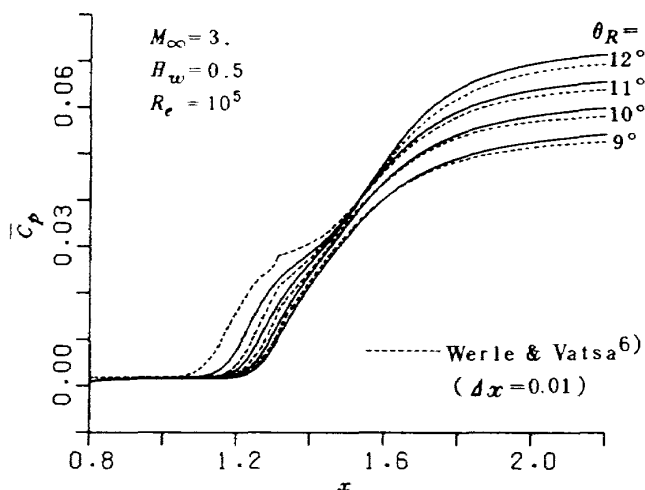


図9 圧力係数の分布

($x=1.3$)のすぐ後で打ち切り誤差に基く小さなこぶをもつが、本方法の結果は2次精度のおかげでそのようなこぶを持たない。

図10は熱伝達率係数分布を示す。予想されたように、熱伝達率は剝離領域内においてかなり小さくなり、しかし負の値にはならない。上流端近くの Q_w の鋭い低下は、熱伝達に関して相似解がここで扱う問題に適合しないかもしれない事を示唆する。

傾斜路のすみ付近の流線がいろいろな傾斜路角について図11に描かれている。流線に沿って(2.7)によって定義する流れ関数 Ψ は一定であり、これらの流線は磯部¹¹⁾が開発した等高線を描くプログラムの少し修正したものをを使って描いてある。図を見やすくするために、隣り合う流線間の Ψ の差が一定なのは循環流領域内だけであ

って、その外では Ψ の差は等比的になっている。また、縦軸を横軸の10倍の長さ引き延ばしてある。

附着した境界層流の例を図11(a)に示す($\theta_R=9^\circ$)。図11(b,c,d)において($\theta_R=10^\circ, 11^\circ, 12^\circ$)、流れは剝れており、循環流領域が図示されている。その領域は、傾斜路角 θ_R が増すにつれて急激に膨張する様子がみえる。

図12(a)および(b)は、 11° 度傾斜路の輪郭に沿ういろいろな位置での境界層を横切つての速度成分ならびに全エンタルピの分布形状を示す。速度分布形は表面摩擦(図8)に応じて変わる。逆流すなわち $u < 0$ となる部分は $x=1.4$ に対して観察される。なおその場合 $\bar{C}_f < 0$ 。逆流に対する速度の絶対値は非常に小さいから、 ω_ξ および H_ξ の係数 C_ξ を変える方法((6.7)を見よ)は、少なくとも $\theta_R=11^\circ$ の場合について適当であることがわかる。

