

UDC 532.517.4:  
532.526.

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-523

層流、遷移、乱流境界層および乱流伴流に  
適用できる統一的な速度分布族

石 田 洋 治

1978 年 1 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 層流、遷移、乱流境界層および乱流伴流に 適用できる統一的な速度分布族\*

石 田 洋 治\*\*

## A Unified Mean Velocity Profile Family Valid to Laminar, Transition and Turbulent Boundary Layers and Turbulent Wake

By Yoji ISHIDA

### ABSTRACT

A large number of velocity profile families have been proposed for various types of flows relative to the integral method solution of boundary layer equations. An extensive survey revealed that none of them were universally applicable in the sense that those for the laminar layer, for example, could not be applied to transition or turbulent layers, and vice versa.

The purpose of this paper is to propose a new unified velocity profile family which is valid to laminar, transition and turbulent boundary layers as well as turbulent wake. The profile family is based on a quasi-universal velocity defect law, the similarity law for mean velocity fields observed from a frame of reference moving with the speed of  $U_M$  (the mean velocity at  $y = 0.45\delta$ ). The profile family nominally possesses six characteristic parameters. However, good empirical correlations exist for some of them, which can reduce the number of parameters. Particular usefulness for integral calculation methods is expected.

A similarity law for turbulent shear stress distribution in fully developed turbulent shear layers is also proposed.

#### 記 号

$x$	流れ方向の座標
$y$	流れに垂直な方向の座標
$U$	$x$ 方向速度成分
$U_1$	局所主流速度
$u_\tau$	摩擦速度, $=\sqrt{\tau_w/\rho}$
$U_M$	$y = 0.45\delta$ における平均速度
$U_{15}$	$y = 0.15\delta$ における平均速度
$U_{79}$	$y = 0.79\delta$ における平均速度
$\tilde{U}_M$	$= U_M/U_1$
$\tilde{U}_{15}$	$= U_{15}/U_1$
$\tilde{U}_{79}$	$= U_{79}/U_1$
$y_M$	$U = U_M$ となる $y$ 座標の値
$\delta$	剪断層厚さ ( $U = 0.995 U_1$ となる $y$ の値)
$f$	無次元速度分布, $= (U - U_M)/(U_{15} - U_M)$

$F$	無次元速度分布, $= (U - U_M)/(U_{79} - U_M)$
$f_{1.5}$	$\bar{\phi} = 1.5$ ( $y = 0$ ) における $f$ の値, $= (U_o - U_M)/(U_{15} - U_M)$
$F_\infty$	$\phi = 2$ ( $y = 1.13\delta$ ) における $F$ の値, $= (U_1 - U_M)/(U_{79} - U_M)$
$\bar{\phi}$	無次元座標, $= (y - 0.45\delta)/(0.15\delta - 0.45\delta)$
$\phi$	無次元座標, $= (y - 0.45\delta)/(0.79\delta - 0.45\delta)$
$a_o$	$y = 0.45\delta$ ( $\bar{\phi} = 0$ ) における $df/d\bar{\phi}$
$A_o$	$y = 0.45\delta$ ( $\phi = 0$ ) における $dF/d\phi$
$C_f$	表面摩擦係数
$R_\delta$	レイノルズ数, $= U_1 \delta/\nu$
$\delta^*$	排除厚
$\theta$	運動量厚
$\epsilon$	エネルギー厚
$\lambda$	特性パラメータ, $= 1.177[0.3(C_f/2)R_\delta/(\tilde{U}_M - \tilde{U}_{15}) + 4.5 - 0.5a_o - (10/3)f_{1.5}]/(f_{1.5} - 2.25 + 0.75a_o)$

\* 昭和52年11月30日 受付

\*\* 空気力学第二部

- $\beta$  平衡パラメータ,  $= (\delta^* / \tau_w)(dp/dx)$   
 $a$  平衡層における  $U_1$  分布 ( $\propto x^a$ ) のパラメータ  
 $U_0$   $y = 0$  における平均速度,  $=$  (境界層, 壁噴流)  
 $\approx 0$  (自由剪断流)  
 $U^+ = U / u_\tau$   
 $y^+ = u_\tau y / \nu$

## 1. 序

工学上の問題において, 種々の粘性剪断流を正確に予測することは非常に重要である。Navier-Stokes 方程式の一般解は, そのような流れに対する完全な情報を与えるであろう。しかし, その高度な非線型性は, 一般解の発見を妨げており, 近い将来に解決される可能性は少ないと考えられる。

それに代るべき近似解法としての有限差分法による数値解は, 大型電子計算機の発達とともに盛んになり, 層流に対しては大きな成功をおさめてきた。しかしながら乱流に対しては, Navier-Stokes 方程式を直接数値的に取扱うことは, 現在のところ殆んど不可能に近い。なぜなら, 時間平均量のみならず瞬間的変動量までも含めた流れの微細構造を正確に扱おうとすると, 空間的, 時間的差分格子を非常に小さくして行かねばならず, それを許容しうる記憶容量を持つような計算機は存在しないからである。従って実際の役に立つ定量的結果を出すためには, Navier-Stokes 方程式に何らかの平均操作を施した方程式を取扱わなければならない。通常行なわれる操作は, 瞬間量を時間平均量と変動量との和に書き表わし, それを Navier-Stokes 方程式に代入して時間平均をとるというもので, 時間平均量の空間的変化はずっとゆるやかになり, 必要な差分格子の間隔もゆるやかですむようになる。そのような利点の反面, 平均化の結果として新しい未知量であるレイノルズ応力  $\overline{u_i u_j}$  ( $i, j = 1, 2, 3$ ) (変動速度の 2 次相関である) が現われる。それを決定するために  $\overline{u_i u_j}$  に対する方程式を作るとそこには 3 次相関項  $\overline{u_i u_j u_k}$  が現われると言った具合に, 常により高次の相関項が現われるため, 方程式が閉じないことになる。そこで何らかの仮定によってこの無限列を終わらせることが必要になる。このような仮定は, 乱れの有限化 (closure) とか, 乱れのモデル化と呼ばれるが, それらは今のところ経験的知識に強く依存している。いずれにせよ有限差分法による方法は, 支配方程式を直接扱うために, 対象とする流れに殆んど制限がなく, 一般性に富んでいるが, 得られる結果がデジタル量で表現されるため, 数値実験の要素が強い。

もう一つの重要な近似解法は, 実験データ (もしくは

厳密な数値解) を出発点としてそれを分析し, あらゆる場合のデータを一本の線 (相似曲線) に乗せるような, 重要なパラメータを見出すことである。それが出来れば, (そのデータの) 分布形に対する一般的なパラメータ表現は非常に容易になる。なぜなら, 残された仕事はその相似曲線を, 適当な解析式で表現してやることだけであるからである。そのようにして得られた分布族は, 分析に用いた実験データ集団に対してしか有効でないという欠点はあるが, その集団を大きくすればするほど, 普遍的なものになるわけであり, Navier-Stokes 方程式の厳密解に対する近似的なパラメータ表現と見なすことが出来る。いったん分布族が得られれば, 流れの発達を予測するためには, そこに含まれるパラメータの流れ方向の変化を予測すればよいことになり, そのような計算に対する数学的手法としては, 「重み付残差法」(Finlayson, 1972<sup>54</sup>) が適用できることが知られている。

このような行き方は, 現在のように大型電子計算機が出現する以前の時代に, 実際的な工学問題を解くための一手段として盛んであったものであり, 現在では上記の差分法計算ほどポピュラーなものではなくなっている。しかしながら, 現在ではむしろ別の観点からこのような行き方に注目すべきであると思われる。谷<sup>55</sup>) が述べているように, 近い将来 Navier-Stokes 方程式が数値的に解けるようになり, おびたゞしい情報量が生産されるようになって, 我々はそのデジタル量だけからは直ちに現象の物理的イメージを掴むことは出来ないであろう。それは現在われわれが実験データ (それはまた Navier-Stokes 方程式の解と考えられる) を前にして, その物理的解釈に苦しんでいるのと同じ状況であろうと思われる。実験データなり数値解から何らかの物理的イメージを掴むのによく使われる一手段として, データの法則性の発見がある。即ち, あらゆる条件におけるデータを, 少数のパラメータによって特徴づけることである。それが可能となれば物理現象は, それらのパラメータだけで論ずることが出来るようになり, 複雑と思われていた現象に対する見通しが非常に良くなることになる。

上で述べた行き方はまさにこのような帰納的な行き方に他ならないのであり, Navier-Stokes 方程式が直接数値的に解かれる時代になっても, それ固有の重要性は損われることはないと考えられる。得られた分布族を使って流れの予測法を構成することは, このような視点からすれば副次的な意義しかないことになるが, そのような予測法は, 差分法と較べて, 非常に短い計算時間と少ない記憶容量しか必要としない点ですぐれている。

本報告では上に述べたような立場から, 粘性剪断流に

おける重要な変数である平均速度分布と乱流剪断応力分布について, 大きなデータ集団(層流, 遷移, 乱流各境界層, 伴流, 自由噴流, 自由混合層)に共通する普遍的な法則性(ここでは分布の相似法則を意味する)を追求し, 分布形を特徴づけるパラメータを見出す。そしてそのパラメータを使って上記データ集団に適用できる速度分布族を構成する。また乱流剪断応力分布については, 十分に乱れた乱流剪断流における相似法則の存在を指摘する。以下第2章では従来の速度分布族との差異を明確にするために, それらについての批判的展望を行ない, 引続いて速度分布に対する準普遍的な相似法則(速度欠損則)を追求する。そして得られた結果を用いて普遍的な速度分布族を構成し, それをもとのデータ集団に適用して正しいことを検証する。第3章では速度分布族に含まれるパラメータの性質について検討し, 各流れにおける速度分布の特徴を明確にする。第4章では乱流剪断応力分布の普遍的な相似性を指摘する。最後に第5章では, 本速度分布族の物理的解釈について若干の検討を行なう。

## 2. 統一的な速度分布族

### 2.1 従来の速度分布族の展望

本章の目的である統一的な速度分布族を述べる前に, 従来の速度分布族について展望することにする。

#### 2.1.1 層流境界層

層流境界層の積分法に基づく計算法に関連して, 速度分布族が発展させられてきた。速度  $U/U_1$  を独立変数  $\eta$  ( $\equiv y/\delta$ ) の多項式として表現することは, Pohlhausen<sup>1)</sup>によって最初になされ, その後 Schlichting & Urlich<sup>7)</sup>, Mangler<sup>8)</sup>, Wieghart<sup>3)</sup>, Head<sup>2)</sup>らによって順次改良されていった。それらは次のようにまとめることができる。

$$U/U_1 = 1 - (1 - \eta)^n (1 + a_1 \eta + a_2 \eta^2 + a_3 \eta^3 + \dots) \quad (1)$$

ここで  $n$  は正整数であり, 係数  $a_1, a_2, \dots$  は境界条件と運動量方程式とから導かれる次の条件を用いて決定される。

$$\left. \begin{aligned} y=0 : U=0, \quad \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -\frac{U_1}{\nu} \frac{dU_1}{dx}, \quad \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} = 0, \\ \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = \frac{1}{\nu} \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}, \dots \dots \dots \\ y \rightarrow \infty : U \rightarrow U_1, \quad \frac{\partial U}{\partial y} \rightarrow 0, \dots \dots, \frac{\partial^n U}{\partial y^n} \rightarrow 0 \dots \dots \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

(2)式で,  $y \rightarrow \infty$  の条件は  $\eta = 1$  (即ち  $y = \delta$ ) でおきかえられることが多い。分布族(1)は  $\eta = 1$  での条件は満

している。従って,  $a_1, a_2, \dots$  は  $y=0$  での条件から決定される。Pohlhausen の4次式は, (1)で  $n=3$  とし,  $a_2$  以上の項を無視した場合に相当する。Schlichting & Urlich は,  $n=4$  で  $a_2$  までの項をとった場合の分布族を, 層流境界層の安定計算のために用いた。Mangler は前縁よどみ点付近では,  $n=12$  で  $a_2$  までの項をとった分布族が良い結果をもたらすことを示した。しかしながら, これら三つの分布族は, いずれも1パラメータの族であるため, 我々にとって関心のある流れのすべてにわたって満足すべき結果を与えることができない。

適用範囲の拡張は, 2パラメータの分布族にすることにより達成された。Wieghart は(1)で,  $n=8$  とし  $a_3$  までの項を残した表現を使い, それらを(2)の  $y=0$  における最初の三つの条件と,  $\tau_w/\rho = \nu (\partial U/\partial y)_{y=0}$  という条件から,  $a = (\partial/\partial \theta) T$ ,  $b = (\partial^2/2\theta^2) \lambda$  をパラメータとする2パラメータの族を構成した。

$$U/U_1 = f_1(\eta) + a f_2(\eta) + b f_3(\eta) \quad (3)$$

この分布族は適用範囲を大きく広げたが, 加速流や吸込みのある流れなどで見られる速度分布に対しては余り精度が良くない。Head はこの点の改良を試みた。(3)の  $f_1$  として Blasius 分布を選び,  $f_2$  と  $f_3$  は二つの両極端の状態, 即ち表面摩擦  $\tau_w$  が零と,  $\tau_w$  が非常に大きい場合, における速度分布に, (3)が厳密に合致するように選ばれた関数  $[f_2]_1, [f_2]_2, [f_3]_1, [f_3]_2$  (添字1は  $\tau_w=0$  に, 2は  $\tau_w$  が大きい場合を示す) から, 数値的に定義された。この分布族は, 剥離点から大きな表面摩擦を持つ流れまでの広い範囲の速度分布に良く適用できた。

Timman<sup>9)</sup> は分布族(1)が  $y \rightarrow \infty$  における条件を近似的にしか満足しないことを改良するために次の表現を与えた。

$$U/U_1 = 1 - \int_{\eta}^{\infty} \exp(-\eta^2) (a + c\eta^2 + \dots) d\eta - \exp(-\eta^2) (b + d\eta^2 + \dots) \quad (4)$$

この式で,  $a, b, c, d, \dots$  は,  $y=0$  での条件から決定される。

吸込み(又は吹出し)がある場合の速度分布に対しても, Pohlhausen 流の分布族を定義することが出来る。

この場合には, 条件(2)の代りに,

$$\left. \begin{aligned} y=0 : U=0, \quad \nu \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = -v_s \frac{\partial U}{\partial y} - U_1 \frac{dU_1}{dx}, \\ \nu \frac{\partial^3 U}{\partial y^3} = -v_s \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}, \\ \nu \frac{\partial^4 U}{\partial y^4} = \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} - v_s \frac{\partial^3 U}{\partial y^3}, \dots \dots \end{aligned} \right\}$$

$$y \rightarrow \infty : U \rightarrow U_1, \frac{\partial^n U}{\partial y^n} \rightarrow 0 \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (5)$$

が使われる。Schlichting<sup>10)</sup>やTorda<sup>38)</sup>らは吸込みがある場合の速度分布族を与えた。

その他、Dorodnitsyn<sup>39)</sup>の積分関係法に関連して、 $\partial U / \partial y$ を $U$ の関数として表現する速度分布族もあるが、本研究の方向とはずれるので、ここでは詳しく言及しないことにする。

### 2.1.2 乱流剪断流

乱流剪断流における速度分布を、Pohlhausen 流に $\eta$ の多項式で表現することは非常に難しい。乱流剪断応力 $\tau_i$ に対する情報が十分でないため、条件式(2)や(5)に対応するものが高い精度で得られないことと、速度分布形そのものが多項式では表現しにくいものであるからである。従って、乱流の場合には、速度分布に対する経験的な相似法則が分布族の構成において重要となる。Coles<sup>4)</sup>は乱流境界層の底層を除く速度分布を、対数法則とウェーク法則 $W(\Pi, \eta)$ (これは外寄り領域の速度分布の「対数法則」からのずれを表わす)の和として表わす速度分布族を提唱した。すなわち、

$$\frac{U}{u_\tau} = \frac{1}{K} \left( \ln \frac{u_\tau y}{\nu} + A \right) + W(\Pi, \eta) \quad (6)$$

ウェーク法則 $W(\Pi, \eta)$ に対しては、様々な解析的表現が与えられている。例えば、Colesは

$$W(\Pi, \eta) = \frac{\Pi}{K} (1 - \cos \pi \eta), \quad (7)$$

Rotta<sup>40)</sup>は

$$W(\Pi, \eta) = \frac{\Pi}{K} (39 \eta^3 - 125 \eta^4 + 183 \eta^5 - 133 \eta^6 + 38 \eta^7) \quad (8)$$

という表現を与えた。また、Granville<sup>41)</sup>、Dean<sup>42)</sup>、Finlay<sup>43)</sup>は独立に同じ表現

$$W(\Pi, \eta) = \frac{1}{K} (1 + 6\Pi) \eta^2 - \frac{1}{K} (1 + 4\Pi) \eta^3 \quad (9)$$

を与えた。Deanは(9)とSpaldingによって提唱された粘性底層と内層における平均速度分布に対する表現とを結合し、別の速度分布族

$$y^+ \exp(KW(\Pi, \eta)) = f(U^+) \quad (10)$$

を与えた。 $f(U^+)$ はSpalding<sup>45)</sup>によれば、

$$f(U^+) = U^+ + e^{-A} \left[ e^{KU^+} - 1 - KU^+ - \frac{(KU^+)^2}{2!} - \frac{(KU^+)^3}{3!} - \frac{(KU^+)^4}{4!} \right] \quad (11)$$

である。(10)はそれゆえ陰伏的な表現となっている。

Thompson<sup>5)</sup>は、乱流境界層内では完全に乱れた状態における速度 $U_i$ と、乱れていない状態における速度 $U_p$ が間欠的に観察されたと考え、速度分布をこれら二つの速度の、インタミッテンシ係数 $r_s(\eta)$ を重み関数とする重み付和として表現した。

$$U = U_i r_s + U_p (1 - r_s) \quad (12)$$

$U_i$ として対数法則速度成分、 $U_p$ として $U_1$ を与えると、 $r_s$ は実験データから評価することが出来、すでにSarniecki<sup>6)</sup>は $r_s$ がほぼ普遍的関数

$$r_s = r_s(\eta) \quad (13)$$

であることを見出していた。(この $r_s$ は、乱れ量から測られるインタミッテンシ係数とは異なることに注意)従って、Thompsonの分布族は、壁の法則と普遍的なインタミッテンシ係数という二つの相似法則を用いていることになる。

一方、層の外寄り領域における速度分布に注目すると、主流の速度 $U_1$ がある特定な分布( $U_1 \propto x^a$ )をしている場合には、次の速度欠損則

$$(U_1 - U) / u_\tau = f(\eta) \quad (14)$$

が成立つことが知られている。Clauser<sup>15)</sup>はこのような流れを平衡層と呼んだ。(14)は、残念ながら、一般の $U_1$ 分布では成立たないので、一般的な速度分布族の基礎として使うことはできない。しかし、 $U_1$ 分布(又は圧力勾配 $dp/dx$ )によらず速度欠損則をもたらすような尺度パラメータを見出すことができれば、それは速度分布族の基礎として使えるであろう。Perry & Schofield<sup>44)</sup>はそのような尺度パラメータを見出し、一般的な速度欠損則

$$(U_1 - U) / U_s = f(y/\Delta) \quad (15)$$

を提唱した。速度の尺度 $U_s$ は、 $U/U_1$ を $(y/\delta^*)^{1/2}$ に対してプロットした時の直線部分を $y=0$ まで外そうとすることにより得られる。長さの尺度 $\Delta$ は、

$$\Delta = (U_1 / U_s) (\delta^* / c)$$

で与えられる。ただし、

$$c = \int_0^\infty f(y/\Delta) d(y/\Delta)$$

である。現在の所、(15)を用いて速度分布族を構成した例は報告されていない。

以上は壁からの吸込みや吹出しがない場合であるが、これらがある場合にも同様なやり方で速度分布族が構成されている。例えば、Black & Sarniecki<sup>46)</sup>は混合長理論に基づいて壁の近くの速度分布に対して二乗対数法則

$$u_{\tau}^2 + v_s U = \left( \frac{v_s}{2K} \ln \frac{y}{d} \right)^2 \quad (d: \text{積分定数}) \quad (16)$$

を導いて実験的に検証し, それを基にしてColesのウェーク仮説を検討した。限られた実験的証拠は, この仮説が正しいことを示した。従って, (6)において右辺第一項を(16)の変形したもので置換えれば, この場合の分布族が得られる。一方, McQuaid<sup>47)</sup>やThompson<sup>37)</sup>は, (12)を吸込みや吹出しのある場合に拡張した。 $U_1$ としては, Stevenson<sup>48)</sup>の壁法則

$$2 \frac{u_{\tau}}{v_s} \left[ \left( 1 + \frac{v_s U}{u_{\tau}^2} \right)^{1/2} - 1 \right] = A \log_{10} \frac{u_{\tau} y}{\nu} + B \quad (17)$$

(これは二乗対数法則(16)を変形して得られる)を,  $U_p$ としては $U_1$ を用いた。 $r_s$ は固体壁の場合のそれと若干異っているが, 普遍的な分布をしている。

伴流や自由噴流では, 平均速度分布は

$$(U_1 - U) / U_0 = f(y / L_0) \quad (18)$$

という相似分布を持つことが知られている。ここで $U_0$ は速度の尺度で, 普通最大速度欠損(伴流の場合)又は超過(噴流の場合)が用いられる。 $L_0$ は速度半値幅である。(18)は伴流や自由噴流における計算法に応用されているが, ニアウェークや噴流吹出口付近での速度分布を表現できないので, 適用範囲はかなり限定される。関数 $f$ がColesのウェーク関数と類似していることは興味があり, ウェーク関数の名称はここから来ている。

自由混合層においても, ある程度下流に行くと速度分布は,

$$U / U_1 = f(\xi) \quad \left( \xi = \sigma \frac{y}{x}, \sigma \text{は定数} \right) \quad (19)$$

という相似分布を持つ。その他, 壁噴流の速度分布についても相似分布形の存在が知られている。しかしこれらの相似法則を基にして一般的な速度分布族を組立てることは, 行なわれていない。

### 2.1.3 検 討

前節で展望した層流境界層と乱流剪断流の速度分布族を, 本論文の目的である統一的な速度分布族の構成という観点から検討して行くことにする。

層流境界層の速度分布族, 例えば(1), はどちらかというと数学的な立場から決められており, その意味で統一性はあるが, 乱流剪断流の速度分布族は実験データに基づいた経験的色彩の強いものとなっており, データの解釈の仕方により分布族の表現が異なることもあって, 統一性は余り良くない。また, (1)が乱流境界層の速度分布を, (6)が層流境界層のそれを記述できないことは容易に確かめられる。さらに(6)が乱流伴流や噴流などを記述で

きないことも明らかである。これらのことは, 各流れにおける速度分布を統一的な見地からとらえていないために生じたものと考えられる。各々の流れに特徴的な尺度パラメータを使って整理することは, 流れの個別的特徴を明らかにするのに役立つが, それでは他の流れとの関連が明らかにされないという不満がある。それゆえ逆に, 各々の流れに共通な統一的尺度パラメータを見出し, それによって速度分布を整理し, 個々の流れの差異を明らかにするという方法が, 統一的速度分布族の発見には必要となる。

