UDC 517.94:
531.2:
62-50

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR 522

制御に時間遅れを伴う線形系の最適制御

畑 山 茂 樹

1978 年 1 月

航 空 宇 宙 技 術 研 究 所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

制御に時間遅れを伴う線形系の最適制御*

畑 山 茂 樹**

Optimal Control of Linear Systems with Time Delay in the Control

By Shigeki HATAYAMA

Two optimal problems for linear systems with time delay in the control are studied. One is the minimum control norm problem for a fixed-time state transfer and the other the time optimal problem for a free-time state transfer or settling subject to a control norm constraint. In order to derive the necessary and sufficient conditions for optimality, the theorem of the L-problem of moments is applied. A powerful technique for determining optimal controls based on such optimality conditions as well as proof of existence and uniqueness are given.

はじめに

本稿では，制御に時間遅れを伴う線形系

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)u(t-h) \tag{0.1}$$

に関して，つぎの最適問題を考え，最適制御の関数解析的解法を与えている。上式において，制御に伴う時間遅れ h は一定とする。

第一の問題は，初期状態 $x_0=x(t_0)$ を指定された時刻 t_1 で指定された状態 $x_1=x(t_1)$ に移行させえる最小ノルムの制御関数 u^*_* すなわち

$$\|u^*\|=\min_{u\in\Omega}\|u\|$$

を見出すもので，これを最小制御ノルム問題とよぶ。ここに，Ω は許容制御関数の空間を，$\|\cdot\|$ はその空間のノルムを表わす。

第二の問題は，制御ノルムの大きさがある値 K で制限されている時，すなわち

$$\|u\|\leq K,\ u\in\Omega$$

なる制約のもとで，初期状態 $x_0=x(t_0)$ を最短時刻 t_1^* で指定された状態 $x_1=x(t_1^*)$ に移行（または整定）させえる制御関数 u^* を見出すもので，これを最短時間制御問題とよぶ。

空間 Ω のノルムの取り方に応じて，具体的な意味を持つ種々の最適制御問題を定式化できるが，本稿では制御の最大振幅，制御の全面積および制御の全エネルギを表わすつぎの３つのノルムの場合を取り上げている。

$$\|u\|=\max_{i=1,\cdots,r}\ \max_{t_0\leq t\leq t_1-h}|u_i(t)| \tag{0.2}$$

$$\|u\|=\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{i=1}^{r}|u_i(t)|\,dt \tag{0.3}$$

$$\|u\|=\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{i=1}^{r}|u_i(t)|^2dt\right\}^{1/2} \tag{0.4}$$

ただし，$u(t)=(u_1(t),\cdots,u_r(t))$ とする。

このように定式化された最適制御問題の研究は，例えば deep space に在る衛星の姿勢を地上から遠隔制御する場合の問題に応用することができる。遠隔制御問題では，(0·1) が衛星の線形化姿勢制御系を記述しており，時間遅れ h は制御指令を地上の計算機で計算するため，衛星と地上間で信号のやりとりに必要となる一定の時間を意味している。制御ノルム(0·2)は衛星の制御装置であるガス・

* 昭和 52 年 12 月 7 日受付
** 計算センター

ジェットの最大強さを，（０・３）はジェットの燃料消費量を表現しており，（０・４）は制御装置として反動車を用いた場合の電力消費量を表現している。従って，最小制御ノルム問題は限られた衛星塔載制御用資源の最有効使用問題であり，最短時間制御問題は割り当てられた制御用資源のもとでの最短時間姿勢制御を求める問題となる[(1)〜(3)]。

（０・１）で記述された制御系に対するより一般的な最適問題はR.E.Foersterによって研究されており，古典変分法にもとづいた最適制御の解法が示されている[(4)]。勿論，上で定式化した２つの最適制御問題にもこの解法は適用できる。しかし，最小制御ノルム問題も最短時間制御問題も共に到達状態が指定されているから，よく知られているように，最適制御を決定するには正準方程式系に関する２点境界値問題を解いて，随伴ベクトルの初期値を求めなければならない。一般的に言って現代制御理論では，取り扱いえる問題の範囲は広い反面，最適制御の解法上の観点からは２点境界値問題を解くという困難さを残している[(5)]。

本稿では，現代制御理論とは異なった方法論にもとづいて，上記の最適制御問題を解いている。その手法はN.N. Krasovskii によって導入されたもので[(6)〜(7)]，最適制御問題を関数空間での線形連続汎関数方程式系の両立性に関する問題（関数解析ではモーメント問題とよぶ）に変換し，両立を保証しえる最小ノルムの線形連続汎関数が満たすべき必要十分条件（モーメントのL－問題定理）から最適制御を決定する方法である。取り扱いえる制御対象は線形系に限られるが，最小制御ノルム問題と最短時間制御問題に関しては最適制御の存在と一意性を示すことができると共に，２点境界値問題を回避した最適制御の解法が得られる。すなわち，最適制御は指定された到達状態の成分の数に等しい次元の最小値問題の解を求めることにより決定できる。この有限次元の最小値問題は凸計画法のアルゴリズムによって解くことができ，その最小解は等価的に現代制御理論での随伴ベクトルの初期値に相当していることを示すことができる。

L－問題の理論は制御工学の分野ではあまり知られていないので，最適制御の存在・一意性・解法を論じる前に，この理論をまず紹介しておく。

1. L－問題とその理論

バナッハ空間B，Bに属するn個の関数h_i（$i=1,\cdots,n$）およびn個の実数c_i（$i=1,\cdots,n$）が与えられているものとする。L－問題（またはモーメント問題）とは

$$f(h_i)=c_i\ ,\ i=1,\cdots,n \tag{1.1}$$

を満足するようなBの共役空間B^*の元f，すなわちBの上で定義された有界な線形汎関数fを見出す問題をいう。

L.W.Neustadtに従って，

$$T(f)=\left(f(h_1),\ \cdots,\ f(h_n)\right)\varepsilon E^n$$

によって定義された線形演算子$T:B^*\to E^n$を考える。全ての正の実数αに対して，集合$S_\alpha=\{f\varepsilon B^* \mid \|f\| \leq\alpha\}$を定義し，

$$TS_\alpha=C_\alpha$$

とする。このとき，つぎの補題を得る[(8)]。

補題 1.1 Bのn個の元$h_1,\cdots,h_n$が線形独立ならば，全ての$\alpha>0$に対して，C_αは原点を内点として含むE^nの凸かつコンパクトな集合である。

証明 (i)S_αは凸であり，Tは線形であるから，C_αは凸である。

(ii)コンパクトな集合の連続像はコンパクトである。TはB^*の汎弱位相（weak* topology）とE^nのユークリッド位相に関して連続であり，S_αは汎弱位相に関してB^*でコンパクトであるから，C_αはE^nでコンパクトである[(9)]。

(iii)C_αが原点を内点として含まないと仮定する。このとき，C_αは凸かつ原点に関して対称であるから，C_αを完全に含む$n-1$次元の部分空間が存在しなければならない。そうすると，零ではない$\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\varepsilon E^n$が存在して，全ての$f\varepsilon B^*$に対して

$$\begin{aligned}(\eta,\ T(f))&=(\eta,\ (f(h_1),\ \cdots,\ f(h_n)))\\&=f\Big(\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_i\Big)=0^{\text{注)}}\end{aligned}$$

が成立することになる。Hahn-Banachの定理の系によって[(9)]，上式は$\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_i=0$を意味する。しかし，これは$h_i$（$i=1,\cdots,n$）が線形独立であることに矛盾する。Q.E.D.

補題1.1によって，以下のことがいえる。与えられた点$c=(c_1,\cdots,c_n)\varepsilon E^n$に対して，$c\varepsilon C_\alpha$，すなわち$\alpha^{-1}c\varepsilon C_1$を満たす$\alpha$の最小値$\lambda$が存在する。点$\lambda^{-1}c$が$C_1$の境界上にあることは明らかである。従って，$C_1$が凸集合であるから，点$\lambda^{-1}c$で$C_1$に対する支持超平面が存在する。その外向き法線ベクトルを$\eta^0=(\eta_1^0,\cdots,\eta_n^0)\varepsilon E^n$とする。ここに，$\eta^0\neq0$である。任意の$\eta\varepsilon E^n$に対して

$$(\eta,\ \lambda^{-1}c)\leq\max_{\xi\varepsilon C_1}(\eta,\ \xi) \tag{1.2}$$

であって，$\eta=\eta^0$のときには等号で成立する。（１・２）の右辺はつぎのように書きかえられる。

注）記号（・，・）によって，E^nでの内積を表わす。

$$\max_{\xi \in C_1}(\eta,\ \xi)=\max_{\|f\|=1}\left(\eta,\ (f(h_1),\ \cdots,\ f(h_n))\right)$$

$$=\max_{\|f\|=1} f\left(\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_i\right)=\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_i\right\|$$

ここで，第三の等号を導びくにあたり，Hahn-Banach の定理の系を用いた[9]。よって

$$(\eta,\ \lambda^{-1}c)\leq\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_i\right\|$$

を得るから，$c\neq 0$ であるならば，最小値 λ は次式によって与えられる。

$$\lambda=\frac{(\eta^0,c)}{\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_i\right\|}=\max_{\eta\in E^n}\frac{(\eta,\ c)}{\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_i\right\|}$$

$$=\left[\min_{\eta\in M}\left\|\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_i\right\|\right]^{-1} \tag{1.3}$$

ここに，Mは次式で定義される集合とする。

$$M=\left\{\eta\in E^n \mid (\eta,c)=1\right\}$$

以上の事実にもとづくと，L-問題の解の存在に関してつぎの定理が得られる。これはM.G.Kreinによって最初に示された[10]〜[11]。

定理 1.1　h_i ($i=1,\cdots,n$) をBの線形独立なn個の元とし，$c=(c_1,\ \cdots,\ c_n)$をE^n の元で$c\neq 0$とする。このとき，系（1・1）の解が存在するための必要十分条件は

$$\|f\|\geq\lambda \tag{1.4}$$

である。ここに，λは（1・3）によって定義される。

証明　fを$T(f)=(f(h_1),\ \cdots,\ f(h_n))=c$を満足する任意の$B^*$の元とする。このとき，$c\in C_{\|f\|}=\|f\|C_1$ である。従って，λの定義にもとづき，$\|f\|\geq\lambda$ を得る。逆は明らかである。　Q.E.D.

定理の仮定のもとでは（1・3）における最小値を達成する$\eta\in E^n$ が常に存在する。このことはノルムが$\|f\|=\lambda$となる系（1・1）の解が存在することを意味する。このような最小ノルム解はつぎの定理によって特徴づけられる。

定理 1.2　定理 1.1 の仮定のもとで，系（1・1）の解fが$\|f\|=\lambda$を満たすための必要十分条件は

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right)=\|f\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right\| \tag{1.5}$$

である。ここに，$\bar{\eta}=(\bar{\eta}_1,\cdots,\bar{\eta}_n)$は（1・3）の最小値を達成する$E^n$ の任意の元とする。

証明　$\bar{\eta}$の定義から，$\lambda\left\|\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right\|=(\bar{\eta},c)$ が得られる。fを系（1・1）の解で$\|f\|=\lambda$ を満たすB^*の元とすると，

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right)=(\bar{\eta},\ c)=\lambda\left\|\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right\|$$

$$=\|f\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right\|$$

を得る。逆に，系（1・1）の解fが（1・5）を満たすものとすると，

$$\|f\|=\frac{f\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right)}{\left\|\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right\|}=\frac{\lambda f\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right)}{(\bar{\eta},\ c)}=\lambda$$

を得る。　Q.E.D.

