

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-506

騒音を受ける薄板の応答

— 解析と実験 —

佐野政明・藤森義典

1977年7月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 騒音を受ける薄板の応答\*

— 解析 と 実験 —

佐野 政明\*\* 藤森 義典\*\*

Response of a Thin Plate Structure to High Intensity Noise

— Analysis and Experiments —

By Masaaki Sano, Yoshinori Fujimori

## ABSTRACT

Response of a thin plate structure to high intensity noise was numerically analyzed and compared with experimental results of various stochastic quantities such as correlation, spectrum, probability density function (level counting) and peak counting.

The 1st and 2nd modes of panel vibration were taken into account in the analysis.

Integration of a pair of two nonlinear equations was performed utilizing the Runge-Kutta-Gill method.

A test panel, with dimensions of 326x160x0.8 (mm), was riveted on the jig frame and high intensity noise then generated by electro-pneumatic transducers.

It was concluded that some stochastic characteristics of calculated strain and displacement agreed with the experiments results, and that the magnitude of the strain and displacement by experiment appeared to be within the range of numerical estimation, when the noise amplitude probability density distribution was near normal distribution.

We believe this numerical analysis to be useful in estimating outside panel behaviour of aircraft and space vehicle.

## I ま え が き

ジェットエンジンの推力が増大するに従って、発生する騒音の力も強大となり、それにさらされる主翼後縁、尾翼部分の外板が共振し、時には、疲労亀裂やハニカム材のコアと外板の剥離などが発生することがある。そこで、騒音による加振によって、構造に致命的な破壊が生じないことを何等かの方法によって、証明しなければならなくなった。<sup>1)</sup> このようなことに対処するための一方

法として、航空機の外板がジェット騒音によって加振される場合を想定して、周辺固定板の応答を数値解析し、実験と比較した。数値解析の手法としては、実際の騒音スペクトラムを整形したスペクトラムから定常な正規確率過程をする騒音の時系列を求め、それを外力とする振動方程式をルンゲ=クッタ=ジル法で解き、応答特性を求めた。一方、実験はリベットで周辺を固定した外板模型を、強音響加振装置を用いて加振した。以上のように、解析と実験では比較条件が異っている。これは、今回行った解析法が、複雑な構造の応答をどの程度まで捉え得るかを推定し、検討することを主眼としているためである。

\* 昭和52年4月30日受付

\*\* 機体第二部

数値解析結果と実験結果をスペクトラム、相関関数、確率密度関数等を用いて比較してみると、ほぼ一致していると言え、実機外板の応答を推算するのに、本解析法は有力であると考えられる。筆者等の知る範囲では、この種の比較は行われていないようであり、今後、板の挙動を推定するための資料となれば幸いである。

### II 数値解析

板に負荷される騒音(以下、音響加振力と書く)のパワースペクトラムから、音響加振力の時系列を計算で求め、それを外力とする振動方程式を、ルンゲ=クッタ=ジル法で解き、応答の統計的諸特性を求めた。この場合、板の中央の振動振幅が、板厚か、それ以上になることが充分予想されるので、歪みと変位の関係は、有限変形の表示をした。実験で使用した外板模型はリベットを使用して周辺を固定したが、解析では、周辺固定の境界条件を仮定した。

板の初期変位がなく、静圧が板の表裏で釣合い、温度一様である周辺固定板に、平面進行波と仮定した音響加振力が負荷された場合、座標系をFig. 1. のようにとると、板の振動方程式と釣合い方程式は(1), (2)式で表示される。

$$D\Delta\Delta w - h(F_{yy} \cdot w_{xx} + F_{xx} \cdot w_{yy} - 2F_{xy} \cdot w_{xy}) - (2d_1 x/a + d_2)Pa(t) + \rho h \dot{w} = 0 \quad (1)$$

$$\Delta\Delta F + E(w_{xx} \cdot w_{yy} - w_{xy}^2) = 0 \quad (2)$$

ここで、 $w$ は板の変位、 $F$ は応力関数であり、応力は  $\sigma_x = \partial^2 F / \partial y^2 (=F_{yy})$ ,  $\sigma_y = \partial^2 F / \partial x^2 (=F_{xx})$ ,  $\tau = -\partial^2 F / \partial y \cdot \partial x (= -F_{xy})$  で定義される。 $\Delta = (\partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2)$ ,  $\dot{w} = \partial w / \partial t$  (以後  $\cdot$  は時間  $t$  の微分

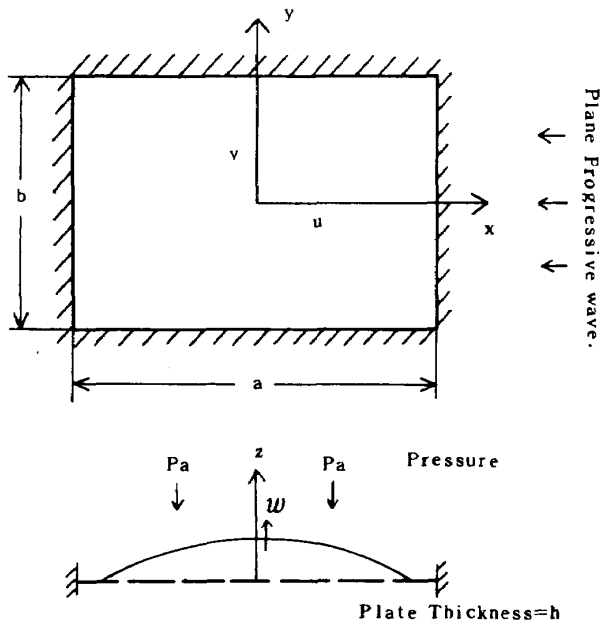


Fig.1. Problem Geometry

を表す。)  $E$ はヤング率、 $\nu$ はポアソン比、 $\rho$ は板の密度、 $h$ は板厚、 $D(=Eh^3 / \{12(1-\nu^2)\})$ は板の曲げ剛性、 $Pa(t)$ は音響加振力、 $d_1, d_2$ は音響加振力がX軸方向に  $(2d_1 x/a + d_2)$  ( $|x| \leq a/2$ ) なる勾配を持つと仮定して、導入した定数で、計算には  $d_1=0.171, d_2=1.0$  を用いた。応力関数  $F$  を求めるにあたって、板中央面内の変位  $u, v$  に対する境界条件を(3)式に示す。

$$\left. \begin{aligned} x = -a/2 & ; u = \epsilon_1 \cdot a/2 \\ x = a/2 & ; u = -\epsilon_1 \cdot a/2 \\ y = -b/2 & ; v = \epsilon_2 \cdot b/2 \\ y = b/2 & ; v = -\epsilon_2 \cdot b/2 \end{aligned} \right\} (3)$$

ただし、 $a, b$ は板の長辺、および短辺を表す。 $\epsilon_1, \epsilon_2$ は有限変形理論での、歪みの表示式を用いて、

$$\left. \begin{aligned} -\epsilon_1 \cdot a &= \int_{-a/2}^{a/2} \{ (F_{yy} - \nu F_{xx}) / E - w_x^2 \} dx \\ -\epsilon_2 \cdot b &= \int_{-b/2}^{b/2} \{ (F_{xx} - \nu F_{yy}) / E - w_y^2 \} dy \end{aligned} \right\} (3)'$$

と表示される。

次に、板の曲げに対する境界条件を(4)式に示す。

$$\left. \begin{aligned} x = \pm a/2 & ; w = 0, w_x = 0 \\ y = \pm b/2 & ; w = 0, w_y = 0 \end{aligned} \right\} (4)$$

応力関数  $F$  は、振動モード、および(4)式を考慮して仮定された変位  $w$  を(2)式に代入し、(3)式を満たすように(2)式を解くことによって求められる。変位  $w$  を(5)式のように仮定する。

$$w = h \{ C_1 W_1(t) \cdot \phi_1(x) + C_2 W_2(t) \cdot \phi_2(x) \} \phi_1(y) \quad (5)$$

ただし、  
 $C_1 = 1/4, C_2 = -3 / (4\sqrt{5} \sin \alpha \pi)$   
 $\alpha = \tan(\alpha \pi) / \pi$  の根 ( $\approx 1.4303$ )  
 $\phi_1(x) = 1 + \cos(2\pi x/a)$   
 $\phi_2(x) = (2x/a) \cdot \sin \alpha \pi - \sin(2\alpha \pi x/a)$

$$\phi_1(y) = 1 + \cos(2\pi y/b)$$

$W_1(t)$ ; 一次の振動モードに対する変位

$W_2(t)$ ; 二次の振動モードに対する変位

文献(2)において、変位  $w$  を(5)式のように仮定した場合の応力関数  $F$  は求められており、その結果を、本問題に適用して、ガラキーン法を用いて、変位  $w$  の時間に関する式を求め、減衰項を付加すると、(6)式になる。

$$\left\{ \begin{aligned} \ddot{W}_1(t) + \omega_1 \eta_1 \dot{W}_1(t) + \omega_1^2 \{ 1 + \alpha_1 W_1^2(t) + \alpha_3 W_2^2(t) \} W_1(t) &= A \cdot Pa(t) \\ \ddot{W}_2(t) + \omega_2 \eta_2 \dot{W}_2(t) + \omega_2^2 \{ 1 + \alpha_4 W_1^2(t) + \alpha_2 W_2^2(t) \} W_2(t) &= B \cdot Pa(t) \end{aligned} \right. \quad (6)$$

ただし、 $\omega_1 = \omega_0 \sqrt{k_1}, \omega_2 = \omega_0 \sqrt{k_2}$

$$\omega_0 = (\pi^2/a^2) \cdot \sqrt{Eh^2 / (12\rho(1-\nu^2))}$$

$$\alpha_1 = \beta_1 / k_1, \alpha_2 = \beta_2 / k_2, \alpha_3 = \beta_3 / k_1$$

$$\alpha_4 = \beta_4 / k_2$$

$\eta_1$ ; 板の一次振動に対する減衰率

$\eta_2$ ; 板の二次振動に対する減衰率

$Pa(t)$ ; スペクトル密度  $S_0(\omega_{fi})$  を持つ音響加振力

$$A = 16d_2 / (9\rho h^2)$$

$$B = (2\sqrt{5}d_1 / 9\rho h^2) \cdot \left\{ (\sin \alpha\pi) / 3 + (\cos \alpha\pi) / \alpha\pi \right\} / \left[ \left\{ (\alpha^2\pi^2 - 6) \cdot \sin \alpha\pi \right\} / 3\alpha^2\pi^2 + 1 / (2\sin \alpha\pi) + (\cos \alpha\pi) / \alpha\pi - 1 / (4\alpha\pi) \right]$$

$k_1, k_2, \beta_1 \sim \beta_4$  は、文献(2)に表示されたものと同じで付録に示す。

(6)式中の  $Pa(t)$  は、スペクトル密度  $S_0(\omega_{fi})$  を持つ時系列であり、定常な正規確率過程である場合は、(7)式で近似<sup>3)</sup>される。

$$P_a(k \cdot \Delta t) = \sqrt{2} \sum_{i=1}^N \left\{ S_0(\omega_{fi}) \cdot \Delta\omega_f \right\}^{1/2} \cdot \cos(\omega'_{fi} \cdot k\Delta t + \varphi_i) \quad (7)$$

$(k=1, 2, 3, \dots, kn)$

ただし、 $S_0(\omega_{fi})$  は、 $Pa(t)$  のスペクトル密度。 $N$  は、 $S_0(\omega_{fi})$  の分割数 (解析では  $N=200$ )

$\Delta\omega_f = \omega_{fu} / N$ ,  $\omega_{fu}$  は  $S_0(\omega_{fi})$  が有意な値を持つ上限の角振動数 ( $\omega_{fu} = 2498.8 \text{ Hz}$ )

$\omega_{fi} = (i - 1/2) \cdot \Delta\omega_f$ ,  $i=1, 2, \dots, N$

$\omega'_{fi} = \omega_{fi} + \delta\omega$ ,  $\delta\omega$  は区間  $[-\Delta\omega' / 2, \Delta\omega' / 2]$  で一様分布する角振動数で、 $\Delta\omega' \ll \Delta\omega_f$  なる値をとる。 ( $\Delta\omega' = \Delta\omega_f / 20$ )

$\varphi_i$  は、区間  $[0, 2\pi]$  で一様分布する位相

$\Delta t$  は、時間間隔 ( $\Delta t = 0.2 \text{ msec}$ )

$k$  は、必要とする  $Pa(k \cdot \Delta t)$  の数 ( $kn=4096$ )

ただし、実験で得られる  $Pa(t)$  は、スペクトル密度  $S_0(\omega_{fi})$  によってのみ規定される時系列であって、定常な正規確率過程であるかどうかは不明であり、数値解析で近似される  $Pa(k \cdot \Delta t)$  とはかならずしも同一ではない。

しかしながら、本報告の目的は、まえがきで述べた通り、種々の条件の差もふくめて、本数値解析法が、複雑な構造の応答をどの程度まで捉え得るかを推定することであるので、実験で負荷された音響加振力が数値解析で得られるそれと統計的性質が異っていても両者の比較を行った。

