NAL TR-544

UDC 517.94:
531.2

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-544

複合線形離散系の最適制御

畑 山 茂 樹

1978年9月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

複合線形離散系の最適制御*

畑 山 茂 樹**

Optimal Control of Coupled Linear Discrete Systems

By Shigeki HATAYAMA

ABSTRACT

Coupled linear discrete control systems described by $x(n+1)=Ax(n)+Bu(n)$ and $y(n+1)=Cy(n)+Du(n)$ are considered. A number of time-optimal state transfer problems are formulated, taking into account the limitations imposed on the control $u(n)$ or/and on the state $y(n)$. A new method for transforming such optimal problems into L-problems is proposed. In order to find the form of the time-optimal control laws, the theorem of the L-problem of moments is used. Many examples to illustrate how to determine the values of the optimal control are given.

1. はじめに（問題の設定）

本稿では次式で記述される定係数の複合線形離散制御系の最短時間状態移行問題を考える。

$$(0_1)\qquad x_i(n+1)=\sum_{k=1}^{p}a_{ik}x_k(n)+\sum_{g=1}^{r}b_{ig}u_g(n)$$

$$(0_2)\qquad y_j(n+1)=\sum_{l=1}^{q}c_{jl}y_l(n)+\sum_{g=1}^{r}d_{jg}u_g(n)$$

ここで，$i=1,\cdots,p$，$j=1,\cdots,q$，$n=0,1,2,\cdots$とし，初期状態は$x_{0i}=x_i(0)$，$y_{0j}=y_i(0)$とする。制御系にはつぎのいずれかの拘束条件が課せられる。

$(C_1)\qquad |u_g(n)|\leq L_g$，$g=1,\cdots,r$，$n=0,1,2,\cdots$

$(C_2)\qquad |y_j(n)|\leq L_j'$，$j=1,\cdots,q$，$n=1,2,\cdots$

$(C_3)\qquad (C_1)$かつ(C_2)

このとき，つぎの２つの形の最短時間状態移行問題が定式化される。

問題A　x_{1i}，$i=1,\cdots,p$が与えられたときに，拘束条件Cのもとで，最小数N^*で$x_{1i}=x_i(N^*)$としえる最適制御$u_g^*(n)$，$g=1,\cdots,r$，$n=0,\cdots,N^*-1$を求めよ。

問題B　x_{1i}，$i=1,\cdots,p$とy_{1j}，$j=1,\cdots,q$が与えられたときに，拘束条件Cのもとで，最小数N^*で$x_{1i}=x_i(N^*)$かつ$y_{1j}=y_j(N^*)$としえる最適制御$u_g^*(n)$，$g=1,\cdots,r$，$n=0,\cdots,N^*-1$を求めよ。

問題（A，C_1）は系0_2のふるまいに何らの制約も課せられないから，単に各成分の最大制御量制約のもとで系0_1を最適制御する問題を表わす。問題（A，C_2）は系0_1の状態を移行するための制御が系0_2の変化を誘起し，かつ系0_2に許される各成分の最大状態変化が制約されているため，そのふるまいが無視できない誘起系0_2が接続されている場合の系0_1の最適制御問題を表わす。この問題の制御が更に振幅制限されている場合を考えたのが問題（A，C_3）である。

問題（B，C_1）は各成分の最大制御量が制約されている条件のもとで，同一の制御によって２つの系の状態を同時に移行させる最適問題を表わす。問題（B，C_2）は一方の系の各成分の最大状態変化が制約されているときに，同一の制御によって２つの系の状態を同時に移行させる最適問題を表わす。この問題の制御が更に振幅制限されている場合を考えたのが問題（B，C_3）である。

複合系（0_1，0_2）はまた，分離可能系（decoupled system）の一つの分解表現とも見ることができる。このように見た場合には，問題Aは系の状態成分の一部分のみが移行の対象であって，他の部分は自由もしくはその変化が拘束されている問題を表わす。問題Bは部分的状態制約付きの最短時間状態移行問題を表わす。なお，系の全成分の最大状態変化が制約されている場合の問題は問題Bの特別な場合と考えてよい。このときには系の分離可能性の仮定は不必要となる。

また，次式で記述される系

＊昭和53年７月７日　受付
＊＊計算センター

$$(0_1') \qquad x_i(n+1)=\sum_{k=1}^{p} a_{ik}\,x_k(n)+\sum_{j=1}^{g} b_{ij}\,y_j(n)$$

は系0_2の解を$(0_1')$に代入することにより，容易に系0_1を表わす上記方程式の形に書き直すことができる。従って，複合系$(0_1', 0_2)$も本稿で考察する複合系に含めてよい。この複合系$(0_1', 0_2)$は例えば，系$0_1'$を動的制御器すなわちデジタル・サーボ機構0_2でもって制御する場合のモデルを表現している。この場合には，上記の最適制御問題はサーボ機構に状態拘束があるときとないときの問題を表わす。

問題(A, C_2)は$q=mr$（mはある正の整数）の場合について，R. Gabasovによって解かれている。[1] 問題(A, C_3)は$q=r$の場合について，R. GabasovとF. M. Kirillovaによって解かれている。[2] その解法には最適問題をL－問題の形に変換し，モーメント理論にもとづいて最適制御を見出す手法（略してモーメント法）が用いられた。しかし，L－問題の形に書き換える過程で特殊な線形作用素を導入しているため，一般的な場合（すなわち，$q>r$および$q<r$の場合）を扱うことが出来なかった。

始めに定式化した最適制御問題はこのGabasovとKirillovaによって考察された問題を一般的かつ系統的に記述したものであり，$q=r$のみでなく$q>r$または$q<r$の場合も含めている。本稿ではモーメント法にもとづいて最適制御を導出するが，注) 一般的な場合にもこの手法を適用できうるためには最適制御問題をL－問題の形に変換する一般的方法を確立しなければならない。本稿では関数解析における直積空間の概念にもとづく一般的方法を提案し，以下具体的な問題においてこの概念の適用法を明確にしていく。

なお，以下の各章の記述には多少の重複を感ぜられるかもしれないが，そこでの微妙な差異を強調するために敢えて冗長性を持たせた。この微妙な違いが最適制御の値に大きく作用する。特に，各ノルムの定義の相違点に注意されたい。

2. 最適制御問題(A, C_1)

系0_1のベクトル・マトリクス表現は

$$(2.1) \qquad x(n+1)=Ax(n)+Bu(n), \quad x_0=x(0)$$

と書かれる。ここで，$x(n)=(x_1(n), \cdots, x_p(n))^T$, $u(n)=(u_1(n), \cdots, u_r(n))^T$で，$A=\{a_{ik}\}$は$p\times p$マトリクス，$B=\{b_{ig}\}$は$p\times r$マトリクスである。注) Eを単位マトリクスとして，

$$\Phi(n+1)=A\Phi(n), \quad \Phi(0)=E$$

を満足する系0_1の$p\times p$基本マトリクス$\Phi(n)=\{\varphi_{ik}(n)\}$を用いると，(2.1)の解は次式で表わされる。

$$(2.2) \qquad x(n)=\Phi(n)x_0+\sum_{s=0}^{n-1}\Phi(n-s-1)Bu(s)$$
$$=\Phi(n)x_0+\sum_{s=1}^{n}\Phi(n-s)B\eta(s)$$

ここで，

$$(2.3) \qquad \eta(s)=u(s-1)$$

とする。

2.1 仮定

(i) 一般性を失うことなく，系0_1に対して rank $A=p$を仮定する。

(ii) 新しい制御変数$u'(n)=(u_1'(n), \cdots, u_r'(n))^T$を次式で定義する。

$$u_g'(n)=u_g(n)/L_g, \quad g=1, \cdots, r$$

このとき，拘束条件C_1は$|u_g'(n)|\leq 1$を表わす。従って，一般性を失うことなく，$L_1=\cdots=L_r=1$を仮定できる。この仮定と(2.3)により，本節では拘束条件を

$$(C_1') \qquad |\eta_g(n)|\leq 1, \quad g=1, \cdots, r, \quad n=1, 2, \cdots$$

と表わすことにする。

2.2 L－問題への変換

ある制御$\eta(n)$を行なったとき，離散時刻$n=N$で最初に$x(N)=x_1$を満たしたとする。(2.2)により，このことは

$$(2.4) \qquad \Phi(-N)x_1-x_0=\sum_{s=1}^{N}\Phi(-s)B\eta(s)$$

と書ける。上式において，左辺は問題の条件から定まるp次元ベクトルであり，右辺の$\Phi(-s)B$は系0_1の諸係数から定まる$p\times r$マトリクスであることに注意する。

記号$(\cdot,\cdot)$を

$$(2.5) \qquad \eta=(\eta(1), \cdots, \eta(N))^T, \quad \eta(s)=(\eta_1(s), \cdots, \eta_r(s))^T$$
$$(2.6) \qquad \gamma=(\gamma(1), \cdots, \gamma(N))^T, \quad \gamma(s)=(\gamma_1(s), \cdots, \gamma_r(s))^T$$

に対して

$$(\gamma, \eta)=\sum_{s=1}^{N}(\gamma(s), \eta(s))=\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{r}\gamma_g(s)\eta_g(s)$$

と定義するならば，(2.4)はつぎのように書ける。

$$(2.7) \qquad [\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}=(\gamma^i, \eta), \quad i=1, \cdots, p$$

注) モーメント法の解説は文献3)にゆずる。

注) 以後，上付き記号"T"はベクトルおよびマトリクスの転置を表わす。

ただし,

(2.8)　$r^i(s)=[\Phi(-s)B]_i$

とする。ここに,$[\cdot]_i$ はマトリクスの第 i 行を意味する。

(2.5) の η に対して,ノルムを次式で定義する。

(a)　$\|\eta\|=\max_{1\leq s\leq N}\max_{1\leq g\leq r}|\eta_g(s)|$

このノルムを持つ η の空間を R^* と書くことにする。ここに,"*"は空間 R の共役の意味を表わしている。このとき,拘束条件 C_1' は等価的につぎのように書ける。