なお，定理 1.2 の$\bar{\eta}$を（1・3）の最小値を達成するMの任意の元とするならば，（1・5）の条件は

$$f\left(\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right)=\|f\|\left\|\sum_{i=1}^{n}\bar{\eta}_i h_i\right\|=1$$

となる。

2. 制御に時間遅れを伴う線形系

$I=[t_0,\ \infty)$ を実直線上のある半直線とし，hをある正数とする。JによってIにおけるあるルベッグ零集合のIに関する補集合を表わし，$K_1=[t_0,\ t_1]$ および $K_2=[t_0,\ t_1-h]$によってIにおける２つのコンパクトな区間を表わす。

ある制御系において，制御に伴う時間遅れhは入力を$u(t)$とし出力を$v(t)$とする場合，

$$v(t)=\begin{cases}u(t-h)\ , & t\in[t_0+h,\ \infty)\\ \phi(t-h)\ , & t\in[t_0\ ,\ t_0+h]\end{cases} \tag{2.1}$$

なる入出力関係を満たしている。ここで，$\phi(\cdot)$は$[t_0-h,\ t_0]$ の上で定義された任意の関数であって，$\{\phi(t)|t_0-h\leq t\leq t_0\}$ を遅れの初期状態という[12]。簡単化のために，これを関数$\phi(\cdot)$と同じ記号で表わす。

さて，次式で記述される制御に時間遅れを伴う線形系を考える。

$$\dot{x}(t)=A(t)x(t)+B(t)v(t) \tag{2.2}$$

ここに，$A(t)=\{a_{ij}(t)\}$はJにおいて定義された$n\times n$マトリクスであって，各要素はIの任意の有界な区間でルベッグ可積分であるものとする。また，$B(t)=\{b_{ik}(t)\}$はJにおいて定義された$n\times r$ ($n\geq r$) マトリクスであって，各要素は$L_p(I)$, $1\leq p<\infty$ に属するものとする。さらに，$u(\cdot)=(u_1(t),\ \cdots,\ u_r(\cdot))$は$K_2$ において定義されたr次元の制御関数であって，各成分は$L_q(K_2)$ に属す

るものとする。ただし，$q=p/(p-1)$。

系(2・2)に対する初期条件を完全に規定するためには，初期状態$x(t_0)=x_0=(x_{01},\cdots,x_{0n})\epsilon E^n$に加えて，遅れの初期状態$\phi(\cdot)=(\phi_1(\cdot),\cdots,\phi_r(\cdot))$が与えられなければならない。このため，集合$z(t_0)=\{x_0,\phi(\cdot)\}$を定義して，それを系(2・2)に対する完全初期状態とよぶ。このとき，系(2・2)はK_1において殆ど到る所で定義され，任意の$z(t_0)$に対してK_1において一意な解を持つ。この解はコーシーの公式に従って次式で表わされる。

$$x(t)=F(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)B(\tau)v(\tau)d\tau,\quad t\geq t_0 \tag{2.3}$$

ただし，$F(t,\tau)=\{f_{ij}(t,\tau)\}$はつぎの方程式を満足する$n\times n$マトリクスである。

$$\frac{\partial F(t,\tau)}{\partial t}=A(t)F(t,\tau),\ F(t_0,t_0)=I$$

ここで，Iは$n\times n$単位マトリクスを表わす。

(2・1)を(2・3)に代入し，$s=\tau-h$とおくと，

$$x(t)=F(t,t_0)\Big\{x_0+\int_{t_0-h}^{t_0}F(t_0,s+h)\times B(s+h)\phi(s)ds\Big\}+\int_{t_0}^{t-h}F(t,s+h)\times B(s+h)u(s)ds\ ,\ t\epsilon[t_0+h,t_1] \tag{2.4}$$

を得る。(2・4)から，ある条件のもとで，系(2・2)は$[t_0,t_1]$において完全可制御であることがいえる(完全可制御の定義およびそのための必要十分条件については10章で述べる)。一方，$t\epsilon[t_0,t_0+h]$に対する系(2・2)の解は

$$x(t)=F(t,t_0)x_0+\int_{t_0}^{t}F(t,\tau)B(\tau)\phi(\tau-h)d\tau,\quad t\epsilon[t_0,t_0+h] \tag{2.5}$$

と書ける。(2・5)は$t\epsilon[t_0,t_0+h]$における状態$x(t)$が任意に与えられた完全初期状態$z(t_0)$によって一意的に定まることを示している。すなわち，系(2・2)は$[t_0,t_0+h]$において非可制御である。従って，系(2・2)の解軌道が$t=t_1$においてある指定された状態$x_1\epsilon E^n$を通過しえるためには，一般に$t_1>t_0+h$なる条件が必要である。

3. 最適制御問題

ある点$x_1=(x_{11},\cdots,x_{1n})\epsilon E^n$とある完全初期状態$z(t_0)$が与えられたとする。初期点$x_0$から出発し，系(2・2)の解軌道上を動く点$x(t)$がある時刻$t=t_1$で指定点$x_1$に到達した，すなわち$x_1=x(t_1)$なる条件を満足したと仮定する。ただし前章の議論にもとづき，$t_1>t_0+h$とする。このとき，(2・4)からつぎの関係が得られる。

$$c=\int_{t_0}^{t_1-h}H(s)u(s)ds \tag{3.1}$$

ここで，$c=(c_1,\cdots,c_n)$と$H(s)=\{h_{ik}(s)\}$は次式で定義される既知のn次元ベクトルと$n\times r$マトリクスを表わす。

$$c=x_1-F(t_1,t_0)\Big\{x_0+\int_{t_0-h}^{t_0}F(t_0,s+h)\times B(s+h)\phi(s)ds\Big\} \tag{3.2}$$

$$H(s)=F(t_1,s+h)B(s+h),\quad a.e.s\epsilon K_2 \tag{3.3}$$

なお，$a.e.s$は$s+h\epsilon J\cap[t_0+h,t_1]$なる$s$を意味する。

関数方程式(3・1)は一つのL-問題として解釈できる。本稿では，このようにL-問題に変換可能なつぎの最適制御問題を取り上げ，その解法を述べる。

最小制御ノルム問題：$t_1\ (>t_0+h)$，$z(t_0)$とx_1が与えられたときに，(3・1)を満たしかつノルムが最小となる制御関数$u^*(\cdot)$を見出せ。ここに，制御関数のノルムは

$$\|u\|_q=\Big\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}|u_k(t)|^q dt\Big\}^{1/q},\ 1<q\leq\infty \text{注)} \tag{3.4}$$

によって定義する。特に，$q=2$の場合を制御エネルギ最小の，$q=\infty$の場合を制御振幅最小の制御問題とよぶ。

最短時間制御問題：$z(t_0)$，x_1と定数$K>0$が与えられたときに，$\|u\|_q\leq K$なる制限のもとで，最短時間$t={t_1}^*$で(3・1)を満足させる制御関数$u^*(\cdot)$を見出せ。特に，$q=2$の場合を制御エネルギに，$q=\infty$の場合を制御振幅に制限のある最短時間問題とよぶ。

最短時間整定問題：$z(t_0)$，x_1と定数$K>0$が与えられたときに，$\|u\|_q\leq K$なる制限のもとで，最短時間$t={t_1}^*$で系の状態をx_1に到達させた後，$[t_1^*,\infty)$で状態x_1を保持しえる制御関数を見出せ。ただし，到達後の制御にはノルムの制限を課さないものとする。

注) 以後，サフィクスqの意味が明らかな場合には，これを省略して，単に$\|u\|$と書く。

4. 最小制御ノルム問題の解法

以後の議論の都合上，（３・１）～（３・３）を各成分による表現に書き直しておく。

$$c_i=\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}h_{ik}(s)u_k(s)ds \quad , \quad i=1,\cdots,n \tag{4.1}$$

ここに，c_i と h_{ik} (s)は次式で定義される。

$$c_i=x_{1i}-\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(t_1,t_0)\Big\{x_{0j}+\int_{t_0-h}^{t_0}\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{r}f_{jl}(t_0,s+h)b_{lk}(s+h)\phi_k(s)ds\Big\} \tag{4.2}$$

$$h_{ik}(s)=\sum_{j=1}^{n}f_{ij}(t_1,s+h)b_{jk}(s+h),$$

$$a.e.\ s\in K_2 \tag{4.3}$$

また以後，（４・３）によって定義されるK_2 の上の関数を$h_{ik}(\bullet)$ と表わして，記号$h^i(\bullet)=(h_{i1}(\bullet),\cdots,h_{ir}(\bullet))$を用いる。２章の仮定によって，$h^i(\bullet)$ はバナッハ空間$B=L_p(K_2,E^r)$，$1\le p<\infty$の元であり，$u(\bullet)$はバナッハ空間$B'=L_q(K_2,E^r)$，$q=p/(p-1)$ の元である。ここで，$1\le p<\infty$ならば，B^*とB' が同一とみなせることはよく知られている(9)。

さて，最小制御ノルム問題と同等であるつぎのようなL－問題を考える。「（４・２）で定義されるn個の実数c_1 $\cdots$, c_n，（４・３）で定義されるBのn個の元$h^1(\bullet),\cdots,h^n(\bullet)$および$t_1$（$>t_0+h$）が与えられたときに，

$$l\big(h^i(\cdot)\big)=c_i \quad , \quad i=1,\cdots,n \tag{4.4}$$

を満足しかつノルムが最小となるB^* の元ℓを見出せ。ただし，上式の左辺の汎関数ℓは

$$l\big(g(\cdot)\big)=\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}g_k(s)u_k(s)ds,$$

$$\forall g(\cdot)=\big(g_1(\cdot),\cdots,g_r(\cdot)\big)\in B \tag{4.5}$$

によって定義する。」

（上述の仮定から明らかなように，恒等式（４・５）はBの上の有界な線形汎関数ℓを定義し，互に対応する２つの元$\ell\in B^*$と$u(\bullet)\in B'$ は同一とみなせることを意味している。また，与えられた$h^i(\bullet)\in B$ に対して，$L(\ell)=\ell(h^i(\bullet))$，$\forall \ell\in B^*$によって第２共役空間$B^{**}$ の元Lを対応させると，Lと$h^i(\bullet)$ は同一とみなせる。従って，（４・４）の左辺はB^* の上の有界な線形汎関数を意味している。）

上記の問題に対して，(1)与えられたBのn個の元$h^1(\bullet),\cdots,h^n(\bullet)$ が線形独立であり，(2)与えられたn個の実数$c_1,\cdots,c_n$ が同時に０にならないことを仮定すると，以下のようにして最適解を求めることができる。

(i) まず，$p=1$の場合を考える。$L_1(K_2,E^r)$でのノルムの定義から，

$$\|h^i(\cdot)\|=\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}|h_{ik}(s)|ds$$

である。また，$L_1^*(K_2,E^r)$と$L_\infty(K_2,E^r)$は等距離的に同等であるので，$L_\infty(K_2,E^r)$でのノルムの定義から，

$$\|l\|=\|u(\cdot)\|=\operatorname*{ess.sup}_{t_0\le s\le t_1-h}\ \sup_{k=1,\cdots,r}|u_k(s)|$$

である。従って，定理1.1により，方程式系（４・４）の解が存在するための必要十分条件は

$$\|u(\cdot)\|\ge\lambda$$

である。ここに，λは次式によって与えられる。

$$\lambda^{-1}=\min_{\eta\in M}\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_{ik}(s)\Big|ds \tag{4.6}$$

ただし，Mは次式で定義する。

$$M=\Big\{\eta=(\eta_1,\cdots,\eta_n)\in E^n\ \Big|\ \sum_{i=1}^{n}\eta_i c_i=1\Big\} \tag{4.7}$$

さらに定理1.2によると，ℓが系（４・４）の最小ノルム解であるための必要十分条件は，（４・６）の最小値を達成する任意の$\eta^0\in M$ に対して，

$$\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0h_{ik}(s)u_k(s)ds$$
$$=\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0h_{ik}(s)u_k(s)\Big|ds$$
$$=\Big[\operatorname*{ess.sup}_{t_0\le s\le t_1-h}\ \sup_{k=1,\cdots,r}|u_k(s)|\Big]\Big/\lambda=1 \tag{4.8}$$

が成立することである。

（４・８）の第１の等号が成立するためには，殆ど到る所の$s\in K_2$ に対して，

$$\operatorname{sign}u_k(s)=\operatorname{sign}\Big[\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0h_{ik}(s)\Big],\ k=1,\cdots,r^{\text{注)}}$$

となることが必要十分条件である。第２と第３の等号が同時に成立するためには，殆ど到る所の$s\in K_2$ に対して，

$$|u_k(s)|=\lambda\ ,\quad k=1,\cdots,r$$

となることが必要十分条件である。よって，本問題（最小制御振幅問題）に対する最適制御関数$u^*(\bullet)$の各成分は殆ど到る所の$s\in K_2$ において次式で表現される。