(7)式の  $Pa(k \cdot \Delta t)$  と、(6)式を用いて、 $[W_1, \dot{W}_1, W_2, \dot{W}_2] a^T (k-1) \cdot \Delta t$  と、 $Pa\{(k-1) \cdot \Delta t\}$  から、 $[W_1, \dot{W}_1, W_2, \dot{W}_2] a^T k \cdot \Delta t$  をルンゲ=クッタ=ジル法で数値的に求める。以上のような手法で、音響加振力  $Pa(k \cdot \Delta t)$  に対する変位の時系列が数値解析される。変位 ( $W_1, W_2$ ) が求めれば、板上の任意の点における歪み ( $\epsilon_x, \epsilon_y$ ) は、(8)式で計算される。

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= E_{x1}W_1^2 + E_{x2}W_1 + E_{x3}W_1 \cdot W_2 + E_{x4}W_2 + E_{x5}W_2^2 \\ \epsilon_y &= E_{y1}W_1^2 + E_{y2}W_1 + E_{y3}W_1 \cdot W_2 + E_{y4}W_2 + E_{y5}W_2^2 \end{aligned} \right\} (8)$$

今回用いた板の場合、 $y = \pm b/2$  なる境界の歪みが、音響疲労上問題となるので、 $\epsilon_y$  についてのみ、係数  $E_{y1} \sim E_{y5}$  を(9)式に示す。

$$E_{y1} = C_1^2 h^2 \frac{\pi^2}{b^2} \left[ \left[ 2\cos(2\pi x/a) + \frac{1}{2}\cos(4\pi x/a) + \cos(2\pi y/b) \cdot \left\{ \frac{4}{(1+\lambda^2)^2} \cos(2\pi x/a) + \frac{8}{(4+\lambda^2)^2} \cos(4\pi x/a) + \frac{2}{(1+4\lambda^2)^2} \cos(4\pi y/b) \cos(2\pi x/a) \right\} - \nu\lambda^2 \left[ 2\cos(2\pi y/b) \left\{ \frac{1}{\lambda^4} + \frac{2}{(1+\lambda^2)^2} \cos(2\pi x/a) + \frac{1}{(4+\lambda^2)^2} \cos(4\pi x/a) \right\} + 8\cos(4\pi y/b) \left\{ \frac{1}{16\lambda^4} + \frac{1}{(1+4\lambda^2)^2} \cos(2\pi x/a) \right\} \right] + \frac{3}{2} \right] \right]$$

$$E_{y2} = 4C_1 z h \frac{\pi^2}{b^2} \{ 1 + \cos(2\pi x/a) \} \cos(2\pi y/b)$$

$$E_{y3} = C_1 \cdot C_2 \cdot h^2 \frac{\pi^2}{b^2} \left[ \left[ -2\sin(2\alpha\pi x/a) - \sin(2(\alpha+1)\pi x/a) - \sin(2(\alpha-1)\pi x/a) + \frac{4x}{a} \sin\alpha\pi \cos(2\pi x/a) + \cos(2\pi y/b) \left[ -\frac{4\alpha^4}{(\alpha^2+\lambda^2)^2} \sin(2\alpha\pi x/a) - \frac{2(\alpha^2+1) \cdot (\alpha+1)^2}{\{(\alpha+1)^2+\lambda^2\}^2} \sin(2(\alpha+1)\pi x/a) - \frac{2(\alpha-1)^2(\alpha^2+1)}{\{(\alpha-1)^2+\lambda^2\}^2} \sin(2(\alpha-1)\pi x/a) + \frac{8\sin\alpha\pi}{\pi(1+\lambda^2)^2} \sin(2\pi x/a) + \frac{8x\sin\alpha\pi}{a(1+\lambda^2)^2} \cos(2\pi x/a) - \frac{16\sin\alpha\pi}{\pi(1+\lambda^2)^3} \sin(2\pi x/a) \right] + \cos(4\pi y/b) \left[ -\frac{2\alpha^4}{(\alpha^2+4\lambda^2)^2} \sin(2\alpha\pi x/a) - \frac{(\alpha-1)^2(\alpha+1)^2}{\{(\alpha+1)^2+4\lambda^2\}^2} \sin(2(\alpha+1)\pi x/a) - \frac{(\alpha+1)^2(\alpha-1)^2}{\{(\alpha-1)^2+4\lambda^2\}^2} \sin(2(\alpha-1)\pi x/a) \right] \right]$$

$$\begin{aligned}
& \left. \left. \left. \left. \left. (\alpha-1)\pi x/a + \frac{4\sin\alpha\pi}{\pi(1+4\lambda^2)^2} \sin(2\pi x/a) + \frac{4x\sin\alpha\pi}{a(1+4\lambda^2)^2} \cos(2\pi x/a) - \frac{4(3+4\lambda^2)}{\pi(1+4\lambda^2)^3} \sin(2\pi x/a) \right] + \nu\lambda^2 \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left[ 2\cos(2\pi y/b) \left\{ \frac{2\alpha^2}{(\alpha^2+\lambda^2)^2} \cdot \sin(2\alpha\pi x/a) + \frac{\alpha^2+1}{\{(\alpha+1)^2+\lambda^2\}^2} (\sin(2(\alpha+1)\pi x/a) + \sin(2(\alpha-1)\pi x/a)) \right. \right. \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. - \frac{4x\sin\alpha\pi}{a(1+\lambda^2)^2} \cos(2\pi x/a) + \frac{8\sin\alpha\pi}{\pi(1+\lambda^2)^3} \sin(2\pi x/a) \right\} + 8\cos(4\pi y/b) \left\{ \frac{\alpha^2}{(\alpha^2+4\lambda^2)^2} \sin(2\alpha\pi x/a) + \right. \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. \frac{(\alpha-1)^2}{2\{(\alpha+1)^2+4\lambda^2\}^2} \sin(2(\alpha+1)\pi x/a) + \frac{(\alpha+1)^2}{2\{(\alpha-1)^2+4\lambda^2\}^2} \sin(2(\alpha-1)\pi x/a) - \frac{2x\sin\alpha\pi}{a(1+4\lambda^2)^2} \cos(2\pi x \right. \right. \right. \\
& \left. \left. \left. \left. \left. \left. /a) + \frac{2(3+4\lambda^2)\sin\alpha\pi}{\pi(1+4\lambda^2)^3} \sin(2\pi x/a) \right\} \right] + \frac{4x}{a} \sin\alpha\pi \right] \right] \right] \right] \\
E_{y4} &= 4C_2 z h \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left\{ \frac{2x}{a} \sin\alpha\pi - \sin(2\alpha\pi x/a) \right\} \cos\frac{2\pi y}{b} \\
E_{y5} &= C_2^2 h^2 \left(\frac{\pi}{b}\right)^2 \left\{ \left( \frac{2x}{a} \sin\alpha\pi \right)^2 - \frac{1}{2} \cos\frac{2\alpha\pi x}{a} - \frac{4x}{a} \sin\alpha\pi \sin\frac{2\alpha\pi x}{a} + \cos\frac{2\pi y}{b} \left\{ -\frac{16\alpha^5 \sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)^3} \cos\frac{2\alpha\pi x}{a} \right. \right. \\
& - \frac{8\alpha^4}{(4\alpha^2+\lambda^2)^2} \cos\frac{4\alpha\pi x}{a} + \frac{8\alpha^3 \sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)^3} \cos\frac{2\alpha\pi x}{a} - \frac{8x\alpha^4 \sin\alpha\pi}{a(\alpha^2+\lambda^2)^2} \sin\frac{2\alpha\pi x}{a} \left. \right\} + \cos\frac{4\pi y}{b} \left\{ -\frac{4\alpha^3(3\alpha^2+\lambda^2)\sin\alpha\pi}{(\alpha^2+4\lambda^2)^3} \right. \\
& \cos\frac{2\alpha\pi x}{a} + \frac{4\alpha^3 \sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2+4\lambda^2)^2} \cos\frac{2\alpha\pi x}{a} - \frac{4\alpha^3 \sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2+4\lambda^2)^2} \cos\frac{2\alpha\pi x}{a} - \frac{4x\alpha^4 \sin\alpha\pi}{a(\alpha^2+4\lambda^2)^2} \sin\frac{2\alpha\pi x}{a} \left. \right\} + \nu\lambda^2 \left[ 2\cos\frac{2\pi y}{b} \right. \\
& \left. \left\{ -\frac{\alpha^2}{\lambda^4} \cdot \frac{8\alpha^3 \sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2+\lambda^2)^3} \cos\frac{2\alpha\pi x}{a} + \frac{\alpha^2}{(4\alpha^2+\lambda^2)^2} \cos\frac{2\alpha\pi x}{a} + \frac{4x\alpha^2 \sin\alpha\pi}{a(\alpha^2+\lambda^2)^2} \sin\frac{2\alpha\pi x}{a} \right\} + 8\cos \right. \\
& \left. \frac{2\pi y}{b} \left\{ -\frac{\alpha^2 \pi^2 + \sin^2 \alpha\pi}{16\pi^2 \lambda^4} + \frac{2\alpha(3\alpha^2+4\lambda^2)\sin\alpha\pi}{\pi(\alpha^2+4\lambda^2)^3} \cos\frac{2\alpha\pi x}{a} + \frac{2x\alpha^2 \sin\alpha\pi}{a(\alpha^2+4\lambda^2)^2} \sin\frac{2\alpha\pi x}{a} \right\} \right] + (1+\nu)(4\bar{A}_1 \cosh\frac{2\pi x}{a} \\
& \cdot \cos\frac{2\pi y}{b} + 16\bar{A}_2 \cosh\frac{4\pi x}{a} \cos\frac{4\pi y}{b}) + \frac{1}{2} \left. \right\} \quad (9)
\end{aligned}$$

ただし  $\lambda = a/b$

$$\begin{aligned}
\bar{A}_1 &= \frac{(2\alpha \sin\alpha\pi)^2}{\pi(1+\nu)\lambda \sinh\pi\lambda} \left\{ \frac{2(\alpha^2+\lambda^2)}{(4\alpha^2+\lambda^2)^2} - \frac{\lambda^4}{(\alpha^2+\lambda^2)^3} - \frac{\nu\alpha^2\lambda^2(-17\alpha^4+5\alpha^2\lambda^2+4\lambda^4)}{2(4\alpha^2+\lambda^2)^2(\alpha^2+\lambda^2)^3} \right\} \\
\bar{A}_2 &= \frac{(\alpha^2 \sin\alpha\pi)^2 \{ \alpha^2+4\lambda^2+8(1+\nu)\lambda^2 \}}{8\pi(1+\nu)\lambda(\alpha^2+4\lambda^2)^3 \sinh 2\pi\lambda}
\end{aligned}$$

数値解析によって得られた音響加振力、変位および歪みの各々の時系列はすべて計算機の中に格納される。

### Ⅲ 実験装置および方法

実験に使用した供試体の形状、寸法、および歪みと、変位の計測位置を Fig. 2 に示す。供試体の構造は、0.8128mm厚の平板を、60本のシェアヘッド型のリベットで3mm厚の枠に固定したものとなっている。板および、枠に使用された材料は2024C-T3 Al合金材である。

Fig.3に音響加振装置の概要を示す。音響発生源は、電磁強音響加振機と呼ばれ、電磁弁の開閉により、圧縮空気(≒2.8気圧)を断続させることによって、音波を発生させる。当所に設置されている電磁強音響加振機の出力は、空気流量から計算すると4kwであり、これを二基

使用した。その際の音響変換効率率は15%前後である。音響疲労試験に使用できる音響加振力のスペクトル密度の周波数帯域は50~650Hzであるが、スペクトル密度の形状により、8000Hz以下であれば負荷の発生が可能である。以上により発生した音響加振力は、Fig.4に示すように、音響加振力の進行方向に平行に取付けられた板を加振する。その時の音響加振力、および、加振された板の歪み、変位をデータレコーダで記録する。変位は、供試体を進行波管内に固定する治具を利用して、板の裏側から非接触で計測した。(Fig.5参照)

音響加振力を計測するマイクロホンは板の中心位置の前にゴム紐で、音波が直接当たる向きに吊した。(Fig.6参照)

