

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-512

最小歪エネルギー条件による構造設計

小河昭紀

1977年9月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

最小歪エネルギー条件による構造設計*

小河 昭 紀**

An Optimum Design by the Minimum Strain Energy Criterion

By Akinori OGAWA

This paper represents a new approach of the optimum design by the minimum strain energy criterion under the constant structure weight.

The criterion makes the structure design simpler than the minimum weight method, because there are fewer constraints considered at most.

It is deduced a series of nonlinear design equations for the criterion by Lagrange multiplier method, when it is assumed there is a homogeneous polynomial expression among design variables.

The equations are solved numerically by an iteration method about the shell thickness distribution of axisymmetrical shell structures under transverse loads.

The results showed remarkably both the decrease of stress concentrations and the increase of rigidity of structure.

It is indicated that the strain energy method is very powerful for optimum structure design as a whole.

1 緒 言

本論では重量一定下の最小歪エネルギー設計を扱う。この取扱いによる構造設計は従来発表されていない新しい試みであるが横荷重の働く軸対称殻構造設計に適用した結果では剛性及び応力集中の著しい改善を得ている。

例として片持軸対称殻の先端に横荷重が働く殻構造系の応力-歪状態を有限要素法で解析する。この時、設計変数として要素の板厚をとる。ある設計条件に対して最適の板厚分布を考えると、これは複数個の制限条件（例えば応力又は変位が許容値以下にある事。）の下で設計変数の板厚について、ある目的関数（例えば構造重量）を最小にする最適問題となる。

このような問題については、制限条件として応力、変位、目的関数として構造重量をとった従来の最小重量設計法を使用できない。

これは主に殻構造では応力と変位成分が複雑になる結果、制限条件数が増加して計算できない為である。

問題を複雑にしている制限条件群を整理して適当な単一の条件で代表させるならば応用性の広い構造設計法が可能となる。

ここではその試論として構造物の（弾性）歪エネルギーを選んだ。

即ち最適設計は、（等重量で比較すると）最も歪エネルギー

の低い設計になっていると仮定した。勿論、最小重量設計は設計者からの制限条件で決る関係上、自然現象的な最小歪エネルギー条件による設計結果と一致する保証は無い。しかし設計時において重要な条件は、剛性が高く応力集中の低いと云う事に集約されるが、歪エネルギー最小は、例では最も剛性の高い状態に対応し、更に応力集中の低下をもたらす事から、この方法は充分構造設計に応用される。

本論文では以上の観点から解析を行い、ラグランジュの未定乗数法によって設計方程式を導いた。

具体的に3種の殻構造について設計方程式を数値的に解き、殻厚設計を行った。この結果剛性及び応力集中の著しい改善を得たのでここに報告する。

記 号

$E^{(j)}$	要素(j)のひずみエネルギー
$\{F\}$	外力ベクトル
$f(\{h\})$ $g(\{h\})$	ベクトル $\{h\}$ のスカラー関数
$\{h\}$	設計変数 h_{ij} 又は h_i を成分とするベクトル
h_i, h_{ij}	要素(i)の設計変数 (h_i は設計変数が要素当り1個の時)
$(h_j)_k$	h_j の k 回近似値
$[K]$	構造物全体の剛性行列
$[k^{(j)}]$	要素(j)の要素剛性行列
$[k_{b_j}]$	要素(j)の要素曲げ剛性行列
$[k_{p_j}]$	要素(j)の要素平面剛性行列
λ	ラグランジュの未定乗数
$\{V\}$	節点変位ベクトル

* 昭和52年7月5日受付

** 原 動 機 部

- $\{v_j\}$ 要素(j)の節点変位
- $\Delta S^{(j)}$ 要素(j)の表面積
- $\rho^{(j)}$ 要素(j)の密度
- $(v_j)_k$ v_j の k 回近似値
- W 構造物重量
- W_j 要素(j)の重量

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial \{h\}} \right\} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial h_{11}} \\ \frac{\partial}{\partial h_{12}} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial h_{nm}} \end{pmatrix} \quad \text{or} \quad \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial h_1} \\ \frac{\partial}{\partial h_2} \\ \vdots \\ \frac{\partial}{\partial h_n} \end{pmatrix}$$

(σ) 応力ベクトル

2 理 論

最適設計の最適化(又は最小化)される量として従来の構造重量の代りに歪エネルギーを考える。

歪エネルギーが減少すると剛性と応力集中がどのようになるか定性的に考察する。

構造物に外力 F_1, F_2, F_3 が作用している。その場合 $v_1, v_2, v_3 \dots$ を各外力の着点の外力方向の変位とすると歪エネルギー U について次式が成立する。

$$U = \frac{F_1 v_1}{2} + \frac{F_2 v_2}{2} + \frac{F_3 v_3}{2} + \dots \quad (1)$$

(1)式で歪エネルギー U (常に正值) が小さくなり極端な場合として零に近くなると外力は一定である為に着点変位も零に近づく。即ち剛性が高くなる。

上述のように U が減少するにつれて着点変位も減少するが、構造内の各部分の応力についてどうなるか考察する為に次式を弾性論から引用する。

$$U = \int \left\{ \frac{1}{2} \lambda \theta^2 + \mu (\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2 + 2\epsilon_{12}^2 + 2\epsilon_{23}^2 + 2\epsilon_{31}^2) \right\} dv \quad (2)$$

ここで、 λ, μ は Lamé' の定数で構造用材料では正となる。

$$\theta = (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \quad (3)$$

上式から歪エネルギー U は歪の正值形式となっており、同様に U が零に近づくにつれて歪も零に近づく。一方、歪と応力は線形の関係にあるので当然応力も零に近づく。

厳密には(1), (2)式において左辺の U が小さくなると、変

位と応力分布のピーク値も小さくなるのは、(1), (2)式から云えない。この2節の終りで述べるが歪エネルギー最小条件によって構造各部分での単位重量あたりの歪エネルギーは均一化する。このためにもし変位又は応力の高い部分があれば必然的にその部分での歪エネルギーも高い事になるので、最小歪エネルギー設計と矛盾する。これから U の減少は変位と応力の最大値を減少させる。

以上の推論から歪エネルギー設計を行うと構造物の剛性及び応力集中が改善されると考えられる。

○基礎式の導入

一定重量条件のもとで最小歪エネルギー設計を行う為に、ラグランジュの乗数法によって基礎式を導く。

有限要素法にならって構造物を有限個の要素に分割して考える。要素(i)についての設計変数を h_{ij} とおく。

例えば、 h_{i1} …… 板厚

h_{i2} …… 辺の長さ 等

構造物の重量 W は設計変数 $\{h\} = \{h_{ij}\}$ の関数となるので、

$$W = f(h_{11}, h_{12}, \dots, h_{ij}, \dots) = f(\{h\}) \quad (4)$$

○ $f(\{h\})$ の関数表現について

ここで重量 W と $\{h_{ij}\}$ の間に次の関係があるとする。

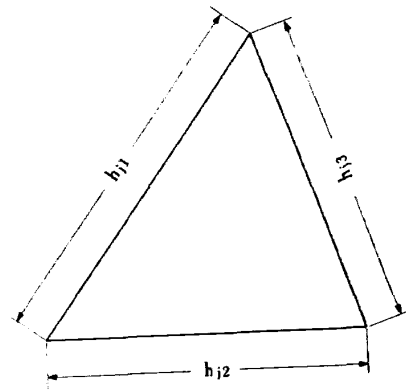


図 1(a) 三角平面要素

板厚設計

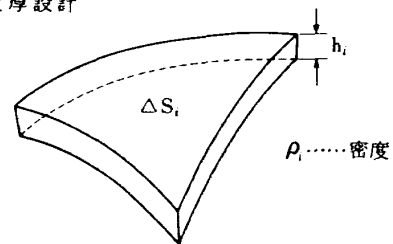


図 1(b) 薄肉三角要素(シェル)

$$\sum_{ij} h_{ij} \frac{\partial f(\{h_{ij}\})}{\partial h_{ij}} = \{h\}^T \frac{\partial f}{\partial \{h\}} = t f \quad (5)$$