摩擦速度 $u_{\tau}$ は速度の尺度としては普遍的なものではない。自由乱流では $u_{\tau} = 0$ であるし, 層流境界層においても意味のある尺度ではないからである。一方, 境界層厚さ $\delta$ は長さの尺度としては普遍性を失わない。それゆえ問題は, 新しい速度の尺度を見出すことである。ここではそのような尺度パラメータを, 速度分布の普遍的相似性を追求することによって見出すことにした。

### 2.2 準普遍的な速度欠損則

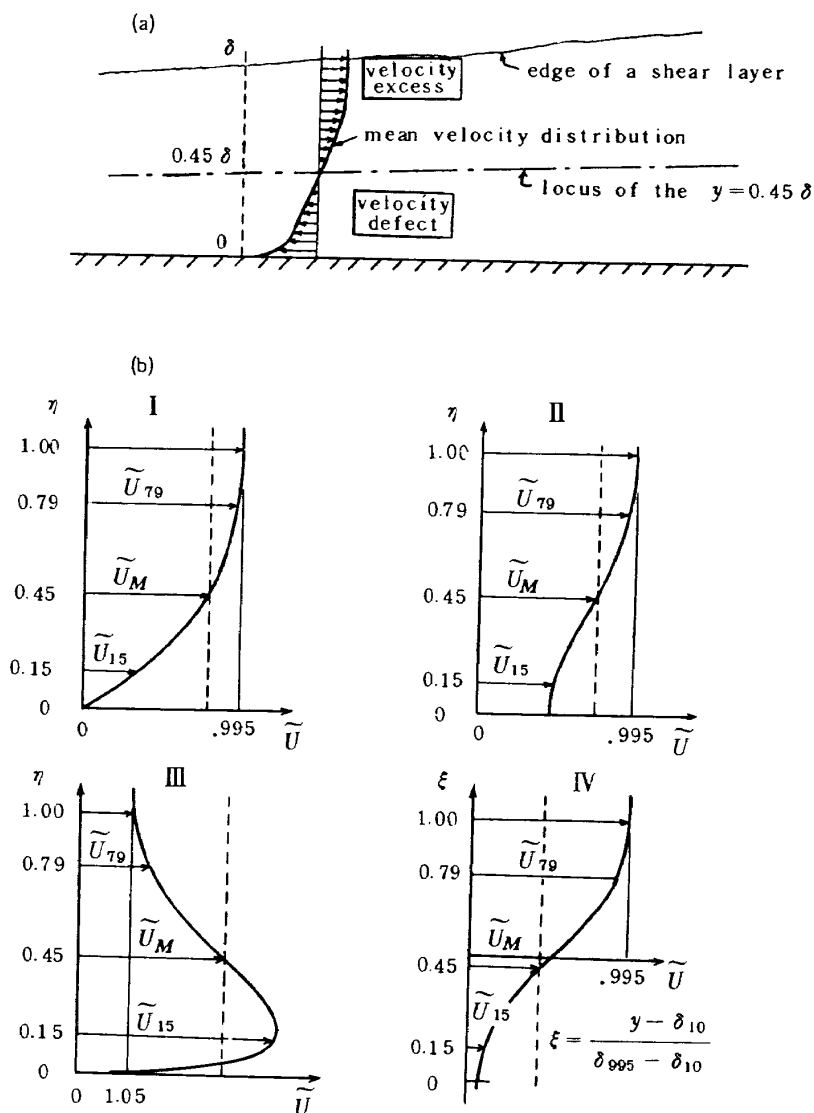
前節での展望から, 様々な流れにおける速度分布は, 主として層の内容寄り領域で互いに大きく異っており, 外寄り領域ではむしろ互いに類似していることが示唆される。外寄り領域での速度分布の相似法則は, 速度欠損則の形をしていた(14, 15, 18)。それは速度場を主流速度 $U_1$ で動く座標系から観察すれば, 相似な分布形が得られることを意味している。これらの速度欠損則は, 残念ながら, 普遍的なものではない。しかし,  $U_1$ とは異なった速度 $U_M (< U_1)$ で動く座標系から速度場を観察すれば, 普遍的な速度欠損則が得られる可能性があることが予想される。この予想に対するわれわれの物理的根拠は次の通りである。条件付抽出(conditional sampling)の技術や流れの可視化技術を用いた最近の乱流剪断流に関する実験的研究<sup>57)</sup>によれば, 層の外寄り領域における流れの構造は非常に規則的(coherent)であり, その主要な運動形態についてはなお研究の余地はあるが(大きなスケールの渦状運動に, より小さなスケールのはっきりとした渦運動が乗っているという運動形態である可能性が強い(Falco)<sup>56)</sup>), はっきりと認識できる運動が空間的に規則正しく出現する。事実, 煙を用いた乱流境界層流れの可視化実験において, ある速度( $U_1$ ではない)で移動するカメラで撮影された流れの様子は, 空間的に殆んど相似である。(Falco)<sup>56)</sup>このような実験的観察は, 流れ場を固定された座標系からではなく, 何らかの速度(特に上述のコヒーレントな流れ模様の伝達速度)で動く座標系から観測することの重要性を示唆している。流れ模様が空間的に相似であり, かつその運動形態が同じ

であるならば、そのような座標系で観測した速度場は殆んど普遍的に相似となるであろうというのがわれわれの考え方である。

このような予想のもとに、速度分布が普遍的に相似になるような座標系(の移動速度)を追求した。上で述べたように、コヒーレントな流れ模様の伝播速度が知れば、それでもって動く座標系を選べばよいであろう。しかしながら、その正確な速度はこれまで測定されていない。それゆえここでは別の実験事実とも照らし合わせて推測しなければならない。Nychas et al.<sup>58)</sup> は乱流境界層の可視化を行ない、流れとともに動く座標系(即ちカメラ)から流れ模様を撮影し、いくつかの興味ある現象を見出している。それによれば、層の外寄り領域において、層のほぼ中央部分( $y = 0.5 \delta$  の近傍)にその中心

を持つような大きな渦運動が観察される。そしてその渦は下流方向に伝達されて行く。この運動形態は前述の Falco のそれとは厳密には一致しないが、渦状の運動形態を明らかにしている点で類似しており、渦の中心が層のほぼ中央にあるということは、われわれの目的である適当な座標系の選択に対する大きなヒントを与えてくれる。即ち、層の中央部分での適当な平均速度を選べば、それで動く座標系から見た速度場は相似になるであろうと期待される。

若干の試行錯誤の後、 $y = 0.45 \delta$  における平均速度  $U_M$  からのずれ  $U - U_M$  を解析の対象にした。第1図(a)に示すように、 $y \geq 0.45 \delta$  では速度超過  $U - U_M \geq 0$ 、 $0 \leq y \leq 0.45 \delta$  では速度欠損  $U - U_M \leq 0$  となるので、これらを別々に取扱った。その結果、 $0 \leq y \leq 0.45 \delta$  で



第1図 (a) 新しい速度欠損則の物理的概念の説明

(b) 様々な流れにおける  $\tilde{U}_{15}$ ,  $\tilde{U}_M$  および  $\tilde{U}_{79}$  の定義

I 境界層, II 伴流, III 壁噴流, IV 自由混合層

は、 $U - U_M$ を

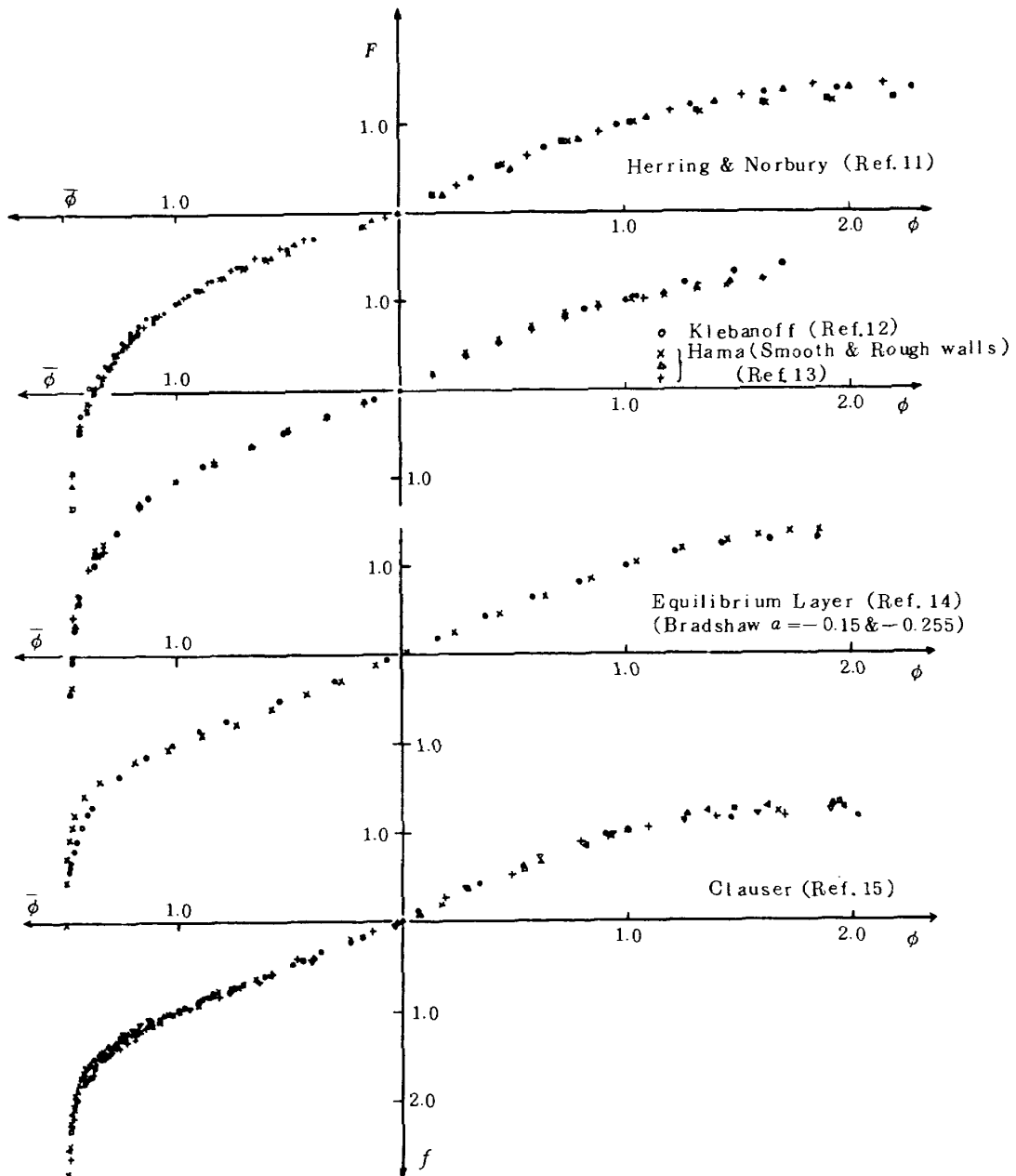
$$f \equiv \frac{U - U_M}{U_{15} - U_M} \quad \text{対} \quad \bar{\phi} \equiv \frac{y - 0.45\delta}{0.15\delta - 0.45\delta} \quad (20a)$$

のように、また  $y \geq 0.45\delta$  では  $U - U_M$ を

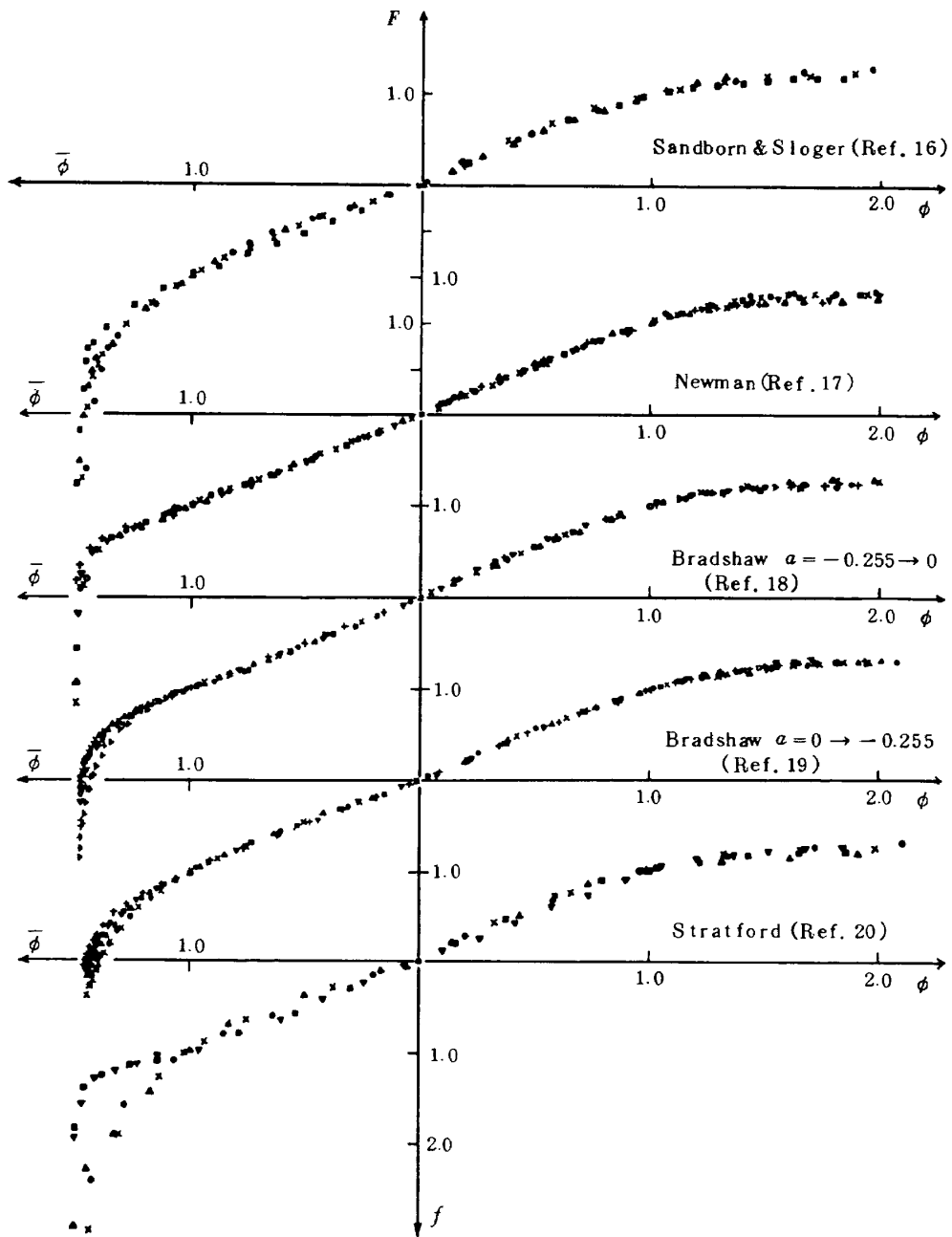
$$F \equiv \frac{U - U_M}{U_{79} - U_M} \quad \text{対} \quad \phi \equiv \frac{y - 0.45\delta}{0.79\delta - 0.45\delta} \quad (20b)$$

のようにそれぞれプロットすると、データは各々一本の曲線に良く相関づけられることが見出された。ここで、 $U_{15}$  は  $y = 0.15\delta$  における平均速度、 $U_{79}$  は  $y = 0.79\delta$

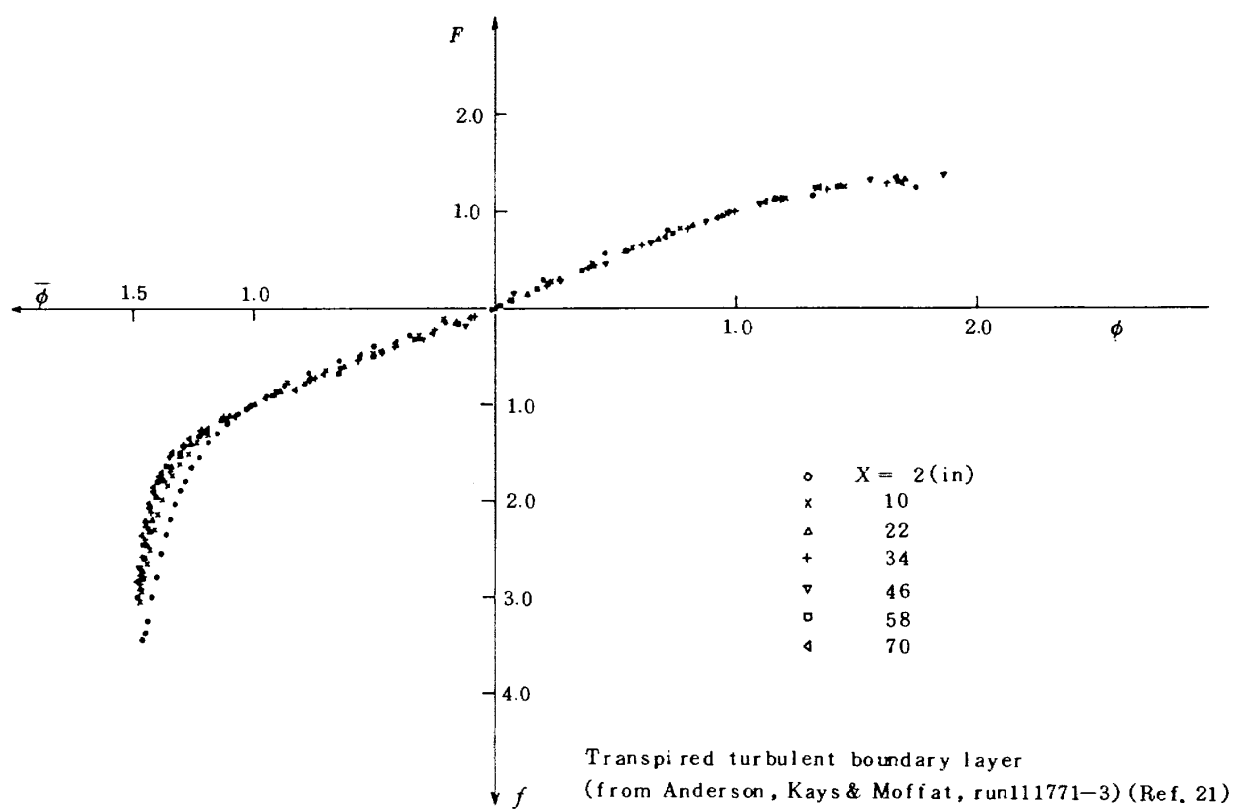
における平均速度である。(第1図(b)を参照) 第2図は乱流境界層における平均速度分布の場合である。壁の近くを除いて、流れ方向に相似性が良く成立っていることがわかる。これらのデータは様々な流れの条件の下でのものであるにもかかわらず、第3図に示すように、 $f$  や  $F$  の分布形は普遍に近いものであることがわかる。すなわち、流れの諸条件(順圧力勾配か逆圧力勾配か、緩和流か否か、表面吹出しや表面粗さがあるかないか、等々)に殆んど無関係な、一本の曲線に相関づけられる。壁の近くでは、(20)のプロットでは速度分布を相関づけられない。壁の法則が示すように、この領域での速度の尺度は



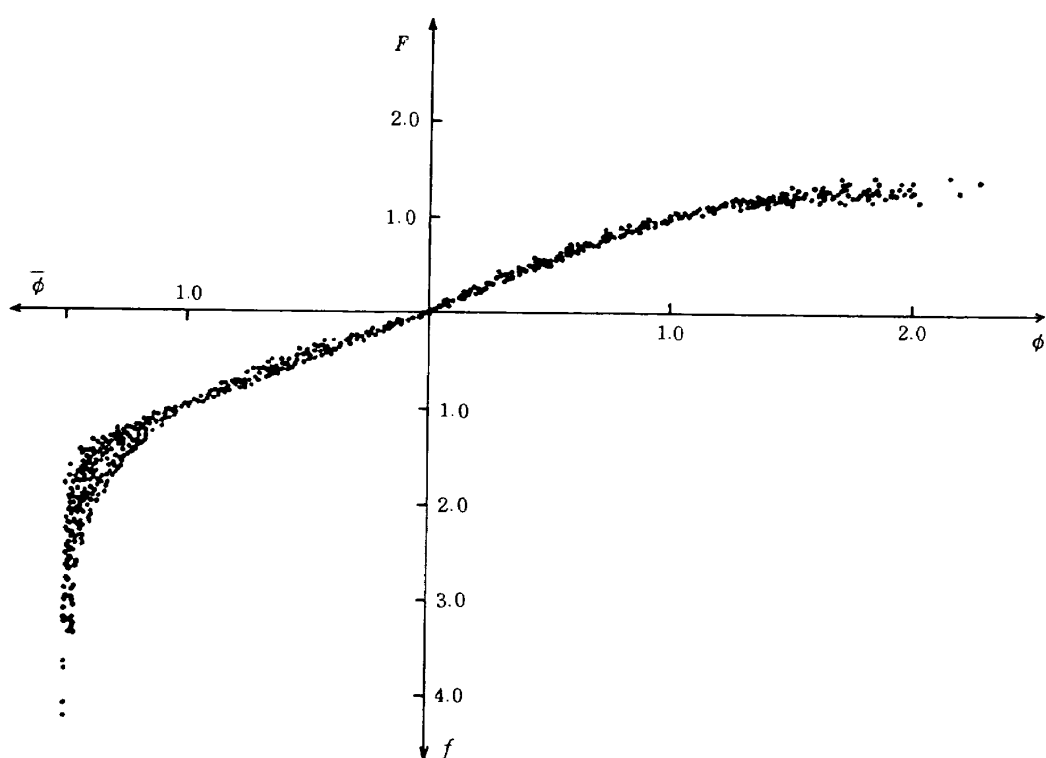
第2図(a) 乱流境界層における平均速度分布の相似性



第2図(b) 乱流境界層における平均速度分布の相似性



第2図(c) 乱流境界層における平均速度分布の相似性



第3図 乱流境界層における平均速度分布の普遍的相似性 (データ源は第2図)