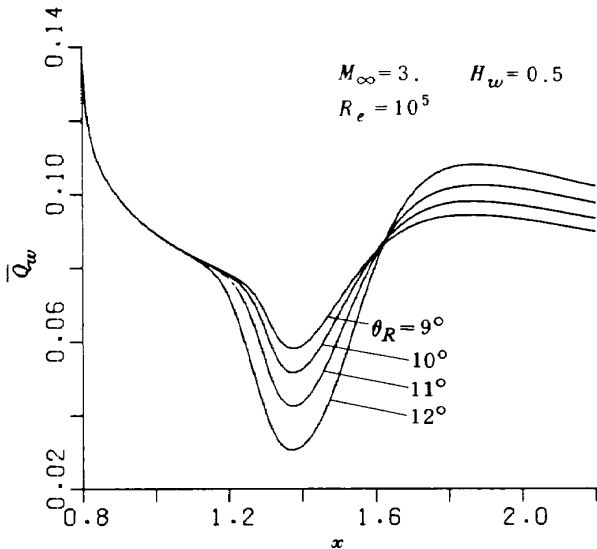


図10 熱伝達率係数の分布

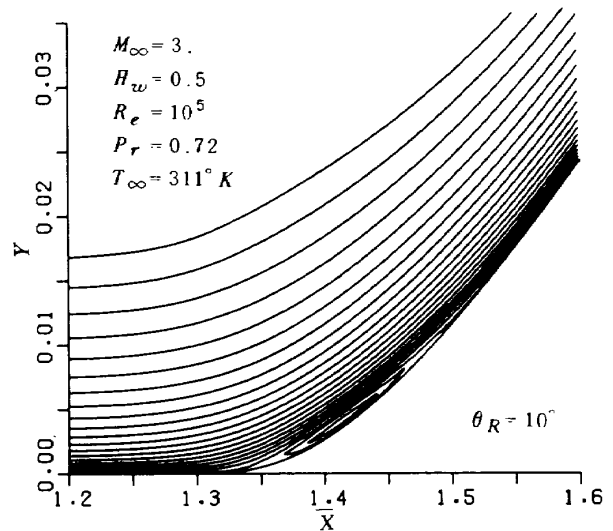


図11(b) 流線。小さな循環領域をもつ剝離流を表す。

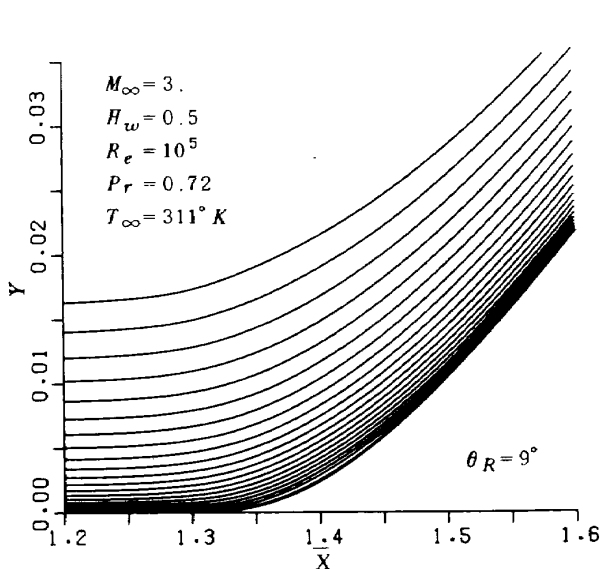


図11(a) 流線。附着流を表す

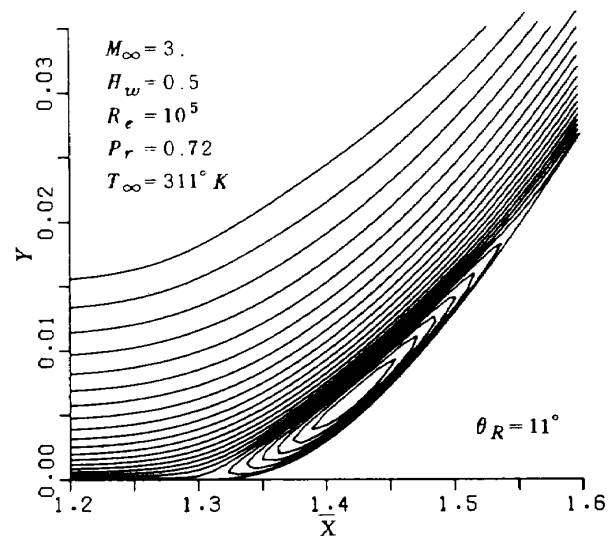


図11(c) 流線。中程度の循環領域をもつ剝離流を表す。

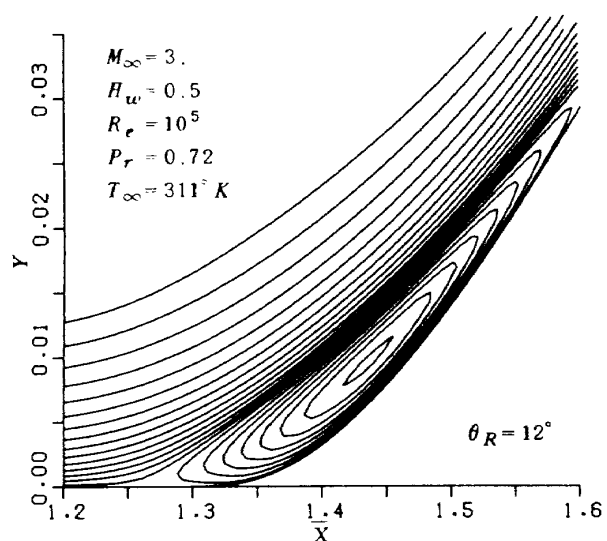


図 11(d) 流線。大きな循環領域をもつ剝離流を表す。

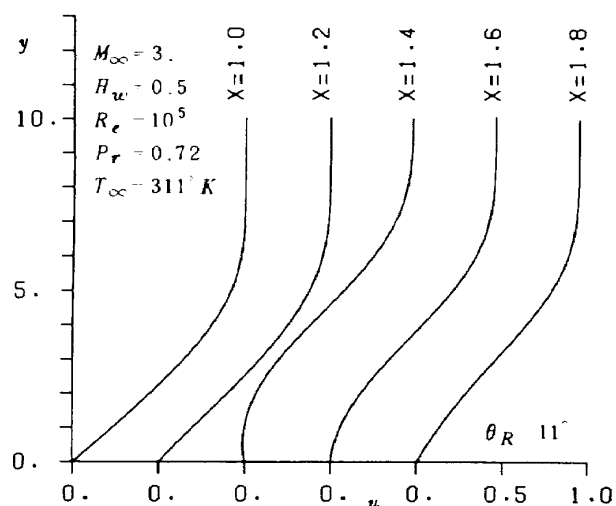