注）記号sign $u_k(s)$は，$u_k(s)>0$なら＋1，$u_k(s)<0$なら－1，$u_k(s)=0$なら＋1か－1かは不定，を表わす。

$$u_k^*(s)=|u_k^*(s)|\mathrm{sing}\,u_k^*(s)$$

$$=\frac{\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)\right]}{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(\tau)\right|d\tau},\quad k=1,\cdots,r \tag{4.9}$$

(ii) つぎに，$1<p<\infty$の場合を考える。$L_p(K_2, E_r)$でのノルムの定義から，

$$\|h^i(\cdot)\|=\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}|h_{ik}(s)|^p ds\right\}^{1/p}$$

である。また，$L_p^*(K_2, E^r)$と$L_q(K_2, E^r)$は $q=p/(p-1)$ のとき等距離的に同等であるから，$L_q(K_2, E^r)$ でのノルムの定義によって，

$$\|l\|=\|u(\cdot)\|=\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}|u_k(s)|^q ds\right\}^{1/q}$$

である。再び定理1.1により，系（４・４）が解を持つための必要十分条件は

$$\|u(\cdot)\|\geq\lambda$$

である。ここで，λは次式によって与えられる。

$$\lambda^{-1}=\min_{\eta\in M}\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_{ik}(s)\right|^p ds\right\}^{1/p} \tag{4.10}$$

ただし，Mは（４・７）によって定義する。

さらに定理1.2を適用すると，lが系（４・４）の最小ノルム解であるための必要十分条件は，（４・１０）の最小値を与える任意の$\eta^0\in M$ に対して，

$$\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)u_k(s)ds$$

$$=\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)u_k(s)\right|ds$$

$$=\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}|u_k(s)|^q ds\right\}^{1/q}$$

$$\times\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)\right|^p ds\right\}^{1/p}=1 \tag{4.11}$$

が成立することである。

（４・１１）の第１の等号が成立するためには，殆ど到る所の$s\in K_2$に対して，

$$\mathrm{sing}\,u_k(s)=\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)\right],\quad k=1,\cdots,r$$

となることが必要十分条件である。第２の等号が成立するための必要十分条件は，Hölder の不等式において等号が成立する条件である。それは$C>0$を任意の実数とするとき，殆ど到る所の$s\in K_2$に対して，

$$|u_k(s)|^q=C\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)\right|^p,\quad k=1,\cdots,r$$

と表わされる。従って，第１と第２の等号を同時に満足する関数$u(\cdot)$の各成分は殆ど到る所の$s\in K_2$に対して，

$$u_k(s)=|u_k(s)|\mathrm{sing}\,u_k(s)$$

$$=C^{1/q}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)\right|^{p/q}\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)\right],$$

$$k=1,\cdots,r \tag{4.12}$$

と表現されなければならない。（４・１２）を（４・１１）に代入すれば，その第３の等号を満たすCの値が求まり，

$$C=\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)\right|^p ds\right\}^{-q}$$

を得る。

よって，本問題に対する最適制御関数$u^*(\cdot)$の各成分は殆ど到る所の$s\in K_2$において次式で表現される。

$$u_k^*(s)=\frac{\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)\right|^{p-1}\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)\right]}{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(\tau)\right|^p d\tau},$$

$$k=1,\cdots,r \tag{4.13}$$

特に，最小制御エネルギ問題に対する最適解は，上式の$p=2$に相当し，次式で表現される。

$$u_k^*(s)=\frac{\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(s)}{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0 h_{ik}(\tau)\right|^2 d\tau},$$

$$k=1,\cdots,r$$

形式的に$p=1$とすると，（４・１０）と（４・１３）はそれぞれ（４・６）と（４・９）になる。このことに注意すると，本章で得られた結果はつぎの定理にまとめられる。

定理4.1 $1\leq p<\infty$とする。各要素が（４・３）で定義される与えられた$L_p(K_2, E^r)$のn個の元$h^1(\cdot)$, …, $h^n(\cdot)$が線形独立であり，（４・２）で定義される与えられたn個の実数c_1, …, c_n が同時に０とならないならば，最小制御ノルム問題の最適解$u^*(\cdot)$が存在し，その各成分は殆ど到る所の $s\in K_2$において（４・１３） で表現される。

なお，つぎの事実は注目に価する。最適制御（４・１３）は未知ベクトル$\eta^0\in M$ が決定されると完全な表現を与える。このη^0 はn 次元空間における最小値問題（４・１０）の解であり，定理4.1の仮定のもとでは必ず解η^0 が存在する。このように，最適制御を求める問題が有限次元のベ

クトルを求める問題に帰結される点に，本章の解法と現代制御理論にもとづく解法との大きな差異がある。

5. 最短時間制御問題の解法

最短時間制御問題は4章の結果とつぎの3つの補題にもとづいて解くことができる。前章で得た結果を必要とする関係上，本章では始めから定理4.1の2つの仮定は満足されているものとして議論を進める。また，2つの最小値問題（4・6）と（4・10）はひとまとめにして，$1\leq p<\infty$に対する最小値問題（4・10）とする。

まず，前章の結果は（t_0+h, ∞）に属する任意に定めた時刻t_1に関して成立することに注意する。最小値問題（4・10）はt_1を変えると，その解η^0とその最小値λ^{-1}もt_1とともに異なってくる。このt_1に関する依存性を強調して，以後$\eta^0=\eta^0(t_1)$および$\lambda=\lambda(t_1)$と表わす。このとき，$\lambda(t_1)$に関するつぎの性質は明らかである。

補題 5.1 $\lim_{t_1\to t_0+h}\lambda(t_1)=\infty$

さらに，$\lambda(t_1)$はt_1に関してつぎの性質を持つ。

補題 5.2 $\lambda(t_1)$はt_1に関して単調に減少する連続関数である。

証明 (i)任意に与えられた2つの時刻t_1, $\bar{t}_1\,\epsilon\,(t_0+h,\ \infty)$に対応した2つの最小値問題（4・10）の解を，それぞれ$\eta^0(t_1)$, $\eta^0(\bar{t}_1)\epsilon M$とする。このとき，$1\leq p<\infty$に対して，

$$\lambda(t_1)^{-1}=\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(t_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p}$$

$$\leq\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(\bar{t}_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p} \tag{5.1}$$

がt_1と$\bar{t}_1$の大小関係に関係なく成立する。また，$\bar{t}_1\geq t_1$とするならば，つぎの関係が$1\leq p<\infty$に対して成立する。

$$\lambda(\bar{t}_1)^{-1}=\left\{\int_{t_0}^{\bar{t}_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(\bar{t}_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p}$$

$$\geq\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(\bar{t}_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p} \tag{5.2}$$

従って，$\bar{t}_1>t_1$であるならば，（5・1）と（5・2）から

$$\lambda(\bar{t}_1)^{-1}\geq\lambda(t_1)^{-1} \tag{5.3}$$

を得る。上式はt_1の増大とともに，$\lambda(t_1)$が単調に減少することを示している。

(ii) $1\leq p<\infty$に対して，

$$\lambda(\bar{t}_1)^{-1}=\left\{\int_{t_0}^{\bar{t}_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(\bar{t}_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p}$$

$$\leq\left\{\int_{t_0}^{\bar{t}_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(t_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p} \tag{5.4}$$

はt_1と$\bar{t}_1$の大小関係によらず成立する。従って，$\bar{t}_1>t_1$であるならば，（5・1），（5・3）と（5・4）から

$$0\leq\lambda(\bar{t}_1)^{-1}-\lambda(t_1)^{-1}$$

$$\leq\left\{\int_{t_0}^{\bar{t}_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(t_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p}$$

$$-\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(t_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p}$$

を得る。上式から，$\bar{t}_1>t_1$を満たしつつ$\bar{t}_1\to t_1$とするとき，$\lambda(\bar{t}_1)^{-1}\to\lambda(t_1)^{-1}$となることがいえる。同様にして，$\bar{t}_1<t_1$であるならば，（5・1），（5・3）と（5・4）から

$$0\leq\lambda(t_1)^{-1}-\lambda(\bar{t}_1)^{-1}$$

$$\leq\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(\bar{t}_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p}$$

$$-\left\{\int_{t_0}^{\bar{t}_1-h}\sum_{k=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(\bar{t}_1)h_{ik}(s)\Big|^p ds\right\}^{1/p}$$

を得る。従って，$\bar{t}_1<t_1$を満たしつつ$\bar{t}_1\to t_1$とすれば，$\lambda(\bar{t}_1)^{-1}\to\lambda(t_1)^{-1}$となる。このように，任意の$t_1$において，$\lambda(t_1)^{-1}$は右と左から連続であるから，$\lambda(t_1)^{-1}$，従って$\lambda(t_1)$は$t_1$の連続関数である。 Q.E.D.

（5・2）には注意を要する。$\eta^0(\bar{t}_1)\neq 0\ (\epsilon E^n)$かつ$L_p([t_0,\ \bar{t}_1-h],\ E^r)$の$n$個の元$h^1(\cdot),\cdots,h^n(\cdot)$は線形独立であるが，殆ど到る所の$s\in[t_1-h,\ \bar{t}_1-h]$に対して，$\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(\bar{t}_1)h^i(s)=0\ (\in E^r)$となることは可能である。よって，（5・2）の不等式は必ずしも厳密に成立するとはかぎらない。（5・2）の不等式が厳密に成立することを保証するには，$h^1(\cdot),\cdots,h^n(\cdot)$の完全独立性の仮定が必要である。それは任意の$\eta\neq 0$と殆ど到る所の$s\in[t_0,\ \bar{t}_1-h]$に対して，$\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_{ik}(s)\neq 0$, $k=1,\cdots,r$となることと定義される[13]。

補題5.3 与えられた$h^1(\cdot), \cdots, h^n(\cdot)$が完全独立ならば，(i) $\lim_{t_1\to\infty}\lambda(t_1)=0$，(ii) $\lambda(t_1)$はt_1に関して厳密に単調減少する連続関数である。

証明 (i)は明らか。(ii)は（5・2）の不等式が厳密に成立するから，$\bar{t}_1 > t_1$ならば，$\lambda(t_1) > \lambda(\bar{t}_1)$がいえる。

Q.E.D.

最短時間制御問題を論じるに際して，「$\|\ell\| \leq K$なる拘束のもとで，（4・4）を満足する$\ell \in B^*$を見出せ」という中間的なL－問題を調べることから始める。ℓの定義式（4・5）に注意して定理1.1を適用すると，ℓが任意に定めた$t_1 \in (t_0+h, \infty)$に対してこの問題の解であるためには，このℓに同等対応する$L_q(K_2, E^r)$の元$u(\cdot)$が

$$\lambda(t_1) \leq \|u(\cdot)\| \leq K \tag{5.5}$$

を満たすことが必要十分条件となる。ここに，$\lambda(t_1)$は（4・10）で定義される。

与えられた$h^1(\cdot), \cdots, h^n(\cdot)$が線形独立である場合，補題5.1と5.2から容易にわかるように，（5・5）を満たすt_1が存在するならば，そのt_1の内で最小となるt_1^*すなわち

$$t_1^* = \min\{t_1 \mid \lambda(t_1) = K\} \tag{5.6}$$

が定まる。$h_1(\cdot), \cdots, h^n(\cdot)$が完全独立である場合には，補題5.1と5.3から明らかなように，（5・5）を満たす最短時間t_1^*が必ず存在し，それは

$$\lambda(t_1) = K \tag{5.7}$$

から一意的に定まる。

こうして決定されたt_1^*に対する中間的なL－問題の解は，前章と同様にして定理1.2を適用すれば求まるが，それが最短時間制御問題の解を与えることは明らかである。よって，（4・13）を参照すると，本問題（$1 \leq p < \infty$）に対する最適制御関数$u^*(\cdot)$の各成分は殆ど到る所の$s \in [t_0, t_1^*-h]$において次式で表現される。

$$u_k^*(s) = K^p \left|\sum_{i=1}^n \eta_i^0(t_1^*) h_{ik}(s)\right|^{p-1} \operatorname{sign}\left[\sum_{i=1}^n \eta_i^0(t_1^*) h_{ik}(s)\right],$$
$$k = 1, \cdots, r \tag{5.8}$$