但し $\left\{ \frac{\partial f}{\partial \{h\}} \right\}^T = \left\{ \frac{\partial f}{\partial h_{11}}, \frac{\partial f}{\partial h_{12}}, \frac{\partial f}{\partial h_{13}}, \dots, \frac{\partial f}{\partial h_{nm}} \right\}$

n …… 要素数

m …… 1要素当りの設計変数の数

即ち(5)式は $f(\{h\})$ は h_{ij} の同次式となっている事を示している。この仮定は通常的设计変数について成立する。

例えば、2次元要素の辺については単位厚さ当り、

$$W = \frac{1}{4} \rho \sum_{j=1}^n \sqrt{2(h_{j1}^2 h_{j2}^2 + h_{j1}^2 h_{j3}^2 + h_{j2}^2 h_{j3}^2) - h_{j1}^4 - h_{j2}^4 - h_{j3}^4}$$

これは、2次の同次式である。(ρ 密度)

又、薄肉構造では

$$W = \sum_{i=1}^n \rho_i S_i h_i \quad (\text{軸対称要素})$$

上式では h_i は板厚にとられているが、これを図1(c)の様に h_{i1} 、 h_{i2} (端面の半径) を選べば

$$W = \pi \sum_{i=1}^n t_i l_i (h_{i1} + h_{i2})$$

上式は1次の同次式となっている。

(4)式を書きかえると

$$g(\{h\}) = W - f(\{h\}) \equiv 0 \quad (6)$$

(6)の条件の下で歪エネルギー U が h_{ij} に関して極値を取る事からラグランジュの未定乗数法によって

$$\frac{\partial U}{\partial \{h\}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial \{h\}} = 0 \quad (7)$$

又は

$$\frac{\partial U}{\partial h_{ij}} + \lambda \frac{\partial g}{\partial h_{ij}} = 0 \quad (i=1 \sim n; j=1 \sim m) \quad (8)$$

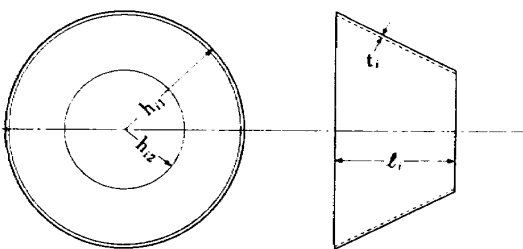


図 1(c) 円錐殻要素

(5)(6)式から

$$\begin{aligned} \{h\}^T \frac{\partial g}{\partial \{h\}} &= - \{h\}^T \frac{\partial f}{\partial \{h\}} \\ &= - t f = - t W \end{aligned} \quad (9)$$

その故

$$\lambda = \frac{1}{tW} \{h\}^T \frac{\partial U}{\partial \{h\}} \quad (10)$$

(1)(8)(10)より

$$\{V\}^T \frac{\partial [K]}{\partial h_{ij}} \{V\} - \frac{1}{tW} \left(\frac{\partial f}{\partial h_{ij}} \right) \{h\}^T \{V\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \{h\}} \{V\} = 0$$

または

$$\{V\}^T \frac{\partial [K]}{\partial h_{ij}} \{V\} - \frac{1}{tW} \left(\frac{\partial f}{\partial h_{ij}} \right) \{V\}^T \left\{ \frac{\partial [K]}{\partial \{h\}} \right\}^T \{h\} \{V\} = 0$$

または

$$\begin{aligned} \{V\}^T \frac{\partial [K]}{\partial h_{ij}} \{V\} - \frac{1}{tW} \left(\frac{\partial f}{\partial h_{ij}} \right) \{V\}^T \{h\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \{h\}} \{V\} &= 0 \\ (i=1, \dots, n) \end{aligned} \quad (11)$$

行列表示では

$$\{V\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \{h\}} \{V\} - \frac{1}{tW} \left(\frac{\partial f}{\partial \{h\}} \right) \{V\}^T \{h\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \{h\}} \{V\} = 0 \quad (12)$$

一方有限要素法によれば $[K]$ と $\{V\}$ について

$$\{F\} = [K] \{V\} \quad (13)$$

(11)又は(12)と(13)式より $\{h\}$ を求める事ができる。

○(12)式の物理的解釈;

要素 (i) に関する設計変数で(12)式をまとめると

$$\begin{aligned} \{V\}^T \sum_{j=1}^m h_{ij} \frac{\partial [K]}{\partial h_{ij}} \{V\} - \frac{1}{tW} \sum_{j=1}^m h_{ij} \frac{\partial f}{\partial h_{ij}} \{V\}^T \{h\}^T \\ \times \frac{\partial [K]}{\partial \{h\}} \{V\} = 0 \end{aligned} \quad (14)$$

しかるに $W_i = t \sum_{j=1}^m h_{ij} \frac{\partial f}{\partial h_{ij}}$ (要素 i の重量)

又、 $U'_i = \sum_j h_{ij} \frac{\partial U}{\partial h_{ij}}$ とすれば

$$\{V\}^T \sum_{j=1}^m h_{ij} \frac{\partial [K]}{\partial h_{ij}} \{V\} = \sum_j h_{ij} \frac{\partial U}{\partial h_{ij}} = U'_i \quad (15)$$

$$\{V\}^T \{h\}^T \frac{\partial [K]}{\partial \{h\}} \{V\} = \sum_j \sum_j h_{ij} \frac{\partial U}{\partial h_{ij}} = \sum_j U'_i$$

これから(12)式は

$$\frac{U'_i}{W_i} = \frac{\sum U'_i}{W} = \text{定数} \quad (16)$$

U'_i の物理的意味は明白でないが、次元として歪エネルギーと同じである。 $\frac{U'_i}{W_i}$ が構造物各要素で均一化した時、

最小歪になる事を(12)式は示している。

U'_i と歪エネルギーの関係について考察する。歪エネルギー U は次の関数で、 h_{ij} と関係している。

$$\begin{aligned} U_i &= U_i(V, h_{ij}) \\ h_{ij} = 0 \quad \text{の時} \quad U_i &= 0 \quad \text{となり} \\ h_{ij} \rightarrow \infty \quad U_i &\rightarrow \infty \end{aligned}$$

最適設計点近傍で U_i を h_{ij} の P 次の同次式で近似すると

$$U_i = P \sum h_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial h_{ij}} \quad (17)$$

$$\text{例えば } U_i = a_{11} h_{11}^P + a_{12} h_{11}^{P/2} h_{12}^{P/2} + a_{13} h_{12}^P$$