図 12(a) 速度分布形。逆流は $x = 1.4$ に対して見られる

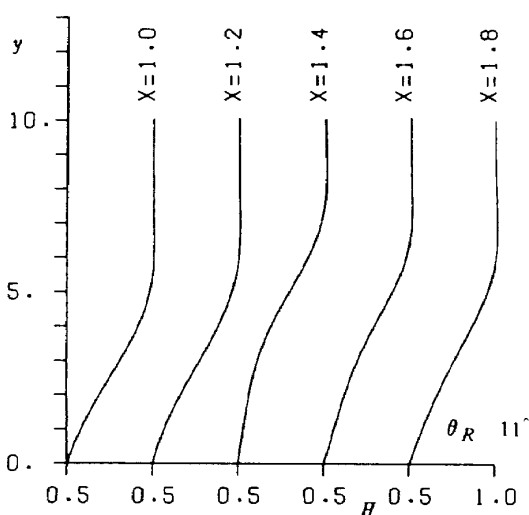


図 12(b) 全エンタルピ分布形

11. ま と め

- 1) Carter の境界層逆解法を圧縮性の層流境界層方程式に拡張した。この拡張は2方法でなされた。その一つについてある条件を課すことにより、ノイマン安定性が保証される。前進的解法を用い、逆流に対して流れ方向の対流項を無視するという条件のもとに、この解法は適切であることを示した。数値計算例により、本方法を用いる計算が困難性を伴わずに剝離および再付着点を通過できる事を例示した。
- 2) 超音速干渉流についてのWerleとVatsaの方法にこの逆解法を応用できることを示した。数値計算例を示し、その一部を彼らの結果と比較した。差分法の精度の相異が数値解に現れていた。