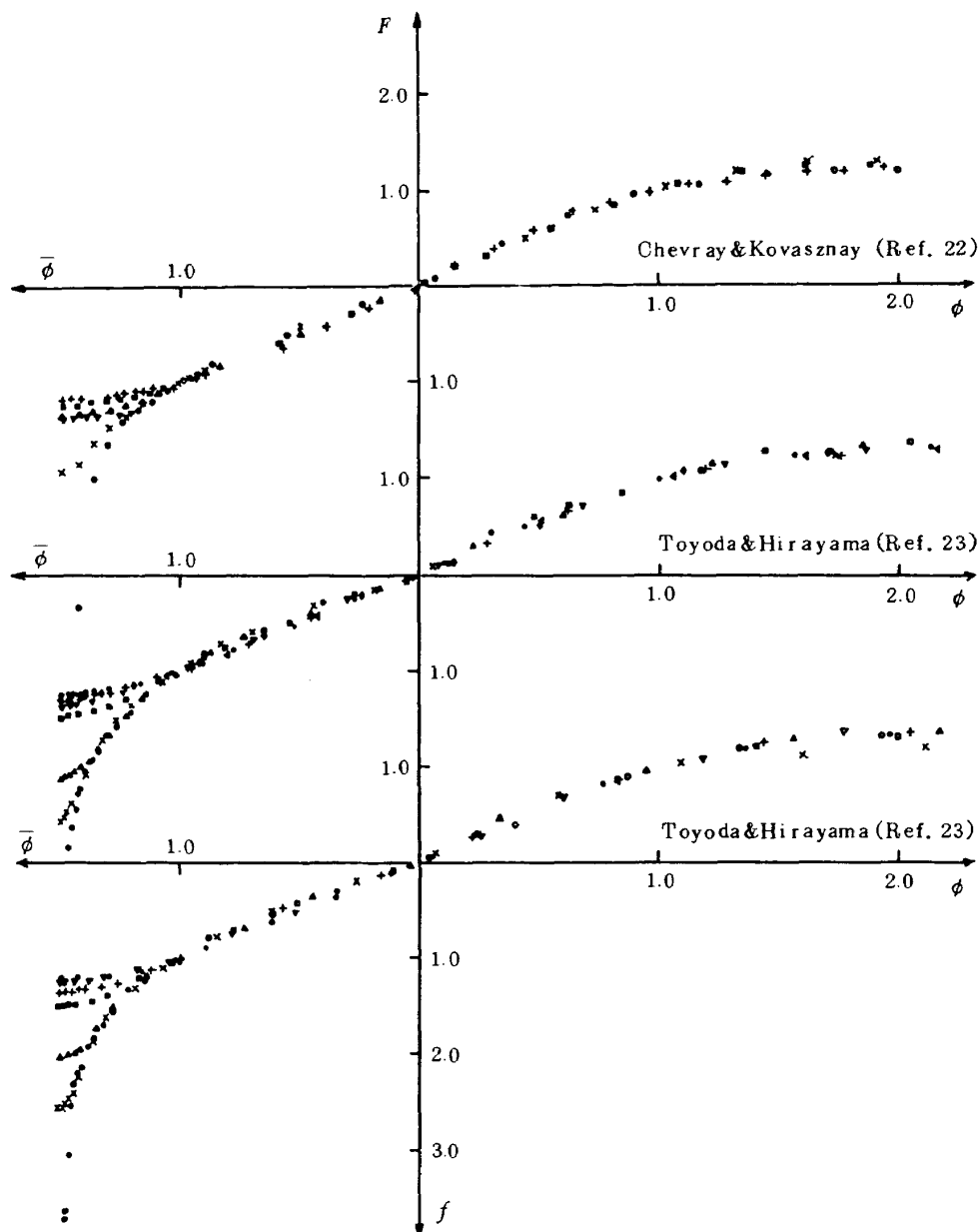
摩擦速度  $u_\tau$  であり、長さの尺度は  $\nu/u_\tau$  である。これらの尺度が (20a) の尺度と良い相関を持たないので、(20a) が壁の領域 (大体  $y < 0.15\delta$ ) で失敗するわけである。

第4図は乱流伴流における平均速度分布の場合である。外寄り領域における分布は、やはり相似であり、その形状は乱流境界層におけるそれと非常に類似している。両者の差異は、主に  $1.0 \leq \bar{\phi} \leq 1.5$  ( $0 \leq y \leq 0.15\delta$  に対応する) における  $f$  の分布において観察される。それは境界層と伴流の構造が、その領域で本質的に異っていることを反映している。

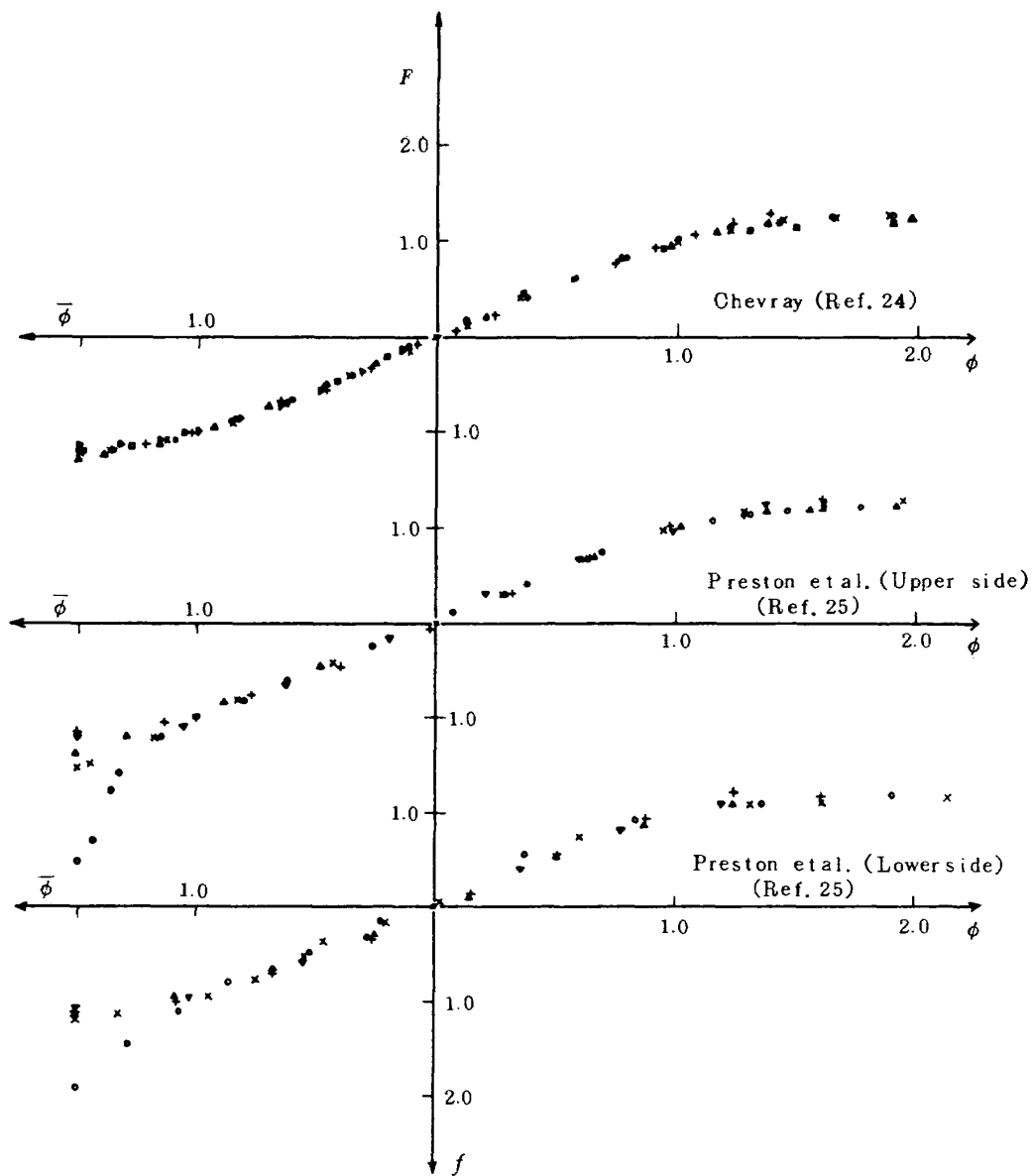
第5図は乱流自由混合層と乱流壁噴流における平均速度分布の場合である。この見掛け上大きく異なった流れの分布が、(20) によって層の外寄り大部分の領域にわたって良く一致することは興味深い。その分布形はまた、乱流境界層のそれと殆んど同じである。

第2図から第5図までの結果は、乱流剪断流の外寄り領域における普遍的な ( $U_M$  を基準とする) 速度欠損則の存在を明らかにするとともに、各流れの速度分布の間の本質的な差異を明らかにした。

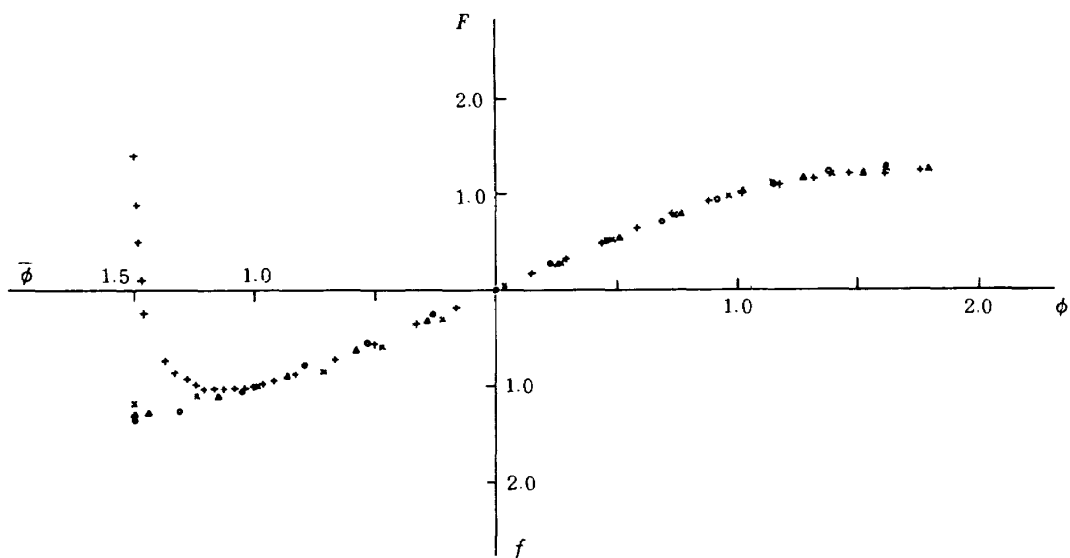
次に、乱流剪断流に対して成功した相関法(20)を、層流境界層と遷移境界層における速度分布に適用することは、



第4図(a) 乱流伴流における平均速度分布の相似性



第4図(b) 乱流伴流における平均速度分布の相似性



第5図 乱流自由混合層と乱流壁噴流における平均速度分布の相似性  
+ 壁噴流 (Irwin<sup>26)</sup>), × △ ○ 自由混合層 (文献 27, 28, 29)

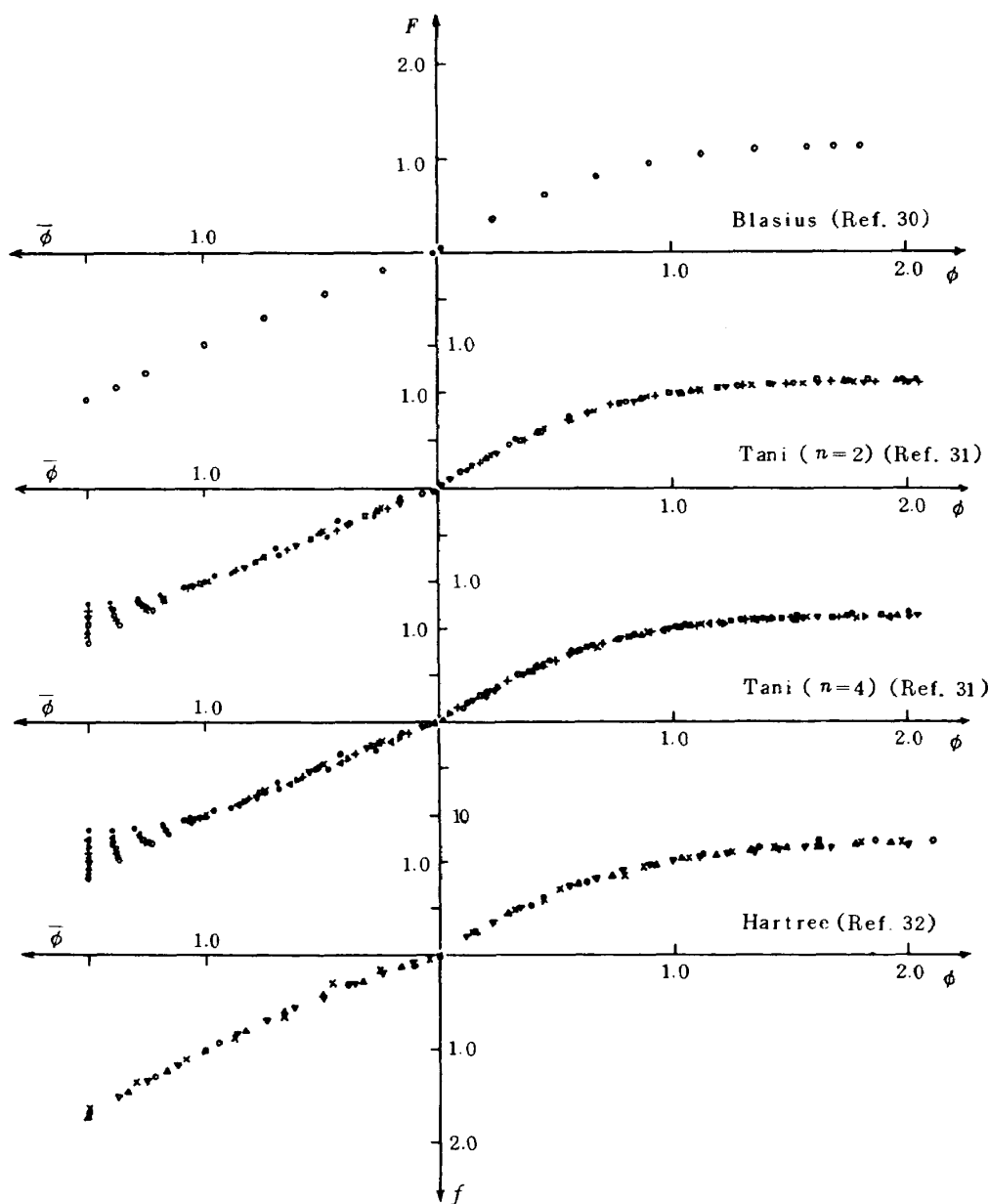
統一的な見地から速度分布を検討する立場からは、非常に興味がある。第6図(a)は、層流境界層における速度分布の場合である。壁に近い領域を除けば、この場合にも速度分布は一本の曲線にまとめられることがわかる。しかし、分布曲線は乱流剪断流のそれとは若干異なっている(第7図を見よ)。第6図(b)は、遷移境界層における速度分布の場合である。遷移の過程において、得られた分布形は層の外寄り領域において一本の曲線にまとまることが示されている。壁に近い領域( $1.0 \leq \bar{\phi} \leq 1.5$ )で分布形  $f$  は大きな変化をするが、これはその領域における流れの構造の劇的な変化に対応しているものと考えられる。

第2図から第5図までの結果を、第7図にまとめて模

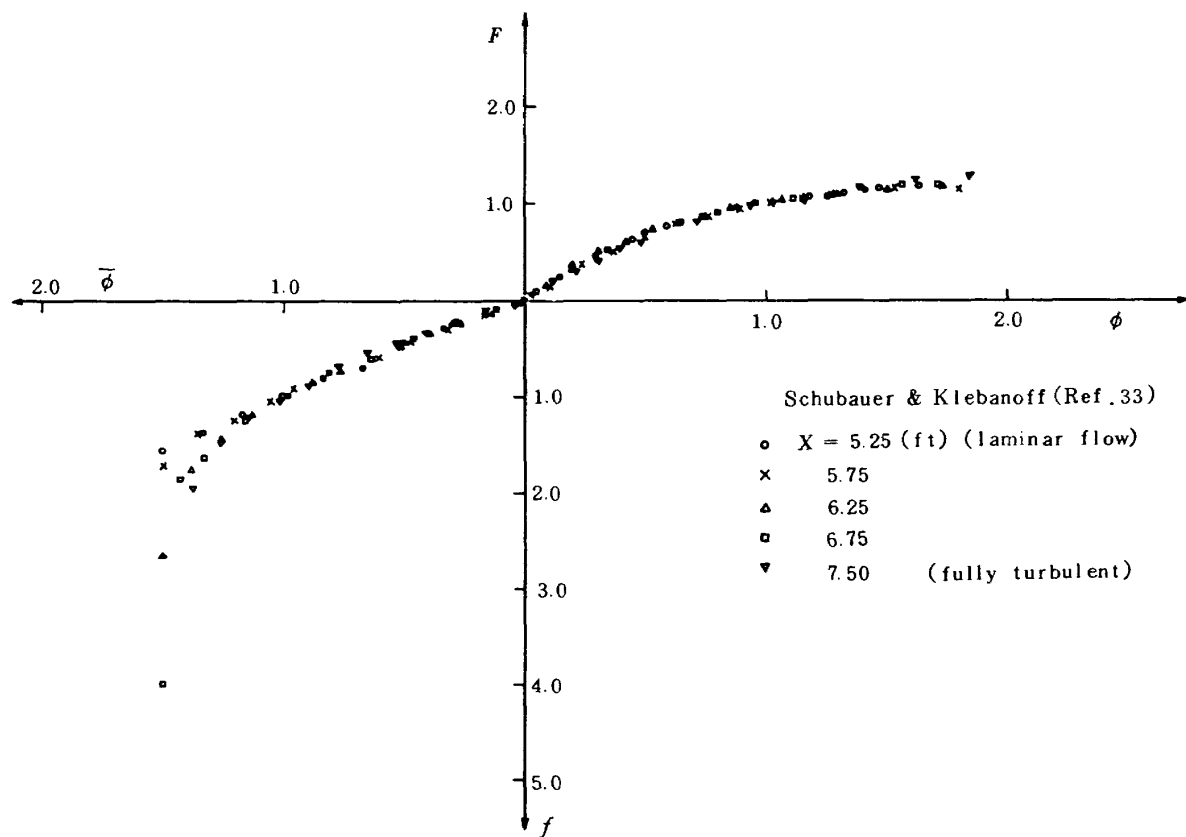
式的にプロットした。各流れにおける速度分布の相似点と相異点が、はっきり理解されるであろう。層流境界層と far wake における分布形は、互いに良く似ている。乱流境界層の速度分布形は、 $1.0 \leq \bar{\phi} \leq 1.5$  における  $f$  だけが、層流境界層における  $f$  から大きくずれることがわかる。

### 2.3 統一的な速度分布族

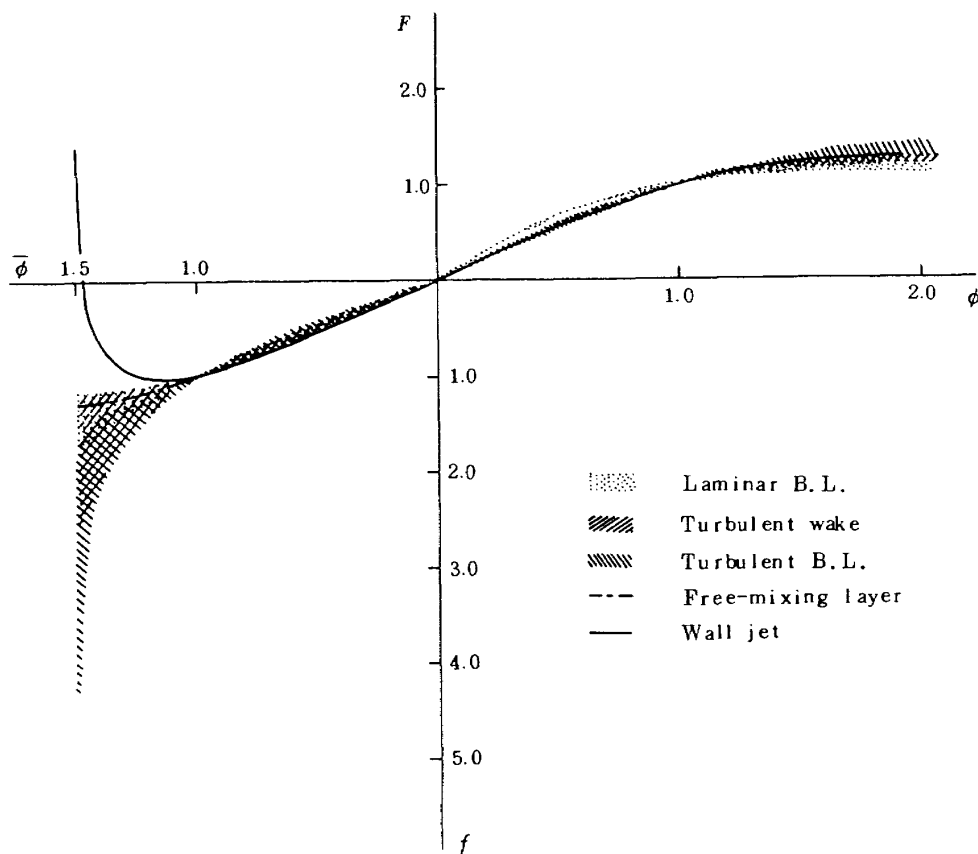
前節の解析から層流と乱流の様々な流れに対する速度分布族は、 $f$  と  $F$  を適当な(パラメータを含んだ)解析式によって表現することにより構成できることがわかる。特に第7図の結果は、一般の  $f$  (又は  $F$ ) は、層流境界層における  $f$  (又は  $F$ ) を基礎として次のように表現できることを示唆している。



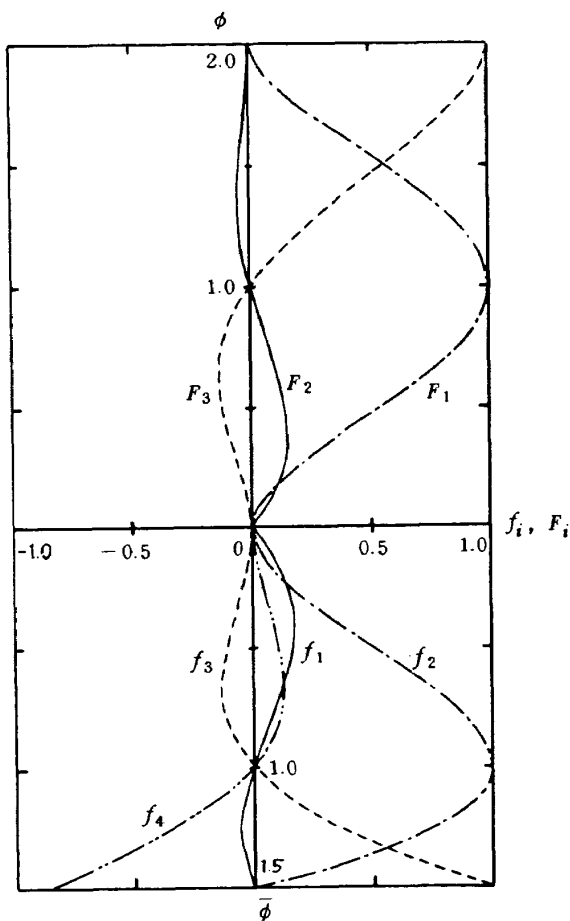
第6図(a) 層流境界層における速度分布の相似性



第6図(b) 遷移境界層における平均速度分布の相似性



第7図 様々な流れにおける速度分布の比較

第8図  $f_i(\bar{\phi})$  と  $F_i(\phi)$  の関数形

$$f = f_L + \tilde{f} \quad \text{および} \quad F = F_L + \tilde{F} \quad (21)$$

ここで添字  $L$  は層流境界層を意味し、 $\tilde{f}$  は  $f$  の  $f_L$  からのずれを示す。 $F$  についても同様である。