定数 $a_{11}, a_{12}, a_{13}, P$ で、最適点とその微係数まで近似すれば、充分最適点近傍では上式で U_i を表現できる。

これから

$$U'_i = U_i / P \quad (\text{最適設計点近傍})$$

(16)式に代入して

$$\frac{U_i}{W_i} = P \times \text{定数} \quad (18)$$

次数 P は最適設計 h_{ij} の関数であるが、近似式のべき乗指数でもあり大体一定になると考えられる。

これから最小歪エネルギー設計を進めるにつれて構造内の単位重量あたりの歪エネルギーが均一化する事が結論される。

3 板厚設計

前述の式を解くには $[K]$ の $\{h\}$ に関する具体的関係を知る必要がある。

設計変数として図 1(b) のように要素の板厚 h をとると $[K]$ は次式の様にかける(1)(2)。

$$[K] = \sum_{j=1}^n [K_{pj}] h_i + \sum_{j=1}^n [K_{bj}] h_j^3 \quad (19)$$

$[K_{pj}]$ は平面剛性行列、 $[K_{bj}]$ は曲げ剛性行列で板厚には無関係と考えることができる。

(10)式を(11)式に代入して

$$\begin{aligned} & \{V\}^T [K_{pj}] + 3 [K_{bj}] h_j^2 \{V\} \\ & - \frac{1}{tW} \left(\frac{\partial f}{\partial h_j} \right) \{V\}^T \left[\sum_k [K_{pk}] h_k + 3 \sum_k [K_{bk}] h_k^3 \right] \\ & \times \{V\} = 0 \quad j = 1, n \quad (20) \end{aligned}$$

h_j は板厚なので重量 W は

$$W = \sum_{j=1}^n \rho_j \Delta S_j h_j \quad (21)$$

これから $t = 1$ とする。

○近似計算による板厚設計

(19)式は3次元多元方程式で、さらに変位 $\{V\}$ は $\{h\}$ の関数であるので直接解法は困難である。

次式によって ϕ_j ($j = 1, \dots, n$) を定義する。

$$\begin{aligned} \phi_j \{h\} &= \{V\}^T ([K_{pj}] + 3 [K_{bj}] h_j^2) \{V\} \\ & - \frac{\rho_j \Delta S_j}{W} \{V\}^T \left(\sum_i [K_{pi}] h_i + 3 \sum_i [K_{bi}] h_i^3 \right) \\ & \times \{V\} \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (22) \end{aligned}$$

Newton-Raphson 法によれば最初の設計点を $\{h^0\}$ とすると、1回目の近似値 $\{h^1\}$ は次式で与えられる。

$$\phi_j \{h^0\} + \frac{\partial \phi_j}{\partial \{h\}} \Big|_{F=KV} (\{h^1\} - \{h^0\}) = 0 \quad (23)$$

但し $\{h^0\}$, $\{h^1\}$ の成分を $\{h_1^0, h_2^0, \dots\}$, $\{h_1^1, h_2^1, \dots\}$ で表すと

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial \{h\}} \Big|_{F=KV} (\{h^1\} - \{h^0\}) = \frac{\partial \phi_j}{\partial h_1} \Big|_{F=KV} (h_1^1 - h_1^0) + \frac{\partial \phi_j}{\partial h_2} \Big|_{F=KV} (h_2^1 - h_2^0) + \dots$$

微係数 $\partial \phi_j / \partial h_j$ $_{F=KV}$ は $\{F\} = [K] \{V\}$ の関係を考慮

しているので

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial h_i} \Big|_{F=KV} = \frac{\partial \phi_j}{\partial h_i} + \sum_{l=1}^n \frac{\partial \phi_j}{\partial V_l} \frac{\partial V_l}{\partial h_i} \quad (24)$$

$$j = 1, 2, \dots, n$$

関式で定義される ϕ_j を検討すると、右辺第2項はすべての要素についての和であり設計変数1個による変化は小さいと考えられる。第1項は要素 j の設計変数のみが関係しているので ϕ_j は h_j によって大きな影響を受けるので h_j 以外の変数の微係数を無視できると考えてもよい。

それ故関式は簡単に次式におきかえる。

$$\phi_j \{h^0\} + \frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} \Big|_{F=KV} (h_j^1 - h_j^0) = 0 \quad (25)$$

$$(j = 1, 2, \dots, n)$$

関式による線型近似計算では、物理的意味から板厚 $\{h\}$ が正であるという条件を常に考えねばならない、近似解が関式で負になった場合どのように修正すれば収束性の点で有利かという問題が生ずる。

この困難をさける為近似解が常に正となるような近似法を用いた。

要素(j)の正解を h_j^∞ , l 回近似値を h_j^l , その時の残差を ϕ_j^l とすると図2から

$$\phi_j^l = \int_{h_j^{l+1}}^{h_j^l} \frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} \Big|_{F=KV} dh_j \quad (26)$$

$\partial \phi_j / \partial h_j \Big|_{F=KV}$ は付録に示されるように

$$\frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} \Big|_{F=KV} \doteq - \frac{\{V\}^T [K_{P_j}] \{V\}}{h_j} \approx - \frac{C}{h_j^3} \quad (C > 0) \quad (27)$$

(26)(27)式より

$$\phi_j^l \approx \frac{C}{2} \{ (h_j^l)^{-2} - (h_j^{l+1})^{-2} \} \quad (28)$$

故に

$$h_j^{l+1} = \frac{h_j^l}{\sqrt{1 - 2(h_j^l)^2 \phi_j^l / C}} = \frac{h_j^l}{\sqrt{1 - 2\phi_j^l / \{V\}^T [K_{P_j}] \{V\}}} \quad (29)$$

(29)式によってより改良された解 h_j^{l+1} が計算できる。

明らかに常に $h_j^{l+1} > 0$ となるが $\phi_j^l > 0$ の時ルートの中が負になる可能性が考えられる。 ϕ_j の h_j に関する変化は解の近くでは図2のように考えられるので、 $\phi_j^l > 0$ の時Newton-Raphson法で計算しても近似解は常に正になるので ϕ_j^l の正負によって近似法を使いわけろ。

1) $\phi_j^l \geq 0$ の時

$$h_j^{l+1} = h_j^l \left(1 + \frac{\phi_j^l}{\{V\}^T [K_{P_j}] \{V\}} \right) \quad (30)$$

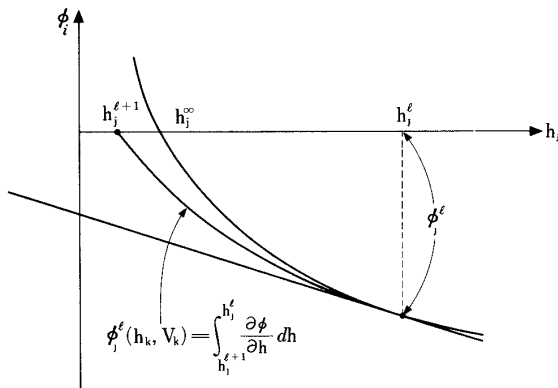


図 2 積分による近似

2) $\phi_j^l < 0$ の時

$$h_j^{l+1} = h_j^l / \sqrt{1 - \frac{2\phi_j^l}{\{V\}^T [K_{P_j}] \{V\}}} \quad (31)$$