(C_1'')　$\|\eta\|\leq 1$,　$\eta\in R^*$

共役空間 R^* が上記のように与えられたとき,空間 R のノルムはつぎのようにして求まる。有限点列空間は反射的であるから,$(R^*)^*=R^{**}=R$ である。従って,(2.6) の r を R の元と見るとき,そのノルムは次式で定義される。

(b)　$\|r\|=\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{r}|r_g(s)|$

よく知られているように,R の上の線形汎関数 $\eta\in R^*$ は次式によって表現される。

$\eta(r)=(r,\eta)$,　$r\in R$

以上の準備のもとで,最適制御問題(A, C_1')はつぎのようなL-問題の形に書き換えることができる。

[P1]　与えられた p 個の実数 $[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}$ および p 個の R の元 r^i に対して,(2.7) を最小数 $N=N^*$ で満たす線形汎関数 $\eta^*\in R^*$, $\|\eta^*\|\leq 1$ を求めよ。

2.3　最適解の存在条件

問題[P1]の最適解を見出すためには,つぎの問題を仲介させて考えると分りやすい。

[LP1]　与えられた離散時刻 N, p 個の実数 $[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}$ および p 個の R の元 r^i に対して,(2.7) を満たしえる最小ノルムの線形汎関数 $\overline{\eta}\in R^*$ を求めよ。

モーメントのL-問題定理により,$r^1,\cdots,r^p$ が線形独立であるならば,必ず[LP1]の解が存在し,$\overline{\eta}$ が最小ノルム解であるための必要十分条件は

(2.9)　$\left(\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 r^i,\ \overline{\eta}\right)=\left\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 r^i\right\|\|\overline{\eta}\|=1$

と表わされる。ここで,$\xi^0=(\xi_1^0,\cdots,\xi_p^0)^T$ はつぎの有限次元最小値問題の解の一つを表わす。

(2.10)　$\lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i r^i\right\|$

ただし

$$\Omega=\{\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_p)^T\mid\sum_{i=1}^{p}\xi_i([\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i})=1\}$$

とする。

(2.9)と(2.10)から,[LP1]の解 $\overline{\eta}$ のノルムは $\|\overline{\eta}\|=\lambda(N)$ であることがわかる。従って,$r^1,\cdots,r^p$ が線形独立であり,かつ $\lambda(N)\leq 1$ を満たしうる離散時刻 N が存在するならば,[P1]の最適解の存在が保証される。

2.4　N^* と η^* の決定

2.2 節で求めた空間 R のノルムを使って(2.10) を書きかえると次式となる。

(2.11)　$\lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p}\xi_i r_g^i(s)\right|$

いま,$\overline{N}>N$ なる2つの離散時刻 N と $\overline{N}$ を考え,N の時の最小値問題(2.11)の解の一つを ξ^0,$\overline{N}$ の時の解の一つを $\overline{\xi}^0$ で表わすならば,つぎの関係を得る。

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}(N)&=\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 r_g^i(s)\right|\\&\leq\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p}\overline{\xi}_i^0 r_g^i(s)\right|\\&\leq\sum_{s=1}^{\overline{N}}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p}\overline{\xi}_i^0 r_g^i(s)\right|=\lambda^{-1}(\overline{N})\end{aligned}$$

従って,$\lambda(N)$ は N が増大するとともに単調減少することがわかる。

$\lambda(N)\leq 1$ を満たしうる N が存在するならば,その中から最小数 N^* を定めることができる。この N^* に対して,[LP1]の最小ノルム解 $\overline{\eta}$ は(2.9)から求めることができる。N に関する $\lambda(N)$ の性質と $\|\overline{\eta}\|$ の最小性とにより,この $\overline{\eta}$ は[P1]の最適解 η^* を意味する。従って,2.2 節で定義した R と R^* のノルムの表現を(2.9)に使うと,次式を得る。

(2.12)
$$\begin{aligned}&\sum_{s=1}^{N^*}\sum_{g=1}^{r}\eta_g^*(s)\left[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 r_g^i(s)\right]\\&=\left[\max_{1\leq s\leq N^*}\max_{1\leq g\leq r}|\eta_g^*(s)|\right]\\&\times\left[\sum_{s=1}^{N^*}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 r_g^i(s)\right|\right]=1\end{aligned}$$

上式が成立するための必要十分条件は

(2.13)　$\eta_g^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 r_g^i(s)\right]$,

$s=1,\cdots,N^*$, $g=1,\cdots,r$

である。ここに,$\xi^0\in\Omega$ は有限次元最小値問題

(2.14)　$\min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N^*}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p}\xi_i r_g^i(s)\right|$

の一つの解であり，$\lambda(N^*)$ はその値の逆数を表わす。

以上により，最短離散時刻N^*と最適制御 η^* が決定された。

2.5　注　意

(i)　$\gamma^1, \cdots, \gamma^p$ の線形独立性の条件は離散時刻Nにおける系 0_1の完全可制御性の条件を意味する。実際，$\gamma^1, \cdots, \gamma^p$ が線形独立ならば，モーメントのL－問題定理により，任意の初期状態x_0を離散時刻Nで任意の状態x_1に移行しえる，すなわち(2.7) を満たす制御$\bar{\eta}$が存在する。ここに，$\bar{\eta}$は[LP1]の解を表わす。逆に，$\gamma^1, \cdots, \gamma^p$ が線形従属であって，任意のx_0とx_1に対して(2.7) を満たす η が存在するものと仮定する。このとき，

$$\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \gamma^i = 0,\ \ \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left([\Phi(-N)]_i x_1' - x_{0i}'\right) \neq 0$$

を満たす $\lambda = (\lambda_1, \cdots, \lambda_p)^T \neq 0$ と x_0', x_1'が存在する。この x_0'を離散時刻Nでx_1'に移行する制御を η' とするとき，(2.7) により

$$0 \neq \sum_{i=1}^{p} \lambda_i \left([\Phi(-N)]_i x_1' - x_{0i}'\right) = \left(\sum_{i=1}^{p} \lambda_i \gamma^i, \eta'\right) = 0$$

を得，矛盾が導びかれる。

(2.8) と $\Phi(n) = A^n$ に注意すると，$\gamma^1, \cdots, \gamma^p$ が線形独立であるための必要十分条件は

$$\operatorname{rank}[A^{-1}B, \cdots, A^{-N}B] = \operatorname{rank}[A^{N-1}B, \cdots, AB, B] = p$$

と表わされる。この表現は系 0_1のNにおける完全可制御性の必要十分条件としてよく知られている。

(ii)　n 次元ベクトル ξ に関して(2.14) は凸関数であり，Ωはアフィン集合であるから，系 0_1が完全可制御であるならば，最小値問題は必ず解をもつが，一意とはかぎらない。しかし，全ての解は同一の値 $\lambda(N^*)^{-1}$ を示す。

(iii)　(2.13) の $\eta_g^*(s)$は全ての $s=1, \cdots, N^*$ と $g=1, \cdots, r$ に対してその値が確定するとはかぎらない。すなわち，いくつかの s と g に対して，

$$\sum_{i=1}^{p} \xi_i^0\, \gamma_g^i(s) = 0$$

となることがある。このような s と g に対する $\eta_g^*(s)$の値は系 0_1の過渡状態を調べることによって決定しなければならない。このことは最適制御η^*が必ずしも一意に定まるとはかぎらないことを示している。

2.6　例　題

$$(0_1)\quad \begin{cases} x_1(n+1) = x_1(n) + x_2(n) \\ x_2(n+1) = x_2(n) + u(n) \end{cases}$$

なる系の初期点 $(x_{01}, x_{02}) = (1/4, 0)$ を拘束条件 $|u(n)| \leq 1$，$n = 0, 1, 2, \cdots$ のもとで指定点 $(x_{11}, x_{12}) = (0, 0)$ に最小数 $n = N^*$ で移行しえる最適制御 $u^*(n)$ を求める。

この問題に対して，(2.7) と (2.8) は次式となる。

$$-1/4 = (\gamma^1, \eta),\quad 0 = (\gamma^2, \eta)$$

$$\gamma^1(s) = -s,\quad \gamma^2(s) = 1$$

従って，$N \geq 2$ に対してγ^1と γ^2 は線形独立である。$\Omega = \{\xi = (\xi_1, \xi_2)^T \mid \xi_1 = -4\}$ であるから，最小値問題 (2.11) は

$$\lambda^{-1}(N) = \min_{\xi_2} \sum_{s=1}^{N} \left|-4\gamma^1(s) + \xi_2 \gamma^2(s)\right|$$

と書かれる。$N=1$ としたとき，明らかに $\lambda(1) = \infty$ である。$N=2$としたとき，

$$\left|-4\gamma^1(1) + \xi_2\gamma^2(1)\right| + \left|-4\gamma^1(2) + \xi_2\gamma^2(2)\right| = |4 + \xi_2| + |8 + \xi_2|$$

は $-8 \leq \xi_2 \leq -4$ なる ξ_2において最小値 $\lambda^{-1}(2) = 4$ をとる。すなわち，$\lambda(2) = 1/4 < 1$ であるから，$N^* = 2$ が求まった。従って，最小値問題 (2.14) の解は $\xi_1^0 = -4$，$-8 \leq \xi_2^0 \leq -4$ と求まる。いま，解の一つとして $\xi_1^0 = -4$，$\xi_2^0 = -6$ をとると，最適制御は (2.13) と (2.3) により

$$\eta^*(1) = u^*(0) = \frac{1}{4}\operatorname{sign}[-4\gamma^1(1) - 6\gamma^2(1)] = -\frac{1}{4}$$

$$\eta^*(2) = u^*(1) = \frac{1}{4}\operatorname{sign}[-4\gamma^1(2) - 6\gamma^2(2)] = \frac{1}{4}$$