謝 辞

この研究を進めるに当り助言をいただいた、空気力学第二部の器材研究室高島一明室長ならび飛行性能研究室神谷信彦室長に感謝いたします。また数値解析について御教示いただいた、計算センター計算研究室石黒登美子主任研究官には特別の感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) D. Catherall & K. W. Mangler; The Integration of the Two-Dimensional Laminar Boundary-Layer Equations Past the Point of Vanishing Skin Friction, *J. Fluid Mech.*, Vol. 26, p. 163 (1966).
- 2) J. E. Carter; Solution for Laminar Boundary Layer with Separation and Reattachment, *AIAA Paper* 74-583 (1974).
- 3) J. E. Carter & S. F. Wornom; Forward Marching Procedure for Separated Boundary-Layer Flows, *AIAA J.* Vol. 13, p. 1101 (1975).
- 4) J. E. Carter & S. F. Wornom; Solutions for Incompressible Separated Boundary-Layers Including Viscous-Inviscid Interaction, *NASA SP-347*, p. 125 (1975).
- 5) M. J. Werle & V. N. Vatsa; New Method for Supersonic Boundary-Layer Separations, *AIAA J.* Vol. 12, p. 1491 (1974).
- 6) M. J. Werle & V. N. Vatsa; Numerical Solution of Interacting Supersonic Boundary-Layer Flows Including Separation Effects, *ARL-73-0162* (1973).
- 7) K. Stewartson & P. G. Williams; Self-Induced Separation, *Proc. Roy. Soc. London*, A-312,

- p. 181 (1969).
- 8) T. A. Reyner & I. Flügge-Lotz; *The Interaction of a Shock Wave with a Laminar Boundary-Layer*, *Int. J. Non-Linear Mech.*, Vol. 3, p. 173 (June 1968).
 - 9) 山口昌哉 野木達夫：数値解析の基礎，偏微分方程式の初期値問題。共立出版，1969年
 - 10) E. Isaacson & H. B. Keller; *Analysis of Numerical Methods*, John Wiley & Sons (1966).
 - 11) 磯部俊夫：等高線を描かせるプログラム，航技研技術資料TM-198, 1971年
 - 12) H. B. Keller & T. Cebeci; *Accurate Numerical Methods for Boundary-Layer Flows. I. Two-Dimensional Laminar Flows*, *Proc. 2nd Int. Conf. Num. Meth. Fluid Dyn.*, Springer-Verlag, Berlin (1971).
 - 13) H. B. Keller & T. Cebeci; *Accurate Numerical Methods for Boundary-Layer Flows. II. Two-Dimensional Turbulent Flows*, *AIAA J.* Vol. 10, p. 1193 (1972).

付録A. 2次元圧縮性層流境界層の相似解

(Kellerの方法^{12),13})の改良)

相似方程式を1階の微分方程式に下げるために,

$$f'=u, \quad u'=w, \quad g'=G \quad (A1-7)$$

と置けば, 運動量式とエネルギー式はそれぞれ

$$(Cw)' + fw + \beta(R-u^2) = 0 \quad (A4)$$

$$(DG)' + fG + (Euw)' = 0 \quad (A5)$$

となる。ただし

$$C = \frac{\bar{\rho}\bar{\mu}}{\bar{\rho}_e\bar{\mu}_e}, \quad D = \frac{C}{P_r} \quad (A6-7)$$

$$R = \frac{\bar{\rho}_e}{\bar{\rho}}, \quad E = 2E_\infty\bar{u}_e^2\left(1 - \frac{1}{P_r}\right)C \quad (A8-9)$$