上式(30)に於いて(31)式とのXJL上 $C=1$ とおいている。

4 数値計算

計算順序は次のように行った。

- (1) 構造物を適当にモデル化して要素に分割し設計変数を任意に選ぶ
- (2) 有限要素法により数値計算を行い変位, 応力を求め, それから要素毎の歪エネルギー $\{V\}^T [K_{P_j}] \{V\}$, $\{V\}^T [K_{b_j}] \{V\}$ を計算する。
- (3) (2)式により ϕ_j を計算し許容精度より小さくない時新しい近似値を(30), (31)式より求める。構造物の重量がもとの W に等しくなるように次式で示される定数をかけて近似値を修正する。

$$D = \frac{W}{\sum_{j=1} \rho_j \Delta S_j h_j} \quad (32)$$

プロセス(2)に於ける有限要素法プログラムとして, 軸対称かくの弾性解析プログラムを使用した⁽¹⁶⁾。

数値計算例の見方

数値計算は3例行い, そのすべては軸対称殻に一樣せん断荷重が作用する場合である。

シェル理論から, 円筒座標系について

一樣せん断荷重は次式で与えられるとすると

$$\left. \begin{aligned} R \text{ (半径方向の外荷重)} &= -a_R \cos \theta \\ V \text{ (接線方向の外荷重)} &= a_R \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

変位については⁽¹⁵⁾

$$\left. \begin{aligned} \text{半径方向変位} &= u(z) \cos \theta \\ \text{接線方向変位} &= v(z) \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{軸方向応力} &= \sigma_s(z) \cos \theta \\ \text{接線方向応力} &= \sigma_\theta(z) \sin \theta \end{aligned} \right\}$$

変位, 応力について, これ以外の成分についても Z, θ について同様な関数になるが, ここでは簡単の為とりあげない。 a_R はせん断荷重によって定まる定数である。

上式から変位, 応力はそれぞれ θ に関して三角関数的に変化するのて, 以後の説明に於いて係数値のみを示すので, 軸方向応力 σ_s としては $\theta = 0^\circ$ における値を, また, 接線方向応力 σ_θ としては $\theta = 90^\circ$ における値を示す。

半径方向変位は同様に殻上面のたわみとなり, 接線方向変位は中心軸のたわみとなる。

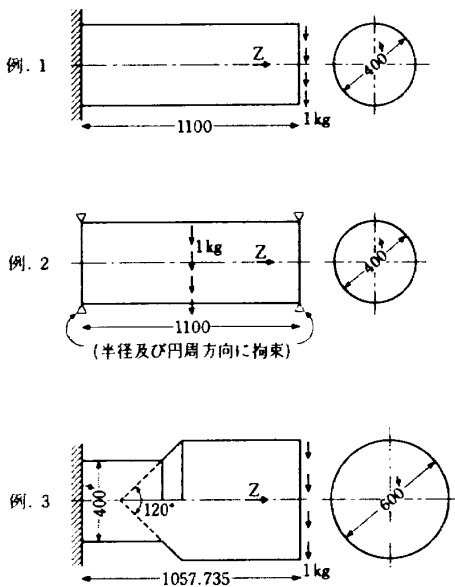
数値計算例

例1 直径400mm, 長さ1100mmで板厚1mmの円筒殻(材質Al合金)を1端固定支持し, 他端剪断荷重(合力として1kg)を加える。その場合荷重端の変位は 0.31514×10^{-2} mm, 最大軸方向応力 σ_z は支持端部で生じ $\sigma_z = 0.87588 \times 10^{-2}$ kg/mm², 最大接線方向応力 σ_θ は荷重端で生じ $\sigma_\theta = -0.28617 \times 10^{-1}$ kg/mm²となる。

板厚を設計変数として, 歪エネルギー最小条件により再設計すると図4の板厚分布を得る。

たて軸は横軸に対して50倍にとってある。図は7回の近似計算の結果である。

モーメント分布に対応して板厚は減少してゆくが, 荷重端で急激に増加して最大となっている。分割を変えた例についても同様の傾向がみられた。



板厚 h=1.0mm
荷重条件: 横せん断分布力

図 3 数値計算例

これは荷重端でせん断荷重が一様に分布している為, 曲げ剛性の低い円筒上下面にたわみが大きくでて歪エネルギーが増加する故である。歪エネルギーを減少させる為この部分の板厚が増加する。

図4の板厚分布によって荷重端の変位は, 図5に示す様に最初に比較して10%減少した。

応力について, 軸方向応力 σ_z の分布を図5に示す。モーメントの大きい部分では厚くなっているので最大応力で40%程減少している。応力分布は平均化している。接線方向応力については最大応力で60%程の減少を得た。

近似の収束経過を図6に示す。実線は構造物の歪エネルギー, 破線は荷重端変位を示している。

図からわかるように2回目以降の近似に対して大きな変化がみられない。残差 ϕ_j は6回目で最大で 0.2×10^{-4} (荷重端要素)である。

例2 形状, 材質は例1と同様であるが荷重と支持条件が異なる。(図3参照)

両端単純支持(半径, 円周方向に拘束する)で, 中央部に集中せん断荷重(合力1kg)を加える。

板厚が均等に1mmの場合の変位, 応力分布を(図7-a b)に実線で示す。

エネルギー法で再設計した時の板厚分布を図4に示す。数値は14回の近似計算の結果である。

例1と異りモーメントは中央部で最大となる事から板厚は中央部へ次第に増加し最大となる分布になる。

応力分布の変化は(図7-a)に破線で示している。軸方向応力 σ_z では分布の平均化がみられる。接線方向応力 σ_θ は原設計の $1/3$ に減少している。

同じく変位分布については(図7-b)で破線で示す。 δ_2 は側面($\theta = 90^\circ$)のたわみ, δ_1 は上(下)面のたわみになる。 δ_2 については, ほとんど変化はみられないが, やや最大値が増加する。しかし上(下)面のたわみ δ_1 は -0.46872×10^{-8} mmが -0.35784×10^{-8} mmとなり約

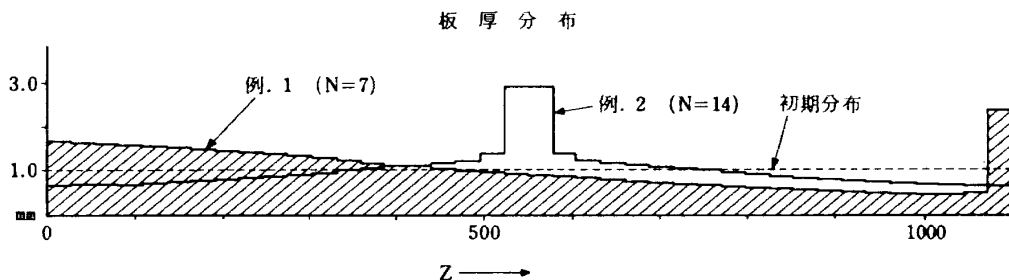


図 4 板厚分布

25%減少した。例2は例1に比較して δ_1 , δ_2 の差が大きい。

最適設計の効果は、この差を小さくする様に働く。

例3 400φと600φの2個の円筒殻を頂角120°のコーンで連結した構造で例1, 例2より複雑な弾性変形を示す⁽³⁾。

荷重及び支持条件は例1と同じく合力1kgの一様せん断荷重と他端固定支持である。

例3のような構造は直径が異なる円筒殻を連結する場合にあらわれる構造である。このような構造においては連結部の形状、すなわちさい頭円錐部の円錐角度、円筒面と円錐面の連結部の曲率、子午線に沿った板厚分布などによって、この構造の剛性のみならず応力集中は著しく影響される⁽¹⁶⁾⁽¹⁷⁾。この為、例えば剛性上、連結部の補強板厚の最適分布が必要になる。

これについて厚さ2~5mmの補強環を連結部付近に種々の長さで付けた場合のたわみ量を有限要素法で計算し、図8にその結果を示す。

左側のグラフAは5mmの補強環を400φ(板厚1mm)円筒殻の方のみにつけた場合を示す。横軸は補強環の長さ

lを示している。l=0は連結部である。たて軸は荷重端変位を示す。

右側グラフBは400φ円筒殻の板厚が1mmと3mmの2種の場合それぞれについてコーン補強厚さが1mmと2mm(殻厚として2mmと3mm)の場合をプロットしている。