使用した主な測定器の概要は次の通りである。

a) 変位計；変位計はフィリップス社製、非接触型回

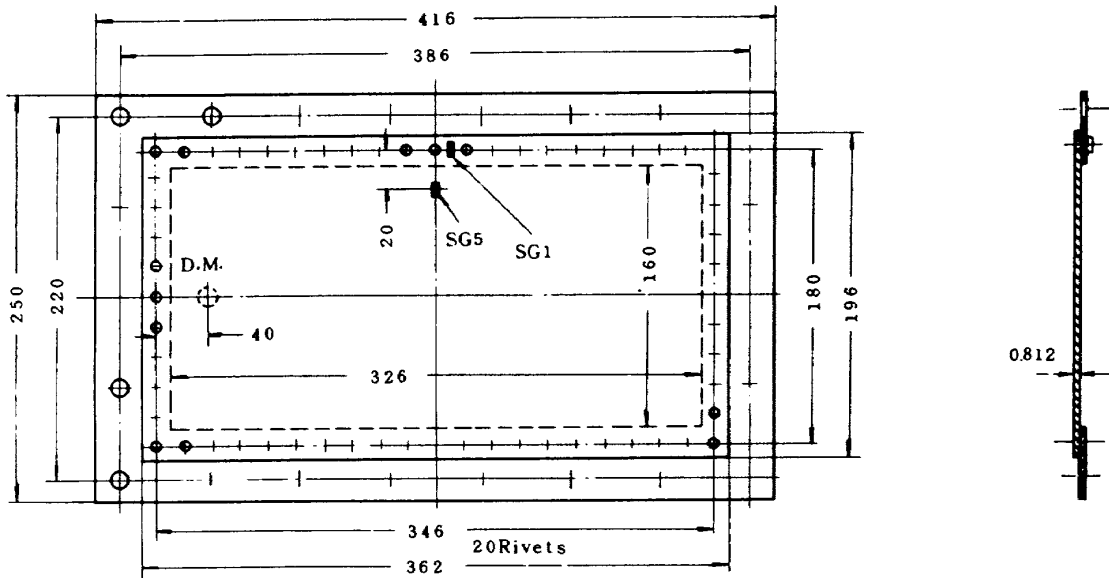


Fig.2 Panel Dimension and Gauge Position (mm)

転機器監視装置（ピックアップ部PR6432型，増幅器PR7451型，Fig. 7参照）を若干改造したも

ので，本実験で使用した2024C-T3材に対する静的変位 $D_d$ と出力電圧 $V_d$ の関係はFig.8の如くで

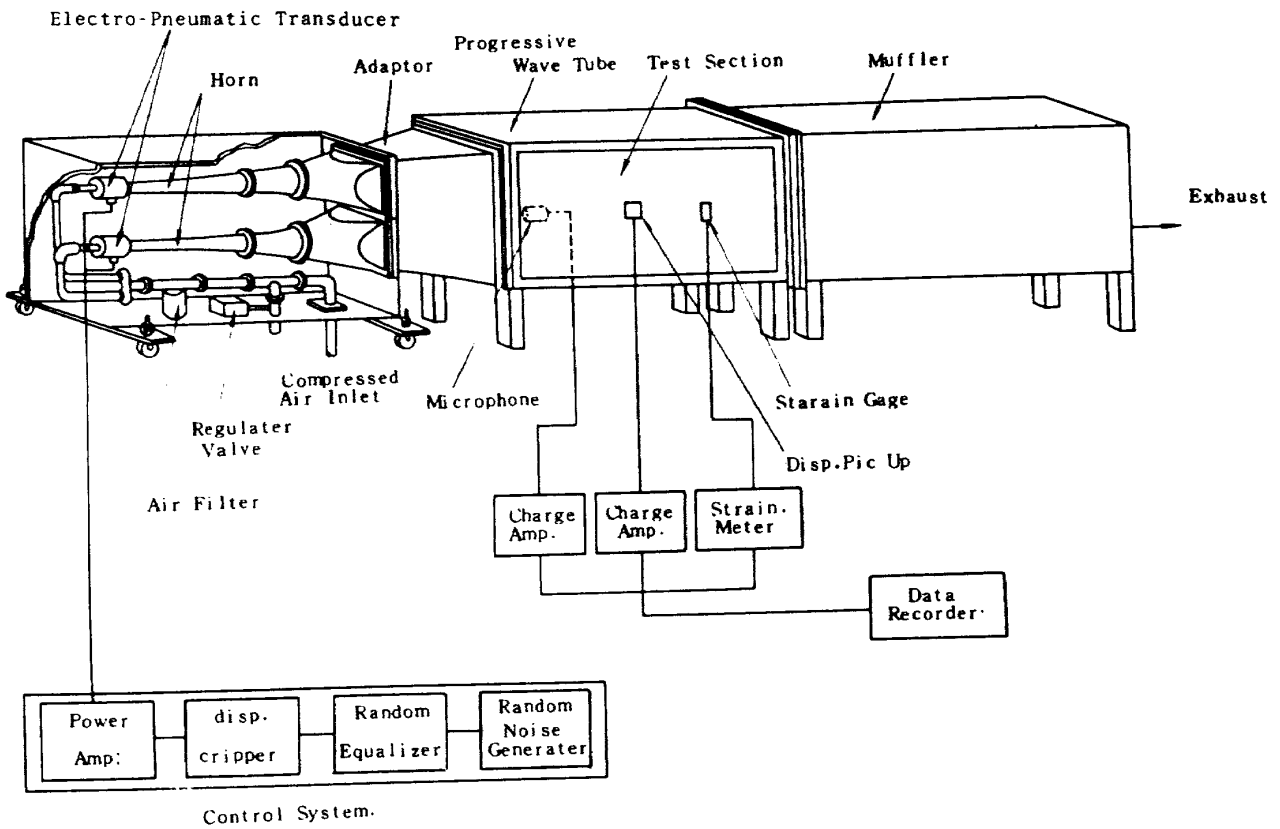


Fig.3 General Layout of Acoustic Test Stand.

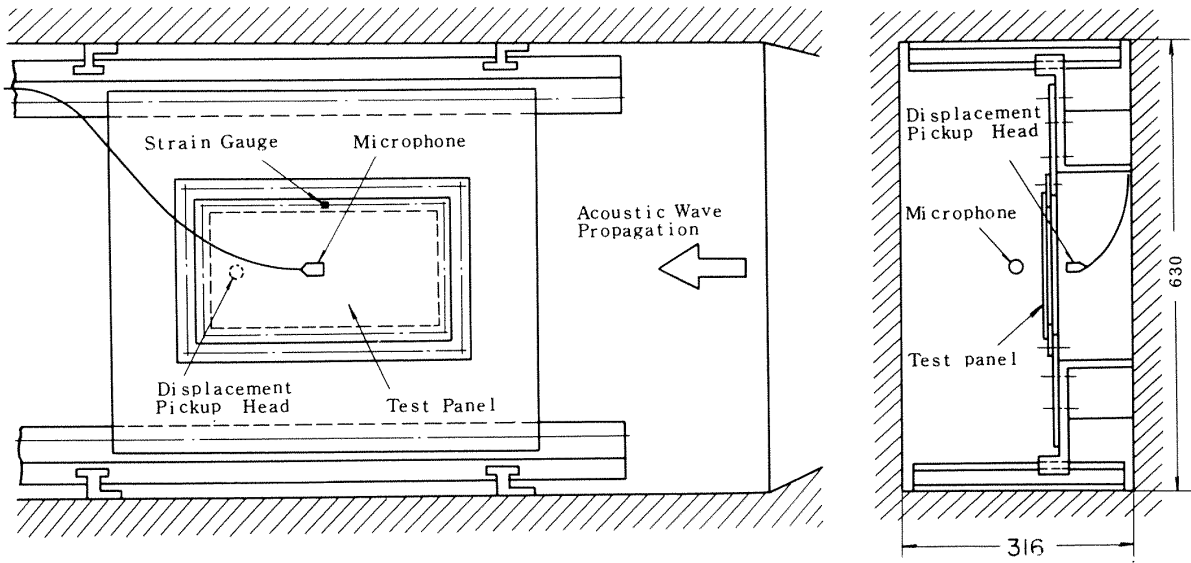


Fig. 4 Test Setup in Progressive Wave Tube

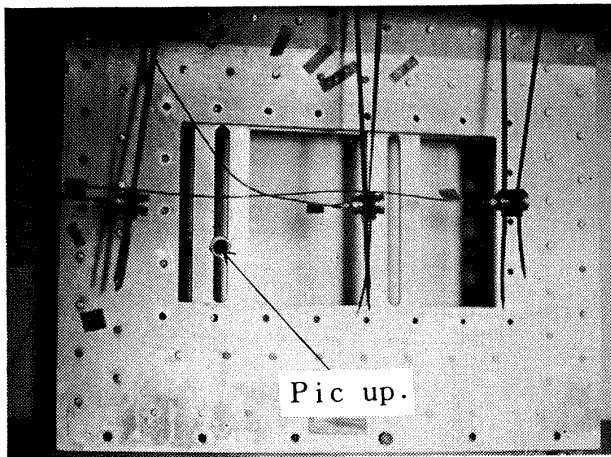


Fig. 5 Set up a Non-Contact type displacement pic up

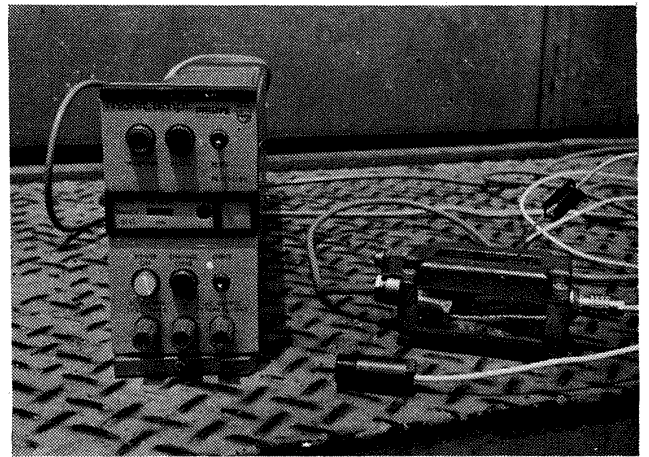


Fig. 7 Non-Contacting type displacement unit

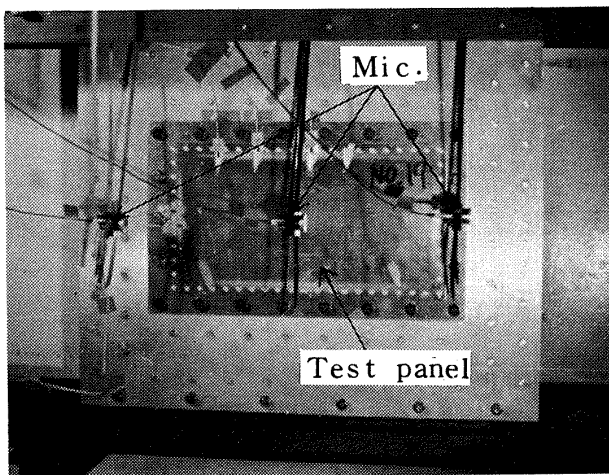


Fig. 6 Set up a Mic. & panel

ある。 $D_d$  と  $V_d$  の動特性を、非接触型変位計No 1 とNo 2 について各々 10(a), (b)式で近似した。

$$D_d = \sum_{i=1}^{20} C_{f1}(i)(0.03V_d + V_0)^{i-1} \quad 10(a)$$

$$D_d = \sum_{i=1}^{20} C_{f2}(i)(0.03V_d + V_0)^{i-1} + A_0 e^{B_0 V_d} \quad 10(b)$$

ただし、 $C_{fj}(i)$  ( $j=1, 2$ ),  $A_0$ ,  $B_0$  ; 定数  
 $V_0$  ; 変位計設置時の静的平衡状態での  
 直流出力

定数  $C_{fj}(i)$  ( $j=1, 2$ ),  $A_0$ ,  $B_0$  の値を Tab.1 に示す。

b) マイクロホン; マイクロホンはエンデブコ社製 (マイク部 2510 型, 増幅器 2730 型) を用いた。最大測定音圧は, 180dB, 周波数特性は 2 ~ 6000 Hz で平坦な piezoelement 型のものである。音圧  $P$  ( $Kg/m^2$ ) と電圧  $V_M$  (ボルト) の関係を (11) 式に

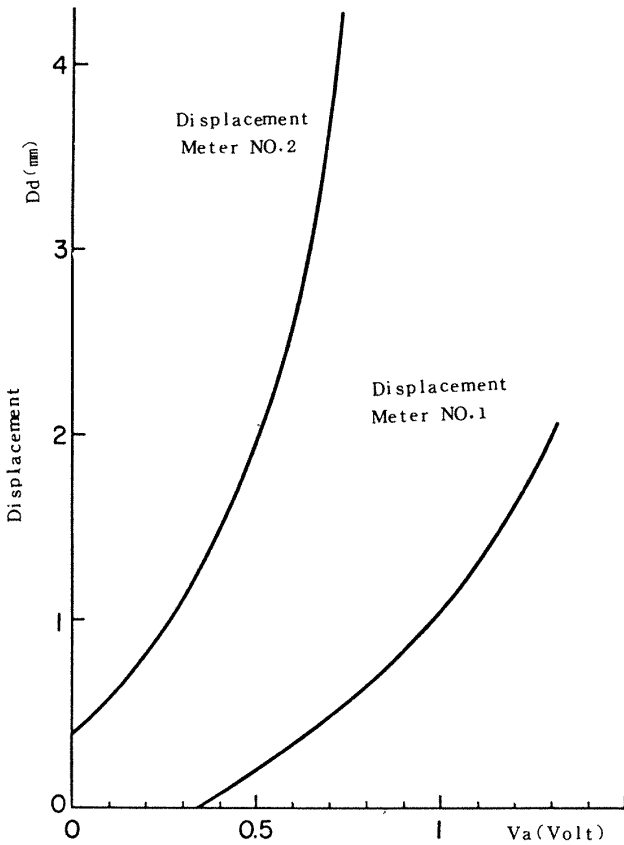


Fig.8 Static Characteristics of is placement Meter

Tab. 1 Coefficients of Approximation Polynomials for Displacement Meter Static Characteristics.