であり, 他のパラメータについては

$$\xi = \int \bar{\rho}_e\bar{\mu}_e\bar{u}_e d\bar{x}, \quad \eta = \frac{\bar{u}_e}{\sqrt{2\xi}} \int \bar{\rho} d\bar{y},$$

$$f' = \frac{\bar{u}}{\bar{u}_e}, \quad g = \bar{H}, \quad \beta = \frac{2\xi}{\bar{u}_e} \frac{d\bar{u}_e}{d\xi},$$

$$E_\infty = \frac{u_\infty}{2H_\infty}$$

であり記号' はηに関する微分を表わす。

さてη方向の格子点数をmとし, 格子間隔を

$$h_j = \eta_{j+1} - \eta_j \quad (1 \leq j \leq m-1) \quad (A10)$$

により定義すると, 運動量式系の差分は(A1, 2, 4)からそれぞれ

$$Qf_j \equiv f_{j+1} - f_j - h_j u_{j+1/2} = 0 \quad (A11)$$

$$Qu_j \equiv u_{j+1} - u_j - h_j w_{j+1/2} = 0 \quad (A12)$$

$$Qw_j \equiv (Cw)_{j+1} - (Cw)_j + h_j [(fw)_{j+1/2} + \beta(R_{j+1/2} - u_{j+1/2}^2)] = 0 \quad (A13)$$

と表わされる。(A11-13)は非線型な方程式系であるから, Newton-Raphson法によって解く。即ち,

$$Qf_j + \delta f_{j+1} - \delta f_j - (h_j/2)(\delta u_{j+1} + \delta u_j) = 0 \quad (A14)$$

$$Qu_j + \delta u_{j+1} - \delta u_j - (h_j/2)(\delta w_{j+1} + \delta w_j) = 0 \quad (A15)$$

$$Qw_j + C_{j+1}\delta w_{j+1} - C_j\delta w_j + (h_j/2)[w_{j+1/2}(\delta f_{j+1} + \delta f_j) + f_{j+1/2}(\delta w_{j+1} + \delta w_j) - \beta u_{j+1/2}(\delta u_{j+1} + \delta u_j)] = 0 \quad (A16)$$

を導き, 一方境界条件

$$f_1 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_m = 1 \quad (A17-19)$$

から

$$f_1 + \delta f_1 = 0, \quad u_1 + \delta u_1 = 0, \quad (A20-21)$$

$$u_m + \delta u_m = 0 \quad (A22)$$

を導びく。

かくして, (A14-16)および(A20-22)から, 次のようなブロック三対角行列を係数とする方程式系が構成される。

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & & & & & & & & \\ 0 & 1 & 0 & | & & & & & & & & \\ a_1 & b_1 & \tilde{c}_1 & | & a_1 & b_1 & c_1 & | & & & & \\ \hline 0 & -1 & -\frac{h_1}{2} & | & 0 & 1 & -\frac{h_1}{2} & | & & & & \\ -1 & -\frac{h_1}{2} & 0 & | & 1 & -\frac{h_1}{2} & 0 & | & & & & \\ & & & | & a_2 & b_2 & \tilde{c}_2 & | & a_2 & b_2 & c_2 & \\ \hline & & & | & \circ & \circ & \circ & | & \circ & \circ & \circ & \\ & & & | & \circ & \circ & \circ & | & \circ & \circ & \circ & \\ & & & | & \circ & \circ & \circ & | & \circ & \circ & \circ & \\ \hline & & & | & 0 & -1 & -\frac{h_{m-1}}{2} & | & 0 & 1 & -\frac{h_{m-1}}{2} & \\ -1 & -\frac{h_{m-1}}{2} & 0 & | & 1 & -\frac{h_{m-1}}{2} & 0 & | & \delta f & -Qu_{m-1} & & \\ & & & | & 0 & 1 & 0 & | & \delta u_m & -Qf_{m-1} & & \\ & & & | & & & & | & \delta w_m & 1-u_m & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta f_1 \\ \delta u_1 \\ \delta w_1 \\ \hline \delta f_2 \\ \delta u_2 \\ \delta w_2 \\ \hline \circ \\ \circ \\ \circ \\ \hline \delta f \\ \delta u_m \\ \delta w_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -f_1 \\ -u_1 \\ -Qw_1 \\ \hline -Qu_1 \\ -Qf_1 \\ -Qw_2 \\ \hline \circ \\ \circ \\ \circ \\ \hline -Qu_{m-1} \\ -Qf_{m-1} \\ 1-u_m \end{pmatrix} \quad (A23)$$