と決定される。従って，系の最適応答は

$$x_1(1) = \frac{1}{4},\ x_1(2) = 0\ ;\ x_2(1) = -\frac{1}{4},\ x_2(2) = 0$$

となる。他の解 ξ^0 に対しても，u^* は全て上のものと同一になるから，この例題の最適制御は一意的である。

3.　最適制御問題（B, C_1）

系 0_2のベクトル・マトリクス表現は

(3.1)　$y(n+1) = Cy(n) + Du(n)$，$y_0 = y(0)$

と書かれる。ここで，$y(n) = (y_1(n), \cdots, y_q(n))^T$, $u(n) = (u_1(n), \cdots, u_r(n))^T$ で，$C = \{c_{jl}\}$ は $q \times q$ マトリクス，$D = \{d_{jg}\}$ は $q \times r$ マトリクスである。

$$F(n+1) = CF(n),\quad F(0) = E$$

を満足する系 0_2の $q \times q$ 基本マトリクス$F(n) = \{f_{jl}(n)\}$ を用いると，(3.1) の解は次式で表わされる。

$$(3.2)\quad y(n) = F(n)y_0 + \sum_{s=0}^{n-1} F(n-s-1)Du(s) = F(n)\,y_0 + \sum_{s=1}^{n} F(n-s)D\eta(s)$$

ここで，ηは (2.3) で定義する。

3.1　仮　定

(i)　一般性を失うことなく，系 0_1に対して $\operatorname{rank} A = p$

を仮定する。

(ii) 一般性を失うことなく，系0_2に対して$\mathrm{rank}\,C=q$を仮定する。

(iii) 2.1節の(ii)の理由により，本節での拘束条件は(C_1')を採用する。

3.2 L－問題への変換

ある制御$\eta(n)$を行なったとき，離散時刻$n=N$で最初に$x(N)=x_1$と$y(N)=y_1$を同時に満たしたとする。(2.2)と(3.2)により，このことは

$$(3.3)\quad \Phi(-N)x_1-x_0=\sum_{s=1}^{N}\Phi(-s)B\eta(s)$$

$$(3.4)\quad F(-N)y_1-y_0=\sum_{s=1}^{N}F(-s)D\eta(s)$$

と書ける。制御関数ηの空間R^*のノルムを(a)で定義すると，空間Rの元γのノルムは(b)で定義される。(3.3)と(3.4)の右辺をRの上の線形汎関数の形で表現すると，

$$(3.5)\quad [\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}=(\gamma^i,\ \eta),\quad i=1,\cdots,p$$

$$(3.6)\quad [F(-N)]_j y_1-y_{0j}=(\gamma^{p+j},\ \eta),\quad j=1,\cdots,q$$

である。ただし，

$$(3.7)\quad \gamma^i(s)=[\Phi(-s)B]_i$$

$$(3.8)\quad \gamma^{p+j}(s)=[F(-s)D]_j$$

とする。

従って，最適制御問題(B, C_1)はつぎのL－問題に帰結することができる。

［P2］ 与えられた$(p+q)$個の実数$[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}$，$[F(-N)]_j y_1-y_{0j}$および$(p+q)$個のRの元γ^i, γ^{p+j}に対して，(3.5)と(3.6)を最小数$N=N^*$で同時に満たす線形汎関数$\eta^*\in R^*$, $\|\eta^*\|\leq 1$を求めよ。

3.3 最適解の存在条件

問題［P2］の最適解を見出すために，つぎの中間的問題を考える。

［LP2］ 離散時刻Nを固定したとき，［P2］で与えられた$(p+q)$個の実数およびRの元に対して，(3.5)と(3.6)を同時に満たす最小ノルムの線形汎関数$\bar{\eta}\in R^*$を求めよ。

モーメントのL－問題定理により，$\gamma^1,\cdots,\gamma^{p+q}$が線形独立であれば，必ず［LP2］の解が存在し，$\bar{\eta}$が最小ノルム解であるための必要十分条件は

$$(3.9)\quad \left(\sum_{i=1}^{p+q}\xi_i^0\gamma^i,\ \bar{\eta}\right)=\left\|\sum_{i=1}^{p+q}\xi_i^0\gamma^i\right\|\|\bar{\eta}\|=1$$

と表わされる。ここで，$\xi^0=(\xi_1^0,\cdots,\xi_{p+q}^0)^T$はつぎの有限次元最小値問題の解の一つを表わす。

$$(3.10)\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{p+q}\xi_i\gamma^i\right\|$$

ただし，

$$\Omega=\left\{\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_{p+q})^T \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p}\xi_i([\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i})+\sum_{j=1}^{q}\xi_{p+j}([F(-N)]_j y_1-y_{0j})=1\right\}$$

とする。

(3.9)と(3.10)から，［LP2］の解$\bar{\eta}$のノルムは$\|\bar{\eta}\|=\lambda(N)$である。従って，$\gamma^1,\cdots,\gamma^{p+q}$が線形独立であり，かつ$\lambda(N)\leq 1$を満たす離散時刻$N$が存在するならば，［P2］の最適解は存在する。

3.4 N^*とη^*の決定

空間Rのノルムの定義に従って，(3.10)は

$$(3.11)\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p+q}\xi_i\gamma_g^i(s)\right|$$

と書ける。2.4節と同様の手続きで，上式で定義される$\lambda(N)$はNの増大とともに単調減少することが示される。

$\lambda(N)\leq 1$を満たすNが存在するならば，その中の最小数としてN^*が決定される。このN^*に対する［LP2］の最小ノルム解$\bar{\eta}$は(3.9)を満たす。$\lambda(N)$の単調減少性と$\|\bar{\eta}\|$の最小性により，この$\bar{\eta}$が［P2］の最適解η^*となる。従って，(3.9)にRとR^*のノルムの定義を使うと，η^*は次式より決定される。

$$(3.12)\quad \sum_{s=1}^{N^*}\sum_{g=1}^{r}\eta_g^*(s)\sum_{i=1}^{p+q}\xi_i^0\gamma_g^i(s)$$
$$=\left[\max_{1\leq s\leq N^*}\max_{1\leq g\leq r}|\eta_g^*(s)|\right]\times\left[\sum_{s=1}^{N^*}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p+q}\xi_i^0\gamma_g^i(s)\right|\right]=1$$

上式が成立するための必要十分条件は

$$(3.13)\quad \eta_g^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{p+q}\xi_i^0\gamma_g^i(s)\right],$$
$$s=1,\cdots,N^*,\quad g=1,\cdots,r$$

である。ここに，$\xi^0\in\Omega$は有限次元最小値問題

$$(3.14)\quad \min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N^*}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p+q}\xi_i\gamma_g^i(s)\right|$$

の一つの解であり，$\lambda(N^*)$はその値の逆数を表わす。

3.5 注意

(i) $\gamma^1,\cdots,\gamma^{p+q}$が線形独立であることと，複合系$(0_1, 0_2)$が離散時刻$N$において完全可制御であること，

すなわち任意の初期点x_0とy_0を$n=N$で任意点x_1とy_1に同時に移行しえる制御が存在することとは等価である。(2.8)，(3.8)と$\Phi(n)=A^n$, $F(n)=C^n$とに注意すれば，$\gamma^1, \cdots, \gamma^{p+q}$が線形独立であるための必要十分条件は

$$\mathrm{rank}\begin{bmatrix} A^{n-1}B & \vdots & \cdots\cdots & \vdots & AB & \vdots & B \\ C^{n-1}D & \vdots & & \vdots & CD & \vdots & D \end{bmatrix} = p+q$$

と表わされる。

(ii) 複合系($0_1, 0_2$)が完全可制御であるならば，有限次元最小値問題(3.14)は必ず解をもつが，一意とはかぎらない。しかし，全ての解は同一の値$\lambda(N^*)^{-1}$を示す。

(iii) (3.13)の$\eta_g^*(s)$は全ての$s=1, \cdots, N^*$と$g=1, \cdots, r$に対してその値が確定するとはかぎらず，いくつかのsとgに対して，

$$\sum_{i=1}^{p+q} \xi_i^0 \gamma_g^i(s)=0$$

となることがある。このようなsとgに対する$\eta_g^*(s)$の値は複合系($0_1, 0_2$)の過渡状態にもとづいて決定しなければならない。従って一般には，最適制御η^*は必ずしも一意的に定まらない。

3.6 例題

$$(0_1)\quad \begin{cases} x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n) \\ x_2(n+1)=x_2(n)+u(n) \end{cases}$$

$$(0_2)\quad y(n+1)=\frac{1}{2}y(n)+u(n)$$

なる複合系の初期値$(x_{01}, x_{02})=(1/4, 0)$と$y_0=1/4$を拘束条件$|u(n)|\leq 1$, $n=0,1,2,\cdots$のもとで指定点$(x_{11}, x_{12})=(0, 0)$と$y_1=0$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u^*(n)$を求める。

この問題に対する(3.5)～(3.8)は次式となる。

$$-1/4=(\gamma^1, \eta),\quad 0=(\gamma^2\ \eta),\quad -1/4=(\gamma^3, \eta)$$

$$\gamma^1(s)=-s\ ,\quad \gamma^2(s)=1\ ,\quad \gamma^3(s)=2^s$$

従って，γ^1, γ^2, γ^3は$N\geq 2$において線形独立である。

$$\Omega=\{\xi=(\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T \mid \xi_1+\xi_3=-4\}$$

であるから，最小値問題(3.11)は

$$\lambda^{-1}(N)=\min_{\xi_1, \xi_2}\sum_{s=1}^{N}|\xi_1(\gamma^1(s)-\gamma^3(s))+\xi_2\gamma^2(s)-4\gamma^3(s)|$$