荷重と支持条件は例3と同じである。

これからわかるように補強はコーンとの連結部に集中的

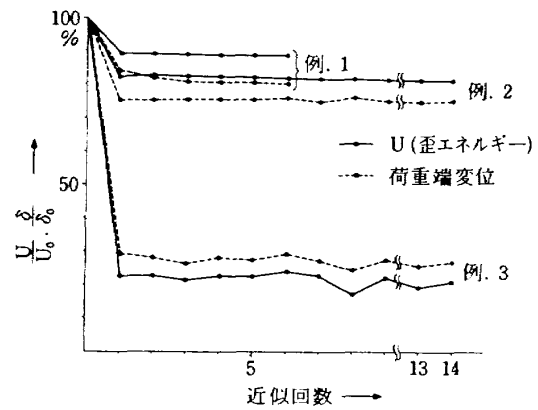


図 6 変位と歪エネルギーの近似による変化

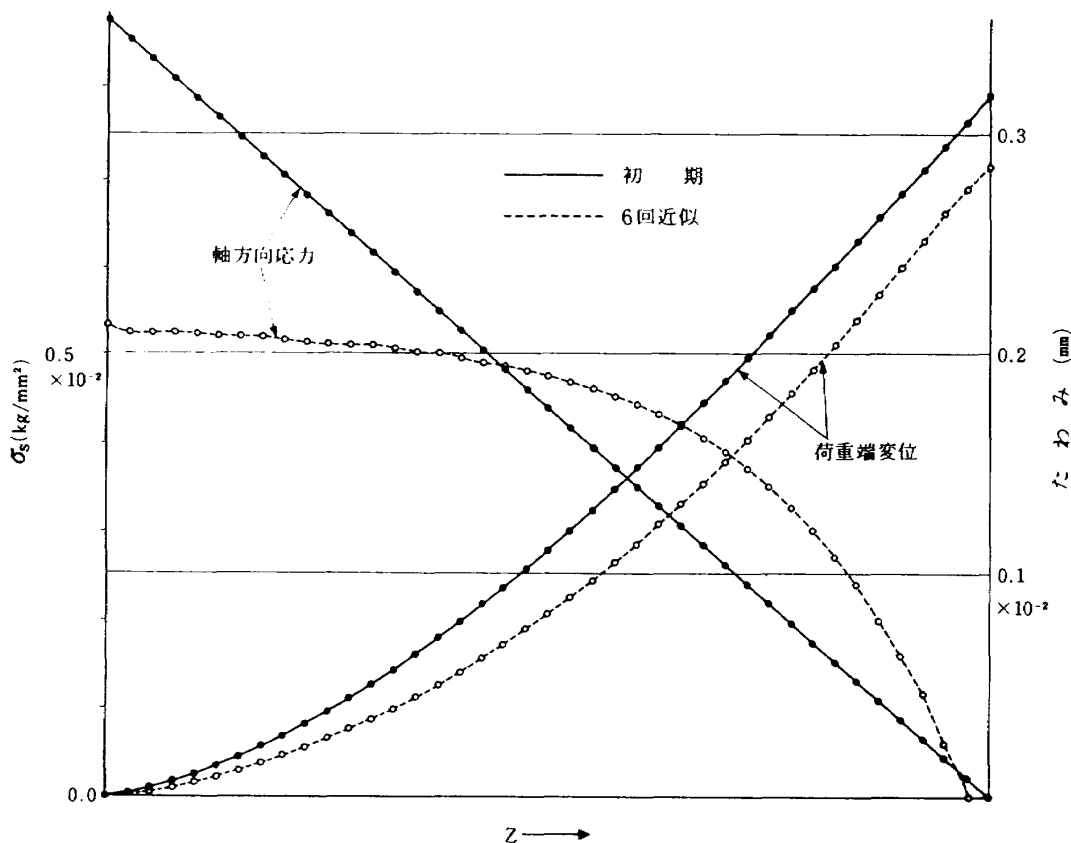


図 5 例1の応力とたわみ

にする方が効果が高い、補強部長さには効果的範囲があつてそれ以上長くしても効果はそれ程上らない。
例3で板厚が均等に1mmの構造をエネルギー法で再設計

した場合の荷重端変位は 0.47548×10^{-2} mm, 板厚1mmの原設計と比較すると中心軸変位で約75%たわみが減少する。

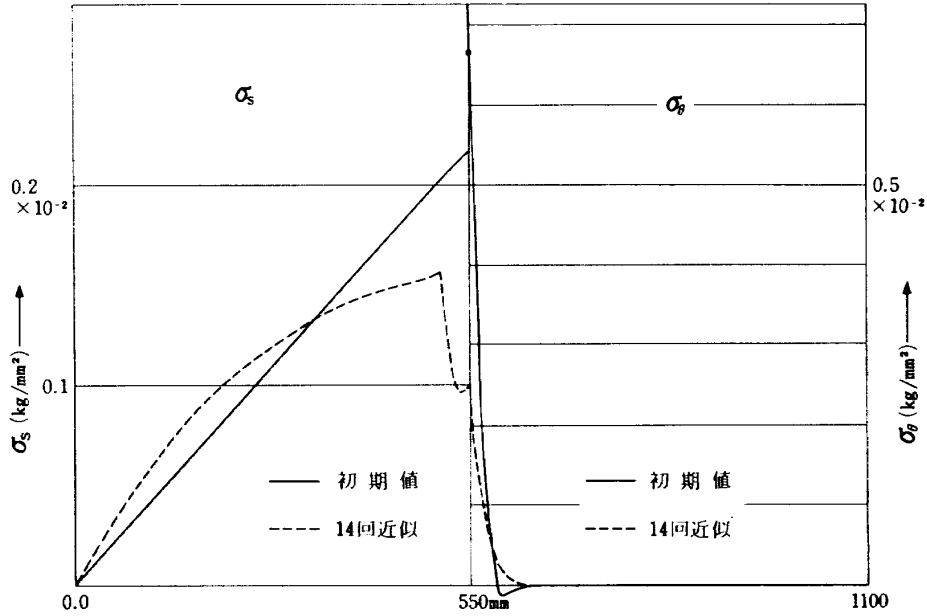


図 7(a) 例2の応力分布の変化

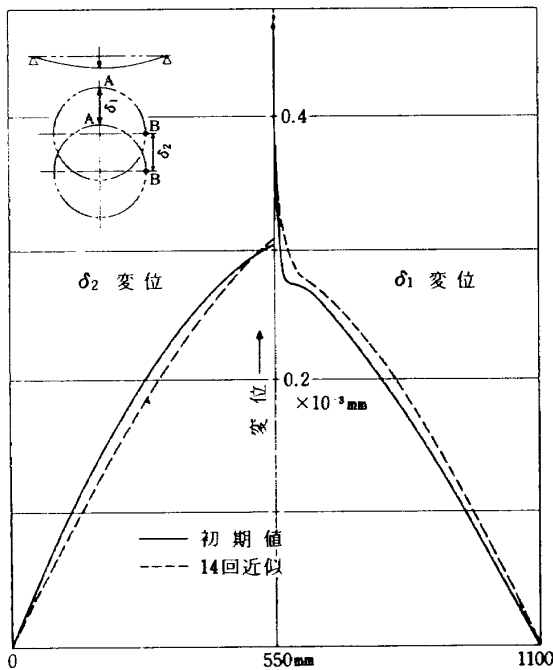


図 7(b) 例2の変位分布の変化

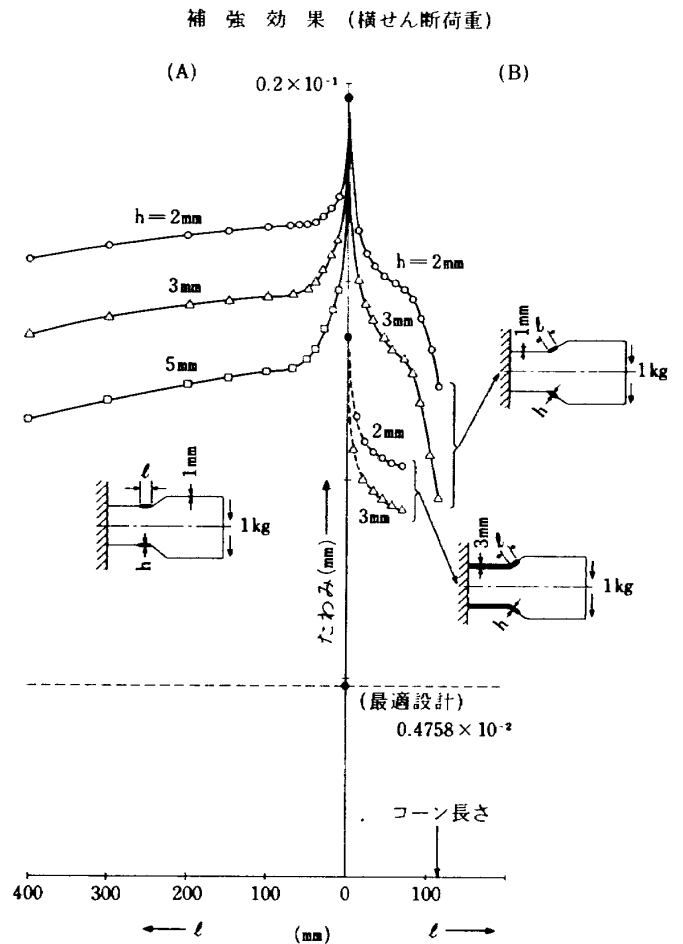


図 8 例3の補強に対するたわみの変化

図8の各場合(重量はより重い)に比較しても著しく剛性が改善されている。

時間の点から比較しても図8を得る為に70ケースに近い計算点を要し非常に多くの計算時間を必要とした。