ここに，$\eta^0(t_1^*)$はつぎの最小値問題の任意の解とする。

$$\min_{\eta \in M}\left\{\int_{t_0}^{t_1^*-h} \sum_{k=1}^r \left|\sum_{i=1}^n \eta_i h_{ik}(s)\right|^p ds\right\}^{1/p} = 1/K \tag{5.9}$$

特に，制御振幅と制御エネルギが制限された最短時間問題に対する最適解は，（5・8）で$p=1$と$p=2$とした場合に相当し，それぞれ次式で表現される。

$$u_k^*(s) = K \operatorname{sign}\left[\sum_{i=1}^n \eta_i^0(t_1^*) h_{ik}(s)\right], \quad k = 1, \cdots, r$$

$$u_k^*(s) = K^2 \sum_{i=1}^n \eta_i^0(t_1^*) h_{ik}(s), \quad k = 1, \cdots, r$$

以上のことをつぎの定理にまとめておく。

定理5.1 $1 \leq p < \infty$とし，（4・2）で定義されたn個の実数$c_1, \cdots, c_n$が同時に0とならず，各要素が（4・3）で定義された$L_{p'}(K_2, E^r)$のn個の元$h^1(\cdot), \cdots, h^n(\cdot)$が任意に定めた$t_1 \in (t_0+h, \infty)$において線形独立であるとする。このとき，（5・5）を満足するt_1が存在するならば，最短時間制御問題の最適解t_1^*と$u^*(\cdot)$が存在し，前者は（5・6）で与えられ，後者の各成分は殆ど到る所の$s \in [t_0, t_1^*-h]$において（5・8）で表現される。

定理5.2 $1 \leq p < \infty$とし，（4・2）で定義されたn個の実数$c_1, \cdots, c_n$が同時に0とならないとする。このとき，各要素が（4・3）で定義された$L_p(K_2, E^r)$のn個の元$h^1(\cdot), \cdots, h^n(\cdot)$が任意に定めた$t_1 \in (t_0+h, \infty)$において完全独立であるならば，最短時間制御問題の最適解t_1^*と$u^*(\cdot)$が存在し，前者は（5・7）から一意的に定まり，後者の各成分は殆ど到る所の$s \in [t_0, t_1^*-h]$において（5・8）で表現される。

終りに，本章の解法と現代制御理論にもとづく解法との差異を示すつぎの事実に注目しておく。最適制御（5・8）は未知時刻t_1^*と未知ベクトル$\eta^0(t_1^*) \in M$を含んだ形で表現されているから，最短時間制御問題はこれらを決定する問題に帰結される。一方，問題（5・9）にはt_1^*と$\eta^0(t_1^*)$の両者を決定する条件が含まれている。例えば，（5・9）の左辺のt_1^*を任意の$t_1(> t_0+h)$におきかえて，その最小値問題の解$\eta^0(t_1)$がt_1の関数形で求めえるならば，その最小値の逆数$\lambda(t_1)$がKに等しくなるt_1の内で最小の時刻としてt_1^*を決定でき，従って$\eta^0(t_1^*)$が決定される。

6. 最短時間整定問題の解法

最短時間整定問題は最短時間で系の状態を要求されている状態に到達させる問題と，到達後その状態を保持する問題とに分離して考えるとよい。前章の（5・8）なる制御を使用するならば，系の状態は最短時間t_1^*で要求されている状態x_1に到達するのであるから，最短時間整定問題は全ての$t \in J \cap [t_1^*, \infty]$に対して，

$$-A(t)x_1 = B(t)u(t-h) \tag{6.1}$$

を満たす制御が可能ならば解決される。ただし，到達後においては制御に関するノルムの制限が解除されているものとする。

上式が成立するということは，与えられた点 $-A(t)x_1 \in E^n$ が $B(t)$ の r 個の列ベクトルの線形結合として表現しえることを意味し，その線形結合の各係数が解 $u(t-h)$ の各成分の値を表わしている。従って，（6・1）が解を持つための必要十分条件は，各 $t \in J \cap [t_1^*, \infty)$ において，$-A(t)x_1 \in R(B(t))$ となることである。ここで，記号 $R(B(t))$ は $B(t)$ の値域空間を表わす。さらにこのことは，$A(t)$ の n 個の列ベクトルの各々が $B(t)$ の r 個の列ベクトルの線形結合で表現しえることと等価である。よって，（6・1）の解が存在するためには，各 $t \in J \cap [t_1^*, \infty)$ に対して，$A(t)=B(t)D(t)$ となる $r \times n$ マトリクス $D(t)$ が存在することが必要十分であるともいえる。

さて，（6・1）の解が存在するならば，一般化逆マトリクスの理論に従って[14]，解の一般形は各 $t \in J \cap [t_1^*, \infty)$ において

$$u(t-h) = -B^+(t)A(t)x_1 + \left(I - B^+(t)B(t)\right)w(t), \quad \forall w(t) \in E^r \tag{6.2}$$

と表わせる。ここに $B^+(t)$ は $B(t)$ の擬似逆マトリクスを表わす。特に，各 $t \in J \cap [t_1^*, \infty)$ において $\mathrm{rank}\, B(t) = r < n$ となる場合には，$(B^T(t)B(t))^{-1}$ が存在しかつ $B^+(t)B(t) = I$ となる。ここで，$B^T(t)$ は $B(t)$ の転置を意味する。従って，$B^+(t) = (B^T(t)B(t))^{-1}B^T(t)$ は $B(t)$ の左逆マトリクスを表わすから，（6・2）はつぎのように簡単化された表現になる。

$$u(t-h) = -\left(B^T(t)B(t)\right)^{-1}B^T(t)A(t)x_1 \tag{6.3}$$

さらに，各 $t \in J \cap [t_1^*, \infty)$ において $\mathrm{rank}\, B(t) = r = n$ となる場合には，$B^+(t)B(t) = I$ かつ $B(t)B^+(t) = I$ となるから，$B^+(t) = B^{-1}(t)$ である。よって，この場合には（6・2）は

$$u(t-h) = -B^{-1}(t)A(t)x_1 \tag{6.4}$$

と表現される。

以上のことをつぎの定理にまとめておく。

定理6.1 定理5.1の仮定に加えて，各 $t \in J \cap [t_1^*, \infty)$ で $A(t)=B(t)D(t)$ となる $r \times n$ マトリクス $D(t)$ が存在するものとする。このとき，最短時間整定問題に対する最適制御が存在し，それは（5・8）と（6・2）で表わせる。ただし，$t = t_1^*$ において前式を後式に切換えるものとする。特に，各 $t \in J \cap [t_1^*, \infty)$ で $\mathrm{rank}\, B(t) = r < n$ または $\mathrm{rank}\, B(t) = r = n$ の場合，（6・2）はそれぞれ（6・3）または（6・4）のように表現される。

なお，要求されている状態 x_1 が $0 \in E^n$ である場合には，到達後の制御は明らかに全ての $t \in [t_1^*, \infty)$ で $u(t-h) = 0 \ (\in E^r)$ とすればよい。しかし，$x_1 \neq 0$ の場合には一般に上記のごとく，到達後の制御の計算が必要となる。

7. 例　題

人工衛星の姿勢を地上から遠隔制御する問題では，その一軸の制御系の最も単純化した数学的モデルとして

$$\ddot{e}(t) = u(t-h), \quad t \geq 0$$

を用いる。この系を例として，最短時間制御問題に対する解法の手順を示しておく。$e(t) = x_1(t)$，$\dot{e}(t) = x_2(t)$ とおくと，上式に対応する（2・2）の各記号は

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$v(t) = \begin{cases} u(t-h), & t \geq h \\ \phi(t-h), & h \geq t \geq 0 \end{cases}$$

を表わす。従って，この系の状態遷移マトリクス $F(t, \tau)$ は

$$F(t, \tau) = F(t-\tau) = \begin{bmatrix} 1 & t-\tau \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

となる。初期点を $x_0 = [x_{01}, x_{02}]^T \ (\neq 0)$，遅れの初期状態を $\phi(\cdot) = \{0\}$ および要求点を $x_1 = [0, 0]^T$ とするならば，（3・2）と（3・3）は任意の $t_1 > h$ に対して

$$c = -F(t_1)x_0 = -\begin{bmatrix} x_{01} + x_{02}t_1 \\ x_{02} \end{bmatrix}$$

$$H(s) = F(t_1 - s - h)B = \begin{bmatrix} t_1 - s - h \\ 1 \end{bmatrix},$$

$$t_1 - h \geq s \geq 0$$

を表わす。従って，これらは定理5.2の（特に完全独立性の）仮定を満している。以上のもとで，x_0 を最短時間で原点に移す最適制御を求めてみる。

(i)制御の大きさが $|u(t)| \leq K$ で拘束されている場合は，（3・4）で $q = \infty$ とした場合に相当する。従ってまず，（5・9）の左辺を $p = 1$ かつ t_1^* を任意の $t_1 \ (> h)$ とした最小値問題

$$\min_{\eta \in M} \int_0^{t_1 - h} |\eta_1(t_1 - s - h) + \eta_2| \, ds$$

ただし

$$M=\{\eta=(\eta_1,\ \eta_2)|\eta_1(x_{01}+x_{02}t_1)+\eta_2x_{02}=-1\}$$

を解く。この問題の解は解析的に求めえるが，その表現は非常に煩雑である。ここでは初期点を $x_0=[\ x_{01}\ ,\ 0\ ]$ および $x_0=[\ 0,\ \ x_{02}\ ]$ と指定した場合の解を示すにとどめる。

$x_{01}\neq0$，$x_{02}=0$ の場合，この問題の解 $\eta^0(t_1)$ は容易に

$$\eta_1^0(t_1)=-\frac{1}{x_{01}}\ ,\quad \eta_2^0(t_1)=\frac{t_1-h}{2x_{01}}$$

と求まり，その最小値 $\lambda^{-1}(t_1)$ は次式で与えられる。

$$\lambda^{-1}(t_1)=\frac{(t_1-h)^2}{4|x_{01}|}$$

これを（５・９）の左辺の値とすれば，最短時間 t_1^* は

$$t_1^*=h+2\sqrt{|x_{01}|/K}$$

と求まり，従って $\eta^0(t_1^*)$ と $\eta_2^0(t_1^*)$ が決定される。こうして，最適制御は（５・８）によりつぎのように表わせる。

$$u^*(s)=K\,\mathrm{sign}[\eta_1^0(t_1^*)(t_1^*-s-h)+\eta_2^0(t_1^*)],$$
$$0\leq s\leq t_1^*-h$$

$x_{02}\neq0$，$x_{01}=0$ の場合，上記問題の解と最小値は多少の計算の後，つぎのように求まる。

$$\eta_1^0(t_1)=\frac{-1}{x_{02}}\sqrt{\frac{2}{t_1^2+h^2}}\ ,\quad \eta_2^0(t_1)=\frac{1}{x_{02}}\left(t_1\sqrt{\frac{2}{t_1^2+h^2}}-1\right)$$

$$\lambda^{-1}(t_1)=\frac{1}{|x_{02}|}\left(\sqrt{2(t_1^2+h^2)}-t_1-h\right)$$

先と同様にして，最短時間 t_1^* は

$$t_1^*=h+\frac{|x_{02}|}{K}+\sqrt{\frac{2|x_{02}|}{K}\left(\frac{|x_{02}|}{K}+2h\right)}$$

と求まり，$\eta^0(t_1^*)$ と $\eta_2^0(t_1^*)$ が決定される。これらの数値のもとで，最適制御は先のものと同形である。

(ii)制御エネルギが　$\int_0^{t_1-h}|u(t)|^2dt\leq E$　で拘束されている場合は，$\left\{\int_0^{t_1-h}|u(t)|^2dt\right\}^{1/2}\leq E^{1/2}=K$ と変形できるから，（３・４）で $q=2$ とした場合に相当している。従って，つぎの最小値問題をまず解くことになる。

$$\min_{\eta\in M}\left\{\int_0^{t_1-h}|\eta_1(t_1-s-h)+\eta_2|^2ds\right\}^{1/2}$$