ただし空白は零であり,

$$a_j = \frac{h_j}{2} w_{j+1/2}, \quad b_j = -\beta \frac{h_j}{2} u_{j+1/2}, \quad (\text{A24-25})$$

$$c_j = c_{j+1} + \frac{h_j}{2} f_{j+1/2}, \quad (\text{A26})$$

$$\tilde{c}_j = -c_j + \frac{h_j}{2} f_{j+1/2} \quad (\text{A27})$$

である。(A23)は(7.4)と同一形式であるから,(7.5) - (7.6)に示すようなブロック三対角分解法¹⁰⁾を用いて解くことができる。ただし付着境界層流についての一般的な解法手順に従って,(7.5-6)とは逆手順の前進消去・後退代入の方式によって解く。

次にエネルギー系についても同様な操作を行う。

(A3,5)の差分表現は

$$Qg_j \equiv g_{j+1} - g_j - h_j G_{j+1/2} = 0 \quad (\text{A28})$$

$$QG_j \equiv (DG)_{j+1} - (DG)_j + h_j (fG)_{j+1/2} + (Euw)_{j+1} - (Euw)_j = 0 \quad (\text{A29})$$

となる。(A28,29)は非線形であるから,Newton-Raphson法を適用すると

$$Qg_j + \delta g_{j+1} - \delta g_j - (h_j/2)(\delta G_j + \delta G_{j+1}) = 0 \quad (\text{A30})$$

$$QG_j + D_{j+1} \delta G_{j+1} - D_j \delta G_j + (h_j/2) f_{j+1/2} (\delta G_j + \delta G_{j+1}) = 0 \quad (\text{A31})$$

となる。一方,境界条件

$$g_1 = g_w, \quad g_m = 1 \quad (\text{A32-33})$$

からは

$$g_1 + \delta g_1 = g_w, \quad g_m + \delta g_m = 1 \quad (\text{A34-35})$$

が得られる。第7節において説明したのと同様に,(A30-31)および(A34-35)を解くにはブロック三対角分解法を用いればよいが,計算効率を良くするために次のような計算法を用いる。

(A30-31)の方程式系に対し

$$\delta g_j = K_j + L_j \delta G_{j+1} \quad (1 \leq j \leq m-1)$$

$$\delta G_j = M_j + N_j \delta G_{j+1} \quad (1 \leq j \leq m-1)$$

のように δg_{j+1} の項を含まない漸化式を仮定できることを示すことができる。未定係数 M_j と N_j については(A31)と(A37)の比較から

$$M_j = -QG_j / \left(\frac{h_j}{2} f_{j+1/2} - D_j \right) \quad (1 \leq j \leq m-1) \quad (\text{A38})$$

$$N_j = -\left(D_{j+1} + \frac{h_j}{2} f_{j+1/2} \right) / \left(\frac{h_j}{2} f_{j+1/2} - D_j \right) \quad (1 \leq j \leq m-1) \quad (\text{A39})$$

によって定める。未定係数 K_j, L_j については,まず(A34)と(A36)の比較から

$$K_1 = g_w - g_1, \quad L_1 = 0 \quad (\text{A40-41})$$

がわかる。次に漸化式(A36-37)を(A30)に代入し

$$k_{j+1} = K_j + \frac{h_j}{2} M_j - Qg_j \quad (\text{A42})$$

$$l_{j+1} = L_j + \frac{h_j}{2} (N_j + 1) \quad (\text{A43})$$

と置くと

$$\delta g_{j+1} = k_{j+1} + l_{j+1} \delta G_{j+1} \quad (\text{A44})$$

となる。さらに(A37)を(A44)に代入し,その結果得られる式を(A36)と比較すると,未定係数 K_j, L_j についての漸化式

$$K_{j+1} = k_{j+1} + l_{j+1} M_{j+1} \quad (j=1, \dots, m-2) \quad (\text{A45})$$