その上これから最適の板厚分布を推定するにはまだデータが不足している。

これに比較して本論の方法では1回の近似計算により、ほぼ最適形状を得る。収束の様子を図6に示す。均等板

例. 3 板厚分布

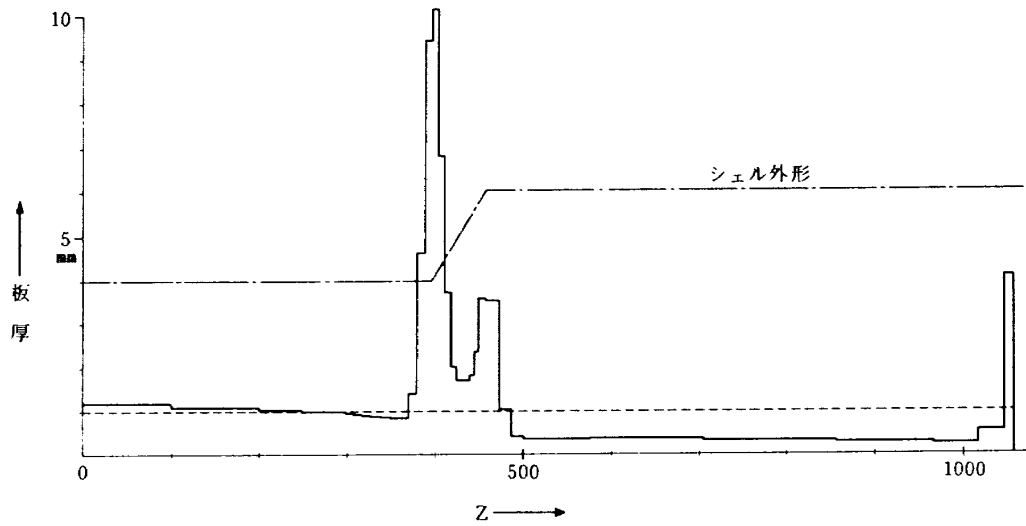


図 9 例 3 の板厚分布

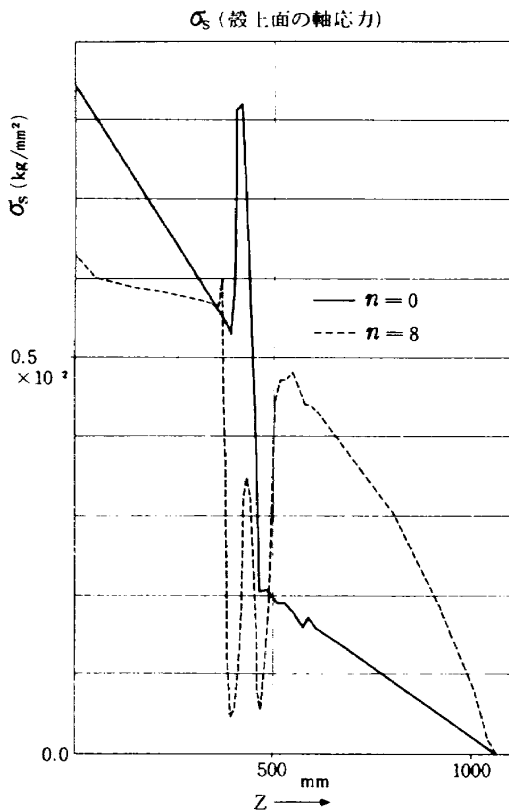


図 10 例 3 の軸方向応力

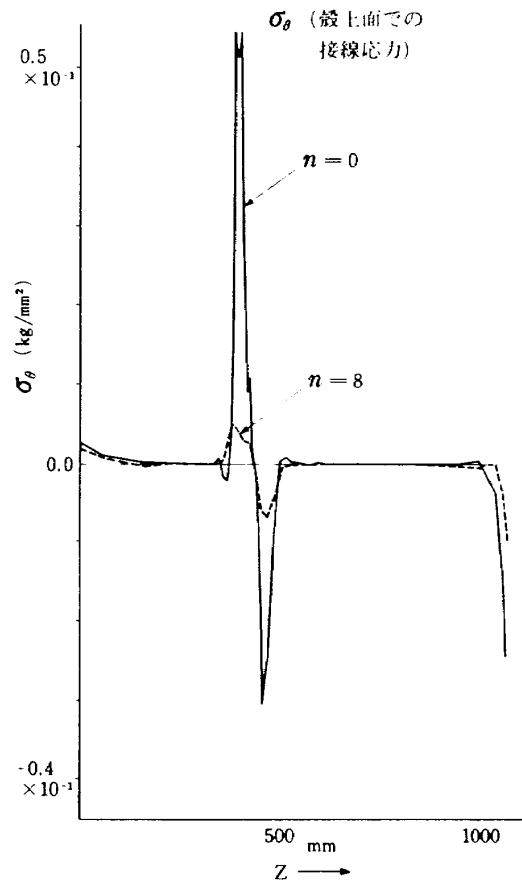


図 11 例 3 の接線方向応力

厚の場合の歪エネルギー、たわみを100%とした場合、
 実線は各近似計算時の歪エネルギー割合、破線はたわみの割合である。

1回の計算によってほぼ最終形状を得る。その後の反復計算によって解は漸次改善される。

反復計算によって連結部の板厚が変動するのが観察された。

板厚分布を図9に示す。この結果は図8の結果とよく対応している。連結部では板厚が最高10mmにも達しているがその範囲はせまい。

400φmmの円筒部に比較して600φmmの円筒部の板厚が小さいのは剛性にたいする直径の影響から推論される。

応力変化については図10、11に示す。軸方向の応力については図10からわかるように固定端と連結部での応力集中が緩和されている。接線応力については図11に示すように特に効果が著しい。