ここで，Mは(i)のものと同一である。この問題の解も解析的に求めえるが，つぎの場合の解のみを示すにとどめる。

$x_{01}\neq0$，$x_{02}=0$の場合，この問題の解 $\eta^0(t_1)$ は容易に

$$\eta_1^0(t_1)=-\frac{1}{x_{01}}\ ,\quad \eta_2^0(t_1)=\frac{t_1-h}{2x_{01}}$$

と求まり，その最小値 $\lambda^{-1}(t_1)$ は次式で与えられる。

$$\lambda^{-1}(t_1)=\frac{(t_1-h)^{3/2}}{2\sqrt{3}|x_{01}|}$$

これを（５・９）の左辺の値とすれば，最短時間 t_1^* は

$$t_1^*=h+\left(\frac{12x_{01}^2}{E}\right)^{1/3}$$

と求まり，従って $\eta_1^0(t_1^*)$ と $\eta_2^0(t_1^*)$ が決定される。こうして，最適制御は（５・８）によりつぎのように表わせる。

$$u^*(s)=E\{\eta_1^0(t_1^*)(t_1^*-s-h)+\eta_2^0(t_1^*)\}\ ,$$
$$0\leq s\leq t_1^*-h$$

$x_{02}\neq0$，$x_{01}=0$ の場合，上記問題の解と最小値は若干の計算を要するが，つぎのように求まる。

$$\eta_1^0(t_1)=-\frac{3(t_1+h)}{2x_{02}(t_1^2+t_1h+h^2)}\ ,$$

$$\eta_2^0(t_1)=\frac{(t_1-h)(t_1+2h)}{2x_{02}(t_1^2+t_1h+h^2)}$$

$$\lambda^{-1}(t_1)=\frac{(t_1-h)^{3/2}}{2|x_{02}|(t_1^2+t_1h+h^2)^{1/2}}$$

従ってこの場合，最短時間 t_1^* はつぎの代数方程式を解くことにより求まる。

$$t_1^3-(3h+a)t_1^2+h(3h-a)t_1-h^2(h+a)=0$$

ただし

$$a=4x_{02}^2/E$$

こうして t_1^* が定まるから，$\eta_1^0(t_1^*)$ と $\eta_2^0(t_1^*)$ が決定される。これらの数値のもとで，最適制御は先のものと同形である。

以上，最短時間制御の求め方を示したが，最小制御ノルム問題を解く手順はもっと簡単になる。この問題を解くことは指定された時刻 t_1 において（４・１０）の右辺の最小値問題の解を見出すことに帰結されるが，その解は丁度上で中間的に求めた各 $\eta^0(t_1)$ そのものである。この値のもとで，最適制御は（４・１３）から求まる。また，最短時間整定問題の最適解は上記最短時間制御を $t=t_1^*$ で $u(s)=0$，$s\geq t_1^*-h$ なる制御に切換えたものになる。

8. 最小値問題（4・10）と（5・9）の解法

最小制御ノルム問題と最短時間制御問題はそれぞれ，n 次元空間における最小値問題（４・１０）と（５・９）の解

を見出す問題に帰着される。本章ではこれらの問題を解く一般的な方法をいくつか述べておく。

8.1 最小値問題(4・10)の解法

記述を簡単化するために，与えられた $t_1 > t_0 + h$ および $1 \leq p < \infty$ に対して，E^n の上の関数

$$\theta(\eta) = \left\{ \int_{t_0}^{t_1-h} \sum_{k=1}^{r} \left| \sum_{i=1}^{n} \eta_i h_{ik}(s) \right|^p ds \right\}^{1/p}$$

$$\rho(\eta) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i c_i - 1$$

を定義する。

(i)まず，$1 < p < \infty$ とする。この場合，定理4.1の仮定のもとで，$\theta(\eta)$は厳密に凸関数である。$\rho(\eta)$はアフィン関数であるから，よく知られている凸計画問題の理論に従って[15]，最小値問題(4・10)は一意な解を持つ。さらに，任意の $\eta \in E^n$ において $\theta(\eta)$が微分可能であり，$\rho(\eta)$が拘束資格条件を満たすから，η^0 が最小値問題(4・10)の解であることと，η^0 と λ^0 ($\in E$)が

$$\nabla\theta(\eta) + \lambda\nabla\rho(\eta) = 0 \quad , \ \rho(\eta) = 0^{\text{注1)}} \tag{8.1}$$

なる方程式系の解であることとは同等である。従って，系(8・1)を解析的に解くことができるならば，最小値問題(4・10)の解が求まる。

低次元の問題ではこの解法が有力であるが，一般的には非線形計画問題の直接解法として知られる手法によって，逐次的に解を求めることが必要である。$y = (\eta, \lambda) \in E^{n+1}$ として，$L(y) = L(\eta, \lambda) = \theta(\eta) + \lambda\rho(\eta)$ なる関数(ラグランジアン)を定義すると，系(8・1)は等価的に

$$\nabla L(y) = 0^{\text{注2)}} \tag{8.2}$$

と表わせる。最適勾配法を用いる場合[16]，(8・2)を満足する解を得るためのアルゴリズムはつぎの通りである。

ステップ0　$\overset{0}{y} \in E^{n+1}$　を定める。
ステップ1　$i = 0$ とおく。
ステップ2　$\nabla L(\overset{i}{y})$ を計算する。
ステップ3　$\nabla L(\overset{i}{y}) = 0$　なら停止。そうでなければステップ4に行く。
ステップ4　$L(\overset{i}{y} - t_i \nabla L(\overset{i}{y})) = \min_{t>0} L(\overset{i}{y} - t\nabla L(\overset{i}{y}))$ を満たす正数 t_i を計算する。
ステップ5　$\overset{i}{y} = \overset{i}{y} - t_i \nabla L(\overset{i}{y})$とおいて，ステップ2に行く。

より良い収束速度を必要とする場合には，擬似ニュートン法として知られる種々の手法を使用する[16]。

(ii)$p = 1$ の場合には，$\theta(\eta)$は凸関数ではあるが，厳密に凸ではない。このため，最小値問題(4・10)の解は必ずしも一意ではなく，一般に凸集合を成す。また明らかに，$\theta(\eta)$は各 $\eta \in E^n$ で微分可能とはかぎらない。しかし，最小値問題(4・10)の解 η^0 で $\theta(\eta)$が微分可能ならば，(i)で述べた解法が適用できる[15]。

一般的には前もって，解 η^0 での $\theta(\eta)$の微分可能性は不明である。このため，$p = 1$ に対する最小値問題(4・10)には微分を必要としない解法を用意しておく必要がある。ラグランジアン

$$L(\eta, \lambda) = \theta(\eta) + \lambda\rho(\eta), \quad \eta \in E^n, \ \lambda \in E$$

について，(a)Lはηとλに関して連続，(b)各λに対してLはηの凸関数，(c)各ηに対してLはλの凹関数である。従って，よく知られている鞍部点に関する定理により[17]，

$$L(\eta^\circ, \lambda^\circ) = \min_{\eta \in E^n} \max_{\lambda \in E} L(\eta, \lambda) = \max_{\lambda \in E} \min_{\eta \in E^n} L(\eta, \lambda) \tag{8.3}$$

を満足する対(η°, λ°)が存在して，η° は最小値問題(4・10)の一つの解となる。ここで上式の第2の等号に関連して，

$$L^*(\lambda) = \min_{\eta \in E^n} L(\eta, \lambda)$$

なる関数(双対関数)を定義する。いま，ある$\bar{\lambda}$に対して，

$$L^*(\bar{\lambda}) = \theta(\bar{\eta}) + \bar{\lambda}\rho(\bar{\eta})$$

となる$\bar{\eta}$が求まったとするならば，任意のλに対して

$$L^*(\lambda) \leq \theta(\bar{\eta}) + \lambda\rho(\bar{\eta})$$

が成立する。従って，次式が得られる。

$$L^*(\lambda) - L^*(\bar{\lambda}) \leq (\lambda - \bar{\lambda})\rho(\bar{\eta}) \tag{8.4}$$

上式から明らかなように，$\rho(\bar{\eta}) = 0$ならば，対($\bar{\eta}$, $\bar{\lambda}$)は(8・3)を満足している。また$L^*(\lambda)$が凹関数であることに注意すると，(8・4)から，$\rho(\bar{\eta}) > 0$ ($\rho(\bar{\eta}) < 0$)ならば，(8・3)を満たすλ° は$\bar{\lambda}$より大きい(小さい)値であることがわかる。以上の事実にもとづいた(8・3)の解を得るアルゴリズムは概ねつぎのようである。

ステップ0　$\overset{0}{\lambda} \in E$を定める。
ステップ1　$i = 0$とおく。
ステップ2　$L^*(\overset{i}{\lambda}) = \theta(\overset{i}{\eta}) + \overset{i}{\lambda}\rho(\overset{i}{\eta}) = \min_{\eta \in E^n} L(\eta, \overset{i}{\lambda})$ なる$\overset{i}{\eta}$を計算する(関数の微分を必要と

注1) $\nabla\theta(\eta) = \left(\frac{\partial\theta}{\partial\eta_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial\theta}{\partial\eta_n}\right)^T$,

$\nabla\rho(\eta) = \left(\frac{\partial\rho}{\partial\eta_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial\rho}{\partial\eta_n}\right)^T$

注2) $\nabla L(y) = \left(\frac{\partial L}{\partial\eta_1}, \cdots\cdots, \frac{\partial L}{\partial\eta_n}, \frac{\partial L}{\partial\lambda}\right)^T$

しない最小化の繰返し法，例えば Powell 法を用いる(16)。

ステップ3　$\rho(\overset{i}{\eta})=0$ ならば停止。そうでなければステップ4に行く。

ステップ4　$\mathrm{sign}\,\rho(\overset{i}{\eta})$ にもとづく区間縮少法等により $\overset{i}{\lambda}$ を改訂し，それを改めて $\overset{i}{\lambda}$ とおいてステップ2に行く。

8.2 最小値問題（5・9）の解法

7章の例題の如く，最小値問題（5・9）を解析的に解きうる場合もあるが，一般的には逐次的に解を得る，いわゆる直接解法を用意しておかなければならない。以下に，このための有力な手法の一つを述べる(11)。

記述の簡単化のために，（5・9）の左辺に関連して，$\eta\in E^n$ と $t_1>t_0+h$ との関数

$$\theta(\eta,t_1)=\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_{ik}(s)\right|^p ds\right\}^{1/p}$$

を定義する。ここに，$1\leq p<\infty$ は与えられた定数である。η（または t_1）をパラメータと考える場合には，$\theta(t_1;\eta)$（または $\theta(\eta;t_1)$）なる記号を用いる。このとき，拘束条件 $\rho(\eta)=0$ のもとで $\theta(\eta;t_1)$ を最小にする問題は，与えられた t_1 に対する最小値問題（4・10）を意味する。また定理5.2の仮定のもとでは，任意の $\eta\neq 0$ に対して，(a) $\lim_{t_1\to t_0+h}\theta(t_1;\eta)=0$，(b) $\lim_{t_1\to\infty}\theta(t_1;\eta)=\infty$，(c) $\theta(t_1;\eta)$ は t_1 とともに連続かつ厳密に単調増大する。

この $\theta(t_1;\eta)$ に関する性質により，任意に定めた $\bar{\eta}\in M$ に対して，

$$\theta(\bar{t}_1;\bar{\eta})=1/K$$

を満足する t_1 が必ず一意的に求まる。もし

$$\min_{\eta\in M}\theta(\eta;\bar{t}_1)=\theta(\bar{\eta};\bar{t}_1)=1/K$$

であるならば，対 $(\bar{\eta},\bar{t}_1)$ は明らかに最小値問題（5・9）の解である。もしそうでなければ，$\tilde{\eta}\in M$ が存在して，

$$\theta(\tilde{\eta};\bar{t}_1)=\min_{\eta\in M}\theta(\eta;\bar{t}_1)<1/K$$

となる。再び $\theta(t_1;\eta)$ の性質によって，

$$\theta(\tilde{t}_1;\tilde{\eta})=1/K$$

を満足する $\tilde{t}_1>\bar{t}_1$ が求まる。以上の過程を繰返すことにより，単調に増大する時刻の列 $\bar{t}_1<\tilde{t}_1<\cdots$ が発生する。この列が有限回または無限回で収束することは明らかである。従って，最小値問題（5・9）の解はつぎのアルゴリズムによって求めることができる。