と書かれる。$N=1$, 2のときは明らかに$\lambda(1)=\lambda(2)=\infty$である。$N=3$としたとき，

$$\sum_{s=1}^{3}|\xi_1(\gamma^1(s)-\gamma^3(s))+\xi_2\gamma^2(s)-4\gamma^3(s)|$$

$$=|-3\xi_1+\xi_2-8|+|-6\xi_1+\xi_2-16|+|-11\xi_1+\xi_2-32|$$

は$\xi_1=-3$, $\xi_2=-1$のとき最小値$\lambda^{-1}(3)=1$をとる。よって，$\lambda(3)=1$であるから，$N^*=3$が求まった。このN^*に対する最小値問題(3.14)の解は$\xi_1^0=-3$, $\xi_2^0=-1$, $\xi_3^0=-1$であるから，最適制御は(3.13)と(2.3)により

$$\eta^*(1)=u^*(0)=\mathrm{sign}[-3\xi_1^0+\xi_2^0-8]=\text{不定}$$

$$\eta^*(2)=u^*(1)=\mathrm{sign}[-6\xi_1^0+\xi_2^0-16]=1$$

$$\eta^*(3)=u^*(2)=\mathrm{sign}[-11\xi_1^0+\xi_2^0-32]=\text{不定}$$

と求まる。$u^*(0)$と$u^*(2)$の値を決定する条件は$x_1(3)=x_2(3)=y(3)=0$である。複合系のu^*に対する過渡応答を調べると，

$$x_1(3)=\frac{5}{4}+2u^*(0),\quad x_2(3)=1+u^*(0)+u^*(2)$$

$$y(3)=\frac{17}{32}+\frac{1}{4}u^*(0)+u^*(2)$$

を得る。従って，$u^*(0)=-\frac{5}{8}$, $u^*(2)=-\frac{3}{8}$と決定されるから，複合系の最適応答は

$$x_1(1)=\frac{1}{4}\ ,\quad x_1(2)=-\frac{3}{8},\quad x_1(3)=0$$

$$x_2(1)=-\frac{5}{8},\quad x_2(2)=\frac{3}{8}\ ,\quad x_2(3)=0$$

$$y(1)=-\frac{1}{2},\quad y(2)=\frac{3}{4}\ ,\quad y(3)=0$$

となる。この例題の最適制御は上のように一意的に定まる。

4. 最適制御問題(A, C_2, $q=r$)

4.1 仮定

(i) 系0_1に関して，rank $A=p$を仮定する。

(ii) 系0_2に関して，$q=r$, rank $C=r$, rank $D=r$を仮定する。

(iii) 新しい状態変数$y'(n)=(y_1'(n), \cdots, y_r'(n))^T$を

$$y_j'(n)=y_j(n)/L_j',\quad j=1,\cdots,r,\quad n=1,2,\cdots$$

で定義するならば，拘束条件C_2は$|y_j'(n)|\leq 1$を表わす。従って，一般性を失うことなく始めから，$L_j'=1$, $j=1, \cdots, r$を仮定し，本節では拘束条件を

$$(C_2')\quad |y_j(n)|\leq 1,\quad j=1,\cdots,r,\quad n=1,2,\cdots$$

と表わすことにする。

4.2 L－問題への変換

(i) まず，(3.2)から次式が導びかれることを示す。

$$(4.1)\quad \begin{cases} \eta(1)=D^{-1}y(1)-D^{-1}F(1)y_0 \\ \eta(n)=D^{-1}y(n)-D^{-1}F(1)y(n-1),\quad n\geq 2 \end{cases}$$

ここに，ηは(2.3)で定義される。

(ii) 証明は帰納法による。(3.2)で$n=1$とすると

$$y(1)=F(1)y_0+D\eta(1)$$

である。仮定によりD^{-1}が存在するから，容易に(4.1)の第一式を得る。(3.2)で$n=2$とし，$\eta(1)$の表現と$F(n+s)=F(n)F(s)$の関係を用いると

$$y(2)=F(2)y_0+F(1)D\eta(1)+D\eta(2)$$

$$=F(1)y(1)+D\eta(2)$$

を得る。従って，

$$\eta(2)=D^{-1}y(2)-D^{-1}F(1)y(1)$$

が得られる。つぎに，$n=m\ (\geq 3)$ までの (4.1) を仮定する。(3.2) で $n=m+1$ とすると

$$y(m+1)=F(m+1)y_0+\sum_{s=1}^{m}F(m+1-s)D\eta(s)+D\eta(m+1)$$

$$=F(m+1)y_0+\sum_{s=1}^{m}[F(m+1-s)y(s)$$

$$-F(m+2-s)y(s-1)]+D\eta(m+1)$$

$$=F(1)y(m)+D\eta(m+1)$$

を得る。従って，

$$\eta(m+1)=D^{-1}y(m+1)-D^{-1}F(1)y(m)$$

が得られる。

(iii) ある制御 $\eta(n)$ を行なったとき，離散時刻 $n=N$ で最初に系 0_1 の状態が $x(N)=x_1$ を満たしたとすると (2.7) と (2.8)，すなわち

(4.2)　$[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}=(r^i,\eta)=\sum_{s=1}^{N}(r^i(s),\ \eta(s)),$

$i=1,\cdots,p$

(4.3)　$r^i(s)=[\Phi(-s)B]_i$

が導びかれる。(4.2) に (4.1) を代入すると

$$\sum_{s=1}^{N}(r^i(s),\ \eta(s))=(r^i(1),\ D^{-1}y(1)-D^{-1}F(1)y_0)$$

$$+\sum_{s=2}^{N}(r^i(s),\ D^{-1}y(s)-D^{-1}F(1)y(s-1))$$

$$=-(r^i(1),\ D^{-1}F(1)y_0)+\sum_{s=1}^{N}(r^i(s),\ D^{-1}y(s))$$

$$-\sum_{s=1}^{N-1}(r^i(s+1),\ D^{-1}F(1)y(s))$$

$$=-(r^i(1),\ D^{-1}F(1)y_0)+\sum_{s=1}^{N-1}(D^{-1^T}r^i(s)$$

$$-F(1)^TD^{-1^T}r^i(s+1),\ y(s))+(D^{-1^T}r^i(N),\ y(N))$$

を得る。いま

(4.4)　$e_i=[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}+(r^i(1),\ D^{-1}F(1)y_0)$

(4.5)　$\begin{cases} z^i(s)=D^{-1^T}r^i(s)-F(1)^TD^{-1^T}r^i(s+1), \\ \qquad s=1,\cdots,N-1 \\ z^i(N)=D^{-1^T}r^i(N) \end{cases}$

とおくと，結局 (4.2) は次式のように変形できる。

(4.6)　$e_i=\sum_{s=1}^{N}(z^i(s),\ y(s))=(z^i,\ y),\quad i=1,\cdots,p$

ここに，

(4.7)　$z^i=(z^i(1),\cdots,z^i(N)),\quad z^i(s)=(z^i_1(s),\cdots,z^i_r(s))$

(4.8)　$y=(y(1),\cdots,y(N)),\quad y(s)=(y_1(s),\cdots,y_r(s))$

であり，(4.4) と (4.5) は複合系 $(0_1,0_2)$ の境界条件と諸係数から定まる定数と r 次元ベクトルであることに注意する。

(iv) (4.8) の y に対して，ノルムを

(c)　$\|y\|=\max_{1\leq s\leq N}\ \max_{1\leq g\leq r}|y_g(s)|$

で定義し，このノルムを持つ y の空間を R^* と書く。このとき，拘束条件 C_2' は等価的につぎのように書ける。

(C_2'')　$\|y\|\leq 1,\quad y\in R^*$

共役空間 R^* が上記のように与えられると，空間 R の元 z のノルムは次式で定義される。

(d)　$\|z\|=\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{r}|z_g(s)|$

よく知られているように，R の上の線形汎関数 $y\in R^*$ は次式で表現される。

$$y(z)=(z,\ y),\quad z\in R$$

(v) 以上の準備のもとで，最適制御問題 $(A, C_2', q=r)$ はつぎの L－問題に変換できる。

［P3］ 与えられた p 個の実数 e_i および p 個の R の元 z^i に対して，(4.6) を最小数 $N=N^*$ で満たす線形汎関数 $y^*\in R^*$，$\|y^*\|\leq 1$ を求めよ。

4.3 最適解の存在条件

問題［P3］の最適解を見出すために，つぎの中間的L－問題を考える。

［LP3］ 離散時刻 N を固定したとき，与えられた p 個の e_i と $z^i\in R$ に対して，(4.6) を満たす最小ノルムの $\bar{y}\in B^*$ を求めよ。

モーメントのL－問題定理により，$z^1,\cdots,z^p$ が線形独立であれば，必ず［LP3］の解は存在し，$\bar{y}$ が最小ノルム解であるための必要十分条件は

(4.9)　$\left(\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z^i,\ \bar{y}\right)=\left\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z^i\right\|\ \|\bar{y}\|=1$

である。ここで，$\xi^0=(\xi_1^0,\cdots,\xi_p^0)^T$ はつぎの有限次元最小値問題の解の一つを表わす。

(4.10)　$\lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z^i\right\|$

ただし，

$$\Omega=\left\{\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_p)^T\ \middle|\ \sum_{i=1}^{p}\xi_i e_i=1\right\}$$

とする。

(4.9) と (4.10) から，［LP3］の解 $\bar{y}$ のノルムは $\|\bar{y}\|=\lambda(N)$ である。よって，$z^1,\cdots,z^p$ が線形独立でありかつ $\lambda(N)\leq 1$ を満たす離散時刻 N が存在するならば，［P3］の最適解は存在する。

4.4 N^* と η^* の決定

空間 R のノルムの定義により，(4.10) は

(4.11)　$\lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_g^i(s)\right|$

と書ける。$\lambda(N)\leq 1$ を満たす N が存在するならば，そ

の中の最小数としてN^*が決定される。このN^*に対する[LP3]の最小ノルム解$\bar{y}$は(4.9)を満たす。$\lambda(N)$の単調減少性と$\|\bar{y}\|$の最小性により，この$\bar{y}$が[P3]の最適解y^*となる。従って，(4.9)にRとR^*のノルムの定義を使うと，y^*は次式より決定される。

$$(4.12)\quad \sum_{s=1}^{N^*}\sum_{g=1}^{r} y_g^*(s)\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_g^i(s)$$

$$=[\max_{1\leq s\leq N^*}\max_{1\leq g\leq r}|y_g^*(s)|]$$

$$\times[\sum_{s=1}^{N^*}\sum_{g=1}^{r}|\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_g^i(s)|]=1$$