5 考 察

前の図6に於いて例3に特に著しく計算結果の変動がみられる。近似回数が8回目の時、最も歪エネルギーと変位が小さい。この後の計算はある範囲で振動しており、これ以上の解の精度向上は望めない。

例1、例2に於いては比較的安定であるが少しの振動が存在する。構造が複雑になり応力集中部が生ずるとこの傾向は特に応力集中部の板厚分布にみられる。

例3で応力集中が最も大きいのは小径シリンダーとコーンの直結部である。図12-aにその領域の要素(要素番号14)の残差の近似計算毎の変化を示す。

横軸には要素14の板厚をとってある。計算点の近くに付けてある番号は近似回番号を示す。

初期値1mmの状態(0)から(30)式によって次回の近似点(1)'を得るが重量一定条件により(32)式による割合だけ修正すると状態(1)へ移行する。

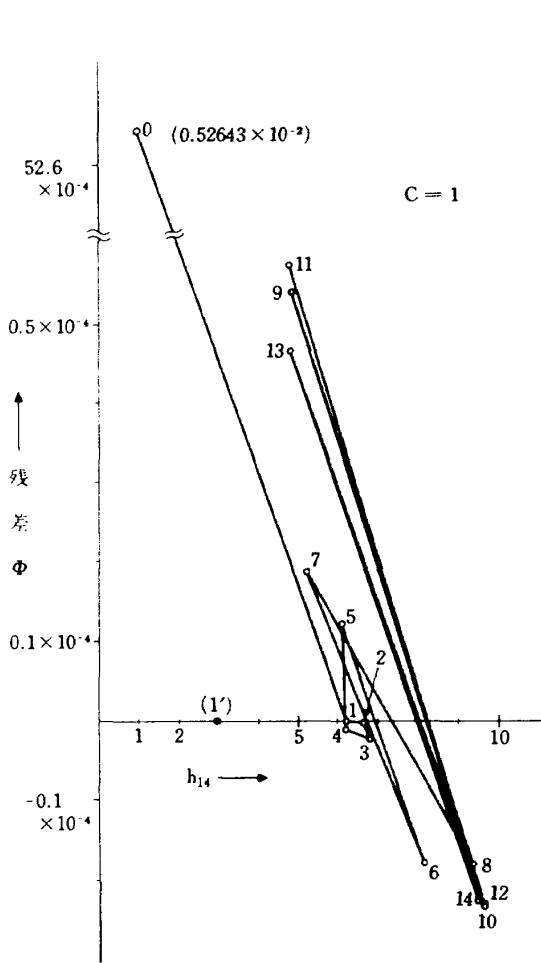


図 12(a) 要素14の近似による残差と板厚変化

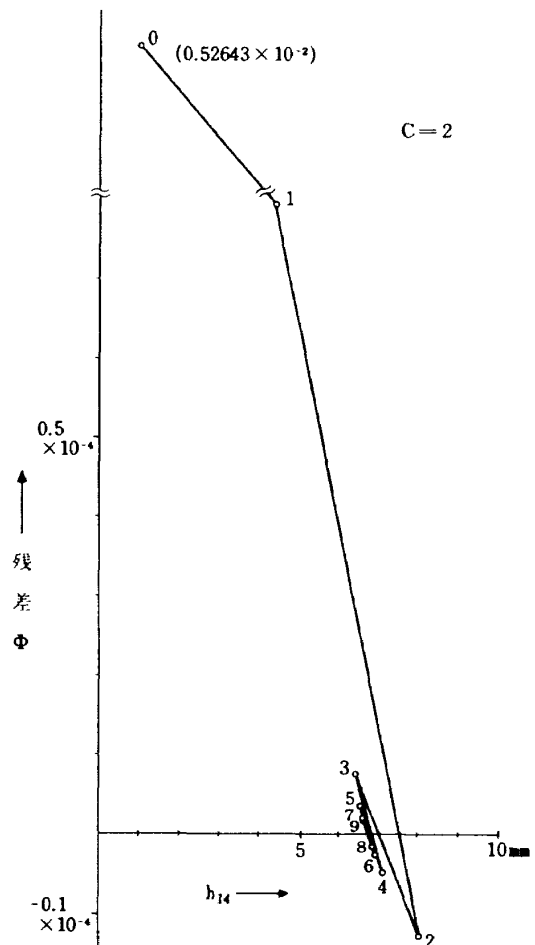


図 12(b) 要素14の近似による残差と板厚変化

この場合ではこのようにして得られた状態点(1)は正解に極めて近いが、近似を進めるにつれて(8)~(14)にみられるような振動を生ずるのがわかる。

この現象は主に次のような2要因によるものと考えられる。

(i) 近似式(8), (9)式に於いて重量一定条件が考慮されていない為、後で修正するので場合によっては近似計算による修正よりも、後の修正の方が大きくなる場合がある。

(ii) (8)式による勾配計算で C の数値が適当でない(今の計算では $C=1$ として行っている)

要因(i)の改善は困難であるが解が正解に近づく基礎式には重量一定条件が考慮してあるので、重量一定にする為の修正も小さくなる。

要因(ii)についてのみ考慮して $C=2$ の場合について計算を行うとかなりの改善がみられた。

図12-bに同じく要素14の残差を示す。状態(0)から順次解は改良されているが(8), (9)の状態で振動を生ずる。誤差は2%弱となる。 C についてさらに適当な数値を選ぶ事により誤差は小さく出来るが要因(i)の為、ある程度近似

進むとそれ以上は振動を生じて精度に限界がくると思われる。

それ故精度をさらに高める為には近似法に重量一定条件を考慮する必要がある。

6 結 論

等重量条件のもとで歪エネルギー最小の条件による構造物最適設計法を検討した結果、応力集中の低い、そして剛性の高い構造設計を可能にする、より応用範囲の広い方法である事がわかった。

これまでの計算と推論から次の様な結論を得る。

(i) 等重量構造の中で最も歪エネルギーの低いものを最適設計とする本論の方法は剛性の高い応力集中の低い構造を必然的に与える。この為最適計算に於いて応力と変位は拘束条件にならず、従来の最小重量法に比較して計算が簡単である為、広い応用性を有する。

(ii) 構造重量は設計変数の同次式で表現されるという関係を用いると、ラグランジュの乗数法によって最小歪条件を満足する設計方程式を単純な形で求められる。

(iii) 求められた設計方程式を殻構造の板厚分布について逐次近似法で解くにあたり、方程式を理論的に評価した結果、平方根形式による近似法が適切である事がわかった。

(iv) 逐次近似により、殻構造の最適板厚分布を計算した結果、ある例ではたわみが均等板厚設計の $\frac{1}{4}$ になり、かつ最大応力は $\frac{1}{2}$ 以下に減少した。単に板厚分布を広範囲に変化させて各々計算して得られた結果と比較しても最小歪エ