ステップ0　$\overset{0}{\eta}\in M$ を定める。

ステップ1　$i=0$ とおく。

ステップ2　$\theta(\overset{i}{t}_1;\overset{i}{\eta})=1/K$ を満たす $\overset{i}{t}_1$ を計算する。

ステップ3　$\theta(\overset{i+1}{\eta};\overset{i}{t}_1)=\min_{\eta\in M}\theta(\eta;\overset{i}{t}_1)$ を満たす $\overset{i+1}{\eta}$ を計算する（これには8.1節で述べた解法を適用する）。

ステップ4　$\theta(\overset{i+1}{\eta};\overset{i}{t}_1)=1/K$ ならば停止。そうでなければステップ5に行く。

ステップ5　$i=i+1$ とおいて，ステップ2に行く。

9. 最適制御の確定と一意性について

これまで，各々の問題に対する解法を明確にする目的から，敢えて議論を避けた事項がある。一つは先にえた表現によって最適制御が確定するか否かの問題であり，もう一つは確定した最適制御の一意性についてである。前者は集合

$$\Omega(t_1)=\bigcup_{k=1}^{r}\left\{s\in K_2\,\middle|\,\sum_{i=1}^{n}\eta_i^0(t_1)h_{ik}(s)=0\right\}$$

の測度に関連している。本章ではこれら2つの事項を考察することによって，4章と5章の定理をより完結した表現に改める。

(i) $1<p<\infty$ とする。この場合，8章で述べたように，最小値問題（4・10）と（5・9）の解は一意に定まる。また，（4・13）と（5・8）から明らかなように，$\Omega(t_1)$ と $\Omega(t_1^*)$ の測度が零であるか否かに拘わらず，殆ど到る所で $u_k^*(\cdot)$，$k=1,\cdots,r$ の値が確定する。従って，定理4.1と5.1より強いつぎの結論が得られる。

定理9.1　$1<p<\infty$ ならば，定理4.1の仮定のもとで，最小制御ノルム問題は殆ど到る所で一意的に定まる最適制御（4・13）を持つ。

定理9.2　$1<p<\infty$ ならば，定理5.1の仮定のもとで，最短時間制御問題は殆ど到る所で一意的に定まる最適制御（5・8）を持つ。ただし，最短時間は（5・6）で与えられる。

定理9.3　$1<p<\infty$ ならば，定理5.2の仮定のもとで，最短時間制御問題は殆ど到る所で一意的に定まる最適制御（5・8）を持つ。ただし，最短時間は（5・7）から一意的に定まる。

(ii) $p=1$ とする。この場合には8章で述べたように，最小値問題（4・10）と（5・9）の解は必ずしも一意に定まらない。もし相異なる解 $\bar{\eta}^0(t_1)$ と $\tilde{\eta}^0(t_1)$ が存在するならば，$0\leq\lambda\leq 1$ なる全ての λ に対して，

$$\eta^0(t_1)=\lambda\bar{\eta}^0(t_1)+(1-\lambda)\tilde{\eta}^0(t_1)$$

もまた解となる。これらの解は全て同一の最小値を達成するのであるから，$0 \leq \lambda \leq 1$なる任意のλに対して，

$$\int_{t_0}^{t_1-h} \sum_{k=1}^{r} |\lambda \sum_{i=1}^{n} \bar{\eta}_i^0(t_1) h_{ik}(s) + (1-\lambda) \sum_{i=1}^{n} \tilde{\eta}_i^0(t_1) h_{ik}(s)| ds$$

$$= \lambda \int_{t_0}^{t_1-h} \sum_{k=1}^{r} | \sum_{i=1}^{n} \bar{\eta}_i^0(t_1) h_{ik}(s)| ds + (1-\lambda) \int_{t_0}^{t_1-h} \sum_{k=1}^{r} | \sum_{i=1}^{n} \tilde{\eta}_i^0(t_1) h_{ik}(s)| ds$$

が成立している。上式を満すための必要十分条件は

$$\mathrm{sign}[\sum_{i=1}^{n} \bar{\eta}_i^0(t_1) h_{ik}(s)] = \mathrm{sign}[\sum_{i=1}^{n} \tilde{\eta}_i^0(t_1) h_{ik}(s)],$$

$$k = 1, \cdots, r$$

である。以上のことは任意の相異なる解についていえる。従って，最小値問題（4•10）と（5•9）の任意の解に対して，$p=1$とした（4•13）と（5•8）で表わされる最適制御の値はそれが確定する所全てで一意に定まる。

さて，任意に定めたt_1（$> t_1 + h$）に対して，$\Omega(t_1)$の測度が零となる場合を考える。この場合には形式的に$p=1$とした（4•13）と（5•8）において，$u_k^*(\cdot)$，$k=1, \cdots, r$の値は殆ど到る所で確定する。よって，先に定義した完全独立性の仮定のもとでは$\Omega(t_1)$の測度が零となることに注意すれば，つぎの結論が得られる。

定理9.4 定理4.1の線形独立の仮定を強めて完全独立とすれば，$p=1$に対する最小制御ノルム問題は殆ど到る所で一意的に定まる最適制御（4•13）を持つ。

定理9.5 定理5.2の仮定のもとで，$p=1$に対する最短時間制御問題は殆ど到る所で一意的に定まる最適制御（5•8）を持つ。ただし，最短時間は（5•7）から一意的に定まる。

つぎに，指定されたt_1に対して，$\Omega(t_1)$の測度が零でない場合を考える。この場合には少なくとも1つのk（$k=1, \cdots, r$）に対して，測度が零でない区間$I_k \subset K_2$が存在し，$p=1$とした（4•13）の$u_k^*(\cdot)$の値は$K_2 \setminus I_k$（I_kのK_2に関する補集合）では確定するが，I_kでは不確定となる。

また，（5•6）から定まるt_1^*に対しても同様のことがいえる。線形独立性の仮定のもとでは，$\Omega(t_1)$と$\Omega(t_1^*)$の測度が必ずしも零とは限らないから，$p=1$に対する定理4.1と5.1の内容をもっと詳しく記述するならばつぎのようである。

定理9.6 定理4.1の仮定のもとで，$\Omega(t_1)$の測度が零ならば，$p=1$に対する最小ノルム制御問題は殆ど到る所で一意的に定まる最適制御（4•13）を持つ。$\Omega(t_1)$の測度が零でなければ，この最適制御は$K_2 \setminus \Omega(t_1)$の上では一意的に定まるが，$\Omega(t_1)$の上ではその符号が不確定になる。

定理9.7 定理5.1の仮定のもとで，（5•6）から定まる最短時間t_1^*における$\Omega(t_1^*)$の測度が零ならば，$p=1$に対する最短時間制御問題は殆ど到る所で一意的に定まる最適制御（5•8）を持つ。$\Omega(t_1^*)$の測度が零でなければ，この最適制御は$[t_0, t_1^* - h] \setminus \Omega(t_1^*)$の上では一意的に定まるが，$\Omega(t_1^*)$の上ではその符号が不確定になる。

今一度，つぎのことに注意しておく。定理4.1と5.1はそれぞれ（4•13）と（5•8）で表現できる最適制御の存在を保証している。一方，上の2つの定理は本解法のみによっては，その最適制御の符号を一意的に定めえない区間が存在する場合があることを示している。このような場合，その区間における最適制御の符号を決定するためには更に詳しい考察を必要とする。

10. 補足事項

本稿の主題から多少それるが，今までの議論を補足する意味で必要と思われる事項をいくつか取り上げ，以下に若干の説明を加えておく。

10.1 系（2・2）の可制御性について

任意の完全初期状態$z(t_0)$と任意の点$x_1 \in E^n$に対して，系（2•2）の状態を$x_0 = x(t_0)$から$x_1 = x(t_1)$に移すことのできる$[t_0, t_1 - h]$の上の制御関数$u(\cdot)$が存在するとき，系（2•2）は$[t_0, t_1]$において完全可制御であるという。この定義と（2•5）から明らかなように，系（2•2）が$[t_0, t_1]$において完全可制御となるためには$t_1 > t_0 + h$でなければならない。また，$z(t_0)$とx_1を任意に定めることは，（3•2）で定義される$c \in E^n$を任意に定めることを意味する。以上のことに注意すれば，系（2•2）が$[t_0, t_1]$において完全可制御であるということは，

(i) $t_1 > t_0 + h$かつ

(ii) 任意の$c \in E^n$に対して，（3•1）を満足する制御関数$u(\cdot) \in L_q(K_2, E^r)$が存在する。

ことと同等であることがわかる。

条件(ii)は，$T(u(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1-h}H(s)u(s)ds$ により作用素Tを定義するとき，$T(L_q(K_2,E^r))=E^n$ となること，従って，

(iii)各要素が(4・3)で定義される与えられた$L_p(K_2, E^r)$ のn個の元$h^1(\cdot), \cdots, h^n(\cdot)$ が線形独立である。

ことと等価である。よって，前章までに用いてきた(i)かつ(iii)の表現の仮定は等価的に，系(2・2)の$[t_0, t_1]$における完全可制御性の仮定を意味している。

またよく知られているように，条件(iii)は$h^1(\cdot), \cdots, h^n(\cdot)$のグラム行列式が正であるという数量的表現に同等である。すなわち，

$$\det\begin{bmatrix}(h^1(\cdot),h^1(\cdot)) & \cdots\cdots & (h^1(\cdot),h^n(\cdot))\\ \vdots & & \vdots \\ (h^n(\cdot),h^1(\cdot)) & \cdots\cdots & (h^n(\cdot),h^n(\cdot))\end{bmatrix}>0$$

ここに，

$$(h^i(\cdot),h^j(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}h_{ik}(s)h_{jk}(s)ds\ ,$$

$$i, j=1, \cdots, n$$

行列式の理論に従うと，(3・3)，(4・3)と上式により，つぎの条件は全て条件(iii)に等価である。

(iv) $\det\int_{t_0}^{t_1-h}F(t_1, s+h)B(s+h)B^T(s+h)\times F^T(t_1, s+h)ds>0$

(v) $\mathrm{rank}\int_{t_0}^{t_1-h}F(t_1, s+h)B(s+h)B^T(s+h)\times F^T(t_1, s+h)ds=n$

(vi) $\int_{t_0}^{t_1-h}F(t_1, s+h)B(s+h)B^T(s+h)\times F^T(t_1, s+h)ds$ は正定である。

ついでながら，条件(iii)をより強めたつぎの条件

(iii)′ 各要素が(4・3)で定義される与えられた$L_p(K_2, E^r)$ のn個の元$h^1(\cdot), \cdots, h^n(\cdot)$が任意の$t_1 \varepsilon (t_0+h, \infty)$において完全独立である。

を満たすとき，系(2・2)は正規(normal)であるということも多い(18)。

10.2 可達集合とその幾何学的性質について

本節ではまず，1章で導入したE^n の集合C_α に関する議論を少しく補足する。補題1.1の仮定のもとでは，全ての$\alpha>0$に対してつぎのことがいえる。C_α はその境界上の点の集合∂C_αを含み，その内点の集合 int C_α には原点が属している。さらに，C_α は凸かつ有界であるから，∂C_α の全ての点でC_α に対する支持超平面が存在する。この支持超平面の観点から分類すると，∂C_α の各点はつぎの4つのタイプのいずれかで特徴付けることができる。

タイプ1　点$w\varepsilon\partial C_\alpha$での支持超平面$P_w$ は一意的に定まり，$C_\alpha\cap P_w=\{w\}$（一点wのみの集合）となっている。

タイプ2　点$x\varepsilon\partial C_\alpha$での支持超平面$P_x$ は一意的に定まるが，$C_\alpha\cap P_x$にはx以外の∂C_α の点が含まれる。

タイプ3　点$y\varepsilon\partial C_\alpha$での支持超平面は一意的に定まらないが，$C_\alpha\cap P_y=\{y\}$ となる支持超平面P_y が必ず存在する。

タイプ4　点$z\varepsilon\partial C_\alpha$での支持超平面は一意的に定まらず，$C_\alpha\cap P_z=\{z\}$となる支持超平面$P_z$ も存在しない。