$$A_0=0.4346501$$

$$B_0=0.3053139 \times 10^1$$

$$V_0=0.5$$

<i>i</i>	$C_{f1}(i)$	$C_{f2}(i)$
1	$-0.1988799 \times 10^2$	$0.1013273 \times 10^0$
2	$0.1145485 \times 10^4$	$-0.1110185 \times 10^2$
3	$-0.1452490 \times 10^5$	$0.3395539 \times 10^3$
4	$0.8739964 \times 10^5$	$-0.5290259 \times 10^4$
5	$-0.3013380 \times 10^6$	$-0.4875545 \times 10^5$
6	$0.6293692 \times 10^6$	$-0.2773786 \times 10^6$
7	$-0.7703761 \times 10^6$	$0.9670331 \times 10^6$
8	$0.4369613 \times 10^6$	$-0.1878933 \times 10^7$
9	$0.8081121 \times 10^5$	$0.1128485 \times 10^7$
10	$-0.2171826 \times 10^6$	$0.2767803 \times 10^7$
11	$0.5410092 \times 10^5$	$-0.5143860 \times 10^7$
12	$-0.6502844 \times 10^5$	$0.6886256 \times 10^6$
13	$0.1661695 \times 10^6$	$-0.1024385 \times 10^6$
14	$-0.5108359 \times 10^5$	$0.1111846 \times 10^8$
15	$-0.9989738 \times 10^5$	$-0.1620740 \times 10^7$
16	$0.5303969 \times 10^5$	$-0.4473579 \times 10^8$
17	$0.5063332 \times 10^5$	$0.6516706 \times 10^8$
18	$-0.5920922 \times 10^5$	$-0.2494115 \times 10^8$
19	$0.2194444 \times 10^5$	$-0.1109383 \times 10^8$
20	$-0.2913555 \times 10^4$	$0.7950637 \times 10^7$

示す。

$$P=202.95 V_M (169.5 dB=3.33 r. m. s Volt) (11)$$

c) 動歪計；動歪計は共和電業製 DPM-6G 型を用いた。周波数特性は、0~2000 Hz で平坦，最大感度は  $10 \mu \epsilon$  で 0.2 ボルトである。歪み  $S_d (\mu \epsilon)$  と電圧  $V_d$  (ボルト) の関係を (12) に示す。

$$S_d=600 \times 10^{-6} \cdot V_s \quad (12)$$

d) データレコーダ；データレコーダは TEAC 社製 R-410 型 (Fig.9 参照) を使用して，上記諸データを FM 方式で記録した。その時のテープ速度は  $76.2 \text{ cm/sec}$  である。



Fig.9 Data recorder

#### N データ処理

数値解析 (II 章)，および実験 (III 章) で得られた音響加振力，歪み，および変位は，Fig.10 に示す手順で統計的な諸特性を求めた。A-D 変換は， $\pm 1.024$  ボルトを +4095 から -4096 の数値に変換する。そのときのデータのサンプリング間隔は 0.2 msec である。A-D 変換された諸データは，10(a)，(b)，(11)，および (12) 式に基づいて，物理量に変換され，時系列として，計算機 (FACOM-230:75) に蓄えられる。数値解析によって得られた歪み等の時系列と，実験で得られた諸量の時系列より，相関，スペクトル密度を求める方法としては，F. F. T. (高速フーリエ変換) 法を用いて，フーリエ変換し，その共役値との積を時間で除して，スペクトル密度を求め，その逆フーリエ変換を行って相関を求



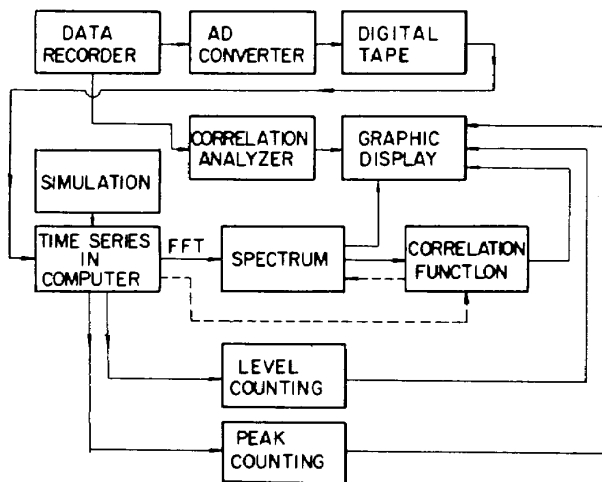


Fig.10 Data processing and simulation

めた。F. F. T. 法による変換については、I. B. M. 社のサブルーチン (HARM) を使用した。また、実験で得られた種々のデータの時系列は、4096点を演算単位として、3~5ヶ所の演算を行い、実験データのサンプリング個所の違いによって生ずる演算結果に大きい差のないことを確かめた。

0.2 msec 間隔に、4096点で構成された時系列の瞬時値、および極値の確率密度関数を次の方法で求めた。

① -4096 から、+4095 までの区間を134のレベルに分割し、時系列をレベル  $j$  ( $1 \leq j \leq 134$ ) で表示する。たとえば、レベル1は区間 [+4095, +4035] 内に入る時系列を表す。

② 時系列の瞬時値、および極値のひん度を、その対応するレベル  $j$  毎に計数する。その場合、同一レベル内で変動する極値は計数されない。

上に凸の極値を正 (Positive Peak)、下に凸の極値を負の極値 (Negative Peak) とした。

③ 時系列の瞬時値、および極値の確率密度関数  $P(X_N)$  を、(13)式で計算する。

$$P(X_N) = \frac{N_j}{\sum_{j=1}^{134} N_j} \cdot \frac{\sigma_N}{\Delta\sigma_N} \quad (13)$$

ただし、 $X_N$  は時系数、 $\sigma_N$  は  $X_N$  の標準偏差、 $N_j$  はレベル  $j$  の大きさを持つ瞬時値、または極値の数、 $\Delta\sigma_N$  はレベルの設定幅で、本データ処理では、 $\Delta\sigma_N = 8192/134$  である。また、添字  $N$  は、音響加振力を表す。同様に  $D$  は変位を、 $S$  は歪みを表わすこととする。

以上のように、時系列を、レベルで表示する場合、本データ処理法は、①の手法を用いたことにより、電圧で表示すれば最大 7.65 mV の誤差を持つ。

## V 数値解析及び実験の結果と検討

### 1. 各種定数について

音響加振を受ける板の応答を計算するにあたって用いた定数を Tab. 2 に示す。Tab. 2 中  $g$  は重力加速度を示す。

Tab. 2 Physical constants of the test panel used in computation

$a = 0.346 \text{ m}$ , $b = 0.18 \text{ m}$ , $h = 0.8128 \times 10^{-3} \text{ m}$ $\nu = 0.34$ , $\rho = 0.279 \times 10^4 \text{ Kg/m}^3$ , $E = 0.72 \times 10^{10} \text{ Kg/m}^2$ $g = 0.98 \times 10 \text{ m/sec}^2$
---

(6)式で使用された板の減衰率  $\eta_1$ ,  $\eta_2$  は実験で求めた。その方法は、まず板の加振方法として、

① 電磁加振器で、一次、および二次の共振をさせ、その後、急激に加振を停止する。

② 板をはじいて、衝撃を与える。

の二通りを行った。①および②の方法で作られる振動を歪ゲージ (Fig. 2 SG5の位置で計測)、および非接触型の変位計 (板の中央にて計測) で取出して、オシログラフに減衰波形を記録する。このようにして、記録された減衰波形から、

Ⓐ 隣り合う波の振幅比から減衰率を求める。

Ⓑ 減衰を開始する波の振幅を基準として、 $N$ 個後の波の振幅との比から、減衰率を求める。

Ⓒ 減衰する波の頂点を結ぶ包絡線に指数関数を当てはめ、減衰率を計算する。

の三通りの方法で減衰率を計算する。その結果を Tab. 3 に示す。なお、表中の値は、各々の方法で数回実験を繰返し、得られた減衰率の平均値である。方法の違いによって、得られた値はバラツキがあるが、数値解析には、 $\eta_1 = 0.027$ ,  $\eta_2 = 0.016$  を採用した。

Tsb. 3 Damping Coefficients of Test Panel in %

First Mode	Method		
	Ⓐ	Ⓑ	Ⓒ
Power cut off			
Displacement meter	2.34	2.44	2.53
Strain meter	3.17	2.93	3.05
Shock			
Displacement meter	3.13	2.99	3.05
Second Mode			
Power cut off			
Displacement meter	1.59	1.74	1.64
Strain meter	1.36	1.51	1.49

2. 歪みと変位について

変位  $W_1, W_2$  と  $\epsilon_x, \epsilon_y$  の関係は(9)式で与えられる。減衰率  $\eta_1, \eta_2$ , および二次の振動モードまでを考慮して, Fig. 2のSG1 ( $x=9\text{mm}, y=90\text{mm}, z=0.4064\text{mm}$ ) 点について歪み  $\epsilon_y$  の係数  $Ey_1 \sim Ey_5$  を計算すると Tab. 4 の値となる。この係数を用いて,  $W_1/h \sim W_2/h$  平面に  $\epsilon_y$  の等高線を描くと, Fig. 11になる。図より, 明らかなことは, 変位がある値 (単純に言えば板厚の4倍) 以上になると, 曲げよりも引張の効果が支配的となり, 圧縮歪みは一定の値 (約  $200\mu\epsilon$ ) よりも大きくはならない。このような性質は, 板上のすべての点に於ける  $\epsilon_y$  の傾向を示している。

Tab. 4 Constants used in Eq.(6) and Eq.(9)

$\alpha_1=45.28$	$\alpha_2=90.84$
$\alpha_3=94.50$	$\alpha_4=93.79$
$\omega_1=9890.6 \text{ rad/sec}$	$=157.4 \text{ Hz}$
$\omega_2=1317.60 \text{ rad/sec}$	$=209.7 \text{ Hz}$
At Strain Gage 1, where	
$(x, y, z)=(0.009, 0.09, 0.0004064) \text{ (m)}$	
$Ey_1=4.98 \times 10^{-5}$	$Ey_2=-2.00 \times 10^{-4}$
$Ey_3=-1.59 \times 10^{-5}$	$Ey_4=3.75 \times 10^{-4}$
$Ey_5=1.03 \times 10^{-5}$	

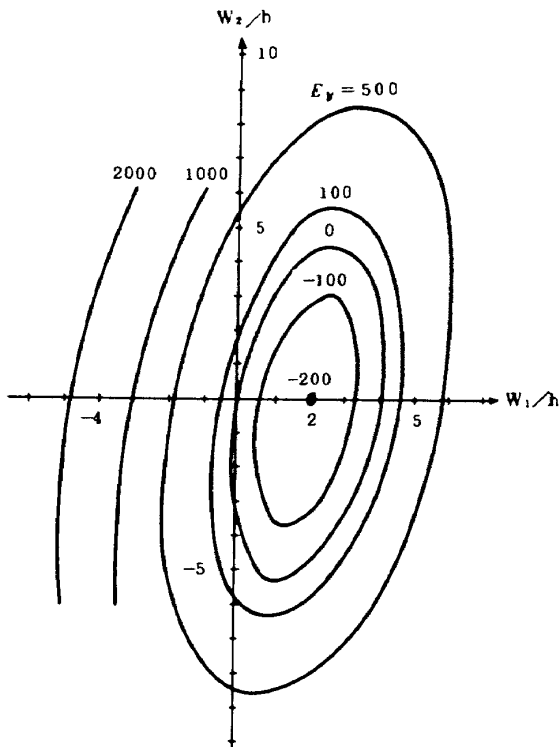


Fig. 11 Strain contour at SG. 1 (Micro)

3. 音響加振力の特性について

実験で板に負荷された音響加振力は, 板の一次, および二次の固有振動数を含む  $100 \sim 315 \text{ Hz}$  でスペクトル密度  $S_N(f)$  が平坦となるように制御された。Fig. 12 に実線で示されるスペクトル密度は,  $100 \sim 315 \text{ Hz}$  で音響加振力が  $130 \text{ dB/Hz}$  となるように制御した場合 (同図中 Experiment と表記。以後, 実験で得た特性はすべて Experiment と記した。) であり, 破線で示されるスペクトル密度は, (7)式で数値解析された時系列から計算した。

(同図中 Simulation と表記。以後, 数値解析で得た特性は, すべて Simulation と記した。)

Fig. 13, 14, 15に, 実験および数値解析で得られた自己相関々数  $R_{NN}(\tau)$ , 時系列の瞬時値の確率密度関数  $P(X_N)$  (図では, Level Counting と表記) および極値の確率密度関数  $P(X_N)$  (図では, Peak Counting と表記) をそれぞれ示す。