ネルギー設計は、はるかに少い計算時間で、約2倍剛性が高く、かつ軽量構造となっている。

この事から最小歪エネルギー設計は非常に実用的であると考えられ、この効果は構造が複雑になる程著しい。

最後に本研究を進めるにあたり原動機部松木正勝部長に有益な助言をいただいたことをここに付記する。

文 献

- (1) Gellathy, R.A etc, Proc.Conf.Matrix Methods Strnct Mech., Wright-Patterson Air Force Base 1965, AFFDL TR66-80
- (2) Gellathy, R.A etc, Aeronaut Quart, 17: 216-230(1966)
- (3) Schmit, L.A, Proc.2nd Conf Electron Computation ASCE, Pittsburgh, Pa P105
- (4) Majer, G etc, Int.J.Num Meth Engng 4-4(1972)455
- (5) Haug, E.J etc, Int.J.Num Meth Engng 5-2(1972)171
- (6) Prager, W. J.Optimization Theory and Applic 6-1(1970)
- (7) Johnson, W. etc, Int, J.Mech Sci 13-6 (1971)547
- (8) Salama A.M, AIAA J 11-3(1971)366
- (9) 中島他, 自動設計 丸善(昭46)
- (10) 川島, 航技研研究発表前刷(昭47)7
- (11) Switzky, H, AIAA Paper No73-343
- (12) AL-Bannas, AIAA Paper No73-337
- (13) Timoshenko, S etc, Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill 2nd ed (1959)
- (14) O.C.ツィエンキーヴィッツ等, マトリックス有限要素法 培風館 (1970)
- (15) Kovalenko .A.D, etc, NASA TTF-518 (1969)P17
- (16) 小河, 航技研報告 TR-262 (1972)
- (17) 宮地, 池田, 松末, 小河 内燃機関 vol 11, No123 1972. 5 P85~94

付 録

24式によれば

$$\begin{aligned} \phi_j(\{h\}) &= \{V\}^T \{ [K_{P_j}] + 3[K_{b_j}]h_j^2 \} \{V\} \\ &\quad - \frac{\rho_j \Delta S_j}{W} \{V\}^T \left(\sum_i [K_{P_i}]h_i + 3 \sum_i [K_{b_i}]h_i^3 \right) \{V\} \\ &\quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (22) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} &= 6 \{V\}^T [K_{b_j}] \{V\} h_j \\ &\quad - \frac{\rho_j \Delta S_j}{W} \{V\}^T \left([K_{P_j}] + 9[K_{b_j}]h_j^2 \right) \{V\} \quad (A-1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \phi_j}{\partial \{V\}} &= 2 \left([K_{P_j}] + 3[K_{b_j}]h_j^2 \right) \{V\} \\ &\quad - \frac{2\rho_j \Delta S_j}{W} \left(\sum_i [K_{P_i}]h_i + 3 \sum_i [K_{b_i}]h_i^3 \right) \{V\} \\ &\quad (A-2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \{V\}}{\partial h_j} &= \frac{\partial [K]^{-1}}{\partial h_j} \{F\} = -[K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial h_j} [K]^{-1} \{F\} \\ &= -[K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial h_j} \{V\} \quad (A-3) \end{aligned}$$

24式から $\{F\} = [K] \{V\}$ の関係を考慮した偏微分係数は

$$\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} \right|_{F=[K]\{V\}} = \frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} + \left\{ \frac{\partial \phi_j}{\partial \{V\}} \right\}^T \frac{\partial \{V\}}{\partial h_j} \quad (24)'$$

24式に (A-1)(A-2)(A-3) を代入する。

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} \right|_{F=KV} &= \\ &\{V\}^T \left\{ \begin{aligned} &6[K_{b_j}]h_j - C_1[K_{P_j}] - 9C_1[K_{b_j}]h_j^2 - 2[K_{P_j}][C] \\ &- 3[K_{b_j}][C]h_j^2 + 2C_1(\sum_i [K_{P_i}]h_i + 3\sum_i [K_{b_i}]h_i^3) [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial h_j} \end{aligned} \right\} \\ &\times \{V\} \quad (A-4) \end{aligned}$$

但し

$$C_1 = \frac{\rho_j \Delta S_j}{W} \quad [C] = [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial h_j}$$

(A-4) に於いて

$$\begin{aligned} &2C_1(\sum_i [K_{P_i}]h_i + 3\sum_i [K_{b_i}]h_i^3) [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial h_j} \\ &\doteq 2C_1 \frac{\partial [K]}{\partial h_j} = 2C_1 [K_{P_j}] + 6C_1 [K_{b_j}]h_j^2 \quad (A-5) \end{aligned}$$

なぜなら $[K_{b_i}]$ は $[K_{P_i}]$ に比較して小さいので

$$\sum [K_{P_i}]h_i + 3\sum [K_{b_i}]h_i^3 \doteq [K]$$

(A-5) を考慮すると (A-4) は

$$\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} \right|_{F=[K]\{V\}} = \{V\}^T \left\{ \begin{aligned} &C_1[K_{P_j}] - 2[K_{P_j}][C] + 6h_j[K_{b_j}] \\ &- 3C_1h_j^2[K_{b_j}] - 3[K_{b_j}][C]h_j^2 \end{aligned} \right\} \{V\} \quad (A-6)$$

$$\text{さらに } C_1 = \frac{\rho_j \Delta S_j h_j}{W h_j} = \frac{\Delta W}{W} \frac{1}{h_j} \quad (A-7)$$

分割を充分細くすると $\Delta W/W$ は 10^{-1} 以下にできる。又さらに $[C]$ について考察すると

$$\begin{aligned} [C] &= [K]^{-1} \frac{\partial [K]}{\partial h_j} = [K]^{-1} \left([K_{P_j}] + 3[K_{b_j}]h_j^2 \right) \\ &= [K]^{-1} \left([K_{P_j}]h_j + 3[K_{b_j}]h_j^3 \right) / h_j \\ &\approx \frac{[K]^{-1}[K_j^*]}{h_j} \end{aligned}$$

ここで $[K_j^*]$ は要素 j の要素剛性行列を示しているの
で $[K]^{-1}[K_j^*]$ は要素 j に関する要素以外では 0 と
なるし、又 0 でない部分でも高々 1 程度しかならない
と考えられる。

以上から (A-6) はさらに簡単化される

$$\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} \right|_{F=KV} \alpha - 2 \{V\}^T [K_{P_j}] \{V\} / h_j + 3 \{V\}^T [K_{b_j}] \{V\} h_j \quad (A-8)$$

平面剛性行列は曲げ剛性行列よりはるかに大きい。
又 h_j もシェル理論の範囲では小さい。平面問題では
 $[K_{b_j}]$ は考慮する必要がないので

$$\left. \frac{\partial \phi_j}{\partial h_j} \right|_{F=KV} \alpha - \{V\}^T [K_{P_j}] \{V\} / h_j \quad (A-9)$$

又 $\{V\}$ と h_j は反比例すると考えられるので

$$\begin{aligned} (A-9) \text{ 式 } \quad &\alpha - \frac{C}{h_j^3} \\ \text{但し } &C = \{V\}^T [K_{P_j}] \{V\} h_j^2 \quad (A-10) \end{aligned}$$

航空宇宙技術研究所報告 512号

昭和 52 年 9 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)☎182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2~27~12