幾何学的な言葉でいうとつぎのようである(18)。点$v\varepsilon\partial C_\alpha$ で支持超平面が一意に定まる（定まらない）ことは，vにおいて∂C_α が微分可能（微分不可能）であること，従ってC_α がvにおいて滑らかな（尖った）形状をしていることを意味している。また，点$v\varepsilon\partial C_\alpha$での支持超平面が$C_\alpha$ を一点vで支持できる（支持できない）ということは，C_α がvにおいて厳密に凸な（平らな）形状をしていることを意味している注)。例えば，3次元空間の閉球の表面は全てタイプ1の点である。閉立方体の表面にはタイプ1の点はなく，6面内に属する点は全てタイプ2の点であり，12稜内に属する点は全てタイプ4の点であり，8頂点は全てタイプ3の点である。

1章での一般的議論は∂C_α の任意の点で必ず支持超平面が存在するという事実のみにもとづいているが，問題が具体的に与えられると，ある程度までC_α の幾何学的形状を知ることができる。

最小制御ノルム問題の場合，次式で定義する集合が上記のC_α を表わしている。

$$R(\alpha;t_0, t_1)=\left\{\int_{t_0}^{t_1-h}H(s)u(s)ds \,\middle|\, u(\cdot)\varepsilon L_q(K_2, E^r),\ \|u(\cdot)\|\leq\alpha\right\}$$

これは与えられた時刻t_0, t_1 に対してαを指定し，$z(t_0)=0$ と考えた場合，系(2・2)が定義の条件を満す制御関数によって到達しえる全ての点の集合（可達集合）を表わしている。勿論，定理4.1の仮定のもとで，

注) n次元空間で"尖った"および"平らな"形状を厳密に定義するには，何次元的に尖っているか，何次元的に平らかをいう必要がある。ここでは便宜的に上の表現を用いた。

$R(\alpha;t_0,t_1)$ は C_α に関して示した全ての性質を有するが，さらに $\partial R(\alpha;t_0,t_1)$ が上記のどのタイプの点から構成されているかを調べてみる。

任意の点 $c\varepsilon\partial R(\alpha;t_0,t_1)$ での $R(\alpha;t_0,t_1)$ に対する支持超平面の一つ P に対して，その外向き法線ベクトル η が一義的に定まる。一方，1章での議論から明らかなように，この η はここで固定した点 c に対する最小値問題（4・10）の一つの解であり，その最小値 λ^{-1} は α^{-1} となっている。従って，P が一意に定まるか否かはそれに対応した最小値問題（4・10）の解が一意に定まるか否かによって判定することができる。また，$R(\alpha,t_0,t_1)$ を一点 c で支持できる超平面が存在するか否かはつぎのようにして判定できる。いま，作用素 $T:L_q(K_2,E^r)\to E^n$ を

$$T\big(u(\cdot)\big)=\int_{t_0}^{t_1-h}H(s)u(s)ds$$

によって定義する。T は線形連続であり，$L_q(K_2,E^r)$ と E^n はともに F-空間であり，10.1節の議論にもとづき T は $L_q(K_2,E^r)$ を E^n の上へ写像する。従って，関数解析の理論（interior mapping principle）により[9]，$\{u(\cdot)\varepsilon L_q(K_2,E^r)\,|\,\|u(\cdot)\|<\alpha\}$ なる制御関数は $\mathrm{int}\,R(\alpha;t_0,t_1)$ の点しか達成できず，$\{u(\cdot)\varepsilon L_q(K_2,E^r)\,|\,\|u(\cdot)\|=\alpha\}$ なる制御関数のみが $\partial R(\alpha;t_0,t_1)$ の点を達成する。任意の点 $c\varepsilon\partial R(\alpha;t_0,t_1)$ を達成するこの族に属する制御関数の表現は，4章の議論に従って与えられた点 c に対する最小制御ノルム問題を解くことにより求まり，（4・13）のように書かれる。従って，もし $R(\alpha;t_0,t_1)$ を一点 c で支持できる超平面が存在しなければ，（4・13）の表現を確定しえない測度が零でない K_2 の部分区間が存在しなければならない。このことはまた，（4・13）の表現が殆ど到る所の K_2 において確定するならば，$R(\alpha;t_0,t_1)$ を一点 c で支持できる超平面が存在することを意味している。

以上のことと8～9章の結果を総合し，10.1節で定義した言葉を使用すれば，つぎの定理が得られる。

定理 10.1 $1<p<\infty$ のとき，系（2・2）が $[t_0,t_1]$ で完全可制御であれば，任意の $\alpha>0$ に対して，可達集合の境界は全てタイプ1の点から成っている。

定理 10.2 $p=1$ のとき，系（2・2）が正規であれば，任意の $\alpha>0$ に対して，可達集合の境界は一般にタイプ1とタイプ3の点から成っている。

定理 10.3 $p=1$ のとき，系（2・2）が $[t_0,t_1]$ で完全可制御であれば，任意の $\alpha>0$ に対して，可達集合の境界は一般にタイプ1～4の点から成っている。

平たくいえば，定理10.1の可達集合は滑らかで厳密に凸な形状をしており，定理10.2のそれは厳密に凸だが滑らかな所と尖った所があり，定理10.3のそれには平らな所，平らでないが滑らかな所，尖った所がある。

可達集合の観点からいうと，最小制御ノルム問題の解はつぎのように幾何学に説明される。α を零から増大していくと，与えられた点 c を始めて可達集合の境界に含むような α の値が定まるが，それは丁度（4・10）の λ になっている。従って，$c\varepsilon\partial R(\lambda;t_0,t_1)$ であるから，c が $\partial R(\lambda;t_0,t_1)$ のタイプ1か3の点であれば，最適制御（4・13）は確定するが，タイプ2か4の点であれば，最適制御（4・13）を不確定にする K_2 の部分区間が存在する。

また，最短時間制御問題の場合には，可達集合を

$$R(t_1;t_0,K)=\Big\{\int_{t_0}^{t_1-h}H(s)u(s)ds\,|\,t_1>t_0+h,\ u(\cdot)\varepsilon L_q(K_2,E^r),\ \|u(\cdot)\|\le K\Big\}$$

で定義する。解が存在するためには $c\varepsilon R(t_1;t_0,K)$ となる t_1 が存在しなければならない。これは（5・5）を意味する。このとき，最短時刻 t_1^* に対して，$c\varepsilon\partial R(t_1^*,t_0,K)$ かつ $t_1<t_1^*$ ならば $c\notin R(t_1;t_0,K)$ となっている。これは（5・6）を意味する。可達集合の幾何学的形状に関しては上記と同様のことがいえる。

10.3 最大原理による解法との関係について

拘束条件 $|u_k(t)|\le K,\ k=1,\cdots,r,\ t\ge t_0$ のもとで，（2・1）～（2・2）で記述される制御系の状態を最短時間でもって，$x(t_0)=x_0$ から $x(t_1)=x_1$ に移すことのできる最適制御は，最大原理を形式的に適用してつぎのように求まる[5]。

新しい座標

$$x_{n+1}(t)=\int_{t_0}^{t}dt$$

を導入すると，この問題に対するポントリャギン関数 P は

$$P=x_{n+1}(t_1)+(\nu,x(t_1)-x_1)$$

で与えられる。ここに，ν は n 次元ラグランジ乗数である。最大原理により，制御 $u(t)$ が P を最小にするための必要十分条件は，制御時間区間にわたり $u(t)$ に関してつぎのハミルトニアン H が最大となることである。

$$H=p_{n+1}(t)+\big(p(t),A(t)x(t)+B(t)u(t-h)\big)$$

従って，最適制御は次式で与えられる。

$$u(t-h)=K\,\mathrm{sign}\,p(t)B(t),\quad t\ge t_0+h \tag{10.1}$$

ただし，n 次元補助変数 $p(t)$ は境界条件

$$x(t_0)=x_0\ ,\ x(t_1)=x_1\ ,\ p(t_1)=-\nu \qquad (10.2)$$

のもとで，つぎの正準方程式から決定される。

$$\dot{p}(t)=-\partial H/\partial x=-p(t)A(t)\ ,\quad t\le t_1 \qquad (10.3)$$

$$\dot{x}(t)=\partial H/\partial p=A(t)x(t)+B(t)u(t-h)$$
$$t\ge t_0 \qquad (10.4)$$

（10・3）は$\dot{x}(t)=A(t)x(t)$の随伴方程式である。従って，微分方程式の理論と２章で導入した$n\times n$マトリクス$F(t,\ \tau)$に関してよく知られている性質により，（10・3）の解$p(t)$は次式で表わされる。

$$p(t)=p(t_1)F(t_1,\ t)$$
$$=p(t_0+h)F(t_0+h\ ,\ t_1)F(t_1,\ t) \quad (10.5)$$

こうして，最大原理にもとづく解法では最適制御（10・1）を決定するために，（10・2）～（10・4）で記述される２点境界値問題を満足する補助変数$p(t)$，従って（10・3）に対する初期値$p(t_0+h)$が決定されなければならない。しかし，最短時間t_1とラグランジ乗数νが未定であるから，この２点境界値問題を解くことは一般に困難を伴う。

一方，上記の制御問題は$p=1$の場合の最短時間制御問題であるから，本稿に与えた解法では最適制御が（4・3）と（5・8）により次式で与えられる。

$$u^*(s)=K\,\mathrm{sign}\,\eta^0(t_1^*)F(t_1^*,\ s+h)B(s+h)\ ,$$
$$s\ge t_0 \qquad (10.6)$$

ここに，t_1^*は最短時間であり，$\eta^0(t_1^*)$は$p=1$とした最小値問題（5・9）の解である。（10・5）を（10・1）に代入し，$s=t-h$とおくと容易にわかるように，

$$\eta(t_1^*)=p(t_0+h)F(t_0+h\ ,\ t_1^*)$$

なる関係のもとで，（10・1）と（10・6）は一致する。よって，$F(t,\ \tau)$の性質により，$\eta^0(t_1^*)$を決定することは上記の２点境界値問題に対する初期値$p(t_0+h)$を決定することと同等である。

このように，本稿に与えた解法では２点境界値問題を回避して，有限次元の最小値問題を解くことにより最適制御が決定される。さらに，最大原理による解法では最短時間を明確にしえなかったが，8.2節で与えたアルゴリズムでは最短時間も同時に決定される。

10.4 制御面積最小の制御問題について

３章で最小制御ノルム問題を記述した際，$p=\infty$の場合は除外した。$p=\infty$の場合は形式的に$q=1$，従って制御面積

$$\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}|u_k(t)|\,dt$$

を最小とする制御問題を考えることに相当している。除外した理由はよく知られているように$L_1\ (K_2,E^r)\subset L_\infty^*\ (K_2,E^r)$であるため[9]，１章で与えた$L$－問題に関する定理が適用できないからである。

いま２章の仮定を適当に強めて，与えられた$h^i(\cdot)\ (i=1,\cdots,\ n)$がバナッハ空間$C(K_2\ ,\ E^r)$に属するものとし，$u(\cdot)$はバナッハ空間$BV(K_2,E^r)$の元と考える。ここに，$C(K_2,E^r)$はノルムとして

$$\|h(\cdot)\|=\max_{t\in K_2}\max_{k=1,\cdots,r}|h_k(t)|$$

を持ち，K_2の上で定義されE^rに値をとる全ての連続関数の空間である。また，$BV(K_2,E^r)$はK_2の上で定義されE^rに値をとる全ての有界変動関数の空間で，つぎのノルムを持つ。

$$\|u(\cdot)\|=\underset{t\in K_2}{V_{ar}}\,u(t)$$
$$=sup\sum_{i=1}^{\nu}\sum_{k=1}^{r}|u_k(t_i)-u_k(t_{i-1})|$$

ここで，上限はK_2の全ての有限分割$t_0<t_1<\cdots<t_{\nu-1}<t_\nu=t_1-h$に関してとられる。よく知られているように，$C(K_2,E^r)$の共役空間$C^*(K_2,E^r)$と$BV(K_2,E^r)$は互に等距離的に同等であって，任意の$\ell\varepsilon C^*(K_2\ E^r)$は次式で表現される[9]。

$$\ell(h(\cdot))=\int_{t_0}^{t_1-h}\sum_{k=1}^{r}h_k(s)du_k(s)\ ,$$
$$\forall h(\cdot)\varepsilon C(K_2\ ,\ E^r)$$