Fig. 12 で明らかなように, 数値解析で得た音響加振力のスペクトル密度は, 実験で求めたそれよりも整形されているが, Fig. 14, 15に示す音響加振力の瞬時値, および極値の確率密度関数に着目すると, 数値解析で求められた音響加振力は, 実験で求められたそれをよく模擬している。しかし, Fig. 14 に示すように, 数値解析で得た音響加振力, および実験で得たその各々の歪度 (図では, SKで示す), 尖鋭度 (図では, PKで示す) を計算すると, その値は異った。

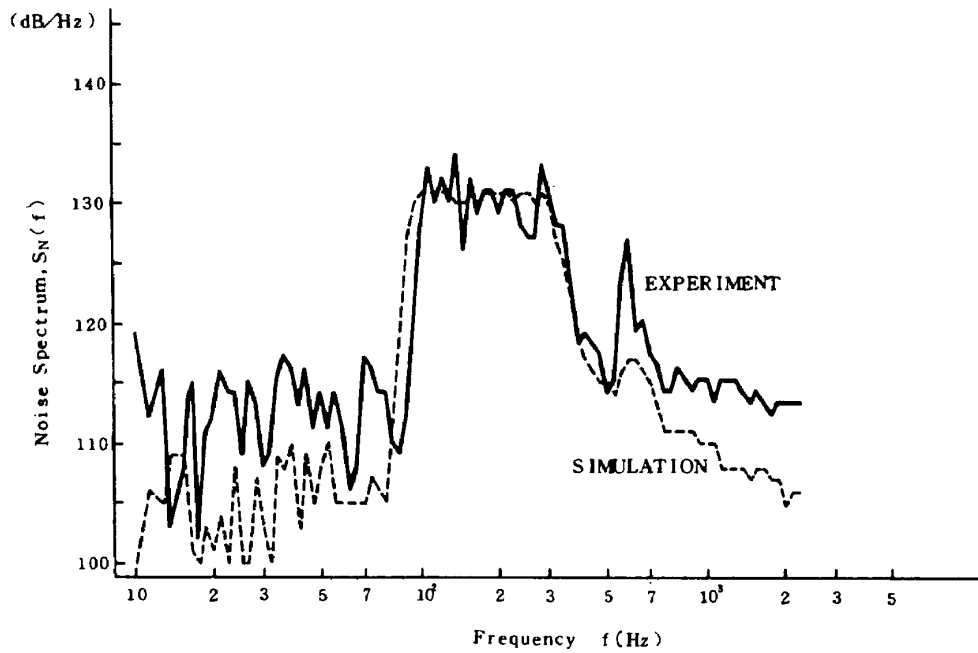
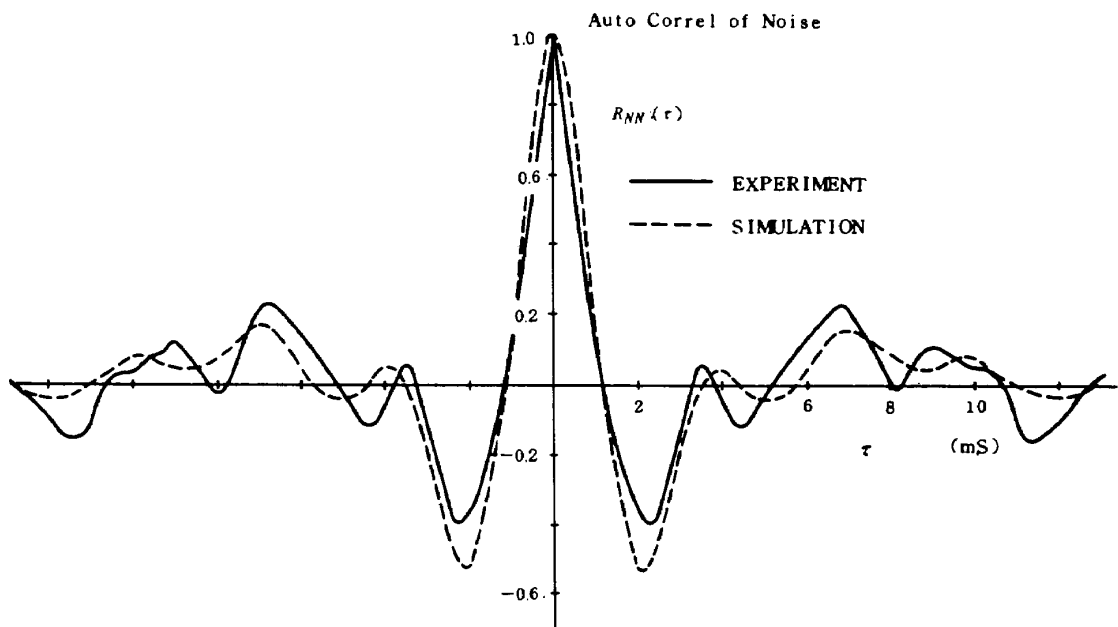
Fig.12 Noise Spectrum,  $S_N(f)$ 

Fig.13 Auto Correlation of Noise

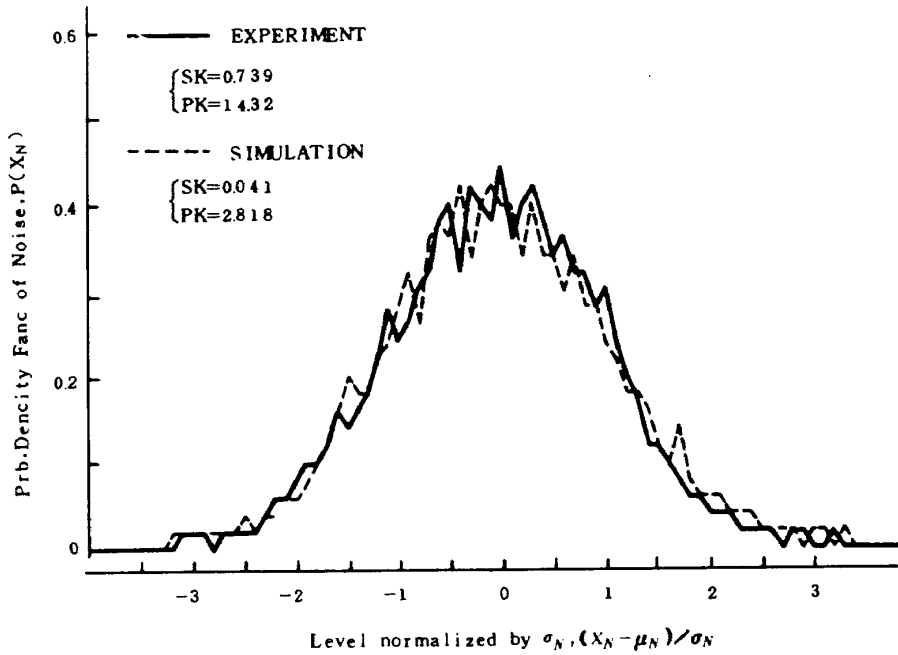


Fig. 14 Level Counting of Noise

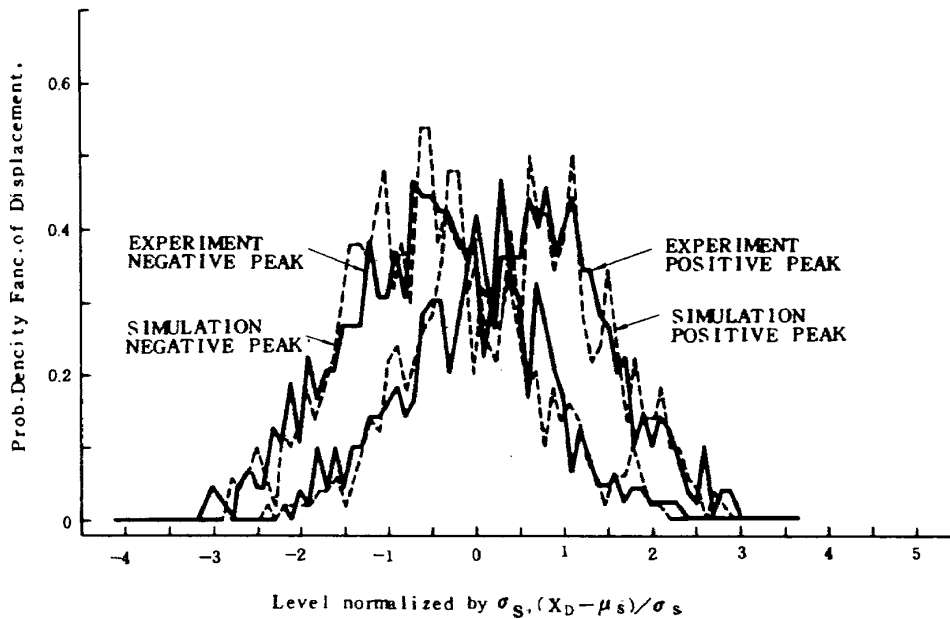


Fig. 15 Peak Counting of Noise

#### 4. 変位の特性について

Fig. 16 に、実験で求めた音響加振力が、正規分布に近く（歪度 = 0.082, 尖鋭度 = 2.91）、スペクトル密度の平坦部の強さが 115 dB/Hz である場合の、変位のスペクトル密度と、板を一自由度系（図では Simulation 1 と記す）、および二自由度系（図では Simulation 2 と表す）、両者とも減衰あり、として数値解析で求めた変位のスペクトル密度を示す。Fig. 16 に示すように、数値解析結果は、実験結果の主要なピーク（200 Hz 近傍）をよく捉えている。しかし、細部までみると、実験結果

では、120, 170, および 320 Hz 近傍にもピークが生じ、それを数値解析結果は捉えていない。

Fig. 17 に実験から求めた変位の自己相関々数  $R_{DD}(\tau)$  と音響加振力に対する変位の相関々数  $R_{ND}(\tau)$  を示す。 $R_{ND}(\tau)$  は、変位が、音響加振力より 7.2 m sec 程遅て応答するケースが多いことを示している。

Fig. 18 は、数値解析、および実験で求めた変位の瞬時値の確率密度関数を示す。なお、図中  $\mu_D$  は、変位  $X_D$  の平均値を示す。図より、瞬時値の確率密度関数は、正規分布に近く、かつ、数値解析結果（歪度 = -0.01, 尖