$f_L$  と  $F_L$  は、指定された条件を満たす、 $\bar{\phi}$  と  $\phi$  の多項式によって表現することが出来る。それらは、

$$f_L = f_2(\bar{\phi}) + a_0 f_1(\bar{\phi}) + f_{1.5} \cdot f_3(\bar{\phi}) \quad (22a)$$

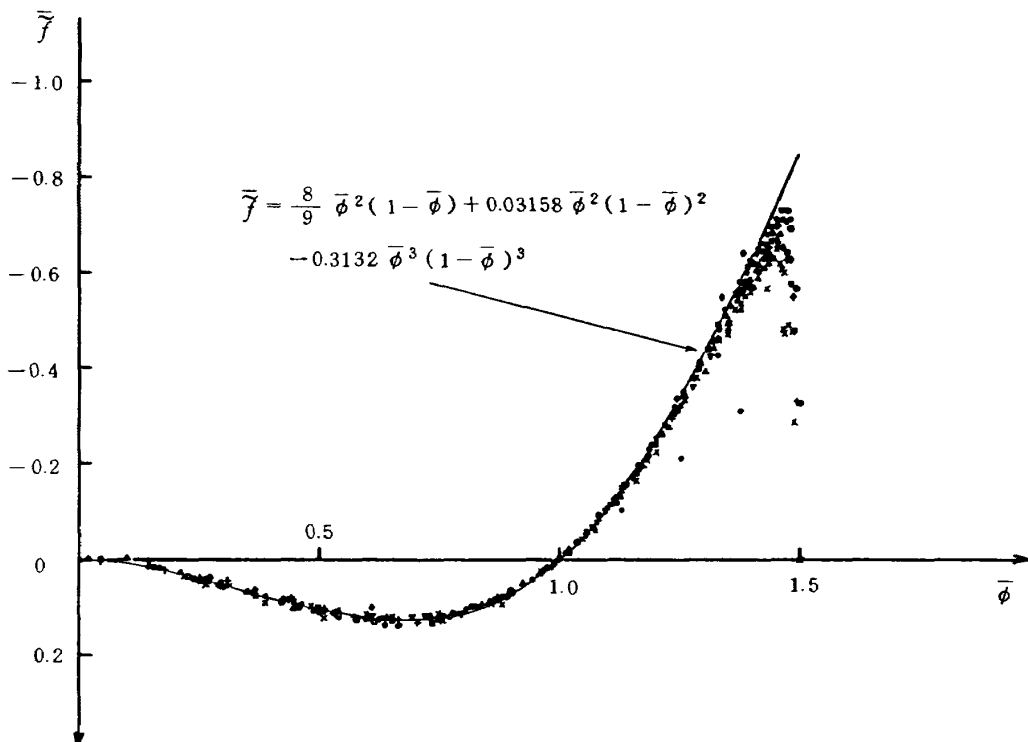
$$F_L = F_1(\phi) + A_0 F_2(\phi) + F_\infty \cdot F_3(\phi) \quad (22b)$$

で与えられる(詳細については附録参照)。第8図は  $f_i$  と  $F_i$  ( $i=1, 2, 3$ ) の分布形を示している。②で  $a_0$ ,  $A_0$  はそれぞれ  $\bar{\phi} = \phi = 0$  ( $y = 0.45\delta$ ) における  $df_L/d\bar{\phi}$ ,  $dF_L/d\phi$  の値であり、速度勾配  $\partial U/\partial y$  の連続性から

$$A_0 = \frac{17}{15} \frac{U_M - U_{15}}{U_{70} - U_M} a_0 \quad (23)$$

という関係がある。 $f_{1.5}$  は  $\bar{\phi} = 1.5$  ( $y = 0$ ) における  $f$  の値、 $F_\infty$  は  $\phi = 2$  ( $y = 1.13\delta$ ) における  $F$  の値である。

次に、層流境界層以外の流れにおける  $\tilde{f}$  と  $\tilde{F}$  を、②と実験データを使って調べることにする。まず乱流伴流の場合には、 $\tilde{f}$  と  $\tilde{F}$  は無視できるほど小さい量であることがわかる。すなわち伴流の  $f$  と  $F$  は、 $f_L$  と  $F_L$  によってそれぞれ十分精度よく表現できる。このことは、両者の間の類似性(第7図)から予想されることと矛盾しない。乱流および遷移境界層の場合には、 $\tilde{F}$  は同じく無視でき

第9図 乱流境界層および遷移境界層における規格化された関数  $\tilde{f}$   
(データ源は第2図と第4図である)

るほど小さいが、 $\tilde{f}$ はもはや微量ではないことがわかる。第9図は、規格化された $\tilde{f}$

$$\tilde{f} = \tilde{f} / (f_{1.5} - 2.25 + 0.75 a_0) \quad (24)$$

が、壁のごく近く ( $\bar{\phi} > 1.4$ ) を除いて殆んど普遍的な曲線にまとまることを示している。この曲線 $\tilde{f}$ は、

$$\tilde{f} = f_4(\bar{\phi}) (1 - e^{-\lambda(1.5 - \bar{\phi})}) \quad (25)$$

によって良く表現できる ( $f_4$ については付録参照)。パラメータ $\lambda$ は、 $\tau_w = \mu (\partial U / \partial y)_{y=0}$ から定義される。

$$\lambda = \frac{0.3 R \delta (C_f / 2) \sqrt{(\tilde{U}_M - \tilde{U}_{1.5}) + 4.5 - 0.5 a_0 - (10/3) f_{1.5}}}{0.85 (f_{1.5} - 2.25 + 0.75 a_0)} \quad (26)$$

この普遍的な曲線 $\tilde{f}$ は、乱流境界層に特徴的なものである。 $\tilde{f}$ の定義から、パラメータ $\lambda$ は層流境界層と乱流伴流では恒等的に零である。 $\lambda$ についてこのような約束をすると、 $f$ の統一的表現は次のように書ける。

$$f = f_2(\bar{\phi}) + a_0 f_1(\bar{\phi}) + f_{1.5} \cdot f_3(\bar{\phi}) + (f_{1.5} - 2.25 + 0.75 a_0) f_4(\bar{\phi}) (1 - e^{-\lambda(1.5 - \bar{\phi})}) \quad (27)$$

$F$ の統一的表現は、(22b)で与えられる。

$$F = F_1(\bar{\phi}) + A_0 F_2(\bar{\phi}) + F_\infty \cdot F_3(\bar{\phi}) \quad (28)$$

結局、統一的な速度分布族は、(27)と(28)を

$$U = \begin{cases} U_M + (U_{1.5} - U_M) f \\ U_M + (U_{70} - U_M) F \end{cases} \quad (29a) \quad (29b)$$

に代入することにより得られる。

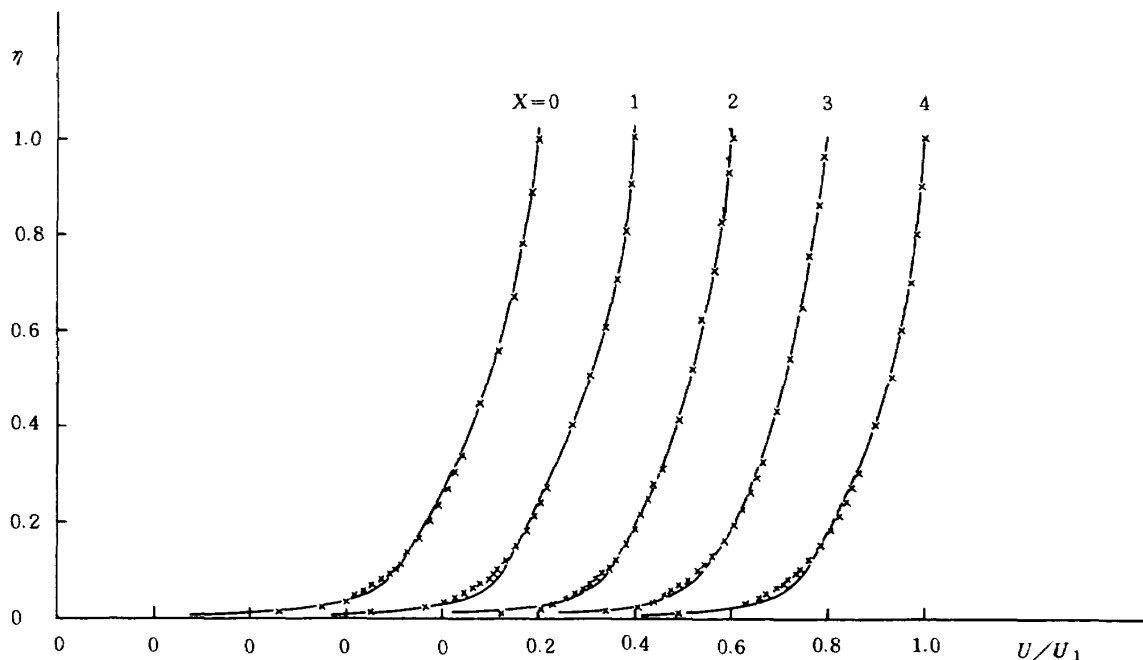
#### 2.4 統一的な速度分布族の検証

前節で得られた統一的な速度分布族は、現著者が利用できた実験的もしくは理論的データ群の解析から帰納的

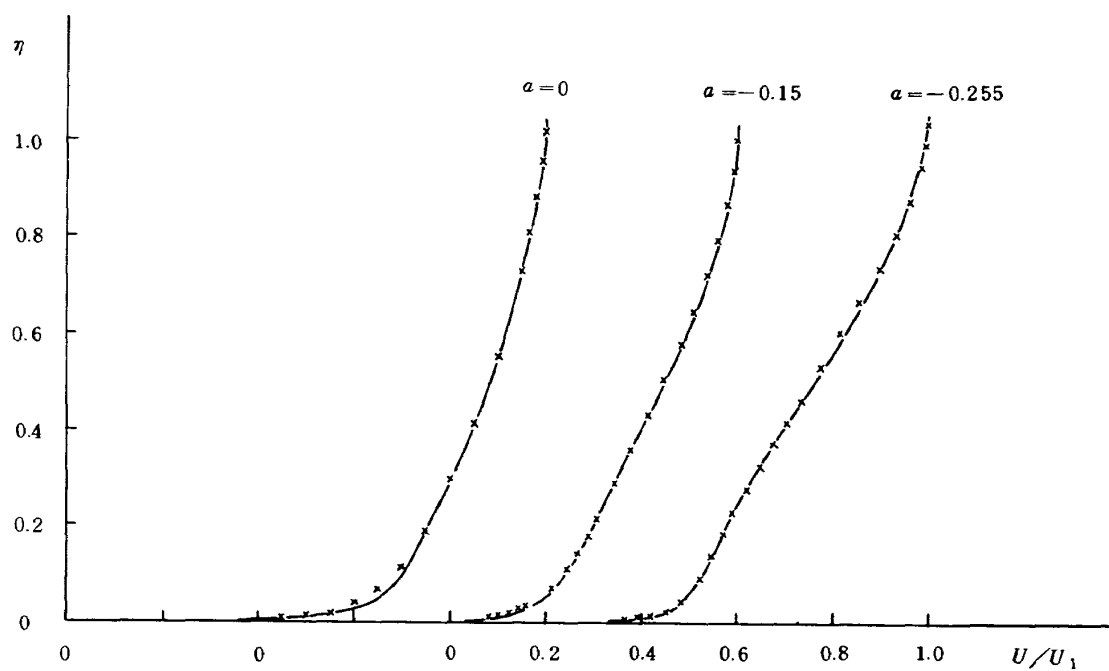
に得られたものである。それゆえその速度分布族を基礎となったデータ群に適用して、その有効性を検証することは論理的ではないが、本節であえてそれを行なう理由は次の通りである。データ群の解析により得られた情報は、(20)のようなパラメータを使うと様々な速度分布がほぼ一本の線にまとめられるということだけである。その得られた相似曲線をどのように(解析的に)表現するかはまた別の問題であり、それに対しては独立な検証が必要である。なぜならその解析的表現は相似曲線に対する近似式であるからである。従って、本節で行なう検証は、前節で与えた $f$ や $F$ に対する解析的表現の検証に他ならないが、直接それを行なうのではなく、形を変えて速度分布について行なうことにしたものである。

第10図において、前節で得られた新しい速度分布族と乱流境界層の実験データの比較を行なった。分布族に含まれるパラメータ ( $U_{1.5}$ ,  $U_M$ ,  $U_{70}$ ,  $a_0$ ,  $\lambda$ ) に対しては、厳密な実験値を用いた。(これは以下の比較においても同様である) 次の場合について比較がなされた。(i) 順圧力勾配を持つ層 (Herring & Norbury<sup>11)</sup>,  $\beta = -0.35$ ), (ii) 平衡境界層 (Klebanoff<sup>12)</sup>, Bradshaw<sup>14)</sup>), (iii) 強い逆圧力勾配を持つ層 (Newman<sup>17)</sup>), (iv) 緩和を受けた層 (Bradshaw & Ferriss<sup>18)</sup>, Bradshaw<sup>19)</sup>) 及び(v) 剥離点における層 (Sandborn & Liu<sup>34)</sup>)。その他多くの場合について比較したが、紙面の都合上割愛した。実験値との一致はいずれも良好である。

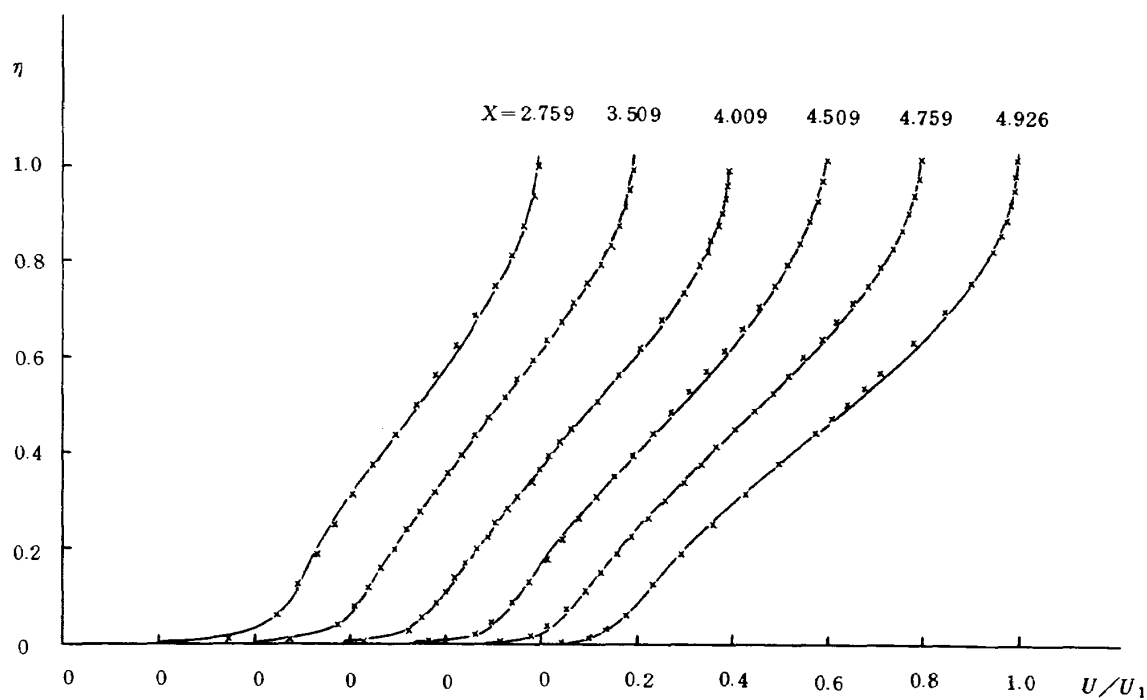
壁からの吹出し(又は吸込み)がある境界層における速度分布についての比較は、第11図に示されている。本



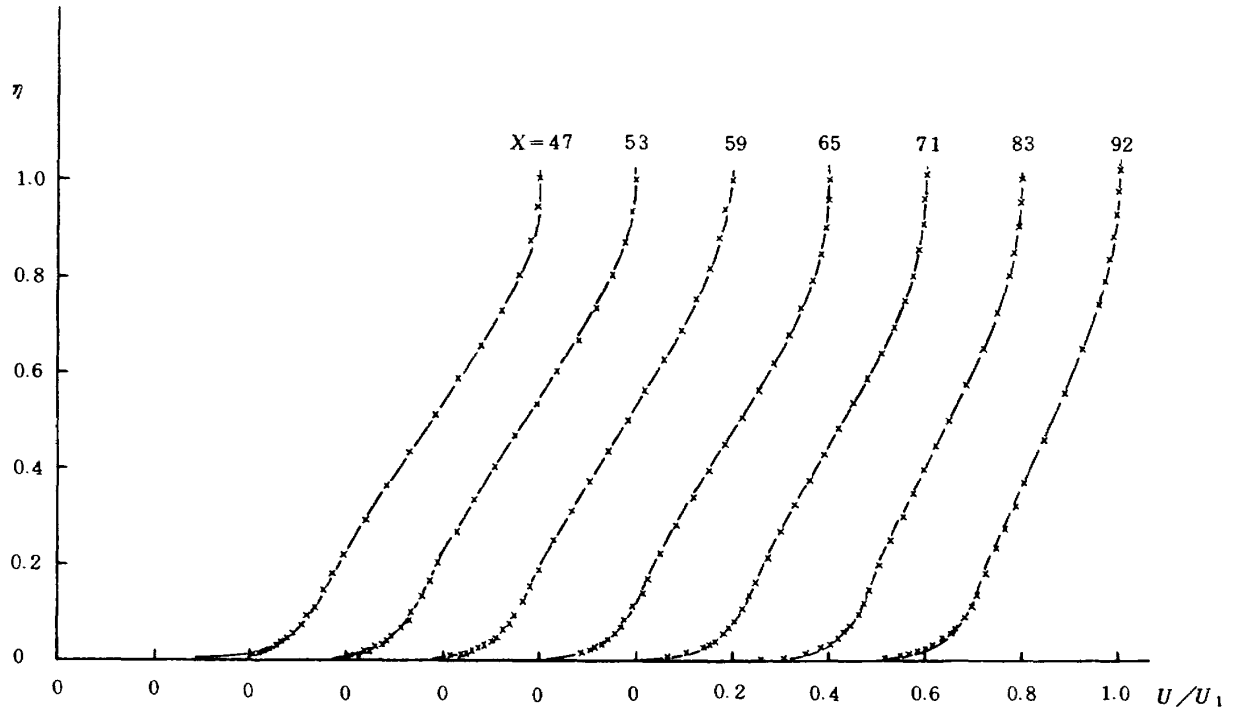
第10図(i) Herring & Norbury  $\beta = -0.35$  (Ref.11)



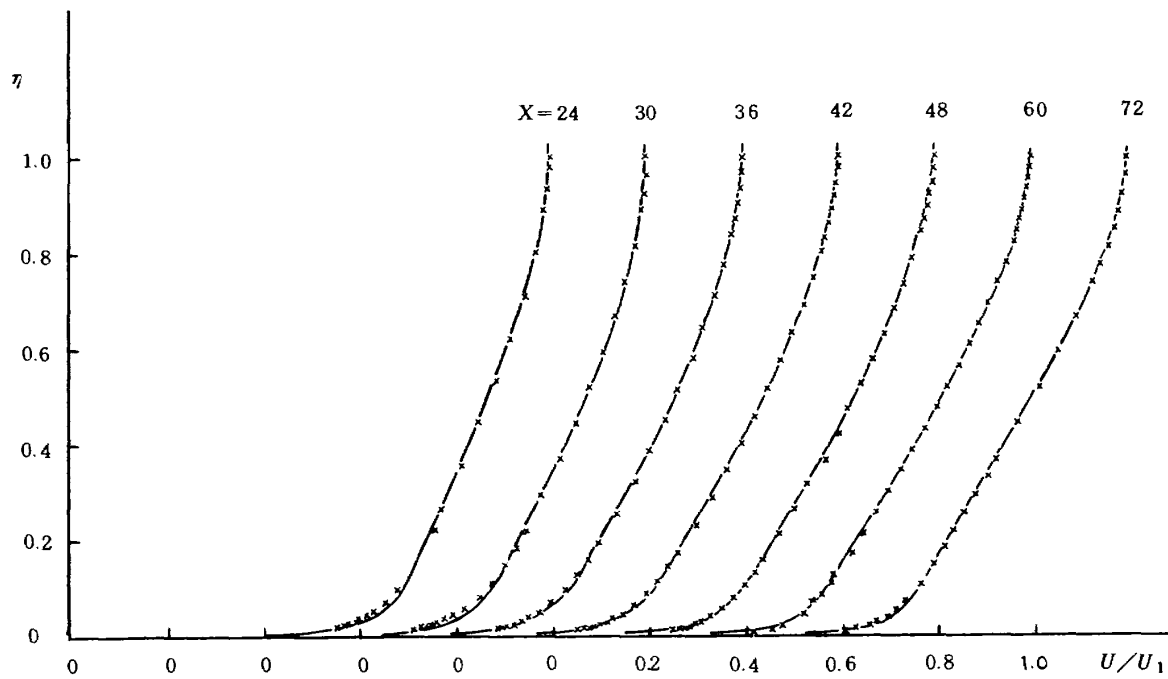
第 10 図(ii) Equilibrium layers : Klebanoff  $\alpha = 0$  (Ref. 12),  
Bradshaw  $\alpha = -0.15, -0.255$  (Ref. 14)



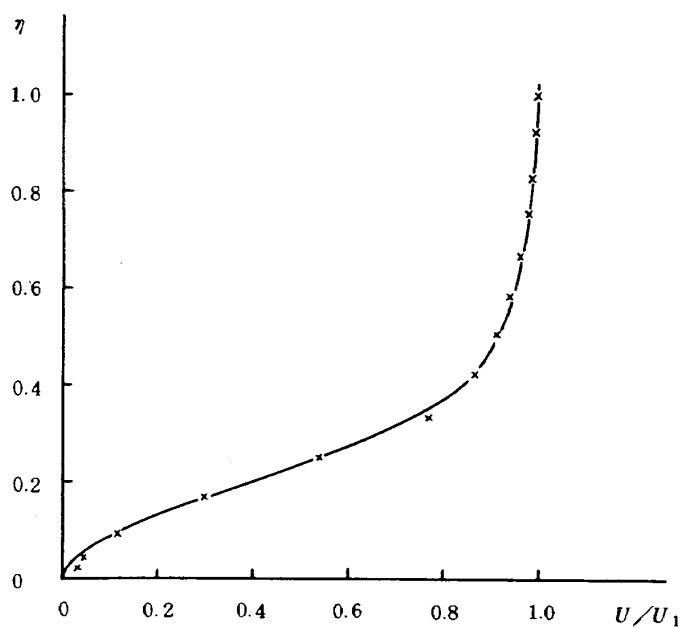
第 10 図(iii) Newman (Ref. 17)