上式が成立するための必要十分条件は

$$(4.13)\quad y_g^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_g^i(s)],$$

$$s=1,\cdots,N^*,\quad g=1,\cdots,r$$

である。ここに，$\xi^0\in\Omega$は有限次元最小値問題

$$(4.14)\quad \min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N^*}\sum_{g=1}^{r}|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_g^i(s)|$$

の一つの解であり，$\lambda(N^*)$はその値の逆数を表わす。よって，(4.1)と(4.13)より，η^*は次式から求まる。

$$(4.15)\quad \begin{cases}\eta^*(1)=D^{-1}y^*(1)-D^{-1}F(1)y_0\\ \eta^*(s)=D^{-1}y^*(s)-D^{-1}F(1)y^*(s-1),\\ \qquad s=2,\cdots,N^*\end{cases}$$

4.5 注　意

(i) $z^1,\cdots,z^p$が線形独立であるならば，有限次元最小値問題(4.14)は必ず解をもつが，一つとはかぎらない。しかし，全ての解は同一の値$\lambda(N^*)^{-1}$を示す。

(ii) (4.13)の$y_g^*(s)$は全ての$s=1,\cdots,N^*$, $g=1,\cdots,r$に対してその値が確定するとはかぎらず，いくつかのsとgに対して

$$\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_g^i(s)=0$$

となることがある。このため，(4.15)の$\eta_g^*(s)$もいくつかのsとgに対してその値が確定しないのが普通である。このようなsとgに対する$\eta_g^*(s)$の値は複合系$(0_1,0_2)$に課せられた諸条件から決定しなければならない。この事情により，最適制御η^*は必ずしも一意的に定まらないことが分る。

4.6 例　題

$$(0_1)\quad \begin{cases}x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n)\\ x_2(n+1)=\frac{1}{2}x_2(n)+\frac{1}{4}u(n)\end{cases}$$

$$(0_2)\quad y'(n+1)=\frac{1}{2}y'(n)+\frac{1}{3}u(n),\quad y'(0)=0$$

なる複合系において，系0_1の初期値$(x_{01},x_{02})=(\frac{1}{4},0)$を系$0_2$の状態拘束条件$|y'(n)|\leq\frac{1}{3}$のもとで指定点$(x_{11},x_{12})=(0,0)$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u^*(n)$を求める。$y(n)=3y'(n)$とおくと，系$0_2$は

$$(0_2')\quad y(n+1)=\frac{1}{2}y(n)+u(n),\quad y(0)=0$$

となり，状態拘束条件は$|y(n)|\leq 1$となる。

複合系$(0_1,0_2')$に対するこの問題には上記の解析が適用でき，(4.6)，(4.3)と(4.5)は次式となる。

$$-\frac{1}{4}=(z^1,y)\quad,\quad 0=(z^2,y)$$

$$\gamma^1(s)=2^{-1}-2^{s-1}\ ,\quad \gamma^2(s)=2^{s-2}$$

$$\begin{cases}z^i(s)=\gamma^i(s)-2^{-1}\gamma^i(s+1),\quad s=1,\cdots N-1\\ z^i(N)=\gamma^i(N)\qquad\qquad ,\quad i=1,\ 2\end{cases}$$

従って，z^1とz^2は$N\geq 2$において線形独立である。

$$\Omega=\{\xi=(\xi_1,\xi_2)^T\mid\xi_1=-4\}$$

であるから，$N=1$としたときの最小値問題(4.11)は

$$\lambda^{-1}(1)=\min_{\xi_2}|-4\gamma^1(1)+\xi_2\gamma^2(1)|=\min_{\xi_2}|2+\frac{1}{2}\xi_2|$$

となり，明らかに$\lambda(1)=\infty$である。$N=2$としたときの(4.11)は

$$\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_2}\{|-4(\gamma^1(1)-2^{-1}\gamma^1(2))+\xi_2(\gamma^2(1)-2^{-1}\gamma^2(2))|+|-4\gamma^1(2)+\xi_2\gamma^2(2)|\}$$

$$=\min_{\xi_2}\{|-1|+|6+\xi_2|\}$$

であるから，$\xi_2=-6$のとき最小値$\lambda^{-1}(2)=1$をとる。よって，$\lambda(2)=1$であるから，$N^*=2$と求まる。このN^*に対する最小値問題(4.14)の解は$\xi_1^0=-4$，$\xi_2^0=-6$であるから，(4.13)より

$$y^*(1)=\mathrm{sign}\ [-1]=-1$$

$$y^*(2)=\mathrm{sign}\ [6+\xi_2^0]=\text{不定}$$

が求まる。従って，最適制御は(4.15)と(2.3)により

$$\eta^*(1)=u^*(0)=y^*(1)=-1$$

$$\eta^*(2)=u^*(1)=y^*(2)-2^{-1}y^*(1)=\text{不定}$$

と求まる。$u^*(1)$の値を決定する条件は$x_1(2)=x_2(2)=0$である。系0_1のu^*に対する過渡応答を調べると

$$x_1(2)=0,\quad x_2(2)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}u^*(1)$$

を得る。従って，$u^*(1)=\frac{1}{2}$と決定されるから，複合系$(0_1,0_2')$の最適応答は

$$x_1(1)=\frac{1}{4},\quad x_1(2)=0\ ;\ x_2(1)=-\frac{1}{4},\quad x_2(2)=0\ ;$$

$$y(1)=-1,\quad y(2)=0$$

となる。よって，系0_2の応答は$y'(1)=-\frac{1}{3}$，$y'(2)=0$であるから，この問題の拘束条件を満している。この例題の最適制御は上のように一意的に定まる。

5. 最適制御問題(B，C_2，$q=r$)

5.1 仮　定

(i) 系0_1に関して，rank $A=p$を仮定する。

(ii) 系0_2に関して，$q=r$，$\mathrm{rank}\, C=r$，$\mathrm{rank}\, D=r$ を仮定する。

(iii) 4.1節の(iii)の理由により，本節では拘束条件として(C_2')を採用する。

5.2 L－問題への変換

ある制御$\eta(n)$を行なったとき，離散時刻$n=N$で最初に複合系(0_1, 0_2)の状態が$x(N)=x_1$，$y(N)=y_1$を同時に満たしたとする。このとき，(2.7)と(2.8)および(4.1)から次式が導びかれる。

$$(5.1)\quad [\Phi(-N)]_i x_1 - x_{0i} = (r^i, \eta),\quad i=1,\cdots,p$$

$$(5.2)\quad r^i(s)=[\Phi(-s)B]_i$$

$$(5.3)\quad \begin{cases} \eta(1)=D^{-1}y(1)-D^{-1}F(1)y_0 \\ \eta(s)=D^{-1}y(s)-D^{-1}F(1)y(s-1),\quad s=2,\cdots,N-1 \\ \eta(N)=D^{-1}y_1-D^{-1}F(1)y(N-1) \end{cases}$$

(5.3)を(5.1)に代入すると

$$\begin{aligned}(r^i,\eta)&=\sum_{s=1}^{N}(r^i(s),\eta(s))\\ &=(r^i(1),D^{-1}y(1)-D^{-1}F(1)y_0)\\ &\quad+\sum_{s=2}^{N-1}(r^i(s),D^{-1}y(s)-D^{-1}F(1)y(s-1))\\ &\quad+(r^i(N),D^{-1}y_1-D^{-1}F(1)y(N-1))\\ &=-(r^i(1),D^{-1}F(1)y_0)+(r^i(N),D^{-1}y_1)\\ &\quad+\sum_{s=1}^{N-1}(r^i(s),D^{-1}y(s))-\sum_{s=1}^{N-1}(r^i(s+1),\\ &\quad D^{-1}F(1)y(s))\\ &=-(r^i(1),D^{-1}F(1)y_0)+(r^i(N),D^{-1}y_1)\\ &\quad+\sum_{s=1}^{N-1}({D^{-1}}^T r^i(s)-F(1)^T {D^{-1}}^T r^i(s+1),\ y(s))\end{aligned}$$

を得る。ここで，

$$(5.4)\quad e_i=[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}+(r^i(1),D^{-1}F(1)y_0)-(r^i(N),D^{-1}y_1)$$

$$(5.5)\quad z^i(s)={D^{-1}}^T r^i(s)-F(1)^T{D^{-1}}^T r^i(s+1),\quad s=1,\cdots,N-1$$

とおくと，結局(5.1)は次式のように変形される。

$$(5.6)\quad e_i=\sum_{s=1}^{N-1}(z^i(s),y(s))=(z^i,y),\quad i=1,\cdots,p$$

ここに，

$$(5.7)\quad z^i=(z^i(1),\cdots,z^i(N-1)),\quad z^i(s)=(z_1^i(s),\cdots,z_r^i(s))$$

$$(5.8)\quad y=(y(1),\cdots,y(N-1)),\quad y(s)=(y_1(s),\cdots,y_r(s))$$

である。

(5.8)のyに対して，ノルムを

$$(\mathrm{e})\quad \|y\|=\max_{1\le s\le N-1}\ \max_{1\le g\le r}|y_g(s)|$$

で定義し，このノルムを持つyの空間をR^*と書く。このとき，拘束条件C_2'は等価的につぎのように書ける。

$$(C_2'')\quad \|y\|\le 1,\quad y\in R^*$$

共役空間R^*が上記のように指定されると，空間Rの元zのノルムは次式で定義される。

$$(\mathrm{f})\quad \|z\|=\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{g=1}^{r}|z_g(s)|$$

よく知られているように，Rの上の線形汎関数$y\in R^*$は次式で表現される。

$$y(z)=(z,y),\quad z\in R$$

以上の準備のもとで，最適制御問題(B, C_2', $q=r$)はつぎのL－問題に帰結される。

［P4］ 与えられたp個の実数e_iとp個のRの元z^iに対して，(5.6)を最小数$N=N^*$で満たす線形汎関数$y^*\in R^*$, $\|y^*\|\le 1$を求めよ。

5.3 最適解の存在条件

問題［P4］の最適解を見出すには，つぎのL－問題を考えると分りやすい。

［LP4］ 離散時刻Nを固定したとき，与えられたp個のe_iと$z^i\in R$に対して，(5.6)を満たしうる最小ノルムの$\bar{y}\in R^*$を求めよ。