ここで，積分はスチールチェス積分を意味する。

以上の準備のもとで，４章で記述したL－問題を考える。すなわち，与えられた$C(K_2,E^r)$のn個の元$h^i(\cdot)\ (i=1,\cdots,\ n)$が線形独立であり，与えられた$n$個の実数$c_i\ (i=1,\cdots,\ n)$が同時に０にならないものとして，（4・4）を満足しかつノルムが最小となる$C^*(K_2,E^r)$の元ℓを見出す問題を考える。この問題は明らかに，$q=1$の場合の最小制御ノルム問題に相当している。

定理1.1により，（4・4）が解を持つための必要十分条件は

$$\|\ell\|=\|u(\cdot)\|\ge\lambda$$

である。ここに，λは次式で与えられる。

$$\lambda^{-1}=\min_{\eta\in M}\max_{t\in K_2}\max_{k=1,\cdots,r}\left|\sum_{i=1}^{n}\eta_i h_{ik}(t)\right| \qquad (10.7)$$

ただし，Mは（4・7）で定義する。さらに定理1.2により，ℓが（4・4）の最小ノルム解であるための必要十分条件は，（10・7）の最小値を達成する任意の$\eta^\circ \epsilon M$に対して，次式が成立することである。

$$\int_{t_0}^{t_1-h} \sum_{k=1}^{r} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^0 h_{ik}(s)\, du_k(s) = [\underset{t\epsilon K_2}{V_{ar}}\, u(t)]/\lambda = 1 \tag{10.8}$$

上式から，$q=1$の場合の最適制御関数の表現がつぎのようにして得られる。

まず（10・7）の任意の解η°に対して，K_2の閉部分集合

$$T(\eta^0) = \left\{ t\epsilon K_2 \,\middle|\, \lambda^{-1} = \max_{t\epsilon K_2} \max_{k=1,\cdots,r} \left| \sum_{i=1}^{n} \eta_i^0 h_{ik}(t) \right| \right\}$$

を定義する。（10・8）の第一の等号が成立するためには，

$$\operatorname{sign} u_k(s) = \operatorname{sign}\left[\sum_{i=1}^{n} \eta_i^0 h_{ik}(s) \right], \quad k=1, \cdots, r, \quad s\,\epsilon\, K_2$$

であり，かつ

$$\underset{t\epsilon K_2 \setminus T(\eta^0)}{V_{ar}}\, u(t) = 0 ,$$

従って$u(\cdot)$は$K_2 \setminus T(\eta^\circ)$の上で一定でなければならない。このことから特に，ある時刻$\bar{t} \epsilon K_2$で$u(\bar{t})$が不連続になるならば，$\bar{t} \epsilon T(\eta^\circ)$がいえる。従って，$T(\eta^\circ)$が有限個の時刻から成っている場合には，$T(\eta^\circ)$に属する時刻においてのみ不連続となり区間的に一定値をとる関数で，不連続点において次式が成立するような$u^\circ(\cdot)$は（10・8）を満足している。

$$u_k^0(t_{kj}+0) - u_k^0(t_{kj}-0) = \gamma_{kj} \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^0 h_{ik}(t_{kj}), \quad k=1, \cdots, r$$

ここに，$\gamma_{kj}>0$, $t_{kj}\, \epsilon T(\eta^\circ)$, $j=1, \cdots, n_k$, n_kは$u_k^\circ(\cdot)$が不連続となる点の個数とする。γ_{kj}のkとjに関する総和は（10・8）の第二の等号により

$$\sum_{k=1}^{r} \sum_{j=1}^{n_k} \gamma_{kj} = \lambda$$

でなければならない。

ここで，デルタ関数$\delta(\cdot)$を形式的に用いて，つぎの関数$u^*(\cdot)$を定義する。

$$u_k^*(t) = \sum_{j=1}^{n_k} \gamma_{kj}\, \delta(t-t_{kj}) \operatorname{sign} \sum_{i=1}^{n} \eta_i^0 h_{ik}(t), \quad k=1, \cdots, r \tag{10.9}$$

$u^*(\cdot)$と先に表現した$u^\circ(\cdot)$の間には

$$\int_{t_0}^{t_1-h} du_k^0(s) = \int_{t_0}^{t_1-h} u_k^*(s)\, ds, \quad k=1, \cdots, r$$

が成立するから，（10・9）で表現された関数$u^*(\cdot)$も（10・8）を満足すると考えてよい。しかも

$$\int_{t_0}^{t_1-h} \sum_{k=1}^{r} |u_k^*(s)|\, ds = \lambda$$

であるから，$u^*(\cdot)$は制御面積最小の制御問題に対する最適解であるといえる。このように，$T(\eta^\circ)$が有限個の時刻から成っている場合，本節の問題に対する最適制御は有限個のインパルス制御によって構成できる。

最適制御の表現（10・9）には未定のη°, t_{kj} およびγ_{kj}が含まれている。この内，η°とt_{kj}はn次元空間における線形の最小値問題（10・7）を解くことにより決定できる。しかし，インパルスの大きさγ_{kj}に関してはその総和が最小値問題（10・7）の値として規定されるが，個々のγ_{kj}を規定する条件は明らかでない。

以上，$q=1$の場合の最小制御ノルム問題を大まかに論じたが，考察すべき事項が多く残されている。このため，本稿では制御面積拘束の最短時間問題に触れないでおく。

11. まとめ

本稿では，制御に時間遅れを伴う線形系に対する最適制御問題を3つ取り上げ，関数解析の理論にもとづく解法を与えた。

第一の問題は，与えられた初期状態を指定された時間で指定された状態まで移行しえる最小ノルムの制御関数を見出す問題である。この問題は関数解析におけるL－問題の形に記述しなおすことができる（4章）。そのL－問題が解を持つための条件は，制御に時間遅れを伴う線形系に対する完全可制御性の仮定を意味している（10・1節）。この条件のもとで，最小ノルムの制御関数の表現がL－問題の最小ノルム解に関する理論にもとづいて得られる（4章および10.4章)。得られた最適制御関数の表現は制御時間区間全体において必ずしも確定しないが，確定する所では一意的に定まる。もし制御系がより強い正規性の条件(10.1節）を満たすならば，その表現は制御時間全体で一意的に確定する（9章）。以上のことを幾何学的にいうと，最適制御は指定された状態を制御系の可達集合の境界上に位置させるものであり，その位置が可達集合の厳密に凸で滑らかな点または尖った点であるならば最適制御は確定するが，平らな点であるならば確定しないことを意味している（10.2節）。

第二の問題は制御関数のノルムの値が制限されているとき，与えられた初期状態を最短時間で指定された状態に移

行しえる制御関数を見出す問題である。この問題は第一の問題で得た最適制御関数のノルムの値が，指定制御時間とともに単調かつ連続に変化するという事実にもとづいて解くことができる（5章）。すなわち，第二の問題が解を持つことは第一の問題の指定制御時間に関する最小ノルム値の曲線が第二の問題のノルムの制限値と交わることであり，最短時間はその最初の交点となる時間として定まり，その時間に対する第一の問題を解くことにより第二の問題の最適制御関数が得られる。制御系の完全可制御性の条件だけでは第二の問題の解の存在を保証しえないが，制御系が正規であれば必ず解が存在する。その解の確定，一意性および幾何学的意味については第一の問題と同様のことがいえる（9章および10.2節）。

第三の問題は第二の問題を解決して到達した状態を，到達後の時間において保持しえる制御関数を見出す問題である。到達した状態を保持しえるための必要十分条件は，その状態を初期状態として制御系の右辺が到達に要した最短時間以後恒等的に零としえることである。従って，保持に必要な制御関数を決定する問題は，到達後の全ての時刻において一般的な線形方程式系の解を求めることにより解決される（6章）。

第一と二の問題は確かに現代制御理論にもとづいて解くことができる。しかしこの手法では，最適性の条件は有限次元空間での動的な点の変分問題を考えることにより得られるが，最適解を決定するためには2点境界値問題，従って解法の観点からいうと無限次元の問題を解かなければならない。このことと対照的に，本稿の関数解析的手法では動的な問題を静的な L −問題に置換して考えるために，最適性の条件の導出には無限次元の関数空間における方程式系の議論を必要とするが，最適解を決定するためには有限次元の最小値問題を解けばよい（4章，5章および10.4節）。従って，解法の観点に立つならば，関数解析的手法は非常に有利であるといえる。さらに，有限次元の最小値問題の解から，2点境界値問題の未知境界条件を決定することもできる（10.3節）。

一般に，最適化理論にもとづいて決定された最適制御は時間の関数として表現された開ループのものにすぎないから，これを閉ループにするためのシンセシス問題が残されている。上記有限次元の最小値問題が任意の完全初期状態（2章）に関して解析的に解きえる場合には，最適制御を状態変数の関数として表現できるから，閉ループ制御を得ることが可能である。しかし一般的には，出来るだけ頻繁に状態を観測し，各観測時刻における状態を初期状態とした最適制御を速やかに計算することによって，閉ループ制御の近似としなければならない。その際，最小値問題の解をえるためのアルゴリズム（8章）の収束速度が本質的に重要な要素となる。

今後の問題として，指定された状態が可達集合の境界の平らな部分に位置する場合の最適制御を決定する問題（いわゆる特異制御問題）が残されている。また，制御面積最小化問題および制御面積拘束の最短時間問題も改めて検討すべき問題である。また本稿では考慮しなかったが，状態に関する拘束条件が課されている場合の最小制御ノルム問題および最短時間制御問題にも，L −問題に記述しなおして解く手法が適用できることが多い。これらの問題は稿を改めて検討したい。

引用文献

(1) 西川，林，三宮：軌道飛翔体の最適姿勢制御について，制御工学，Vol.7, No.11, pp.635-645(1963)

(2) 西川，林，三宮：軌道飛翔体の最小燃料および最小エネルギ姿勢制御，制御工学，Vol.8, No.11, pp.564-573(1964)

(3) ed.by R.C.Langford and C.J.Mundo：Guidance and Control-II, Academic Press (1964)

(4) R.E.Foerster：Control of linear systems with large time delays in the control, NASA CR-1553(1970)

(5) J.T.Tou：Modern Control Theory, McGraw-Hill(1964)

(6) N.N.Krasovskii：On the theory of optimum regulation, Automation and Remote Control, Vol.18, No.11, pp.1005-1016 (1957)

(7) N.N.Krasovskii：On the theory of optimal control, AMM, Vol.23, No.4, pp.899-919 (1959)

(8) L.W.Neustadt：Optimization, a moment problem, and nonlinear programming, J.SIAM Control, Ser.A, Vol.2, No.1, pp.33-53 (1964)

(9) N.Dunford and J.Schwartz：Linear Operators part I, Interscience (1958)

(10) N.I.Ahiezer and M.Krein：Some questions in the theory of moments, English translation published by AMS, Providence (1962)

(11) A.G.Butkovskii：Distributed Control Systems, American Elsevier Publishing

Company, Inc.(1969)
(12) A.T.Fuller : Optimal nonlinear control of systems with pure delay, Int.J. Control, Vol.8, No.2, pp.145-168 (1968)
(13) F.M.Kirillova : On the correctness of the formulation of an optimal control problem, J.SIAM Control, Ser.A, Vol.1, No.2, pp.224-239 (1963)
(14) T.L.Boullion and P.L.Odell : Generalized Inverse Matrices, John wiley and Sons (1971)
(15) O.L.Mangasarian : Nonlinear Programming, McGraw-Hill (1969)
(16) M.Aoki : Introduction to Optimization Techniques, Macmillan Company (1971)
(17) D.G.Luenberger : Optimization by Vector Space Methods, John wiley and Sons (1969)
(18) E.Kreindler : Contributions to the theory of time optimal control, J. Franklin Inst., Vol.275, pp.314-344 (1963)

航空宇宙技術研究所報告522号

昭和53年1月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　株式会社　東京プレス
東京都板橋区桜川2～27～12

Printed in Japan