第10図 (V) Bradshaw & Ferriss  $\alpha = -0.255 \rightarrow 0$  (Ref. 18)

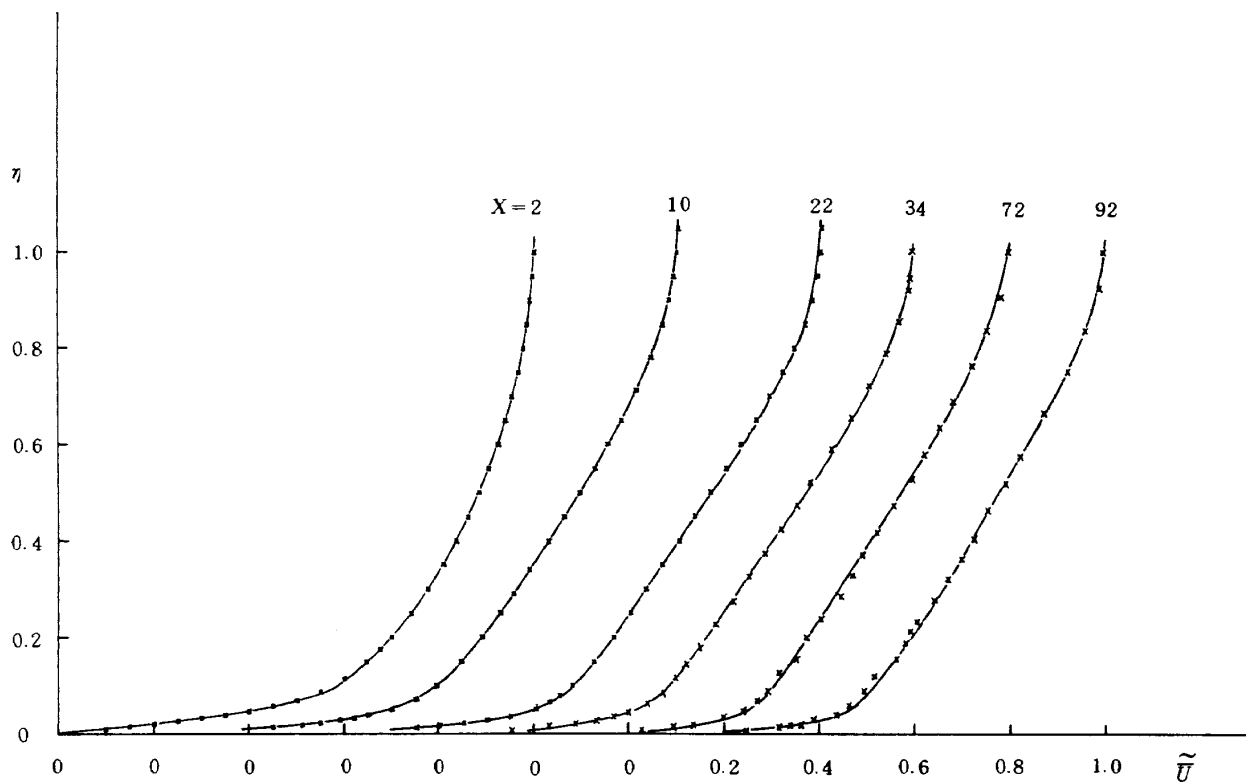


第10図 (V) Bradshaw  $\alpha = 0 \rightarrow -0.255$  (Ref. 19)



第 10 図(V) Sandborn &amp; Liu (Ref. 34)

第 10 図 乱流境界層における新しい速度分布族と実験との比較 — 速度分布族 × 実験



Andersen, Kays and Moffat (Ref. 21)

第 11 図 壁からの吹出しがある乱流境界層における新しい速度分布と実験との比較 — 速度分布族, × 実験

分布族は、その表現に何らの修正を行なうことなしに、実験データ (Andersen, Kays & Moffat<sup>21)</sup>) と良く一致する結果を与える。

遷移境界層の実験データ (Schubauer & Klebanoff<sup>33)</sup>) との比較は第12図で行なわれた。両者の一致は良好である。2.1.2で展望した速度分布族はいずれもこの場合には適用できない。パラメータ  $\lambda$  の値は、遷移の始まる  $x = 5.25 \text{ ft}$  では零であるが、十分な乱流となった  $x = 8.0 \text{ ft}$  では25まで増加する。

第13図は本分布族と、層流境界層の厳密解との比較を示す。付着流 (Tan<sup>31)</sup>) と剝離流 (Stewartson<sup>35)</sup>) の両方に対して一致は良好であり、吸込みのある流れ (Thwaites<sup>36)</sup>) に対しても良く一致している。速度分布族(1)は、このような広い範囲の適用性を持たない。Head の分布族も剝離流では使うことが出来ない。

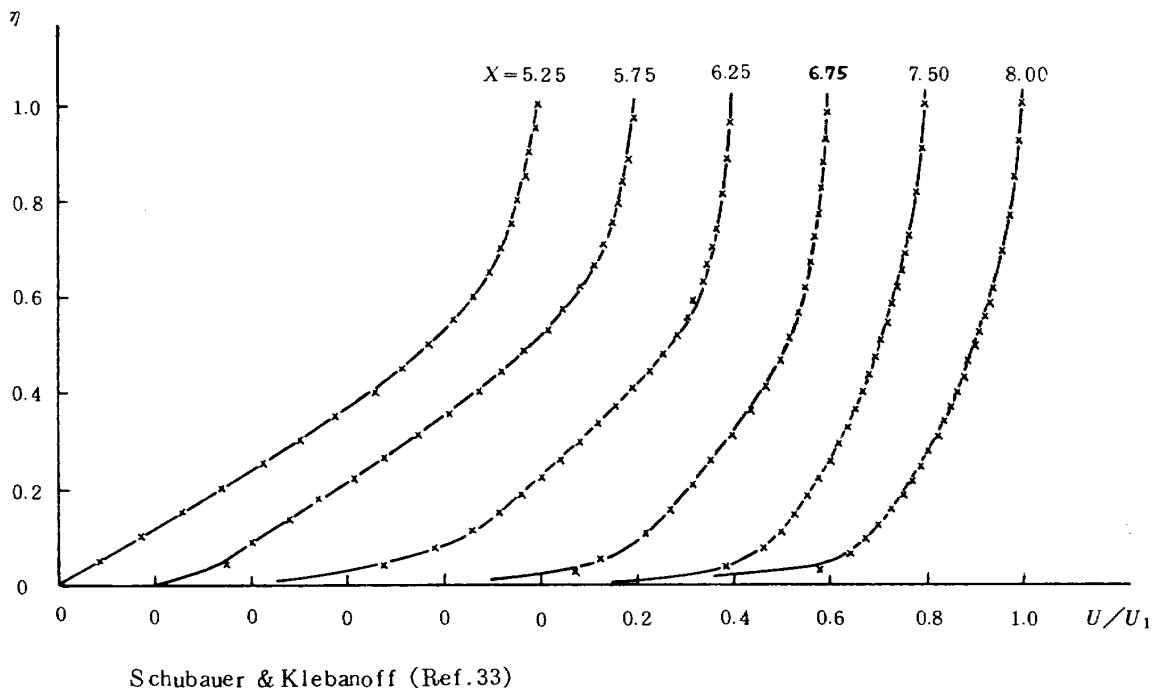
第14図は乱流伴流の場合の比較を示す。本分布族はこの場合にも良い精度を持つが、near wake領域では若干精度が悪くなる。しかしこの欠点は、実用的な見地からは、それほど厳しいものではない。

以上の検証から、本分布族は広い適用範囲を持ち、統一的なものとなっていることがわかる。

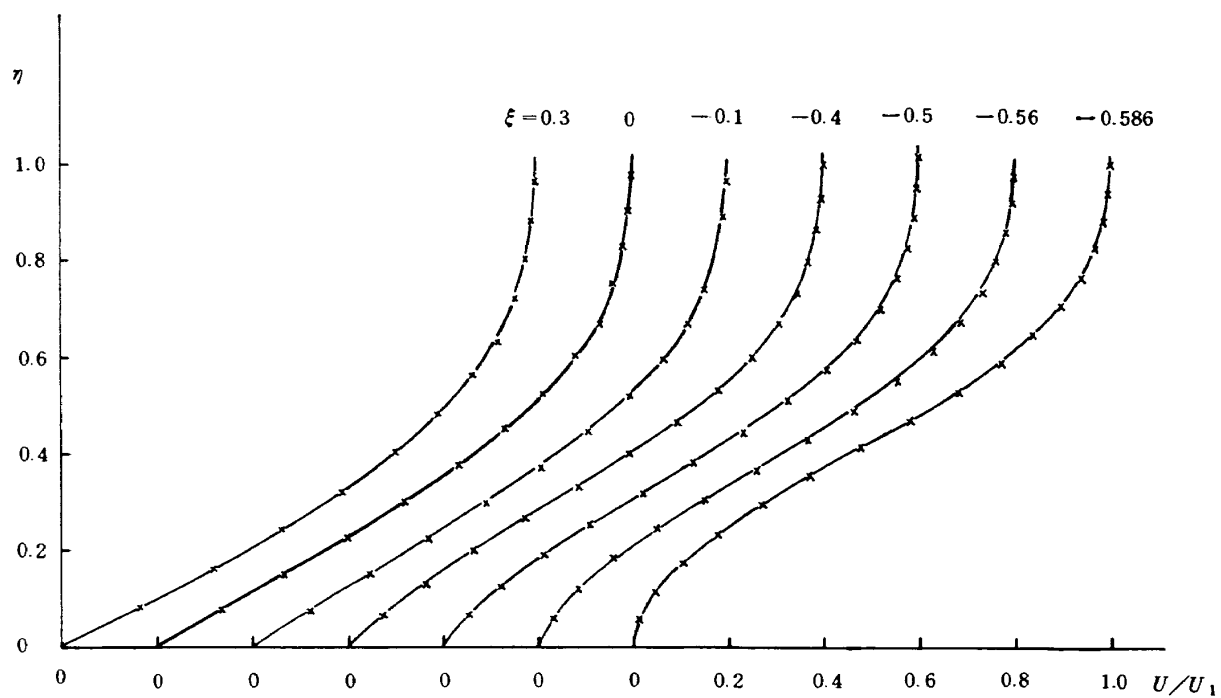
### 3. 特性パラメータの性質

前章で得られた統一的な速度分布族は、結果的には壁 (又は  $y = 0$ ) と層内の三点 ( $y = 0.158, 0.45\delta, 0.79\delta$ ) および層の縁における条件をみたすように、その解析的表現を与えたようになっている。層内の多くの点での条件を使って未知パラメータを増やせば、分布族の精度が上るのは当然である。しかし、分布族はあくまでも支配方程式の厳密解に対する一つの近似的表現として工夫されるべきものであり、未知パラメータは少なければ少ないほど良いと考えられる。本分布族では層内に三点を選んだが、それらは準普遍的な速度欠損則を導く過程で見出されたものであり、分布族の適用範囲を拡大するために必要不可欠な条件であった。このように、与えられた条件が増えた結果、分布族29に含まれる未知パラメータは、 $U_{15}, U_M, U_{79}, a_0, \lambda, U_0$  の6個となった。(このうち  $\lambda$  は層流境界層と乱流伴流では零であり、 $U_0$  は境界層に対しては零である) しかしながら、これらのパラメータが互いに独立なものであるかどうかは、調べてみなければわからない。それゆえ本章では、各々の流れに対してこれらのパラメータ間の相関関係を調べることにする。

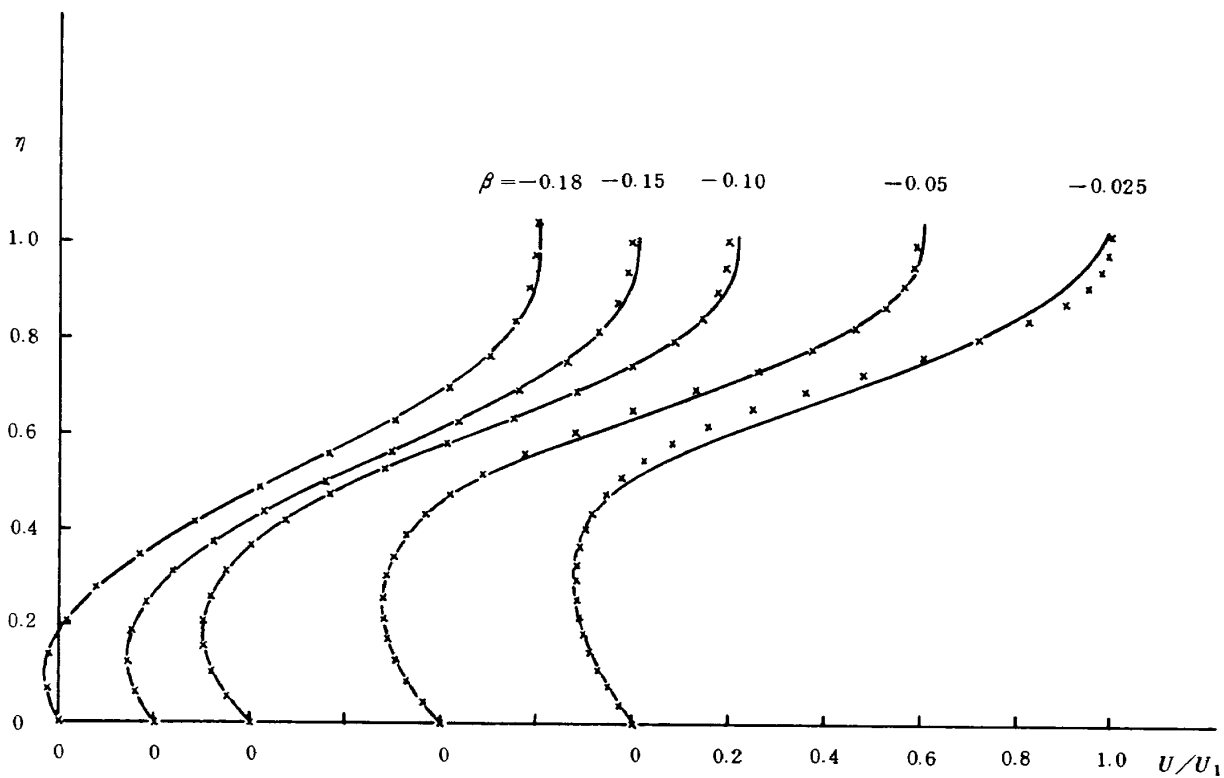
第15図は、乱流境界層と乱流伴流における  $\tilde{U}_{15}$  と  $\tilde{U}_{79}$  を  $\tilde{U}_M$  に対してプロットした結果である。図中の実線は、いわゆる平衡乱流境界層における相関曲線である。非平



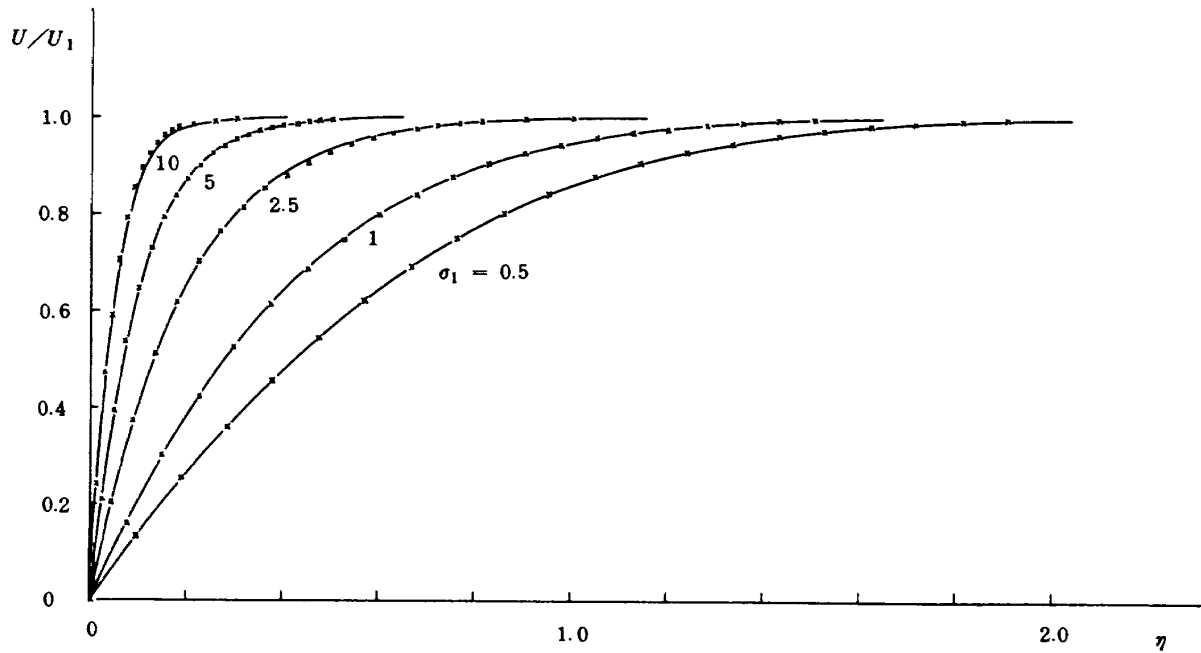
第12図 遷移境界層における新しい速度分布族と実験との比較 — 新しい速度分布族, ×実験



第13図(a) Tani (Ref.31)

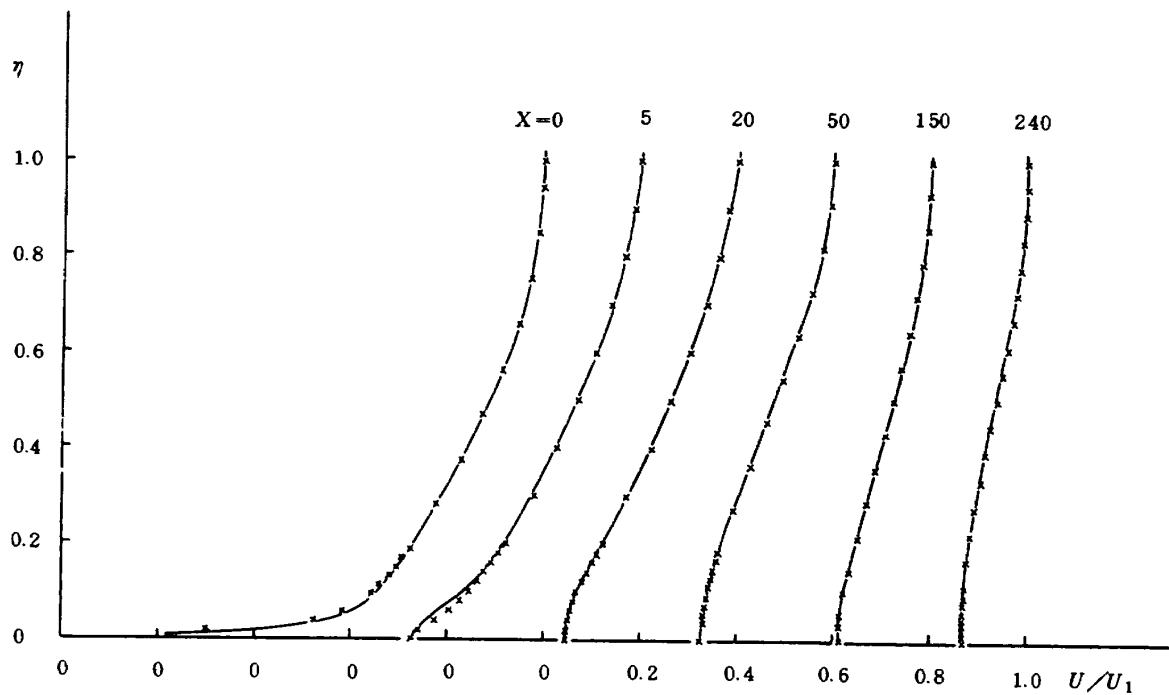


第13図(b) Stewartson (Ref.35)

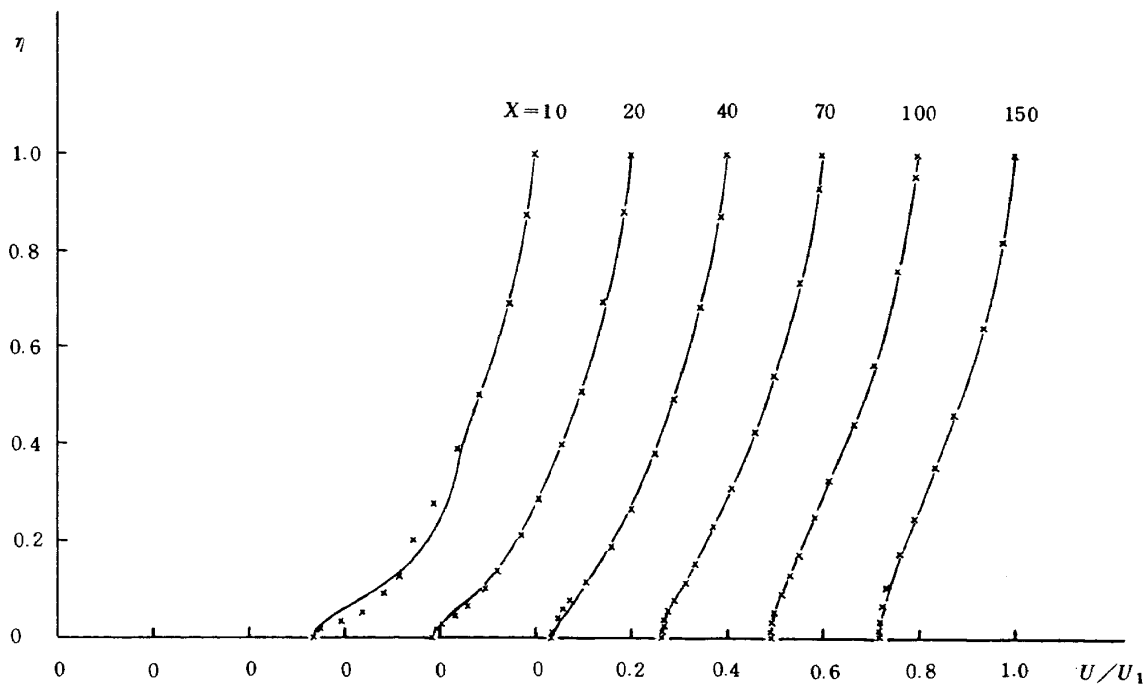


第13図(c) Thwaites (Ref. 36)

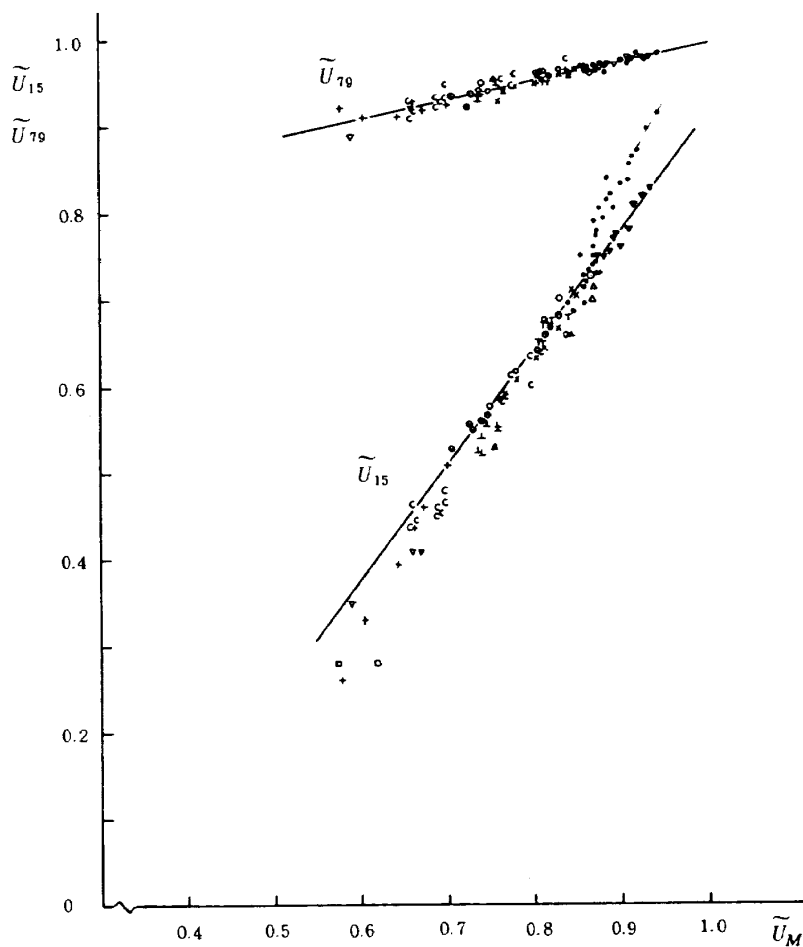
第13図 層流境界層における新しい速度分布族と厳密解の比較，  
 — 新しい速度分布族，× 厳密解



第14図(a) Chevray &amp; Kovasznay (Ref. 22)

第 14 図(b) Toyoda & Hirayama ( $k=0$ ) (Ref.23)

第 14 図 乱流伴流における新しい速度分布族と実験との比較, — 速度分布族, × 実験

第 15 図 乱流剪断流における  $\tilde{U}_{15}$ ・ $\tilde{U}_{79}$  と  $\tilde{U}_M$  の相関

○ Equilibrium B.L (Bradshaw), △ Sandborn & Sloger, ○ Bradshaw & Ferriss, ( $\alpha = -0.255 \rightarrow 0$ )  
 × Bradshaw ( $\alpha = 0 \rightarrow -0.255$ ), + Newman, ▽ Spangenberg et.al, ▽ Herring & Norbury ( $\beta = -0.35$ ),  
 ▽ Herring & Norbury ( $\beta = -0.53$ ), □ Stratford, c Clauser, ⊥ Andersen et.al.; ● turbulent wakes, 実線は, 平衡乱流境界層に対する相関曲線, 破線は, 十分遠方の乱流伴流に対する相関曲線.