モーメントのL－問題定理により，$z^1,\cdots,z^p$が線形独立であれば，必ず［LP4］の解$\bar{y}$が存在し，$\|\bar{y}\|=\lambda(N)$である。ここに，$\lambda(N)$はつぎの最小値問題の解の値の逆数を表わす。

$$(5.9)\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z^i\right\|$$

$$\Omega=\left\{\xi=(\xi_1,\cdots,\xi_p)^T \,\middle|\, \sum_{i=1}^{p}\xi_i e_i=1\right\}$$

従って，$\lambda(N)\le 1$を満たす離散時刻Nが存在すれば，［P4］は解を持つ。

5.4 N^*とη^*の決定

空間Rのノルムの定義より，(5.9)は

$$(5.10)\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_g^i(s)\right|$$

と書ける。$\lambda(N)\le 1$を満たすNが存在すれば，その中の最小数としてN^*が決定される。このN^*に対する［LP4］の最小ノルム解$\bar{y}$は［P4］の最適解y^*に等価であるから，y^*の満たすべき必要十分条件は

$$\left(\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z^i,\ y^*\right)=\left\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z^i\right\|\,\|y^*\|=1$$

である。RとR^*のノルムの定義により，上式からy^*は

$$(5.11)\quad y_g^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_g^i(s)\right],$$
$$s=1,\cdots,N^*-1,\quad g=1,\cdots,r$$

と決定される。ここに，$\xi^0\in\Omega$は最小値問題

$$(5.12)\quad \lambda^{-1}(N^*)=\min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N^*-1}\sum_{g=1}^{r}\left|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_g^i(s)\right|$$

の一つの解を表わす。よって，η^*は(5.3)と(5.11)から

$$(5.13)\begin{cases}\eta^*(1)=D^{-1}y^*(1)-D^{-1}F(1)y_0\\ \eta^*(s)=D^{-1}y^*(s)-D^{-1}F(1)y^*(s-1),\\ \qquad s=2,\cdots,N^*-1\\ \eta^*(N^*)=D^{-1}y_1-D^{-1}F(1)y^*(N^*-1)\end{cases}$$

と求まる。

以上の解析に対して，4.5節と同様のことが注意される。

5.5 例 題

$$(0_1)\quad\begin{cases}x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n)\\ x_2(n+1)=x_2(n)+u(n)\end{cases}$$

$$(0_2)\qquad y'(n+1)=\frac{1}{2}y'(n)+u(n)$$

なる複合系の初期値$(x_{01},x_{02})=(\frac{1}{4},0)$と$y'_0=\frac{1}{4}$を拘束条件$|y'(n)|\leq\frac{1}{2}$のもとで指定点$(x_{11},x_{12})=(0,0)$と$y'_1=0$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u^*(n)$を求める。$y(n)=2y'(n)$とおくと，系$0_2$は

$$(0'_2)\quad y(n+1)=\frac{1}{2}y(n)+2u(n)$$

となり，$y_0=\frac{1}{2}$，$y_1=0$となり，$|y(n)|\leq 1$となる。

複合系$(0_1,0'_2)$に対するこの問題には上記の解析が適用でき，(5.6)と(5.5)は次式となる。

$$-\frac{3}{8}=(z^1,y)\ ,\quad \frac{1}{8}=(z^2,y)$$

$$z^1(s)=\frac{1-s}{4}\ ,\quad z^2(s)=\frac{1}{4}$$

従って，z^1とz^2は$N\geq 2$に対して線形独立である。

$$\Omega=\{\xi=(\xi_1,\xi_2)^T\,|-3\xi_1+\xi_2=8\}$$

であるから，$N=2$としたときの最小値問題(5.10)は

$$\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_1}\left|\frac{3}{4}\xi_1+2\right|$$

であるから，明らかに$\lambda(2)=\infty$である。$N=3$としたときの(5.10)は

$$\lambda^{-1}(3)=\min_{\xi_1}\left\{\left|\frac{3}{4}\xi_1+2\right|+\left|\frac{1}{2}\xi_1+2\right|\right\}$$

となり，$\xi_1=-\frac{8}{3}$のとき最小値$\lambda^{-1}(3)=\frac{2}{3}$をとる。従って，$\lambda(3)=\frac{3}{2}>1$である。$N=4$としたときの(5.10)は

$$\lambda^{-1}(4)=\min_{\xi_1}\left\{\left|\frac{3}{4}\xi_1+2\right|+\left|\frac{1}{2}\xi_1+2\right|+\left|\frac{1}{4}\xi_1+2\right|\right\}$$

となり，$-4\leq\xi_1\leq-\frac{8}{3}$なる任意の$\xi_1$に対して最小値$\lambda^{-1}(4)=2$をとる。よって，$\lambda(4)=\frac{1}{2}<1$となるから，$N^*=4$と決定される。この$N^*$に対する最小値問題(5.12)の解は$-4\leq\xi_1^0\leq-\frac{8}{3}$，$\xi_2^0=8+3\xi_1^0$である。いま，その一つの解として$\xi_1^0=-3$，$\xi_2^0=-1$を採用すると，(5.11)から

$$y^*(1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\left[\frac{3}{4}\xi_1^0+2\right]=-\frac{1}{2}$$

$$y^*(2)=\frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\left[\frac{1}{2}\xi_1^0+2\right]=\frac{1}{2}$$

$$y^*(3)=\frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\left[\frac{1}{4}\xi_1^0+2\right]=\frac{1}{2}$$

が求まる。従って，最適制御は(5.13)と(2.3)により

$$\eta^*(1)=u^*(0)=-\frac{3}{8},\quad \eta^*(2)=u^*(1)=\frac{3}{8}$$

$$\eta^*(3)=u^*(2)=\frac{1}{8}\quad ,\quad \eta^*(4)=u^*(3)=-\frac{1}{8}$$

と決定される。複合系$(0_1,0'_2)$のu^*による最適応答は

$$x_1(1)=\frac{1}{4},\quad x_1(2)=-\frac{1}{8},\quad x_1(3)=-\frac{1}{8},\quad x_1(4)=0$$

$$x_2(1)=-\frac{3}{8},\quad x_2(2)=0\ ,\quad x_2(3)=\frac{1}{8},\quad x_2(4)=0$$

$$y(1)=-\frac{1}{2},\quad y(2)=\frac{1}{2},\quad y(3)=\frac{1}{2},\quad y(4)=0$$

である。これを系0_2の応答に直すと

$$y'(1)=-\frac{1}{4},\quad y'(2)=\frac{1}{4},\quad y'(3)=\frac{1}{4},\quad y'(4)=0$$

であり，この問題の拘束条件を満している。他の全ての最小値問題の解に対しても，上記と同一の最適制御が得られるから，この例題では解が一意的に定まる。

6. 最適制御問題(A，C_2，$q>r$)

6.1 仮 定

(i) 系0_1に関して，rank $A=p$を仮定する。

(ii) 系0_2に関して，$q>r$，rank $C=q$，rank $D=r$を仮定する。さらに，一般性を失うことなく

$$D=\begin{bmatrix}D_1\\ D_2\end{bmatrix},\quad \begin{array}{l}D_1=r\times r\text{ 正則マトリクス}\\ D_2=(q-r)\times r\text{ マトリクス}\end{array}$$

を仮定する。

(iii) 4.1節の(iii)の理由により，拘束条件C_2の代りにC'_2を採用する。

6.2 L－問題への変換

(i) まず，(3.2)から次式が導びかれることを示す。

$$(6.1)\quad \eta(n)=\sum_{s=1}^{n}E(0,1,\cdots,n-s)D^T\{y(s)-F(s)y_0\},$$
$$n=1,2,\cdots$$

ここで，$r\times r$マトリクス$E(0,1,\cdots,n-s)$は

$$(6.2)\quad E(0)=(D^TD)^{-1}$$

を初期マトリクスとして，つぎの公式に従って順次決定されるものとする。

$$(6.3)\quad E(0,1,\cdots,j)=\sum_{i=1}^{j}E(0,i)E(0)^{-1}E(0,1,\cdots,j-i),$$
$$j=1,2,\cdots$$

ただし，$r\times r$マトリクス$E(0,i)$は

(6.4)　$E(0, i)=-E(0)D^T F(i) DE(0),\quad i=1, 2, \cdots$

で定義する。

(ii)　証明は帰納法による。$n=1$ のとき，(3.2) から $y(1)=F(1)y_0+D\eta(1)$，従って $D^T y(1)=D^T F(1)y_0+D^T D\eta(1)$ を得る。仮定(ii)により $(D^T D)^{-1}$ が存在するから，

$$\eta(1)=E(0)D^T\{y(1)-F(1)y_0\}$$

が得られる。$n=2$ のとき，(3.2) は $y(2)=F(2)y_0+F(1)\times D\eta(1)+D\eta(2)$ である。従って，

$$\begin{aligned}\eta(2)&=E(0)D^T\{y(2)-F(2)y_0-F(1)D\eta(1)\}\\&=E(0)D^T\{y(2)-F(1)DE(0)D^T y(1)-F(2)y_0\\&\quad+F(1)DE(0)D^T F(1)y_0\}\\&=E(0)D^T y(2)+E(0,1)D^T y(1)\\&\quad-\{E(0)D^T F(2)+E(0,1)D^T F(1)\}y_0\end{aligned}$$

が得られる。つぎに，$n=m(\geq 3)$ までは (6.1) が成立していると仮定する。$n=m+1$ のとき，(3.2) は $y(m+1)$

$=F(m+1)y_0+\sum_{s=1}^{m}F(m+1-s)D\eta(s)+D\eta(m+1)$ である。

従って，

$$\begin{aligned}\eta(m+1)=E(0)D^T\{&y(m+1)\\&-\sum_{s=1}^{m}F(m+1-s)D\eta(s)-F(m+1)y_0\}\end{aligned}$$