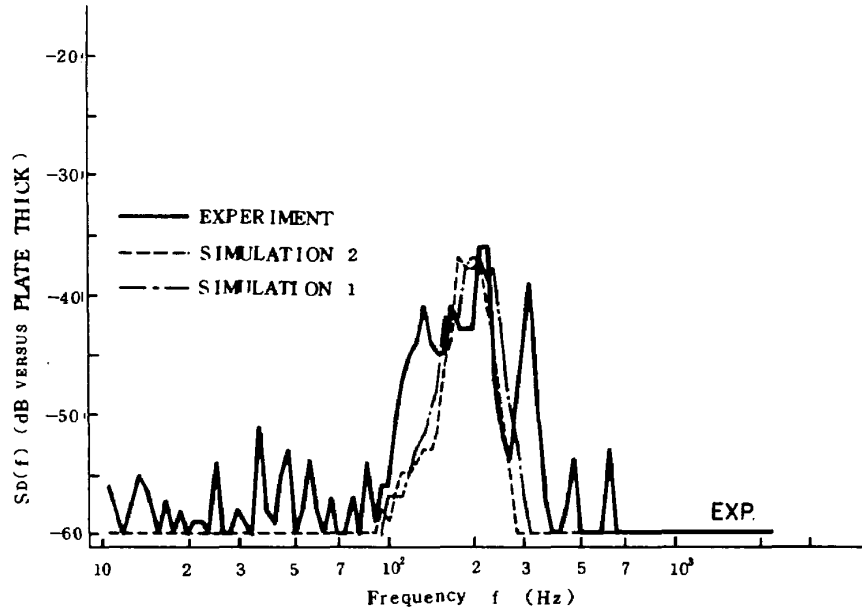


Fig.16 Displacement Spectrum,  $S_D(f)$

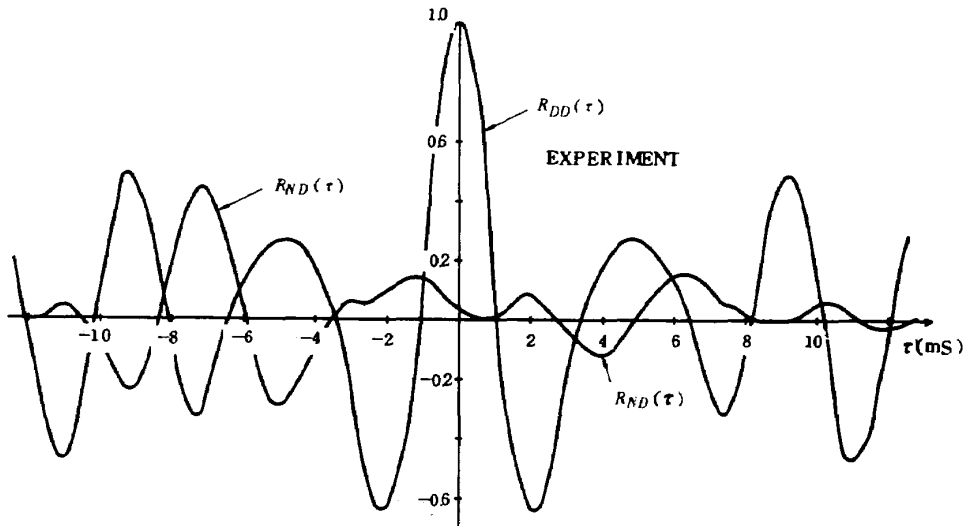


Fig.17 Auto & Cross Correlation of Displacement and Noise

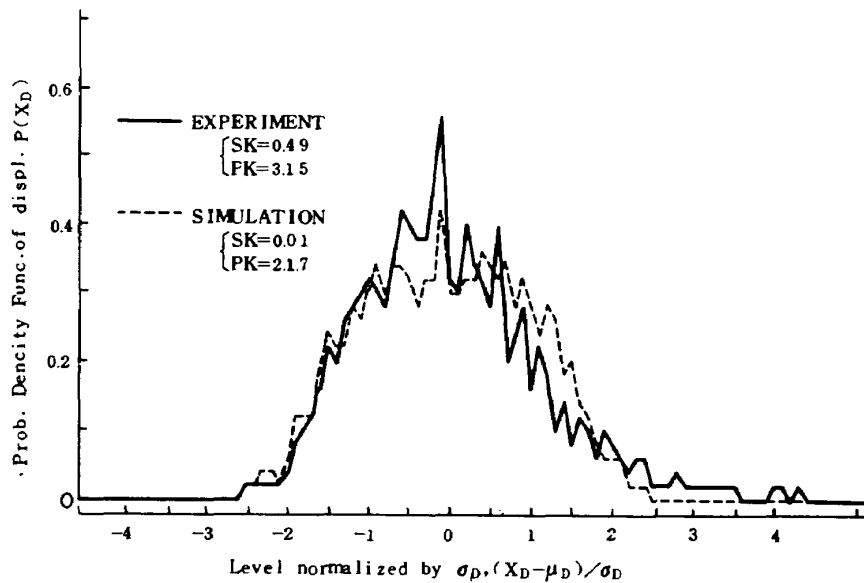


Fig.18 Level Counting of Displacement

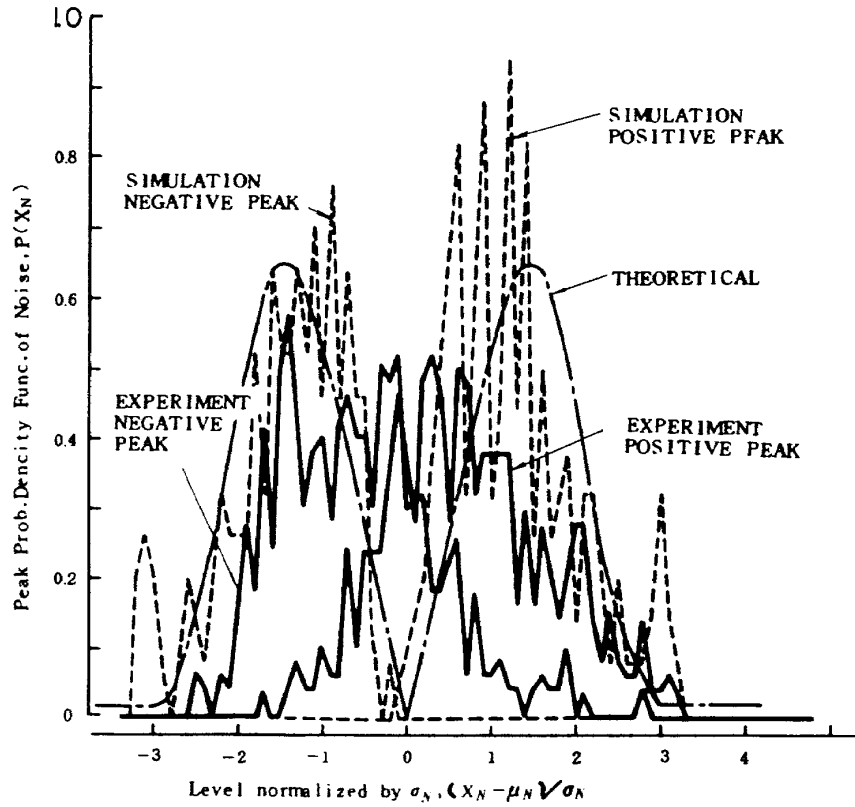


Fig. 19(a) Peak Counting of Displacement

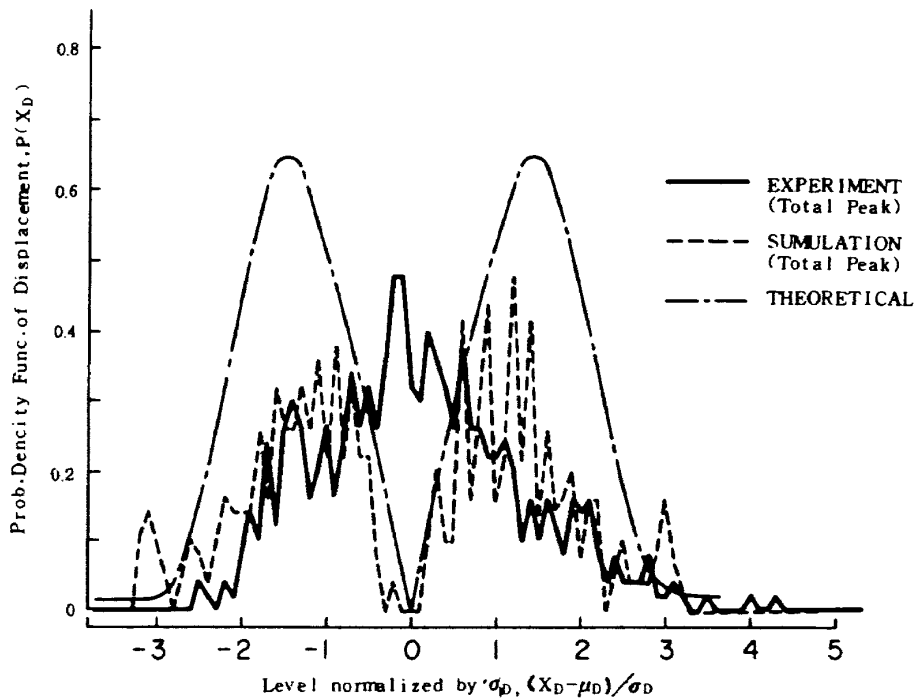


Fig. 19(b) Total Peak Counting of Displacement

鋭度 = 2.17) と、実験結果 (歪度 = 0.49, 尖鋭度 = 3.15) は、ほぼ一致した。

Fig. 19(a), (b) に、変位の極値の確率密度関数を示す。両図中、Theoretical と表記された一点鎖線は、板を減衰のある一自由度系として、有限帯域幅 (0 ~

2498.8 Hz) の白色雑音を負荷した場合の極値の確率密度関数の解析解<sup>4)</sup>を表す。

また、Fig. 19(b) 中の Total Peak とは、正、負の極値のひん度を加え合せ、2 で除した値から確率密度関数を求めたことを示す。変位の極値についての確率密度

関数を見ると、数値解析結果と実験結果は、良い一致を示さなかった。

5. 歪みの特性について

Fig.12 に示されるスペクトル密度を持つ音響加振力を板に負荷したとき、SG1 点における歪み応答のスペクトル密度を Fig. 20 に示す。Simulation 2 は、実験結果の主要なピークを、ほぼ捉えており、その点に関しては、Simulation 1 より近似度が良い。しかし、

500 Hz 以上では、数値解析結果 (Sim.2, Sim.1) は、実験結果を模擬しているとは言い難い。

SG1 点における歪みの自己相関々数  $R_{SS}(\tau)$ 、および音響加振力に対する相互関々数  $R_{NS}(\tau)$  を、Fig. 21 に示す。Fig. 22 に示すように、数値解析で得た歪みの瞬時値の確率密度関数は、おおむね実験結果を模擬している。