$$L_{j+1} = l_{j+1} N_{j+1} \quad (j=1, \dots, m-2) \quad (\text{A46})$$

が導びかれる。(A40-41)を出発値とし,(A42-43)および(A45-46)によって逐次 K_j, L_j を定める。

変数の値を求めるためには,境界条件(A35)から単純に

$$\delta g_m = 1 - g_m \quad (\text{A47})$$

とし,さらに $j=m-1$ に対する(A44)を変形して

$$\delta G_m = (\delta g_m - k_m) / l_m \quad (\text{A48})$$

とする。(A47-48)により $j=m$ に対する変数の値を計算したら,漸化式(A36-37)を $j=m-1, m-2, \dots, 1$ の順に働かせて逐次 $\delta g_j, \delta G_j$ の値を求める。

付録B. 変数変換

本文の(2.1)による無次元変数から横棒印-を取り除いた変数を使って,Levy-Lees変数を表わすと

$$\xi = \int_0^x \rho_e \mu_e u_e dx, \quad \eta = \frac{u_e}{\sqrt{2\xi}} \int_0^y \rho dy \quad (\text{B1-2})$$

$$f' = u/u_e, \quad g = H, \quad R = \rho_e / \rho \quad (\text{B3-5})$$

となる。ただし記号'は η 微分を表わす。本文において用いる計算座標について記号を少し変えて書き直すと,

$$\hat{\xi} = x, \quad \hat{\eta} = y / \delta^* \quad (\text{B6-7})$$

となる。そして(B1-5)から(B6-7)への変数変換に伴う諸量の変換式を明示するのがこの付録の目的である。

速度成分 u は(B3)から明らかに

$$u = u_e f' \quad (\text{B8})$$

として得られる。渦度は(B8),(B2),(B5)を用いて

$$\omega = \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial (u_e f')}{\partial \eta} \cdot \frac{u_e \rho}{\sqrt{2\xi}} = \frac{\rho_e u_e^2}{\sqrt{2\xi}} \cdot \frac{f''}{R} \quad (\text{B9})$$

として得られる。排除厚は

$$\delta^* = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho u}{\rho_e u_e}\right) dy = \int_0^\infty \left(1 - \frac{\rho}{\rho_e} f'\right) \frac{\sqrt{2\xi}}{\rho_e u_e} d\eta \quad (\text{B10})$$

であるから,

$$d^* = \int_0^\infty (R - f') d\eta \quad (\text{B11})$$

と定義すると,

$$\delta^* = \frac{\sqrt{2\xi}}{\rho_e u_e} d^* \quad (\text{B12})$$

として求めることができる。流れ関数は $\Psi = \sqrt{2\xi} f$ であるから, (2.15)により表わされる変形流れ関数は

$$\begin{aligned} \psi &= \Psi + \rho u \delta^* (1 - \hat{\eta}) \\ &= \sqrt{2\xi} \left\{ f + d^* \frac{f'}{R} (1 - \hat{\eta}) \right\} \end{aligned} \quad (\text{B13})$$

として求まる。独立変数 $\hat{\eta}$ については, (B7), (B2),

(B5), (B12) から

$$\hat{\eta} = \frac{\sqrt{2\xi}}{\delta^* u_e} \int_0^{\hat{\eta}} \frac{1}{\rho} d\eta = \frac{1}{d^*} \int_0^{\hat{\eta}} R d\eta \quad (\text{B14})$$

として得られる。

なお, 相似解は本文逆解法とメッシュのとり方が異なるから, 内挿を施す。

航空宇宙技術研究所報告503号

昭和52年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)