が得られる。ここで，

$$\begin{aligned}&-E(0)D^T\sum_{s=1}^{m}F(m+1-s)D\eta(s)\\&=\sum_{s=1}^{m}-E(0)D^T F(m+1-s)\\&\quad\times D\sum_{\rho=1}^{s}E(0,1,\cdots,s-\rho)D^T\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\\&=\sum_{s=1}^{m}E(0,m+1-s)\\&\quad\times E(0)^{-1}\sum_{\rho=1}^{s}E(0,1,\cdots,s-\rho)D^T\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\\&=\sum_{s=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{s}E(0,m+1-s)\\&\quad\times E(0)^{-1}E(0,1,\cdots,s-\rho)D^T\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\\&=\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{s=\rho}^{m}E(0,m+1-s)\\&\quad\times E(0)^{-1}E(0,1,\cdots,s-\rho)D^T\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\\&=\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{i=1}^{m-\rho-1}E(0,i)\\&\quad\times E(0)^{-1}E(0,1,\cdots,m-\rho+1-i)D^{-1}\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\\&=\sum_{\rho=1}^{m}E(0,1,\cdots,m-\rho+1)D^{-1}\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\end{aligned}$$

だから

$$\eta(m+1)=\sum_{s=1}^{m+1}E(0,1,\cdots,m+1-s)D^{-1}\{y(s)-F(s)y_0\}$$

が得られた。

(iii)　ある制御 $\eta(n)$ を行なったとき，離散時刻 $n=N$ で最初に系 0_1 の状態が $x(N)=x_1$ を満たしたとすると (2.7) と (2.8)，すなわち

(6.5)　$[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}=(r^i,\eta)=\sum_{n=1}^{N}(r^i(n),\eta(n)),$

$i=1,\cdots,p$

(6.6)　$r^i(n)=[\Phi(-n)B]_i$

が導びかれる。(6.5) に (6.1) を代入すると

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N}(r^i(n),\eta(n))\\&=\sum_{n=1}^{N}\Big(r^i(n),\sum_{s=1}^{n}E(0,1,\cdots,n-s)D^T\{y(s)-F(s)y_0\}\Big)\\&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{s=1}^{n}\Big(r^i(n),E(0,1,\cdots,n-s)D^T\{y(s)-F(s)y_0\}\Big)\\&=\sum_{n=1}^{N}\sum_{s=1}^{n}(DE(0,1,\cdots,n-s)^T r^i(n),\ y(s)-F(s)y_0)\\&=\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=s}^{N}(DE(0,1,\cdots,n-s)^T r^i(n),\ y(s)-F(s)y_0)\\&=\sum_{s=1}^{N}\Big(\sum_{n=s}^{N}DE(0,1,\cdots,n-s)^T r^i(n),\ y(s)-F(s)y_0\Big)\end{aligned}$$

を得る。いま

(6.7)　$e_i=[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}+\sum_{s=1}^{N}\Big(\sum_{n=s}^{N}DE(0,1,\cdots,n-s)^T r^i(n), F(s)y_0\Big)$

(6.8)　$z^i(s)=\sum_{n=s}^{N}DE(0,1,\cdots,n-s)^T r^i(n)$

とおくと，結局 (6.5) は次式のように変形される。

(6.9)　$e_i=\sum_{s=1}^{N}(z^i(s),y(s))=(z^i,y),\quad i=1,\cdots,p$

ここに，z^i と y は (4.7) と (4.8) で r を q としたものを表わす。y は任意に取れるのではなく，任意の η に対する系 0_2 の応答 y の集合に限定される。つぎにその集合を規定する条件を導びく。

(iv)　まず，

$$F(n)D=\begin{bmatrix}\Psi_1(n)\\\Psi_2(n)\end{bmatrix},\quad \begin{aligned}&\Psi_1(n)=r\times r\ \text{マトリクス}\\&\Psi_2(n)=(q-r)\times r\ \text{マトリクス}\end{aligned}$$

$$F(n)=\begin{bmatrix}F_1(n)\\F_2(n)\end{bmatrix},\quad \begin{aligned}&F_1(n)=r\times q\ \text{マトリクス}\\&F_2(n)=(q-r)\times q\ \text{マトリクス}\end{aligned}$$

$$y=(\bar{y},\tilde{y})^T,\ \bar{y}=(y_1,\cdots,y_r)^T,\ \tilde{y}=(y_{r+1},\cdots,y_q)^T$$

とおくと，(3.2) から次式が導びかれることを示す。

(6.10)　$\eta(n)=\sum_{s=1}^{n} G(0,1,\cdots,n-s)\{\bar{y}(s)-F_1(s)y_0\},$

$n=1,2,\cdots$

ここで，$r\times r$ マトリクス $G(0,1,\cdots,j)$ は

(6.11)　$G(0)=\Psi_1^{-1}(0)$

を初期マトリクスとして，つぎの公式に従って逐次決定されるものとする。

(6.12)　$G(0,1,\cdots,j)=\sum_{i=1}^{j} G(0,i)\Psi_1(0)G(0,1,\cdots,j-i),$

$j=1,2,\cdots$

ただし，$G(0,i)$ は

(6.13)　$G(0,i)=-\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(i)\Psi_1^{-1}(0),\quad i=1,2,\cdots$

で定義する。

(V)　証明は帰納法による。上の記号を使うと，(3.2) はつぎのように書ける。

(6.14)　$\begin{pmatrix}\bar{y}(n)\\ \tilde{y}(n)\end{pmatrix}=\begin{bmatrix}F_1(n)\\ F_2(n)\end{bmatrix}y_0+\sum_{s=1}^{n}\begin{bmatrix}\Psi_1(n-s)\\ \Psi_2(n-s)\end{bmatrix}\eta(s)$

$n=1$ のとき，上式から $\bar{y}(1)=F_1(1)y_0+\Psi_1(0)\eta(1)$ を得る。仮定により $\Psi_1(0)=D_1$ は正則であるから，

$$\eta(1)=\Psi_1^{-1}(0)\{\bar{y}(1)-F_1(1)y_0\}=G(0)\{\bar{y}(1)-F_1(1)y_0\}$$

が得られる。$n=2$ のときは $\bar{y}(2)=F_1(2)y_0+\Psi(1)\eta(1)+\Psi_1(0)\eta(2)$ であるから，

$$\eta(2)=\Psi_1^{-1}(0)\{\bar{y}(2)-F_1(2)y_0-\Psi_1(1)\eta(1)\}$$
$$=G(0)\{\bar{y}(2)-F_1(2)y_0\}+G(0,1)\{\bar{y}(1)-F_1(1)y_0\}$$

が得られる。つぎに，$n=m\ (\geq 3)$ までは (6.10) が成立したと仮定する。$n=m+1$ のとき，$\bar{y}(m+1)=F_1(m+1)\times y_0+\sum_{s=1}^{m}\Psi_1(m+1-s)\eta(s)+\Psi_1(0)\eta(m+1)$ であるから，

$$\eta(m+1)=\Psi_1^{-1}(0)\Big\{\bar{y}(m+1)-F_1(m+1)y_0-\sum_{s=1}^{m}\Psi_1(m+1-s)\eta(s)\Big\}$$

を得る。ここで，

$$\Psi_1^{-1}(0)\sum_{s=1}^{m}\Psi_1(m+1-s)\eta(s)$$
$$=\sum_{s=1}^{m}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(m+1-s)\sum_{\rho=1}^{s}G(0,1,\cdots,s-\rho)\times\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\}$$
$$=\sum_{s=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{s}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(m+1-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)\times\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\}$$
$$=\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{s=\rho}^{m}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(m+1-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)\times\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\}$$
$$=\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{i=1}^{m-\rho+1}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(i)G(0,1,\cdots,m-\rho+1-i)\times\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\}$$
$$=-\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{i=1}^{m-\rho+1}G(0,i)\Psi_1(0)G(0,1,\cdots,m-\rho+1-i)\times\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\}$$
$$=-\sum_{\rho=1}^{m}G(0,1,\cdots,m-\rho+1)\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\}$$

であるから，

$$\eta(m+1)=\sum_{s=1}^{m+1}G(0,1,\cdots,m+1-s)\{\bar{y}(s)-F_1(s)y_0\}$$

が得られる。

(VI)　(6.10) は系 0_2 の入力 η と応答の一部 $\bar{y}$ の間に一対一対応があることを示している。従って，$\tilde{y}$ は (6.14) の第二式に (6.10) を代入して得られる次式で規定される。

(6.15)　$\tilde{y}(n)=F_2(n)y_0+\sum_{s=1}^{n}\Psi_2(n-s)\eta(s)$

$$=F_2(n)y_0+\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=1}^{s}\Psi_2(n-s)\times G(0,1,\cdots,s-\rho)\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\}$$
$$=F_2(n)y_0+\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{s=\rho}^{n}\Psi_2(n-s)\times G(0,1,\cdots,s-\rho)\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\},\quad n=1,2,\cdots,N$$

上式が (6.9) の y に関する拘束条件である。(6.15) を整理して成分ごとに表わすと

(6.16)　$e_{jn}=\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}\Big[\sum_{s=\rho}^{n}\Psi_2(n-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)\Big]_{ji}\times y_i(\rho)-y_{r+j}(n)$

$j=1,\cdots,q-r\ ;\ n=1,\cdots,N$

と書かれる。ただし，

(6.17)　$e_{jn}=\Big[\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{s=\rho}^{n}\Psi_2(n-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)F_1(\rho)-F_2(n)\Big]_j y_0$

とし，$[\ \ ]_{ji}$ はマトリクスの第 j 行の第 i 成分を表わす。更に (6.16) を書き換えて次式を得る。

(6.18)　$e_{jn}=\sum_{\rho=1}^{N}\sum_{g=1}^{q}z_g^{jn}(\rho)y_g(\rho)$

$$=\sum_{\rho=1}^{N}(z^{jn}(\rho),y(\rho))=(z^{jn},y)$$

$j=1,\cdots,q-r\ ;\ n=1,\cdots,N$

ここに，固定した j，n に対して $z_g^{jn}(\rho)$ はつぎのように定義する。

(6.19)
$$\begin{cases}1\leq g\leq r\ \text{かつ}\ \rho\leq n\ \text{のとき}, \\ \quad z_g^{jn}(\rho)=\Big[\sum_{s=\rho}^{n}\Psi_2(n-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)\Big]_{jg} \\ 1\leq g\leq r\ \text{かつ}\ \rho>n\ \text{のとき},\quad z_g^{jn}(\rho)=0 \\ r+1\leq g=r+j\leq q\ \text{かつ}\ \rho=n\ \text{のとき},\quad z_g^{jn}(\rho)=-1 \\ r+1\leq g\neq r+j\leq q\ \text{または}\ \rho\neq n\ \text{のとき},\quad z_g^{jn}(\rho)=0\end{cases}$$