Fig. 23 に示すように、数値解析で得た歪みの極値の

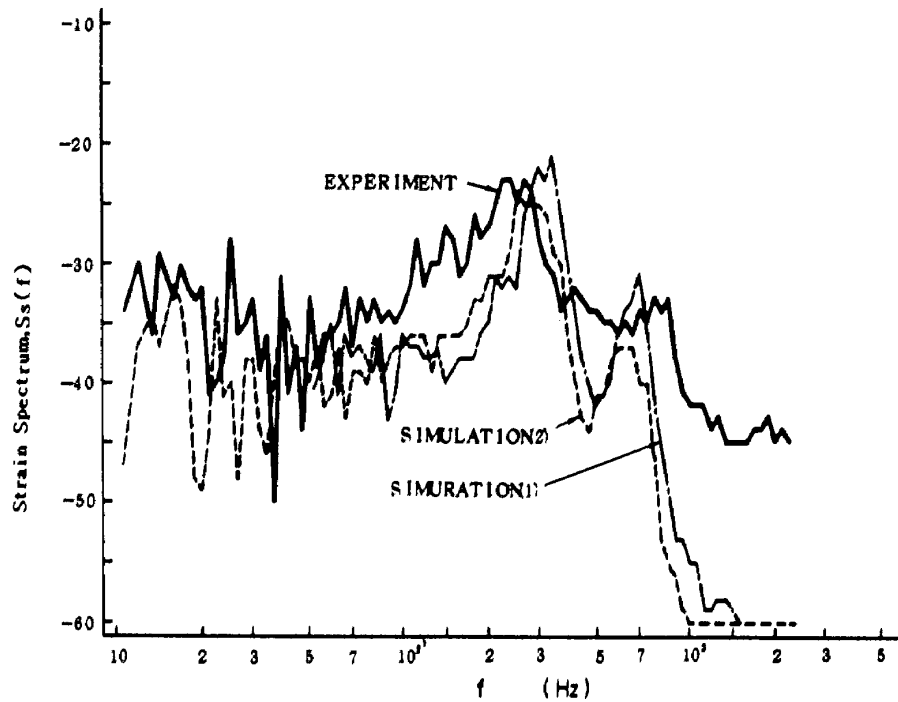


Fig.20 Strain Spectrum at SG1

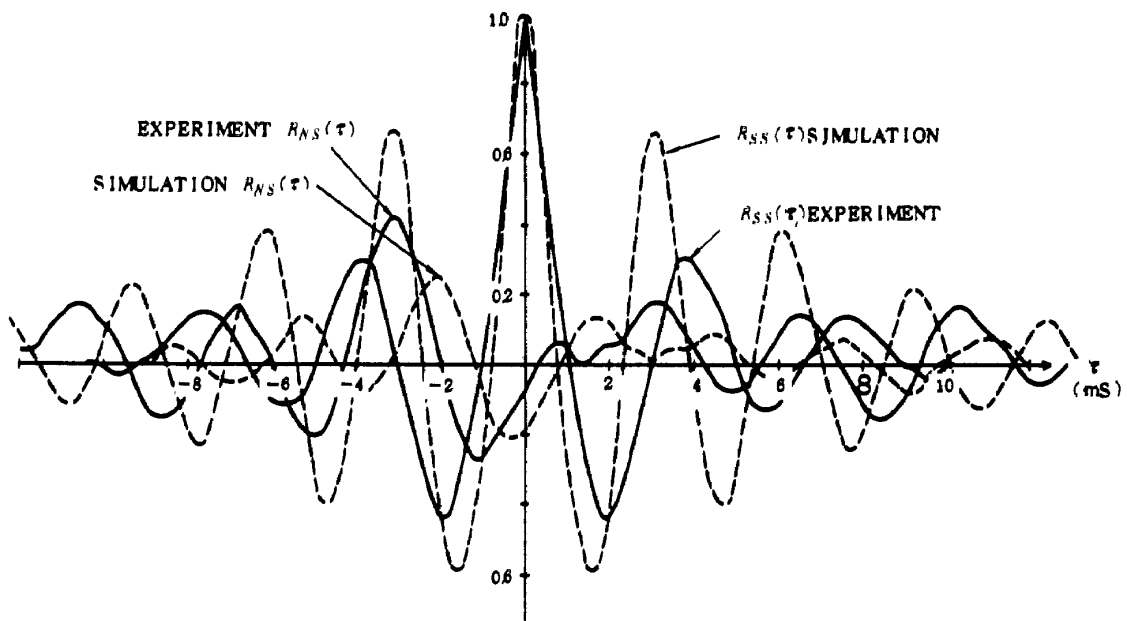


Fig. 21 Auto & Cross Correlation of Strain and Noise

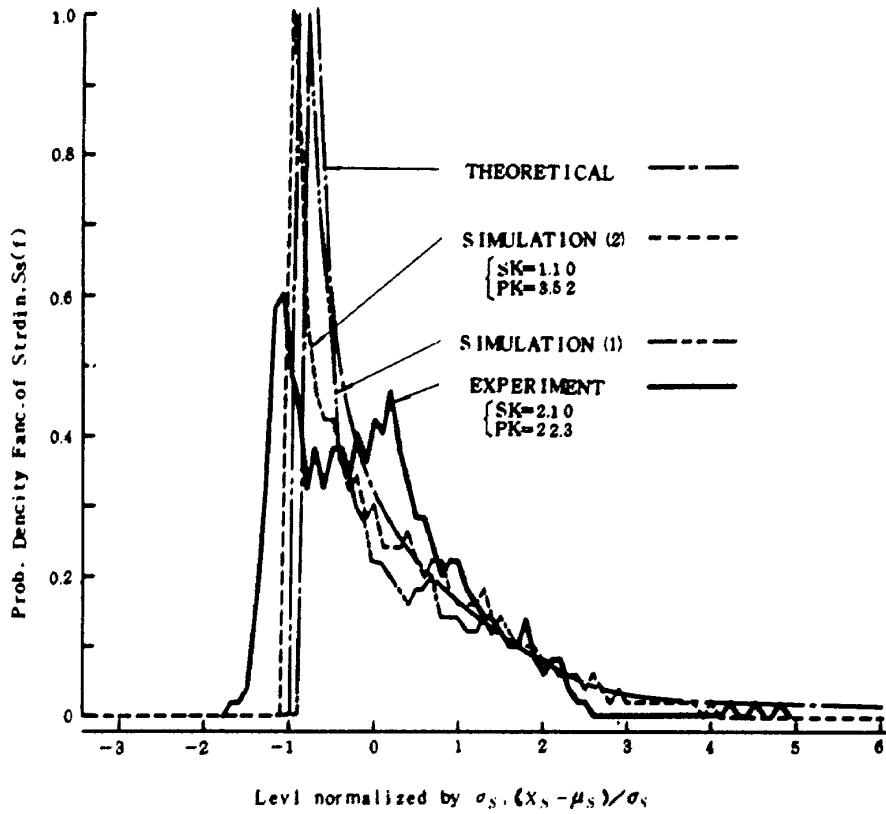


Fig.22 Level Counting of Strain at SG1

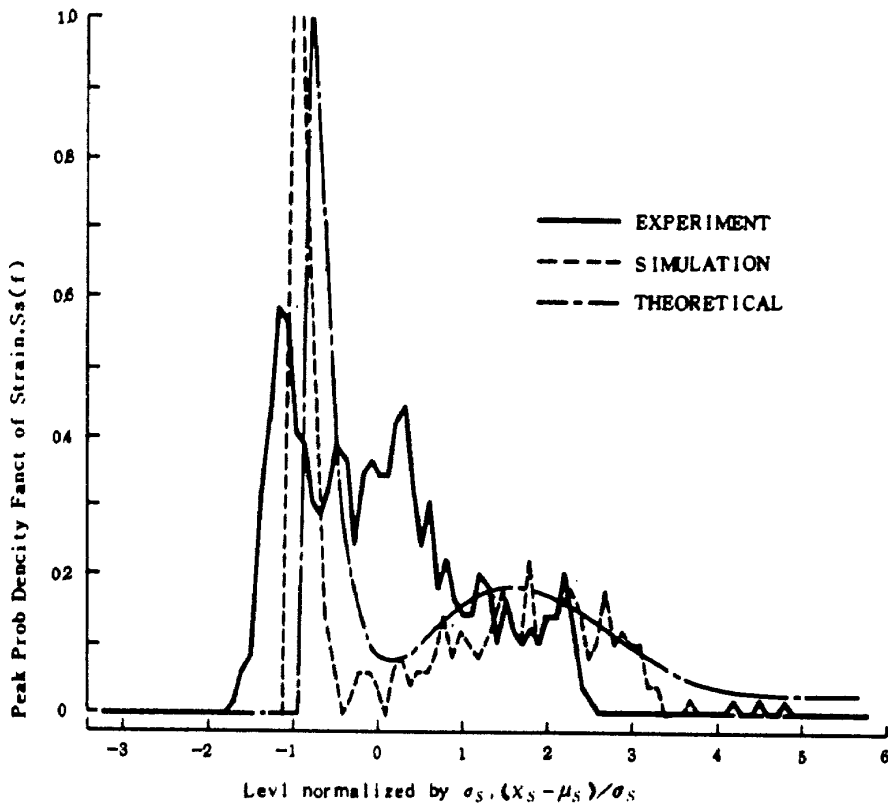


Fig.23 Total Peak Counting of Strain at SG1



確率密度関数は、 $(X_s - \mu_s) / \sigma_s = 0$  近傍で、特に実験結果と一致しなかった。しかし、図で明らかのように、Simulation と Theoretical はほぼ一致する。なお Fig. 22, 23 で、 $(X_s - \mu_s) / \sigma_s > -1.0 \sim -2.0$  なる場合にしか、分布が存在せず、かつ、一方に偏るのは、Fig. 11 からわかるように、変位の振幅が大きくなると、一定値 (約  $-200 \mu e$ ) より大きい圧縮歪が存在し得ないことによる。

6. 変位および歪みと音響加振力の関係

(7)式中の  $S_0(\omega f_i)$  を、形状を変えずに、強さのみを変化させると、スペクトラムの形は相似形を保ちながら、種々の音響加振力の大きさに対する、歪みおよび変位の値を求めることが出来る。Fig. 24 に変位の二乗平均値、Fig. 25, 26 に SG 1 点における歪みの平均値および二乗平均値、Fig. 27, 28 に SG 5 点における歪みの平均値および、二乗平均値と音響加振力の関係を示す。Fig. 24 から Fig. 28 までの横軸に表示された音響加振力の強さは、100 から 315 dB/Hz までのスペクトル密度の平坦部の強さであり、O. A. dB とは、全音圧の強さである。また、1.D.F.S 等は、板を一自由度系として、WITH OUT DAMP. 等は、減衰がないとして、歪み、および変位の計算を行ったという意味である。次に、すべての数値計算点はバラツキを持っている。これは(7)式で計算される音響加振力の時系列は有限点数で構成されるので、スペクトル密度の形状も正確には多少変

化し、それにつれて応答も変化するためである。しかし、多くの計算点を取れば、全体として、一つの傾向が表示

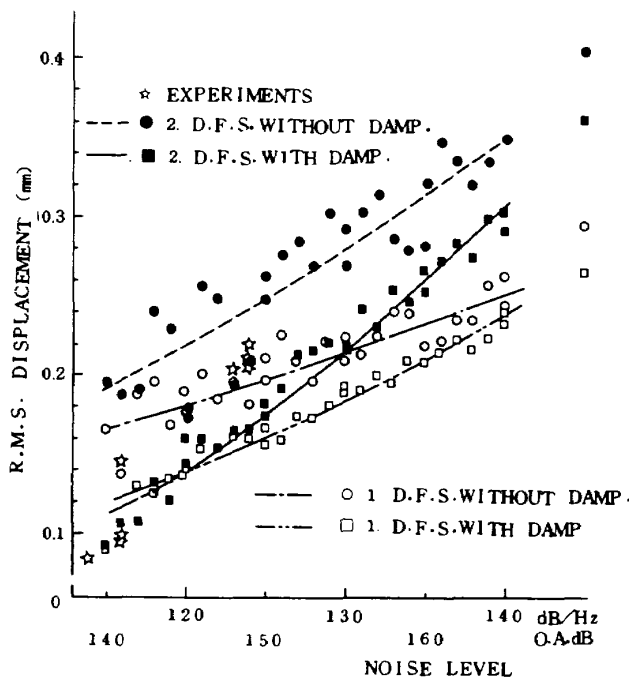


Fig.24 R.M.S. Displacement Versus Noise Level

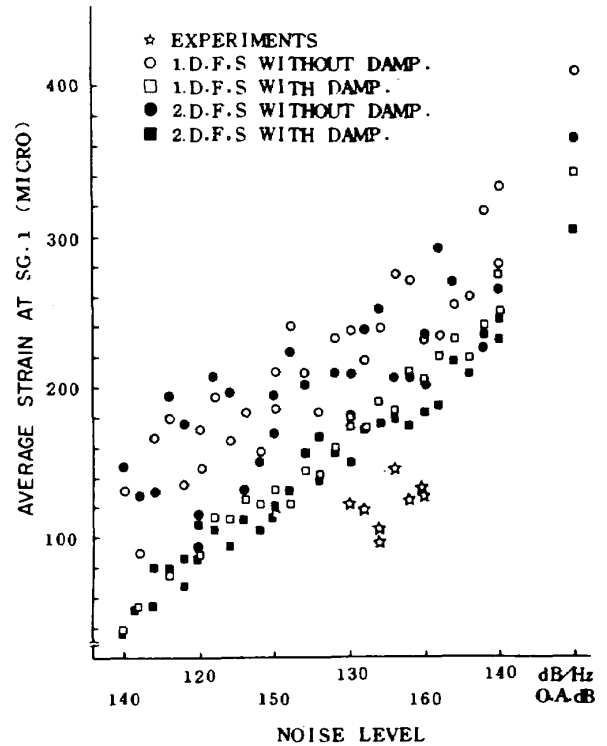


Fig.25 Average Strain at SG1 Versus Noise Level

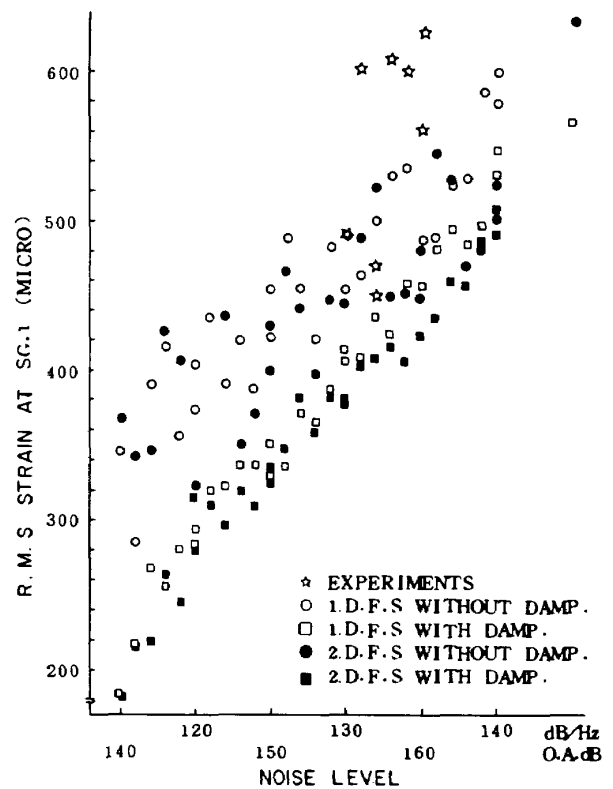


Fig.26 R.M.S Strain at SG1 Versus Noise Level

される。そういう意味で Fig. 24 から Fig. 28 までの計算点も一つの数値実験というべきものである。

Fig. 24 に示すごとく、実験で得られた変位の二乗平均値 (☆印で示す) は、ほぼ■印で表わされる数値解析結果のバラツキの範囲内に入っている。また、数値解析の結果をみると、音響加振力が強くなるに従って、二次振動の影響は強く出てくるが、減衰の影響は小さくなる傾向が見られる。

Fig. 25 と Fig. 27 で示すように、数値解析された歪みの平均値は、実験結果 (☆印で示す) より大きくなるが、音響加振力の増加に対する、歪みの平均値の増加割合はほぼ同じになる。

Fig. 26 と Fig. 28 を見ると、数値解析された歪みの二乗平均値は、実験結果と傾きは異なる。しかし、その値は極端に実験値からはずれているというほどではない。

Fig. 25 と Fig. 28 で示される数値解析で得られた歪みと音響加振力の関係を見ると、歪みの値は、板を一自由度系としても、二自由度系としても、ほとんど変化せず、減衰の有無に影響を受ける。