衡境界層におけるデータも、ほぼこの線の近くに集まっており、十分に発達した乱流ではこれらのパラメータ間の相関は良好である。即ち、これらのパラメータは互いに独立ではない。第16図は  $a_0$  と  $\tilde{U}_M$  の関係を示している。図中実線は平衡境界層における相関曲線である。データはこの線のまわりになんちらばっており、両者の相関が良いとは言えない。しかし、 $a_0$  よりも  $a^*(\equiv(\tilde{U}_M - \tilde{U}_{15})a_0)$  の方が物理的意味がある ( $a^*$  は  $y = 0.45 \delta$  における無次元速度勾配  $\partial \tilde{U} / \partial \eta$  の 0.3 倍に等しい) ので、 $a^*$  と  $\tilde{U}_M$  を第17図にプロットした。両者の相関は良好であることがわかる。境界層に対する相関曲線と伴流に対するそれは、はっきりと区別できる。この結果も  $a_0$  (又は  $a^*$ ) は他のパラメータと独立ではないことを示している。

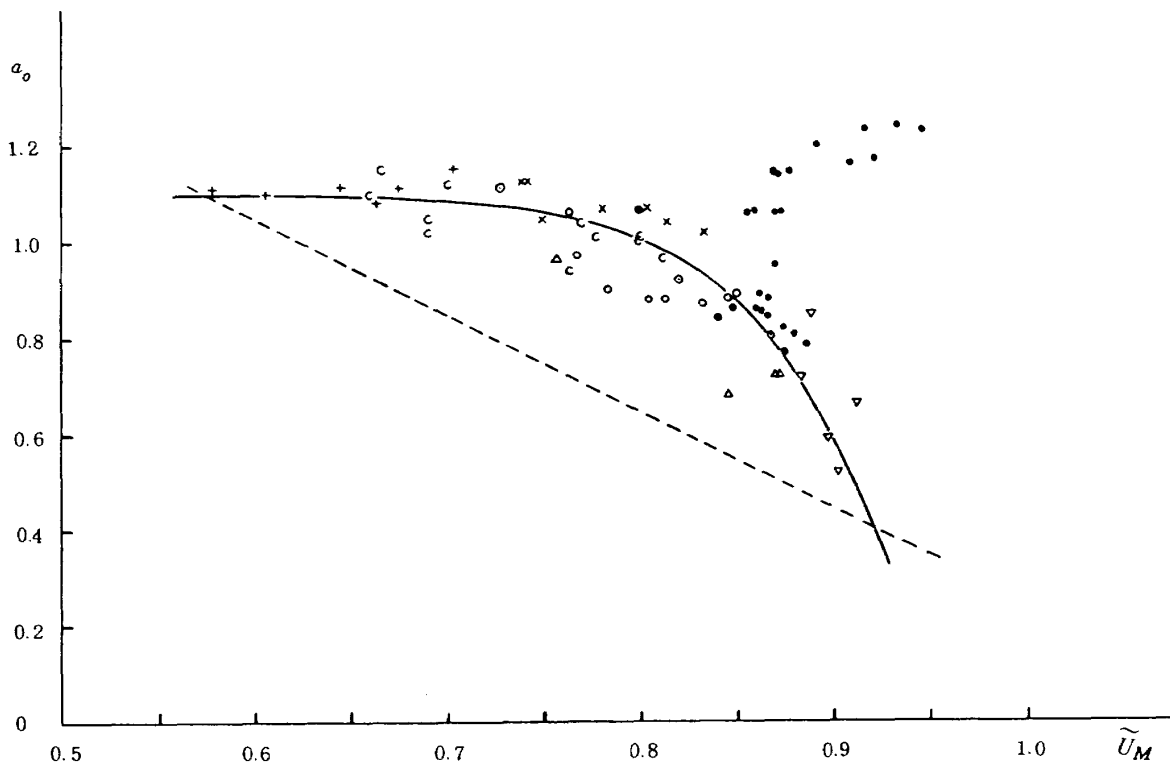
壁のごく近くの領域における速度分布を特徴づけるパラメータは  $\lambda$  である。26からわかるように、 $\lambda$  にはレイノルズ数  $R_\delta$  と表面摩擦係数  $C_f$  が含まれているので、他のパラメータとの良い相関は期待できない。すなわち、 $\lambda$  は他のパラメータと独立である。第18図は  $(C_f/2) \times R_\delta^{0.268}$  と  $\tilde{U}_M$  の関係を調べた結果である。実線は平衡境界層における相関曲線で、

$$(C_f/2) R_\delta^{0.268} = 0.09(\tilde{U}_M - 0.54) \quad (30)$$

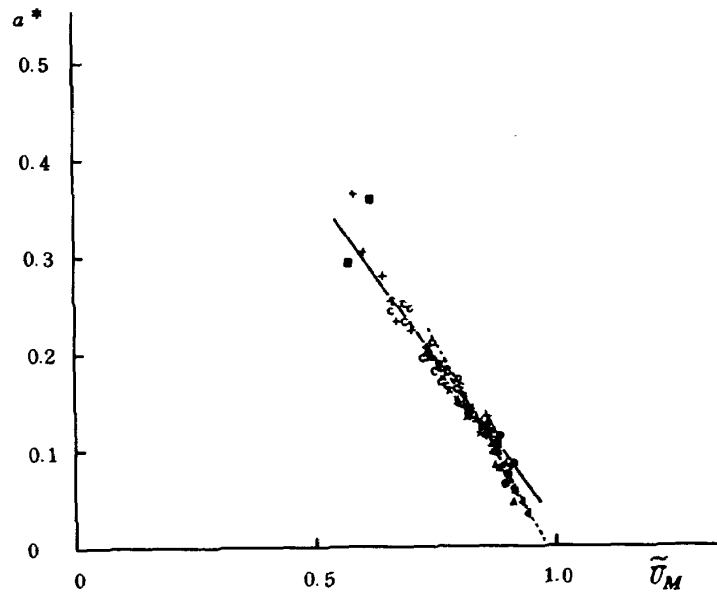
で表わされる。乱流境界層において層の外寄り領域における速度分布を特徴づけるパラメータ ( $U_{15}, U_M, U_{70}, a_0$ ) と、壁の領域におけるパラメータ  $\lambda$  とが互いに独立であると言うことは、この二つの領域で本質的に異った運動が存在することを意味している。これは当然のことながら、乱れの詳細な実験結果から導かれた描像と一致している。

第19図には、本研究で用いたすべての乱流境界層について、積分厚さの比  $\delta^*/\theta$ 、 $\epsilon/\theta$  を  $\tilde{U}_M$  に対してプロットした結果を示す。そこには比較のため、層流境界層に対するデータも一緒に示してある。 $\epsilon/\theta$  の曲線は両境界層で殆んど同一であり、 $\tilde{U}_M$  の一意的な関数として表わすことが出来る。一方、 $\delta^*/\theta (\equiv H)$  の曲線は、絶対値は互いに大きく異なっているが、その形状は良く似ている。多少のちらばりはあるが、 $H$  を  $\tilde{U}_M$  の一意的な関数として表現することが出来る。

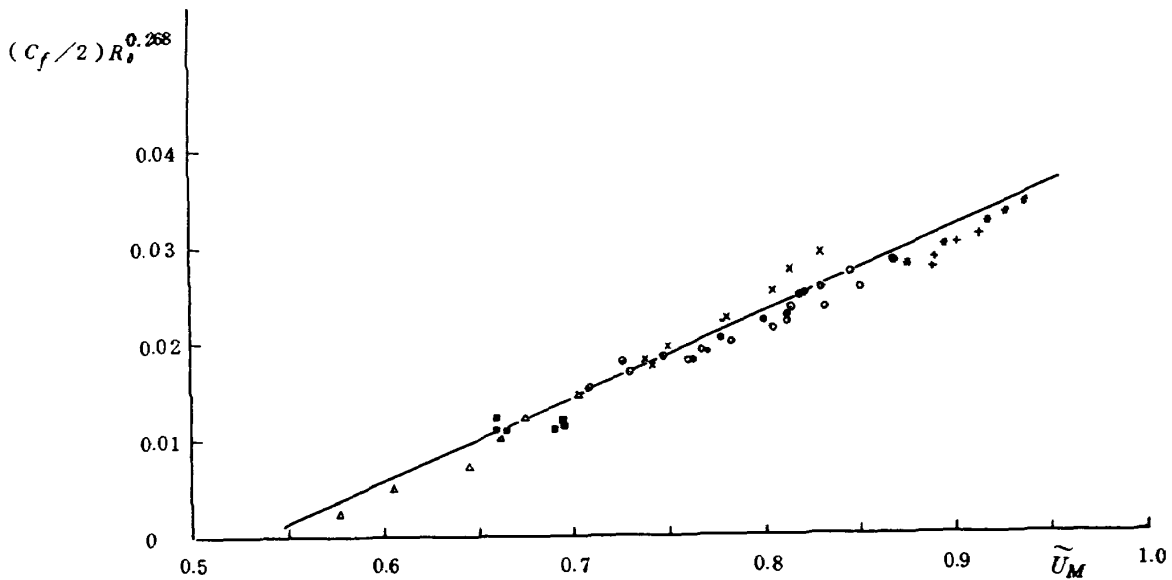
乱流伴流について言えば、第15図からわかるように、 $\tilde{U}_M$  と  $\tilde{U}_{70}$  の関係は乱流境界層におけるそれと殆んど区別できない。また  $\tilde{U}_M$  と  $\tilde{U}_{15}$  は far wake では良い相関を持っているが、near wake では一意的な相関はない。そこでは十分に発達した乱流境界層の分布から、純然たる伴流の分布への移り変わりがあるからである。 $a_0$  と  $\tilde{U}_M$



第16図 乱流境界層と伴流における  $a_0$  と  $\tilde{U}_M$  の関係、実線は平衡乱流境界層に対する相関曲線、破線は層流境界層に対する相関曲線（後出）、その他の記号は、第15図参照のこと。

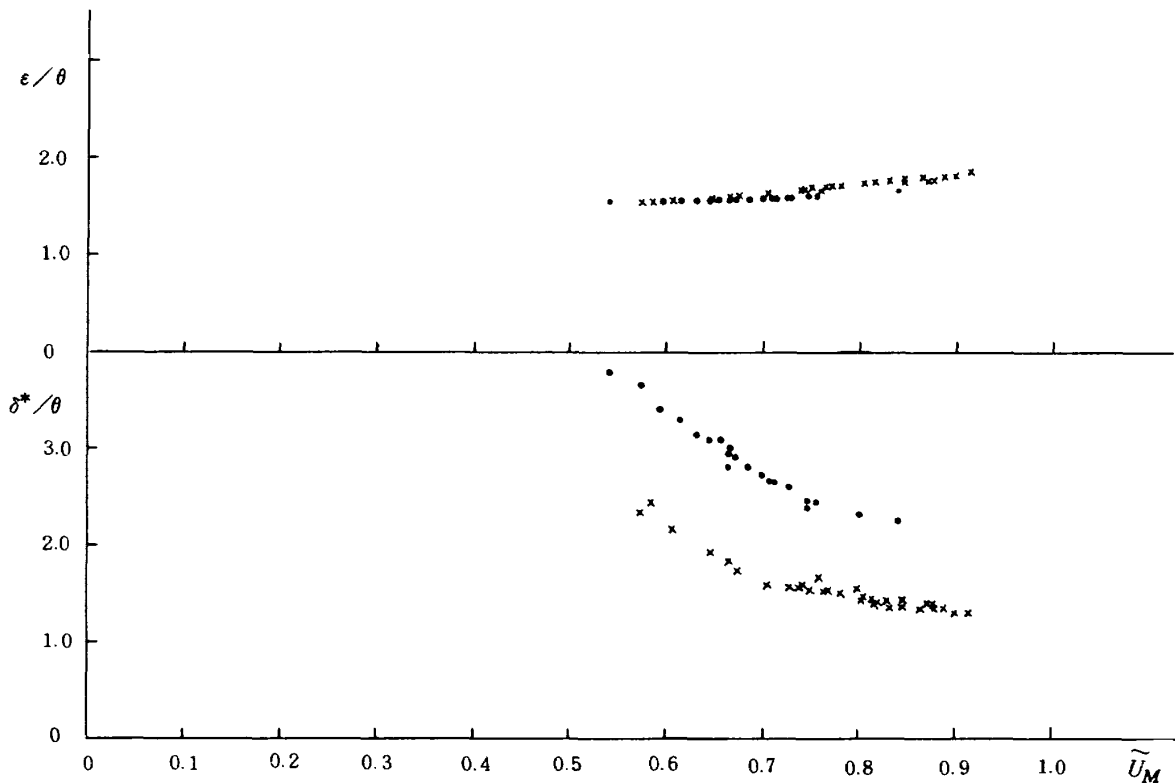


第 17 図 乱流境界層と伴流における  $a^*$  と  $\tilde{U}_M$  の相関，実線は乱流境界層に対する相関曲線，破線は乱流伴流に対する相関曲線。その他の記号は，第15図参照。



第 18 図 乱流境界層における  $(C_f/2) R_δ^{0.268}$  と  $\tilde{U}_M$  の相関

- × Bradshaw  $a = -0.255 \rightarrow 0$  ; ○ Bradshaw  $a = 0 \rightarrow -0.255$  ; △ Newman ;  
 ○ Bradshaw ( $a = -0.15$  and  $-0.255$ ) ; + Herring & Norbury ( $\beta = -0.35$ ) ; \* Herring & Norbury ( $\beta = -0.53$ )  
 ● Clauser No.1 ; ■ Clauser No.2 ; ◎ Klebanoff ( $a = 0$ )  
 実線は，平衡乱流境界層に対する相関曲線。

第19図  $\varepsilon/\theta$ 、 $\delta^*/\theta$  と  $\tilde{U}_M$  の相関。●層流境界層，×乱流境界層

の関係は第16図に、 $a^*$  と  $\tilde{U}_M$  の関係は第17図に示されている。 $a^*$  と  $\tilde{U}_M$  は伴流においても良い相関を持っている。

次に第20図は層流境界層と遷移境界層における  $\tilde{U}_{15}$  と  $\tilde{U}_{70}$  を  $\tilde{U}_M$  に対してプロットした結果を示す。図の実線で示したように、層流ではこれらのパラメータは互いに良い相関を持っている。その曲線は、乱流境界層に対するもの（図の破線）とは異っている。遷移境界層のデータは、これら二本の曲線の間を動いていることがわかる。この曲線は、当然のことながら、普遍的なものではない。遷移開始点と終了点における  $\tilde{U}_M$  と  $\tilde{U}_{15}$ 、 $\tilde{U}_M$  と  $\tilde{U}_{70}$  の値の組合せが一意的ではないからである。第21図は、 $a_0$  と  $\tilde{U}_M$  の関係を示す。層流の場合には、両者の相関は非常に良好である。遷移境界層のデータは、層流と乱流の相関曲線の間を移動する。

第20図と21図の結果は、付着した層流境界層における速度分布が、一個のパラメータ  $\tilde{U}_M$  によって、完全に表現できることを示している。このことは、乱流境界層における速度分布が、平衡流の場合でさえ、単一のパラメータ  $\tilde{U}_M$  によって表現されなかった（壁の近くではパラメータ  $\lambda$  が支配的である）ことと著しい対比をなしている。乱流境界層には層内に常に異なった尺度を持つ運動が存在するのに対し、層流境界層では全層にわたって一

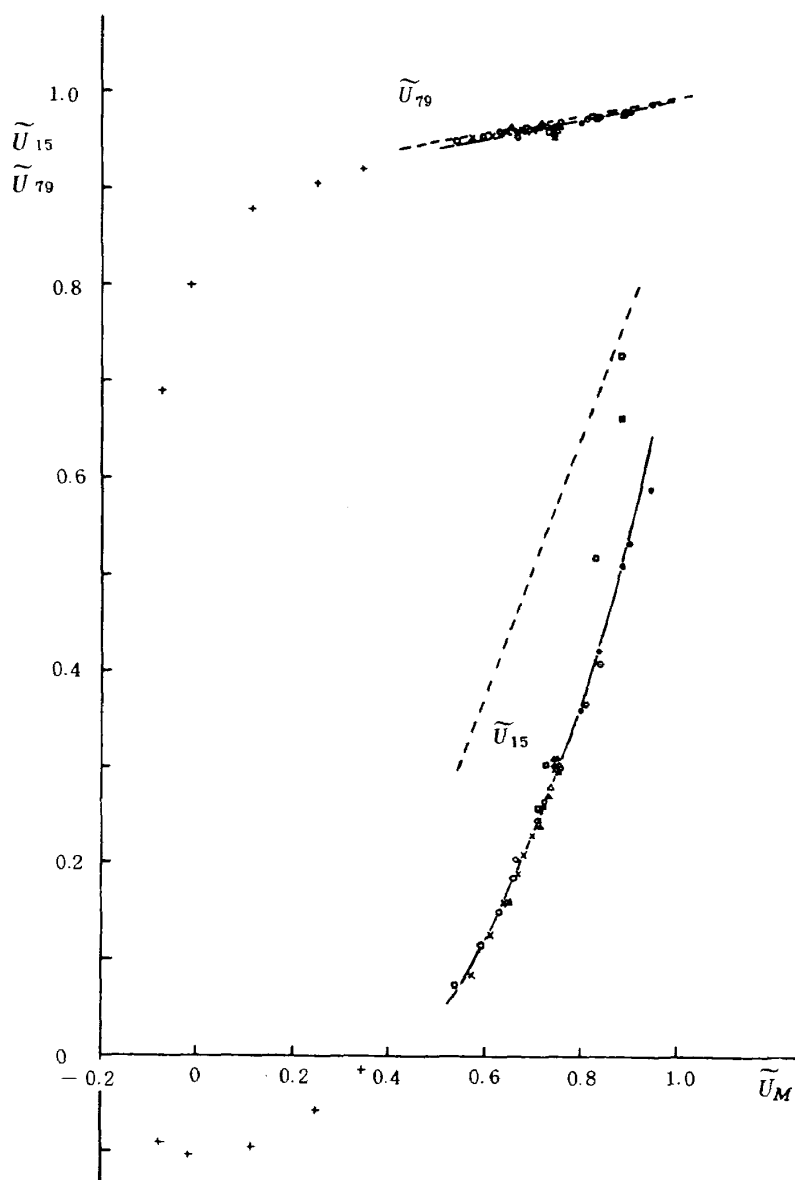
様な尺度の運動が存在していると解釈される。

第20図と21図にはまた、剝離層流境界層(Stewartson)におけるパラメータもプロットされている。曲線は付着流の曲線になめらかにつながるように見えるが、明確な結論を出すにはデータが若干不足している。

以上の結果をまとめると、層流境界層では剝離が生じない限り、分布族の特性パラメータは互いに独立ではなく、一個のパラメータ（例えば） $\tilde{U}_M$  によって他のパラメータが記述できる。しかし、剝離流ではこのことは言えない。一方遷移境界層や乱流＝アウエークでは、特性パラメータ間の相関は良くなく、互いに独立に変化するように思われる。乱流境界層では少なくとも層の外寄り領域での速度分布に関する特性パラメータの間には良い相関があり、互いに独立ではないが、壁の近くの領域での特性パラメータ  $\lambda$  とは独立である。乱流ファウエークでは、層流境界層の場合と同様に、特性パラメータは互いに独立ではなく、単一のパラメータ  $\tilde{U}_M$  のみで表わされる。

#### 4. 乱流剪断応力分布の相似性

粘性剪断流においては平均速度  $U$  の他に、剪断応力  $\tau$  もまた重要な物理変数である。それゆえ本論文の表題から若干はずれるが、本章では剪断応力分布について考察



第20図 層流及び遷移境界層における  $\tilde{U}_{15}$ ,  $\tilde{U}_{79}$  と  $\tilde{U}_M$  の相関

○ Tani ( $n=2$ ) × Tani ( $n=4$ ) △ Hartree ○ Falkner-Skan solution

● Thwaites + Stewartson, □ Schubauer & Klebanoff (transition)