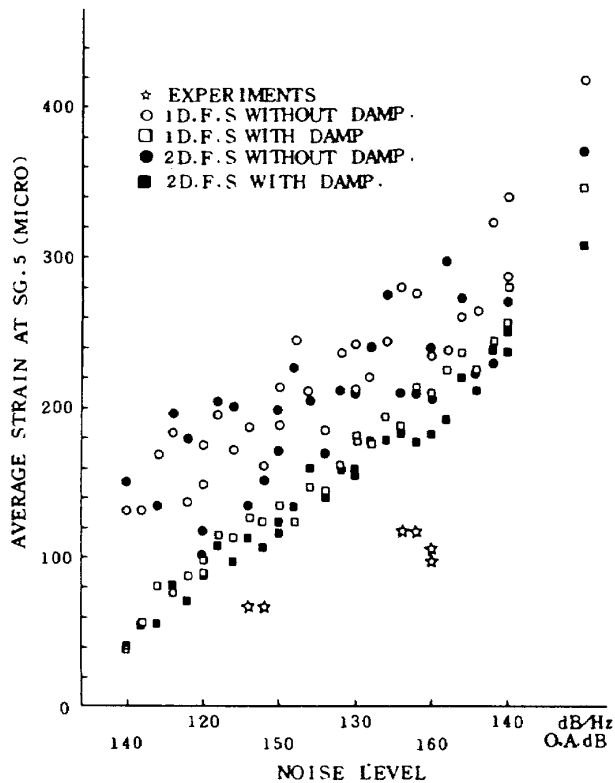


Fig. 27 Average Strain at SG5 Versus Noise Level

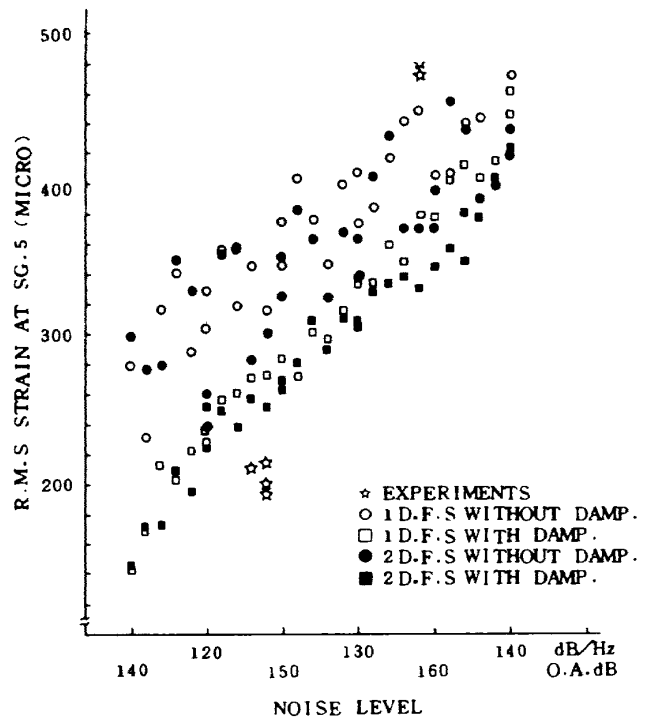


Fig. 28 R.M.S. Strain at SG5 Versus Noise Level

## VI 結 論

数値解析に用いた音響加振力のスペクトル密度は、実験で負荷された音響加振力よりも整形されているが、得られた結果を簡単にまとめると、

- ① 数値解析によって、得られる歪み、および変位のスペクトル密度は、Fig. 16, 20 で示すように実験結果を、主要な値においてよく捉えている。
- ② 数値解析された音響加振力の瞬時値、および極値の確率密度関数は、Fig. 14, 15 で示すように、実験結果と定性的には極めて良く一致した。
- ③ 数値解析された変位は、Fig. 24 で示すように、実験結果を、バラツキの範囲内に近似している。また、数値解析で得た変位と音響加振力の関係を見ると、音響加振力が増大するに従って、二次振動の影響が出てくるが、減衰の影響は小さくなる傾向を示した。
- ④ Fig. 25 から Fig. 28 に示すように、数値解析で得られる歪みは、自由度より減衰の有無に影響を受ける。

である。

今後一層精度良く、板の挙動を推定するために気付いた点を述べる。まず、板が、板厚以上の振幅をもつ振動をする場合、(5)式で仮定された振動形で振動するかどうか

かは不明であり、考慮を要する。次に(6)式を数値積分するのにルンゲ=クッタ=ジル法を用いて、特に不具合な点はなかったが、この種の積分を行うにあたっては、より精度の良い方法<sup>5)</sup>があり、検討する必要がある。

上記①で述べたように、定性的には音響加振力の瞬時値の確率密度関数が一致しているようであっても、歪度および尖鋭度を計算すると、数値解析結果および実験結果それぞれから得られる値が異なることがあり、応答の比較を行う場合、注意が必要である。

最後に、数値解析、およびデータ処理にあたって当所計算センターの、中村、小松両技官に、実験を行うにあたっては、原動機部の協力を得ましたので、付記させていただきます。

#### 参 照 文 献

- 1) 耐空性審査要領 3-9-1-4
- 2) 小林繁夫, 浅井貞重「周辺固定矩形板の超音速パネルフラッタ限界値」日本航空宇宙学会誌, 第16巻, 第174号, 1968年7月
- 3) M. Shinozuka, C.M. Jan. 「Simulation of Multivarible and Multidimensional Process II」  
Columbia University. TR-12, April, 1971.
- 4) Y.K. Lin. 「Probabilistic Method in Structural Dynamics」McGraw-Hill, 1967
- 5) たとえば C.W. Gean 「Neumerical Initial Value Problems in Ordinary Diflreutial Equation」Prentice Hall, 1971.

付録 (6) 式中の係数

板の縦横比を  $a/b = \lambda$  とすると

$$k_1 = \frac{16}{3} \left( 1 + \frac{2}{3} \lambda^2 + \lambda^4 \right)$$

$$k_2 = \frac{16}{5} \left( 3\lambda^4 + 2a^2\lambda^2 + \frac{5}{3}\lambda^4 \right)$$

$$\beta_1 = \frac{2(1-\nu^2)\lambda^4}{3} \left\{ \frac{17}{8} \left( 1 + \frac{1}{\lambda^4} \right) + \frac{4}{(1+\lambda^2)^2} + \frac{1}{(4+\lambda^2)^2} + \frac{1}{(1+4\lambda^2)^2} \right\} + \frac{3}{2} (1 + 2\nu\lambda^2 + \lambda^4)$$

$$\beta_2 = \frac{27}{50} \left( 3a^2 + \nu \frac{5\lambda^2}{3} \right)^2 + \frac{54(1-\nu^2)a^4\lambda^4}{25\sin^2 a\pi} \left[ \frac{1}{8\lambda^4} \left\{ 17 + \left( \frac{\sin a\pi}{a\pi} \right)^2 \right\} + \frac{1}{a^4} \left\{ \frac{63}{40} - \frac{1631}{180} \left( \frac{\sin a\pi}{a\pi} \right)^2 \right\} - \frac{8a^2}{3(a^2+\lambda^2)^3} \left( \frac{\sin a\pi}{a\pi} \right)^2 \right. \\ \left. + \frac{2a^2}{(a^2+4\lambda^2)^3} \left( \frac{\sin a\pi}{a\pi} \right)^2 + \frac{4}{3(a^2+\lambda^2)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{6} \left( \frac{\sin a\pi}{a\pi} \right)^2 \right\} + \frac{1}{(4a^2+\lambda^2)^2} \left\{ 1 - \frac{2}{9} \left( \frac{\sin a\pi}{a\pi} \right)^2 \right\} + \frac{1}{(a^2+4\lambda^2)^2} \left\{ \frac{1}{3} + \frac{3}{2} \left( \frac{\sin a\pi}{a\pi} \right)^2 \right\} \right. \\ \left. + \frac{8\bar{D}_1 \{ \pi^2(\lambda^2 - 2a^2)(\lambda^2 + a^2) + 2(2\lambda^2 - a^2)(1 - \pi\lambda \cosh \pi\lambda / \sinh \pi\lambda) \}}{\pi^4 \lambda^4 (\lambda^2 + 4a^2)(\lambda^2 + a^2)^2} - \frac{2\bar{D}_2 \{ \pi^2(4\lambda^2 + a^2) + 2 - 4\pi\lambda \cosh \pi\lambda / \sinh \pi\lambda \}}{\pi^4 \lambda^4 (4\lambda^2 + a^2)^2} \right]$$

$$\text{ここで } \bar{D}_1 = \frac{(a \sin a\pi)^2 \left\{ \frac{2a^2 + \lambda^2}{1 + \nu} \left\{ \frac{2a^2 + \lambda^2}{(4a^2 + \lambda^2)^2} - \frac{\lambda^4}{(a^2 + \lambda^2)^3} - \nu \frac{a^2 \lambda^2 (-17a^4 + 5a^2 \lambda^2 + 4\lambda^4)}{2(4a^2 + \lambda^2)^2 (a^2 + \lambda^2)^3} \right\} \right\}}$$

$$\bar{D}_2 = \frac{(a^2 \sin a\pi)^2 \{ (a^2 + 12\lambda^2) + 8\nu\lambda^2 \}}{8(1+\nu)(a^2 + 4\lambda^2)^3}$$

$$\beta_3 = \beta_4 + \frac{3(1-\nu^2)\lambda^4}{5\pi^2} \left[ -\frac{32a^4(a^2+2)}{(1+\lambda^2)^2(a^2-1)^2(4a^2-1)} - \frac{8a^4}{(1+4\lambda^2)^2(a^2-1)^2} - \frac{64(a^2+2)}{(a^2+\lambda^2)^2(a^2-1)(a^2-4)} \right. \\ \left. + \frac{32a^2(-a^4-4a^2+14)}{(a^2+\lambda^2)^2(a^2-4)^2(a^2-1)^2} + \frac{16a^2}{(a^2+4\lambda^2)^3(a^2-1)} + \frac{8(2a^2-7)}{(a^2+4\lambda^2)^2(a^2-1)^2} - \frac{4(2a^2-1)}{(4a^2+\lambda^2)(4a^2-1)(a^2-1)} \right. \\ \left. + \frac{4a^3}{(4+\lambda^2)^2} \left\{ \frac{1}{a^2-1} + \frac{16}{(a^2-4)^2} \right\} + \frac{9}{2\lambda^4} - \left( \frac{2}{\lambda^2 \sin a\pi} \right)^2 \left\{ \frac{4(2-\lambda^2)\bar{D}_1}{(4+\lambda^2)(1+\lambda^2)} + \frac{\bar{D}_2}{4\lambda^2+1} \right\} \right]$$

$$\beta_4 = \frac{9}{10} \left\{ 3a^2(1+\nu\lambda^2) + \frac{5}{3}\lambda^2(\lambda^2+\nu) \right\} + \frac{3(1-\nu^2)\lambda^4}{5\pi^2} \left[ \frac{1+a^2}{\{(a+1)^2+\lambda^2\}^2} \left\{ \frac{(1+a^2)\pi^2}{\sin^2 a\pi} - \frac{5a^4+16a^3+25a^2+16a+4}{a^2(a+2)^2(2a+1)(a+1)} \right\} \right. \\ \left. + \frac{(1+a^2)}{\{(a-1)^2+\lambda^2\}^2} \left\{ \frac{(1+a^2)\pi^2}{\sin^2 a\pi} - \frac{5a^4-16a^3+25a^2-16a+4}{a^2(a-2)^2(2a-1)(a-1)} \right\} + \frac{(a-1)^2}{\{(a+1)^2+4\lambda^2\}^2} \left\{ \frac{(a-1)^2\pi^2}{4\sin^2 a\pi} + \frac{7a^4+22a^3+7a^2-8a-4}{4a^2(a+2)^2(2a+1)(a-1)} \right\} \right. \\ \left. + \frac{(a+1)^2}{\{(a-1)^2+4\lambda^2\}^2} \left\{ \frac{(a+1)^2\pi^2}{4\sin^2 a\pi} + \frac{7a^4-22a^3+7a^2-8a-4}{4a^2(a-2)^2(2a-1)(a-1)} \right\} + \frac{8}{(1+\lambda^2)^3} \left( 1 - \frac{4}{a^2-1} + \frac{20}{a^2+4} \right) + \frac{2}{(1+4\lambda^2)^3} \left( 5 - \frac{1}{a^2-1} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{36}{a^2-4} \right) + \frac{4a^2}{(a^2+\lambda^2)^2} \left\{ \left( \frac{a\pi}{\sin a\pi} \right)^2 + \frac{5a^4+6a^2+1}{(a^2-1)^2(4a^2-1)} \right\} + \frac{a^2}{(a^2+4\lambda^2)^2} \left\{ \left( \frac{a\pi}{\sin a\pi} \right)^2 + \frac{-7a^4+18a^2+1}{(a^2-1)^2(4a^2+1)} \right\} + \frac{2}{(1+\lambda^2)^2} \left\{ 5 + \frac{2\pi^2}{3} \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{24a^2}{(a^2-1)^2} - \frac{16(1+a^2)}{(a^2-4)^2} + \frac{4}{(4a^2-1)} \right\} + \frac{1}{(1+4\lambda^2)^2} \left\{ \frac{\pi^2}{3} + \frac{29}{2} + \frac{4(4a^2-1)}{(a-1)^2} + \frac{24(a^2-7)}{(a^2-4)^2} \right\} - \frac{4a^2}{(4+\lambda^2)^2} \left\{ \frac{1}{a^2-1} + \frac{16}{(a^2-4)^2} \right\} \right. \\ \left. + \frac{17(a\pi)^2}{4\lambda^4} - \frac{45}{2} + 5\pi^2 + \frac{40}{(a^2-1)^2} - \frac{32}{(a^2-4)^2} + \frac{3}{a^2} + \frac{2(4a^2+1)}{a^2(4a^2-1)} - \frac{1}{2(a^2-1)} - \frac{1}{(a+1)^2} \left\{ \frac{2(2a+8)}{a(a+2)^2} + \frac{1}{2a+1} - \frac{a-1}{2a^2} \right\} \right. \\ \left. - \frac{1}{(a-1)^2} \left\{ \frac{2(2a-3)}{a(a-2)^2} - \frac{1}{2a-1} + \frac{a+1}{2a^2} \right\} \right]$$

---

## 航空宇宙技術研究所報告506号

昭和52年7月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社実業公報社  
東京都千代田区九段南4-2-12

---

TR-506