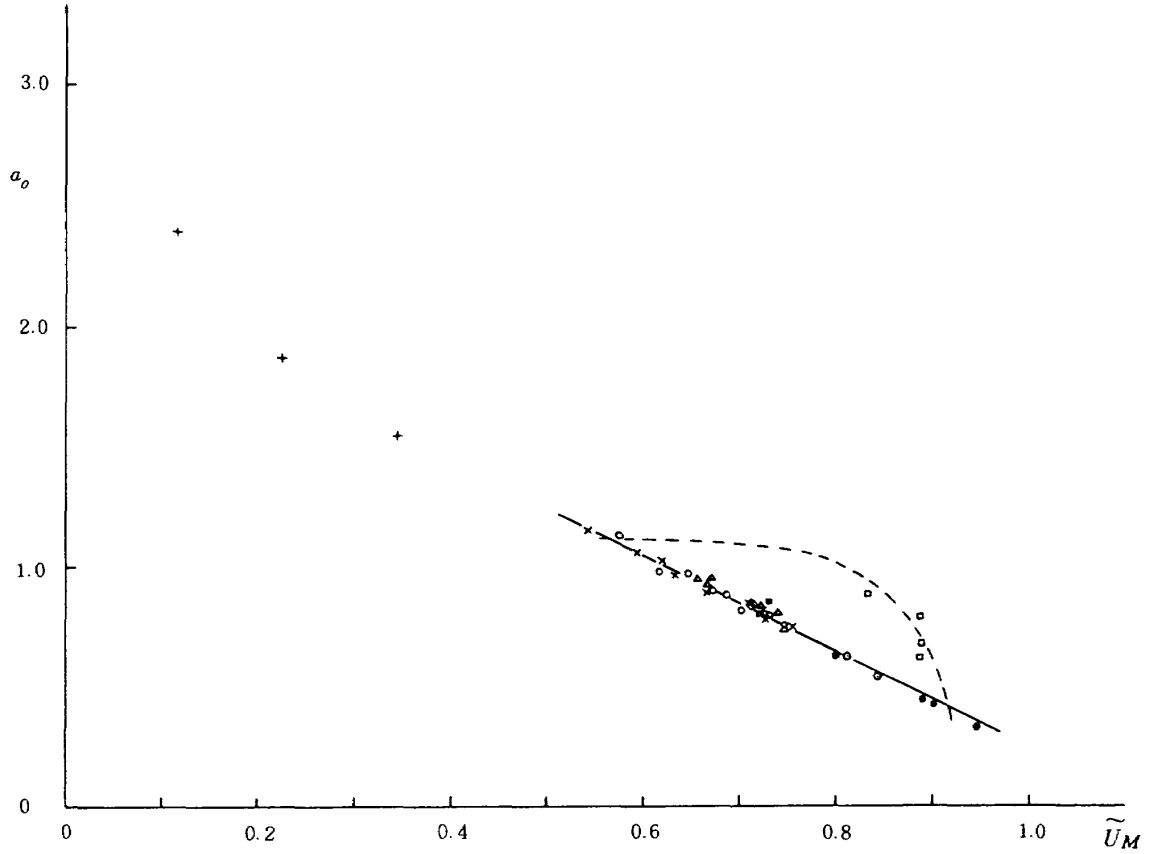
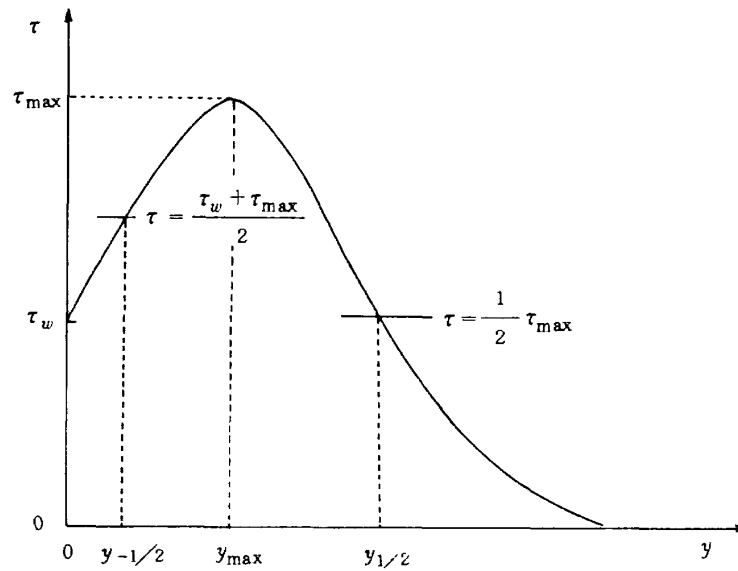
実線は層流境界層に対する相関曲線、破線は乱流境界層に対する相関曲線。

することにする。層流の場合には剪断応力分布は、速度分布から求まるから問題はない。それゆえここでは乱流剪断流における剪断応力分布を扱おうことにする。

乱流剪断応力分布は、平均速度分布と異なり、非常に大きなバリエーションを持っている。後者は加速流と減速流とでは分布形が太っているかやせているかという程度の差異しか示さないのに対し、前者は関数形が全く異ってしまう。それゆえ（境界層近似の成立範囲の）あらゆる乱流剪断流の  $\tau$  分布を包括しうる相似法則の発見は非常に困難である。しかしながら少なくとも十分に発

達した乱流においては、 $\tau$  分布はほとんど常に第22図に示したような分布形をしている。本章で議論するのはこのような場合である。乱れが十分発達しているかどうかの判定条件は、現在の所確立されたものがないので、ここでは  $y_{\max} \geq 0.2\delta$  ( $y_{\max}$  は最大剪断応力  $\tau_{\max}$  を与える位置の  $y$  座標) をその条件とした。

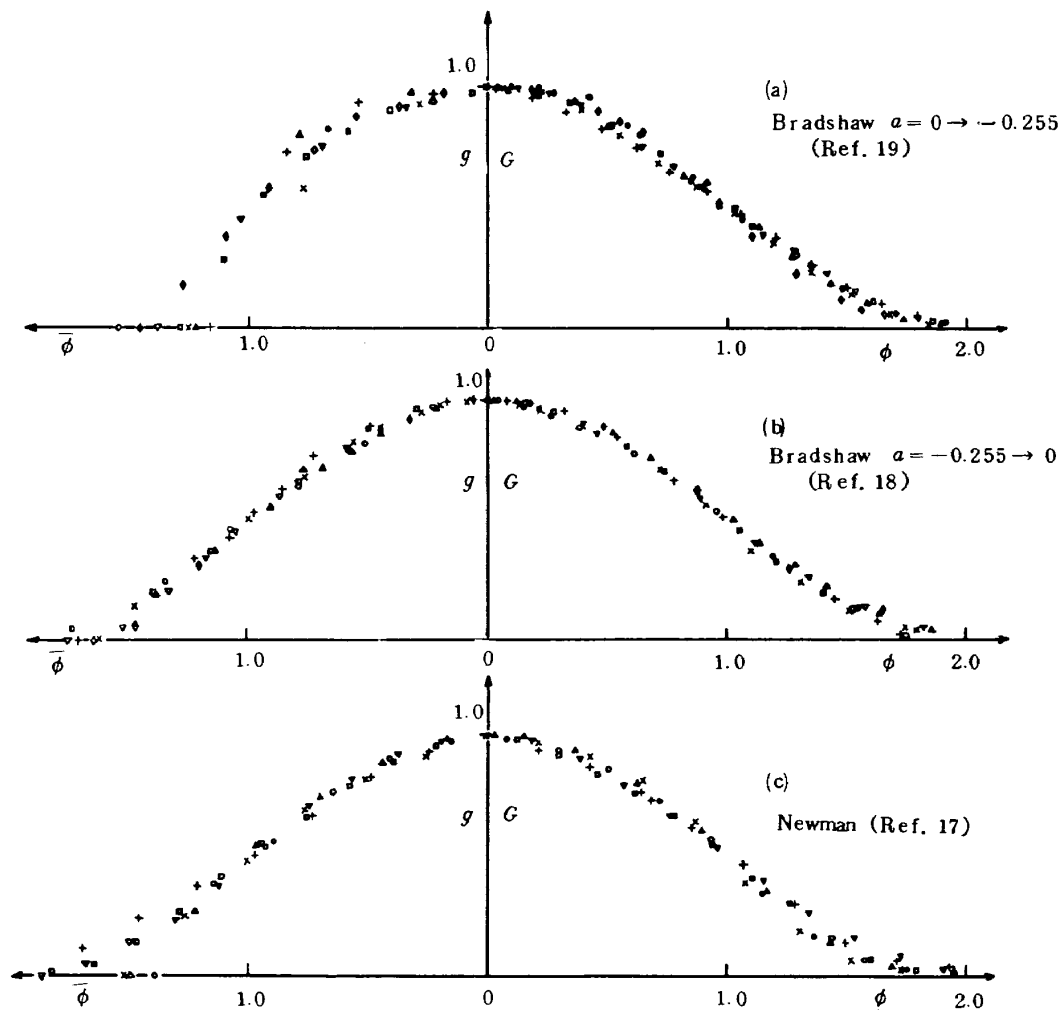
第22図に示したような分布形を特徴づける量は、表面剪断応力  $\tau_w$ 、最大剪断応力  $\tau_{\max}$ 、および最大剪断応力位置  $\eta = \eta_{\max}$ 、などである。一般にこれらの量は流れ方向に変化するので、全体的な分布形の普遍的相似法

第 21 図 層流及び遷移境界層における  $a_0$  と  $\tilde{U}_M$  の相関。記号については第 20 図参照

$$0 \leq y \leq y_{\max} : g \equiv \frac{\tau - \tau_w}{\tau_{\max} - \tau_w} \text{ vs } \bar{\varphi} \equiv \frac{y - y_{\max}}{y_{-1/2} - y_{\max}}$$

$$y_{\max} \leq y \leq \delta : G \equiv \frac{\tau}{\tau_{\max}} \text{ vs } \varphi \equiv \frac{y - y_{\max}}{y_{1/2} - y_{\max}}$$

第 22 図 乱流剪断応力分布の相似法則で用いられる尺度の説明



第23図(a) 乱流剪断応力分布の相似性

則は期待できない。しかし最大剪断応力位置で分布形を二つに分け、 $\eta \geq \eta_{\max}$  の領域と  $\eta \leq \eta_{\max}$  の領域における分布形を対象にすれば、以下に示すように普遍に近い相似法則を導くことができる。このようなやり方は McDonald<sup>(49)</sup> によって乱流境界層の場合に行われた。本解析は従って、その改良と発展を試みたものである。若干の試行錯誤の後、次のような相似法則を見出した。

まず  $0 \leq \eta \leq \eta_{\max}$  における分布形に対しては、 $\tau = (\tau_{\max} + \tau_w)/2$  となる  $\eta$  位置  $\eta_{-1/2}$  に注目し、それを長さの尺度パラメータとして  $\tau$  を

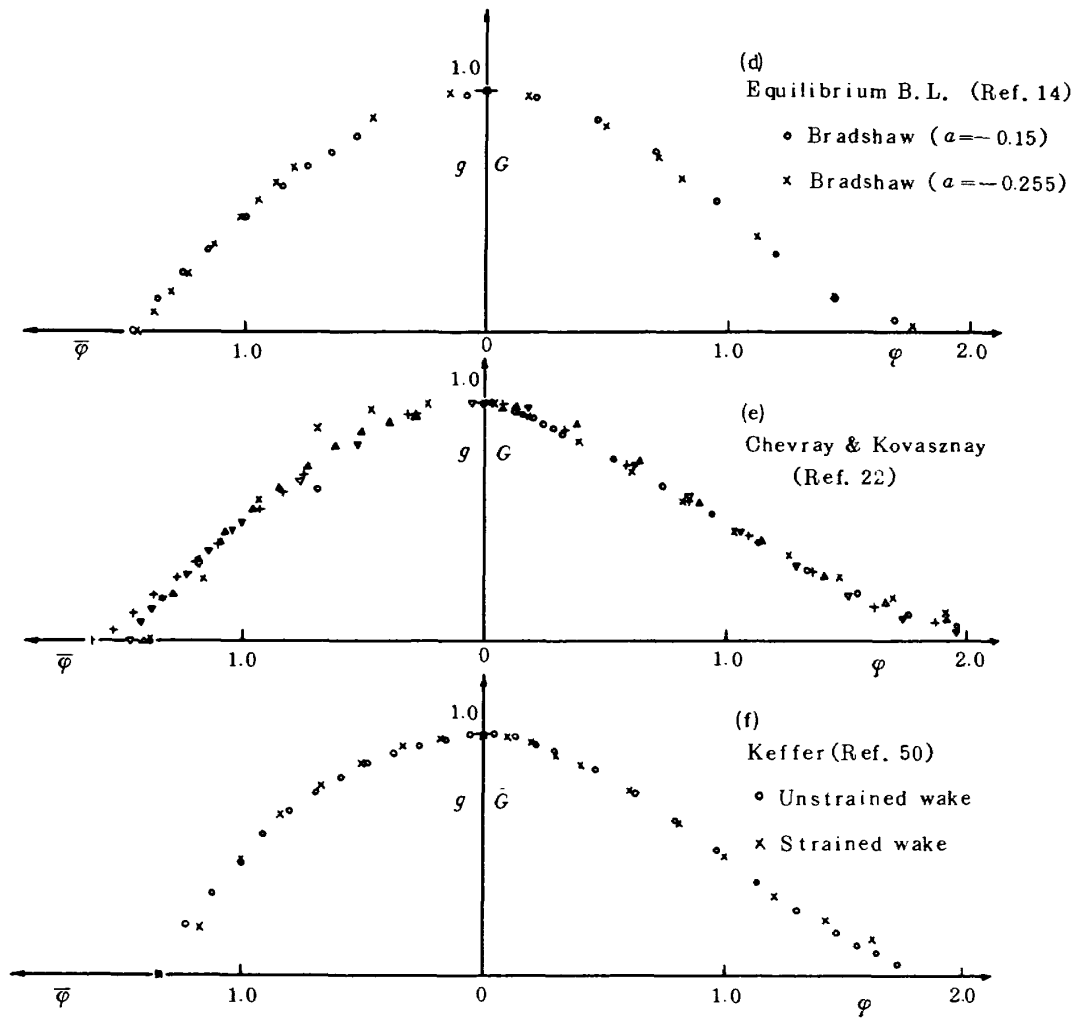
$$g \equiv (\tau - \tau_w) / (\tau_{\max} - \tau_w) \quad \text{対} \quad \bar{\phi} \equiv (\eta - \eta_{\max}) / (\eta_{-1/2} - \eta_{\max}) \quad (31)$$

のようにプロットする。一方、 $\eta_{\max} \leq \eta \leq 1$  の分布形に対しては、 $\tau = \tau_{\max}/2$  となる  $\eta$  位置  $\eta_{1/2}$  に注目し、それを長さの尺度パラメータとして  $\tau$  を

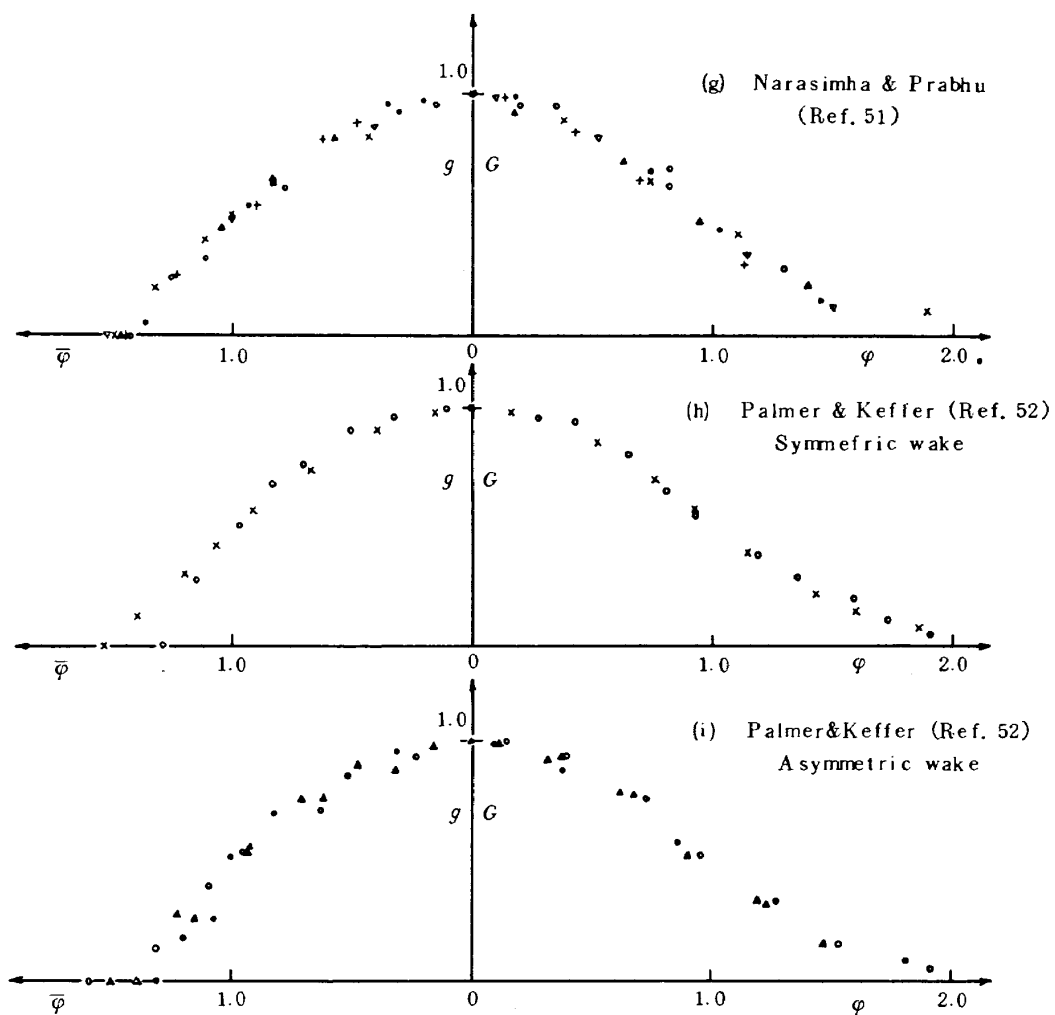
$$G \equiv \tau / \tau_{\max} \quad \text{対} \quad \phi \equiv (\eta - \eta_{\max}) / (\eta_{1/2} - \eta_{\max}) \quad (32)$$

のようにプロットする。 $\tau_w$  が零である自由乱流剪断流においては、(31)は  $g \equiv \tau / \tau_{\max}$  のように解釈するものとする。

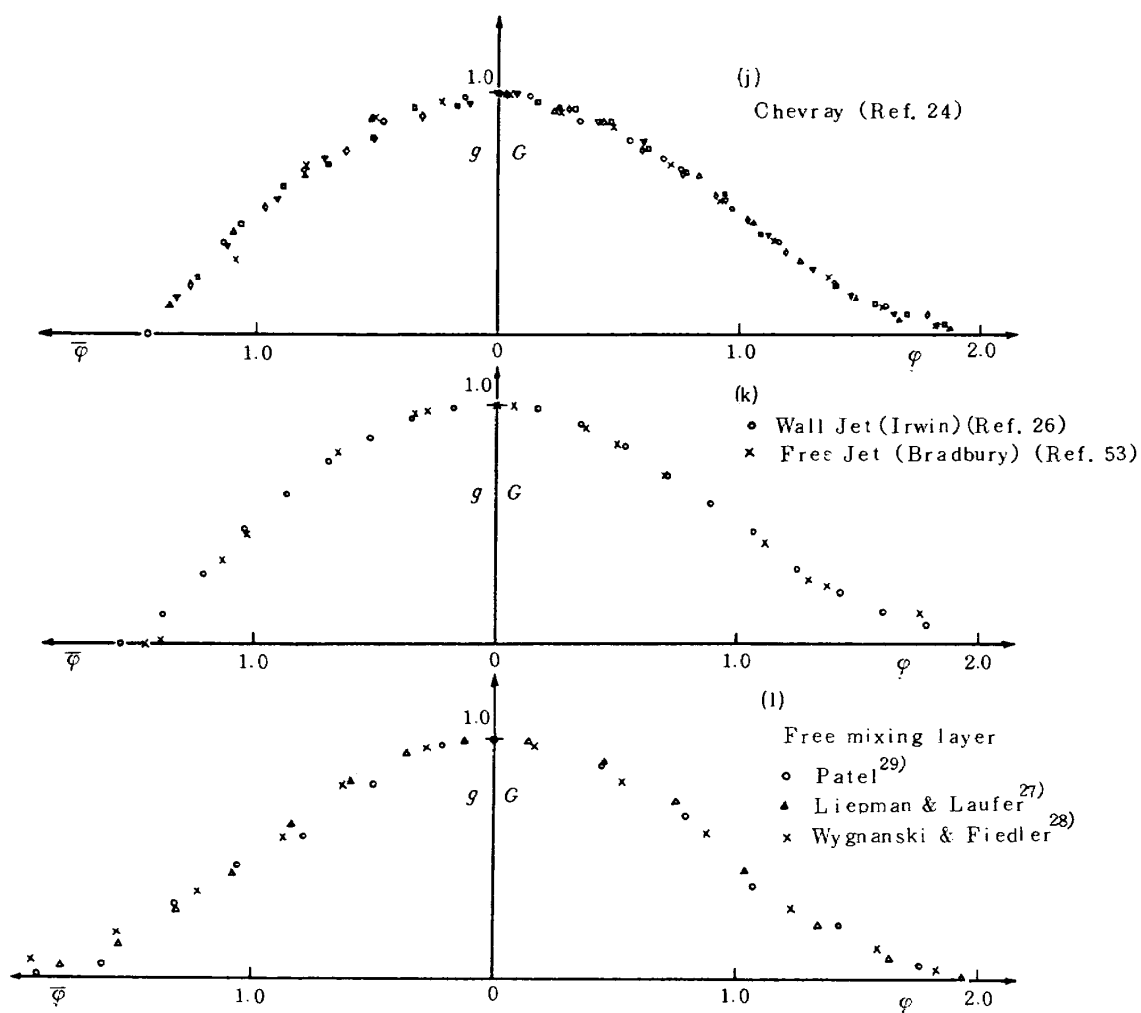
第23図に様々な乱流剪断流における剪断応力分布に相関法(31), (32)を適用した結果を示す。同図(a)~(d)は乱流境界層の場合である。壁の近くで若干のちらばりはあるが、一般に相似性は非常に良く成立っている。Bradshaw の緩和境界層流における剪断応力分布 (a) と (b) も強い圧力勾配変化の前後でその相似性を殆んど失わないのは興味深い。この事実は、乱流運動には何か本質的な機構があって、強い圧力擾乱によっても破壊されることなくそのスケールだけを新しい環境に合わせて変化させることを示唆しているように思われる。また同図(d)から、いわ



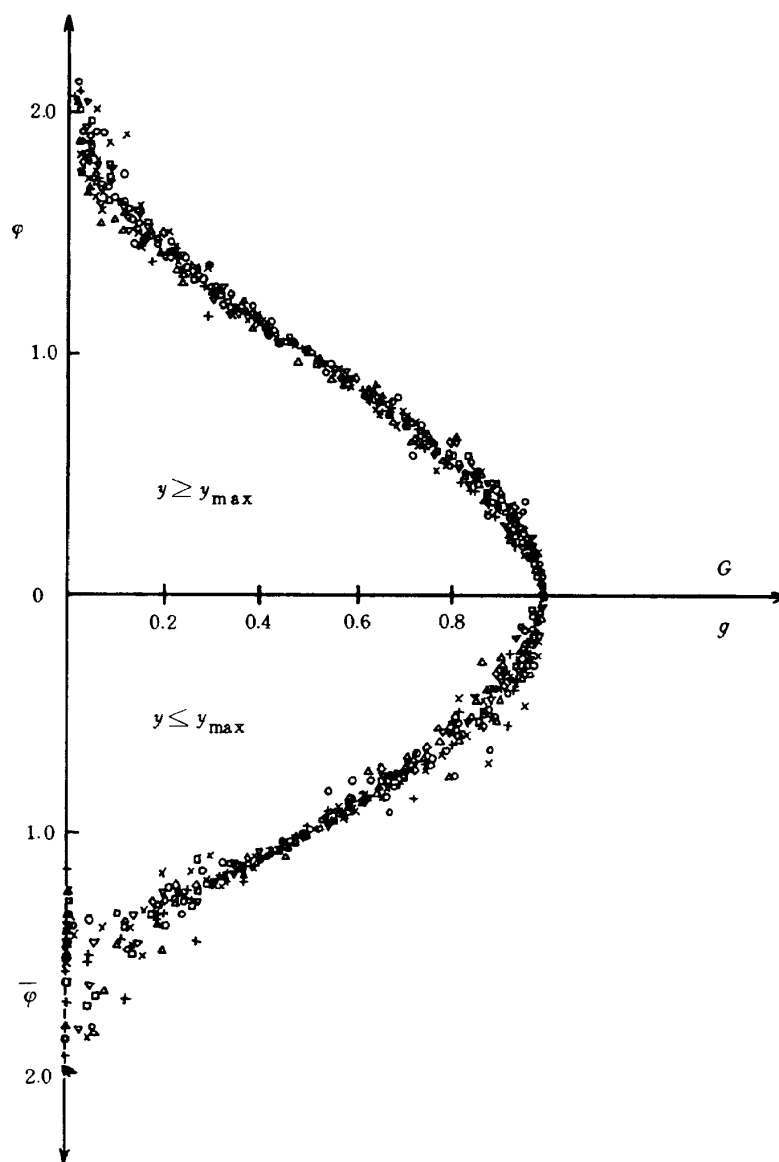
第 23 図(b) 乱流剪断応力分布の相似性



第 23 図(c) 乱流剪断応力分布の相似性



第 23 図(d) 乱流剪断応力分布の相似性



第 24 図 乱流剪断応力分布の普遍的相似性 (データ源は第 23 図)

ゆる平衡境界層の剪断応力分布は、局所主流速度分布によらず（より厳密に言えば  $U_1 \propto x^m$  の  $m$  によらず）同一の分布形を持つことが推察される。次に同図(e)~(j)は乱流伴流の場合である。一般的傾向として相似性は良く成立っている。個別に見ると、Keffer<sup>50)</sup>の歪みを受けた伴流と受けていない伴流における分布形は、われわれの相関パラメータを使えば、全く同一の曲線に帰着されることがわかる。Narasimha & Prabhu<sup>51)</sup>のデータはステップ状に変化する圧力勾配 ( $dp/dx$ ) の下での伴流におけるものである。もとのデータに若干のちがひがあり、そのためのばらつきが多少あるが、相似性は強い擾乱が加えられた後も非常に良く成立っている。Palmer & Keffer<sup>52)</sup>の非対称伴流のデータも少しばらつきが大きい、相似性の傾向が見られる。同図(k)は壁噴流<sup>26)</sup>と自由噴流<sup>53)</sup>における $\tau$ 分布を同時にプロットしたものである。この二つの流れはみかけの振舞いが全く異っているにもかかわらず、両者は本相関パラメータでは同一の曲線に帰着される。

第24図は、第23図のすべてのデータをひとつにまとめてプロットしたものである。この図から乱流剪断応力分布は、 $\eta_{\max} \geq 0.2$  である限り、境界層、伴流、噴流および壁噴流といった流れの形態によらずに普遍的な分布形を持つことがわかる。

## 5. 検 討

第2章で述べられた本速度分布族は、従来のそれとは異った物理的観点に立っている。それは  $y = 0.45\delta$  における平均速度  $U_M$  で動く座標系から観察した速度場、 $U - U_M$  に関する準普遍的な相似法則の発見に基づいている。この相似法則の物理的根拠は第2章で述べたが、確認されてはいない。しかしながら、層流の安定性理論や、風によって生成される波浪の理論などでは、伝播して行く波動の位相速度  $C$  からのずれ、 $U - C$ 、が重要な意味を持っている。特に  $U = C$  となる点の近傍は臨界層(critical layer)と呼ばれ、流れの構造の本質を支配することが知られている。われわれの観点は、これらの理論からもヒントを得ており、波動の伝播速度  $C$  に対応する  $U_M$  なる速度からのずれ、 $U - U_M$ 、は、層流のみならず遷移流でも乱流でも等しく重要な意味を持つと考え、それを普遍的相似法則の対象としたわけである。その場合、速度欠損領域 ( $0 \leq y \leq 0.45\delta$ ) と速度超過領域 ( $y \geq 0.45\delta$ ) とでは、長さや速度の尺度は同じではないであろう。なぜなら、前者と後者では境界条件が異なるからである。（例えば乱流境界層では、前者には壁と

いう境界があるが、後者には自由境界がある。）それゆえ、それぞれに異った尺度 ( $U_M - U_{15}$  と  $U_{79} - U_M$ ,  $0.3\delta$  と  $0.34\delta$ ) が導入された。われわれの観点の物理的正当性は、 $U_M$  が実際の波動速度とどれだけ密接に関連づけられるかによって与えられるであろう。

物理的根拠についてはなお不明な点があるが、本速度分布族は様々な流れにおける速度分布の特徴を明らかにしている。まず、 $y \geq 0.45\delta$  での速度分布  $F$  は、流れの型（層流か乱流か、境界層か伴流か）によらず同一の関数形を持っていることが示された。一方、 $0 \leq y \leq 0.45\delta$  での速度分布  $f$  は、層流境界層に対する関数形  $f_L$  を基にして表現することができ、乱流境界層では、その特有な普遍的関数  $\tilde{f}$  が  $f_L$  に付け加わる形に表現できることが示された。また乱流伴流の速度分布は、層流境界層の関数形  $f_L$  で十分良く表現できた。乱流境界層の速度分布に、普遍的な関数  $\tilde{f}$  が存在したことが、われわれの統一的な速度分布族が構成できた一つの原因となっている。

乱流剪断応力分布の相似性についても、その物理的根拠は明確ではないが、乱れの構造の規則性を反映したものであるという考えは誤りではないであろう。 $\tau$ 分布は、層内における乱流エネルギーの対流、拡散、生成および消散のつり合いによって決まるわけであるが、十分に発達した乱流剪断流では、そのつり合いを支配する流れの構造が本質的に同一なものになると考えられる。みかけのちがいは尺度だけのちがいに他ならない。

## 6. ま と め

新しい物理的観点から様々な流れにおける速度分布を広範囲に調べた後、普遍に近い速度欠損則が見出された。それは平均速度場を、 $y = 0.45\delta$  における速度  $U_M$  で動く座標系から眺めた場合の相似法則になっている。この相似法則は、層流、遷移、乱流各境界層および乱流伴流、自由混合層、壁噴流などにおける速度分布に対して有効であり、これらの流れにおける速度分布の本質的な類似性を明らかにした。

この相似法則に基づいて、層流、遷移、乱流各境界層および乱流伴流に適用できる統一的な速度分布族を構成し、実験データもしくは厳密解との比較によってその有効性を検証した。また分布族に含まれる特性パラメータの性質を調べ、各流れに特徴的な相関々係があることを明らかにした。

十分に発達した乱流剪断流においては、乱流剪断応力分布にも普遍に近い相似性が存在することが確かめられた。

## 参 考 文 献

- 1) K. Pohlhausen; Zur Nahernugswesen Integration der Differentialgleichung der Laminaren Reibungsschicht, Z.A.M.M. Vol. 1 pp. 252 ~ 268 (1921).
- 2) M. R. Head; An Approximate Method of Calculating the Laminar Boundary Layer in Two-dimensional Incompressible Flow. ARC R & M 3123 (1957).
- 3) K. Wieghart; Über einen Energiesatz zur Berechnung Laminarer Grenzsichten, Ing. Arch. Vol. 16 pp. 231 ~ 242 (1948).
- 4) D. Coles; The Law of the Wake in Turbulent Boundary Layer, Jour. Fluid Mech. Vol. 1 pp. 191 ~ 226 (1956).
- 5) B. G. J. Thompson; A New Two-parameter Family of Mean Velocity Profiles for Incompressible Turbulent Boundary Layers on Smooth Walls, ARC R & M 3463 (1967).
- 6) A. J. Sarnecki; Ph. D. Dissertation, Cambridge University (1959).
- 7) H. Schlichting and A. Ulrich; Zur Berechnung des Umschlages Laminar-Turbulent, Jahrbuch d. dt. Luftfahrtforschung I, p. 8 (1942).
- 8) W. Mangler; Das Impulsverfahren zur Naherungsweise Berechnung der Laminaren Reibungsschicht, Z.A.M.M. Vol. 24 pp. 251 ~ 256 (1944).
- 9) R. Timman; A One-parameter Method for the Calculation of Laminar Boundary Layers, Rep. Trans. Nat. Luchtvlab., Amsterdam, Vol. 15, f 29 ~ 45 (1949).
- 10) H. Schlichting; An Approximate Method for Calculation of the Laminar Boundary Layer with Suction for Bodies of Arbitrary Shape. NACA TM 1216.
- 11) H. J. Herring and J. F. Norbury; Some Experiments on Equilibrium Turbulent Boundary Layers in Favourable Pressure Gradients, Jour. Fluid Mech. Vol. 27 pp. 541 ~ 549 (1967).
- 12) P. S. Klebanoff; Characteristics of Turbulence in a Boundary Layer with Zero Pressure Gradient, NACA Rept. 1247 (1955).
- 13) F. R. Hama; Boundary Layer Characteristics for Smooth and Rough Surfaces, Trans. Soc. Naval Architects Marine Engrs. Vol. 62 pp. 333 ~ 358 (1954).
- 14) P. Bradshaw; The Turbulent Structure of Equilibrium Boundary Layers, J. Fluid Mech. Vol. 29 pp. 625 ~ 645 (1967).
- 15) F. H. Clauser; Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients, J. Aero. Sci. Vol. 21 pp. 91 ~ 108 (1954).
- 16) V. A. Sandborn and R. J. Sloger; Study of the Momentum Distribution of Turbulent Boundary Layers in Adverse Pressure Gradients, N.A.C.A. TN 3264 (1955).
- 17) B. G. Newman; Some Contributions to the Study of the Turbulent Boundary Layer Near Separation, Austr. Dept. Supply Rept. ACA-53 (1951).
- 18) P. Bradshaw and D. H. Ferriss; The Response of a Retarded Equilibrium Turbulent Boundary Layer to the Sudden Removal of Pressure Gradient, NPL Aero. Rept. 1145 (1965).
- 19) P. Bradshaw; The Response of a Constant Pressure Turbulent Boundary Layer to the Sudden Application of an Adverse Pressure Gradient, A.R.C. R & M 3575 (1969).
- 20) B. S. Stratford; An Experimental Flow with Zero Skin Friction throughout its Region of Pressure Rise, J. Fluid Mech. Vol. 5 pp. 17 ~ 35 (1959).
- 21) P. S. Andersen, W. M. Kays and R. J. Moffat; Experimental Results for the Transpired Turbulent Boundary Layer in an Adverse Pressure Gradient, J. Fluid Mech. Vol. 69 pp. 353 ~ 375 (1975).
- 22) R. Chevray and L. S. G. Kovaszny; Turbulence Measurements in the Wake of a Thin Flat Plate. A.I.A.A. J. Vol. 7 pp. 1641 ~ 1642 (1969).
- 23) K. Toyoda and N. Hirayama; An Investigation of Turbulent Wakes Near the Trailing Edge of a Flat Plate, Part 1 (incompressible flow case) Trans. Japan Soc. of Mech. Engrs. Vol. 39 pp. 3021 ~ 3028 (1973).
- 24) R. Chevray; The Turbulent Wake of a Body of Revolution, J. Basic Engrs. Vol. 90 pp. 275 ~ 284 (1968).
- 25) J. H. Preston and N. H. Sweeting; The Experimental Determination of the Boundary Layer and Wake Characteristics of a Simple Joukowski Airfoil, with Particular Reference to the Trailing Edge Region, A.R.C. R & M 1998 (1943).
- 26) H.P.A.H. Irwin; Measurements in a Self-pre-

- serving Plane Wall Jet in a Positive Pressure Gradient, *J. Fluid Mech.* Vol. 61 pp. 33 ~ 63 (1973).
- 27) H. W. Liepman and J. Laufer; Investigation of Turbulent Free Mixing, N.A.C.A. TN 1257.
  - 28) I. Wygnanski and H. E. Fiedler; The Two-dimensional Mixing Region, *J. Fluid Mech.* Vol. 41 pp. 327 ~ 361 (1970).
  - 29) R. P. Patel; An Experimental Study of a Plane Mixing Layer, *A.I.A.A. Jour.* Vol. 11 pp. 67 ~ 71 (1973).
  - 30) H. Blasius; Grenzschichten in Flüssigkeiten mit Kleiner Reibung, *Z. Math. u. Phys.* Vol. 56 pp. 1 ~ 37 (1908).
  - 31) I. Tani; On the Solution of the Laminar Boundary Layer Equation, *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 4 pp. 67 ~ 71 (1973).
  - 32) D. R. Hartree; The Solution of the Equations of the Laminar Boundary Layer for Schbauer's Observed Pressure Distribution for an Elliptic Cylinder, *A.R.C. R & M* 2427 (1939).
  - 33) G. B. Schubauer and P. S. Klebanoff; Contributions on the Mechanics of Boundary-Layer Transition, N.A.C.A. Rept. 1289 (1956).
  - 34) V. A. Sandborn and C. Y. Liu; On Turbulent Boundary Layer Separation, *J. Fluid Mech.* Vol. 32 pp. 293 ~ (1968).
  - 35) K. Stewartson; Further Solutions of the Falkner-Skan Equation, *Proc. Camb. Phil. Soc.* Vol. 50 pp. 454 ~ 465 (1954).
  - 36) B. Thwaites; An Exact Solution of the Boundary-Layer Equations under Particular Conditions of Porous Suction, *ARC R & M* 2241 (1946).
  - 37) B. G. J. Thompson; A Three-parameters Family of Mean Velocity Profiles for Incompressible Turbulent Boundary Layers with Distributed Suction and Small Pressure Gradient, *ARC R & M* 3622 (1970).
  - 38) T. P. Torda; Boundary Layer Control by Continuous Surface Suction or Injection, *J. Math. Phys.* Vol. 31 pp. 206 ~ 213 (1952).
  - 39) A. A. Dorodnitsyn; General Method of Integral Relations and Its Application to Boundary-Layer Theory, *Advances in Aero. Sci.* Vol. 3, MacMillan New York (1960).
  - 40) J. C. Rotta; Critical Review of Existing Methods for Calculating the Development of Turbulent Boundary Layers, *Fluid Mechanics of Internal Flow*. G. Sovran, Ed. Elsevier, Amsterdam (1967).
  - 41) P. S. Granville; A Modified Law of the Wake for Turbulent Shear Layers, *Jour. Fluids Eng., Trans. ASME*.
  - 42) R. B. Dean; A Single Formula for the Complete Velocity Profile in a Turbulent Boundary Layer, *Jour. Fluids Eng., Trans. ASME*, Vol. pp. 723 ~ 727 (1976).
  - 43) P. J. Finlay, K. C. Phoe and C. J. Poh; Velocity Measurements in a Thin Turbulent Water Layer, *La Houille Blanche*, Vol. 21 pp. 713 ~ 721 (1966).
  - 44) A. E. Perry and W. H. Schofield; Mean Velocity and Shear Stress Distributions in Turbulent Boundary Layers, *The Phys. Fluids*, Vol. 16 pp. 2068 ~ 2074 (1973).
  - 45) D. B. Spalding; A Single Formula for the Law of the Wall, *Jour. Appl. Mech., Trans. ASME*, Series E, Vol. 83 pp. 455 ~ 458 (1961).
  - 46) T. J. Black and M. A. Sarnecki; The Turbulent Boundary Layer with Suction or Injection, *ARC R & M* 3387 (1965).
  - 47) J. McQuaid; The Calculation of Turbulent Boundary Layers with Injection, *ARC* 28668, F.M. 3799, (1967).
  - 48) T. N. Stevenson; A Modified Velocity Defect Law for Turbulent Boundary Layers with Injection, *The College of Aeronautics, Cranfield Co. Rept. Aero No.* 170 (1963).
  - 49) H. McDonald and J. A. P. Stoddart; On the Development of the Incompressible Turbulent Boundary Layer, *ARC R & M* 3484 (1967).
  - 50) J. F. Keffer; The Uniform Distortion of a Turbulent Wake, *Jour. Fluid Mech.* Vol. 22 pp. 135 ~ 159 (1965).
  - 51) R. Narasimha and A. Prabhu; Equilibrium and Relaxation in Turbulent Wakes, *Jour. Fluid Mech.* Vol. 54 pp. 1 ~ 17 (1972).
  - 52) M. D. Palmer and J. F. Keffer; An Experimental Investigation of an Asymmetrical Turbulent Wake, *Jour. Fluid Mech.* Vol. 53 pp. 593 ~ 610 (1972).
  - 53) L. S. J. Bradbury; The Structure of a Self-preserving Turbulent Plane Jet, *Jour. Fluid Mech.* Vol. 23 pp. 31 ~ 64 (1965).
  - 54) T. Finlayson; The Method of Weighted Re-

siduals and Variational Principles, Academic Press, New York (1972).

- 55) 谷 一郎 計算機と流体力学, 谷 一郎先生古稀記念講演集 (昭和 52) pp. 39 - 44
- 56) R. E. Falco; Coherent Motions in the Outer Region of Turbulent Boundary Layers, The Physics of Fluids, Vol. 20 No. 10 pp. S124 ~ S132 (1977).
- 57) J. Laufer; New Trends in Experimental Turbulence Research, Ann Rev. Fluid Mech. Vol. 7 pp. 307 ~ 326 (1975).
- 58) S. G. Nychas, H. C. Hershey and R. S. Brodkey; A Visual Study of Turbulent Shear Flow, J. Fluid Mech. Vol. 61 pp. 513 ~ 540 (1973).

#### 付録 速度分布族の具体的表現

層流境界層と乱流伴流に対して, 関数  $f$  と  $F$  はそれぞれ  $\bar{\phi}$  と  $\phi$  の多項式によって表わされた。すなわち,

$$f = \alpha_1 + \alpha_2 \bar{\phi} + \alpha_3 \bar{\phi}^2 + \alpha_4 \bar{\phi}^3 \quad (\text{A-1})$$

$$F = \beta_1 + \beta_2 \phi + \beta_3 \phi^2 + \beta_4 \phi^3 + \beta_5 \phi^4 \quad (\text{A-2})$$

係数  $\alpha_i, \beta_i$  は, 次の条件から決定される。

$$\left. \begin{aligned} \bar{\phi} = 0 \quad (y = 0.45\delta) \text{ で } f = 0, \quad df/d\bar{\phi} = a_0 \\ \bar{\phi} = 1 \quad (y = 0.15\delta) \text{ で } f = 1 \\ \bar{\phi} = 1.5 \quad (y = 0) \text{ で } f = f_{1.5} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-3})$$

及び

$$\left. \begin{aligned} \phi = 0 \quad (y = 0.45\delta) \text{ で } F = 0, \quad dF/d\phi = A_0 \\ \phi = 1 \quad (y = 0.79\delta) \text{ で } F = 1 \\ \phi = 2 \quad (y = 1.18\delta) \text{ で } F = F_\infty, \quad dF/d\phi = 0 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-4})$$

その結果は,

$$f = 3\bar{\phi}^2 - 2\bar{\phi}^3 + a_0 \left( \bar{\phi} - \frac{5}{3}\bar{\phi}^2 + \frac{2}{3}\bar{\phi}^3 \right)$$

$$+ f_{1.5} \left( -\frac{8}{9}\bar{\phi}^2 + \frac{8}{9}\bar{\phi}^3 \right) \quad (\text{A-5})$$

$$F = 4\phi^2 - 4\phi^3 + \phi^4 + A_0 \left( \phi - 2\phi^2 + \frac{5}{4}\phi^3 - \frac{1}{4}\phi^4 \right)$$

$$+ F_\infty (-1.25\phi^2 + 1.75\phi^3 - 0.5\phi^4) \quad (\text{A-6})$$

となる。従って本文(4)式における  $f_i$  と  $F_i$  は次のように与えられる。

$$\left. \begin{aligned} f_1(\bar{\phi}) &= \bar{\phi} - \frac{5}{3}\bar{\phi}^2 + \frac{2}{3}\bar{\phi}^3 \\ f_2(\bar{\phi}) &= 3\bar{\phi}^2 - 2\bar{\phi}^3 \\ f_3(\bar{\phi}) &= -\frac{8}{9}(\bar{\phi}^2 - \bar{\phi}^3) \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-7})$$

および

$$\left. \begin{aligned} F_1(\phi) &= \phi^2(\phi - 2)^2 \\ F_2(\phi) &= \phi - 2\phi^2 + \frac{5}{4}\phi^3 - \frac{1}{4}\phi^4 \\ F_3(\phi) &= -1.25\phi^2 + 1.75\phi^3 - 0.5\phi^4 \end{aligned} \right\} \quad (\text{A-8})$$

乱流境界層の場合には, (A-5) 式にさらに関数  $\tilde{f}(\bar{\phi})$  が付加わる。 $\tilde{f}(\bar{\phi})$  は次式によって近似される。

$$\begin{aligned} \tilde{f}(\bar{\phi}) &= \left\{ \frac{8}{9}\bar{\phi}^2(1-\bar{\phi}) + 0.03158\bar{\phi}^2(1-\bar{\phi})^2 \right. \\ &\quad \left. - 0.3132\bar{\phi}^3(1-\bar{\phi})^3 \right\} (1 - e^{-\lambda(1.5-\bar{\phi})}) \end{aligned} \quad (\text{A-9})$$

従って,  $f_4(\bar{\phi})$  は

$$\begin{aligned} f_4(\bar{\phi}) &= \frac{8}{9}\bar{\phi}^2(1-\bar{\phi}) + 0.03158\bar{\phi}^2(1-\bar{\phi})^2 \\ &\quad - 0.3132\bar{\phi}^3(1-\bar{\phi})^3 \end{aligned} \quad (\text{A-10})$$

となる。

---

## 航空宇宙技術研究所報告523号

昭和53年1月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)

---