(vii) ノルムが

(g)　$\|y\| = \max_{1\leq s\leq N} \max_{1\leq g\leq q} |y_g(s)|$

で定義されたyの空間をR^*とする。このとき，拘束条件C_2'は等価的に

(C_2'')　$\|y\|\leq 1$，$y\in R^*$

と書ける。また，空間Rの元zのノルムは

(h)　$\|z\| = \sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{q} |z_g(s)|$

で定義しなければならない。

以上の準備のもとで，最適制御問題($A, C_2', q>r$)はつぎのL－問題に変換される。

［P5］　与えられた$p+(q-r)\times N$個の実数e_i, e_{jn}およびRの元z^i，z^{jn}に対して，(6.9)と(6.18)を同時に最小数$N=N^*$で満たす線形汎関数$y^*\in R^*$，$\|y^*\|\leq 1$を求めよ。

6.3　最適解の存在条件

問題［P5］の最適解はつぎの中間的L－問題を考えることにより見出せる。

［LP5］　離散時刻Nを固定したとき，(6.9)と(6.18)を同時に満たしえる最小ノルムの$\bar{y}\in R^*$を求めよ。

モーメントのL－問題定理により，$z^1, \cdots, z^p, z^{11}, \cdots, z^{(q-r)N}$が線形独立であれば，［LP5］の解は存在し，$\bar{y}$が最小ノルム解であるための必要十分条件は

$$(6.20)\quad \left(\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z^i + \sum_{j=1}^{q-r}\sum_{n=1}^{N}\xi_{jn}^0 z^{jn}, \bar{y}\right) = \left\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z^i + \sum_{j=1}^{q-r}\sum_{n=1}^{N}\xi_{jn}^0 z^{jn}\right\|\|\bar{y}\|=1$$

である。ここで，ξ_i^0とξ_{jn}^0はつぎの最小値問題の解の一つを表わす。

$$(6.21)\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z^i + \sum_{j=1}^{q-r}\sum_{n=1}^{N}\xi_{jn}z^{jn}\right\|$$

ただし，

$$\Omega=\left\{\xi=(\{\xi_i\},\{\xi_{jn}\})^T \;\middle|\; \sum_{i=1}^{p}\xi_i e_i + \sum_{j=1}^{q-r}\sum_{n=1}^{N}\xi_{jn}e_{jn}=1\right\}$$

とする。

(6.20)と(6.21)から，［LP5］の解$\bar{y}$のノルムは$\|\bar{y}\|=\lambda(N)$となる。よって，線形独立の仮定のもとで$\lambda(N)\leq 1$を満たす離散時刻Nが存在すれば，［P5］は最適解を持つ。

6.4　N^*とη^*の決定

空間Rのノルムの定義により，(6.21)は

$$(6.22)\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{q}\left|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_g^i(s) + \sum_{j=1}^{q-r}\sum_{n=1}^{N}\xi_{jn}z_g^{jn}(s)\right|$$

と書かれる。$\lambda(N)\leq 1$を満たすNが存在するならば，その中の最小数としてN^*が決定される。このN^*に対する［LP5］の最小ノルム解$\bar{y}$が［P5］の最適解y^*を与える。従って，(6.20)とR，R^*のノルムの定義から，y^*は次式のように決定される。

$$(6.23)\quad y_g^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_g^i(s) + \sum_{j=1}^{q-r}\sum_{n=1}^{N^*}\xi_{jn}^0 z_g^{jn}(s)\right]$$

$$g=1,\cdots,q\;;\quad s=1,\cdots,N^*$$

ここに，$\xi^0\in\Omega$は$N=N^*$とした最小値問題(6.22)の解の一つであり，$\lambda(N^*)$はその値の逆数を表わす。よって，η^*は(6.23)を(6.1)または(6.10)に代入すれば求まる。ただし，$\eta_g^*(s)$の値はいくつかのgとsに対して確定しないのが普通である。このようなsとgに対する$\eta_g^*(s)$の値は複合系に課せられた諸条件から決定しなければならない。

6.5　例　題

(0_1)　$x(n+1)=\frac{1}{2}x(n)+u(n)$

$$(0_2)\quad \begin{cases} y_1(n+1)=y_1(n)+y_2(n), & y_1(0)=0 \\ y_2(n+1)=y_2(n)+u(n), & y_2(0)=0 \end{cases}$$

なる複合系において，系0_1の初期値$x_0=12$を系0_2の状態拘束条件$|y_g(s)|\leq 1$ ($g=1,2$；$s=1,2,\cdots$)のもとで指定点$x_1=0$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u^*(n)$を求める。

この問題に対して，(6.5)と(6.6)は次式となる。

$$-12=(\gamma^1,\eta),\quad \gamma^1(s)=2^s$$

これは(6.7)～(6.9)に従って，

$$-12=(z^1, y)$$

$$z_1^1(s)=0$$

$$\begin{cases} z_2^1(s)=\gamma^1(s)-\gamma^1(s+1), & s=1,\cdots,N-1 \\ z_2^1(N)=\gamma^1(N) \end{cases}$$

と変換される。ここに，取り得るyの集合を規定する条件は(6.17)～(6.19)によって(注)

$$0=(z^{1n}, y),\quad n=1,\cdots,N$$

$$z_g^{1n}(\rho)=\begin{cases} 1, & (g=1\text{かつ}n=\rho\text{のとき}) \\ 0, & (g=1\text{かつ}n\neq\rho\text{のとき}) \\ -1, & (g=2\text{かつ}\rho\leq n-1\text{のとき}) \\ 0, & (g=2\text{かつ}\rho>n-1\text{のとき}) \end{cases}$$

となる。従って，$z, z^{11}, \cdots, z^{1N}$は線形独立である。

$$\Omega=\{\xi=(\xi_1,\{\xi_{1n}\})^T \mid -12\,\xi_1=1\}$$

であるから，$N=1$としたときの最小値問題(6.22)は

(注)　ここでは便宜上，$y=(y_1, y_2)^T=(\tilde{y},\bar{y})^T$ととっている。

$$\lambda^{-1}(1)=\min_{\xi_{11}}\left\{\left|-\frac{1}{6}\right|+|\xi_{11}|\right\}$$

となる。これは $\xi_{11}=0$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(1)=\frac{1}{6}$ (<1) をとる。$N=2$ としたときの(6.22)は

$$\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_{11},\xi_{12}}\left\{|\xi_{11}|+|\xi_{12}|+\left|\frac{1}{6}-\xi_{12}\right|+\left|-\frac{1}{3}\right|\right\}$$

となるから，$\xi_{11}=0$，$0\leq\xi_{12}\leq\frac{1}{6}$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(2)=\frac{1}{2}$ (<1) をとる。$N=3$ としたときの(6.22)は

$$\lambda^{-1}(3)=\min_{\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13}}\left\{|\xi_{11}|+|\xi_{12}|+|\xi_{13}|+\left|\frac{1}{6}-\xi_{12}-\xi_{13}\right|+\left|\frac{1}{3}-\xi_{13}\right|+\left|-\frac{2}{3}\right|\right\}$$

となるから，$\xi_{11}=0$, $\xi_{12}=0$, $\xi_{13}=\frac{1}{6}$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(3)=1$ をとる。よって，$N^*=3$ が求まった。この N^* に対する最小値問題(6.22)の解として，$\xi_1^0=-\frac{1}{12}$，$\xi_{11}^0=0$，$\xi_{12}^0=0$，$\xi_{13}^0=\frac{1}{6}$ が定まるから，(6.23)より

$$y_1^*(1)=\mathrm{sign}\ \xi_{11}^0=\text{不定}$$
$$y_2^*(1)=\mathrm{sign}\left[\frac{1}{6}-\xi_{12}^0-\xi_{13}^0\right]=\text{不定}$$
$$y_1^*(2)=\mathrm{sign}\ \xi_{12}^0=\text{不定}$$
$$y_2^*(2)=\mathrm{sign}\left[\frac{1}{3}-\xi_{13}^0\right]=1$$
$$y_1^*(3)=\mathrm{sign}\ \xi_{13}^0=1$$
$$y_2^*(3)=\mathrm{sign}\left[-\frac{2}{3}\right]=-1$$

が求まる。従って，最適制御は(6.1)と(2.3)により

$$u^*(0)=\eta^*(1)=[\,0\ 1\,]\,y^*(1)=\text{不定}$$
$$u^*(1)=\eta^*(2)=[\,0\ 1\,]\{y^*(2)-y^*(1)\}=\text{不定}$$
$$u^*(2)=\eta^*(3)=[\,0\ 1\,]\{y^*(3)-y^*(2)\}=-2$$

と求まる。$u^*(0)$と$u^*(1)$の値を決定する条件は $y_1^*(3)=y_2^*(2)=1$ である。系 0_2の u^*に対する過渡応答を調べると

$$y_1(3)=2u^*(0)+u^*(1),\quad y_2(2)=u^*(0)+u^*(1)$$

を得るから，$u^*(0)=0$，$u^*(1)=1$ と決定される。従って，複合系の最適応答は

$$x(1)=6,\quad x(2)=4,\quad x(3)=0$$
$$y_1(1)=0,\quad y_1(2)=0,\quad y_1(3)=1$$
$$y_2(1)=0,\quad y_2(2)=1,\quad y_2(3)=-1$$

となる。

7. 最適制御問題（B，C_2，$q>r$）

7.1 仮　定

(i) 系 0_1に関して，rank $A=p$ を仮定する。

(ii) 系 0_2に関して，$q>r$，rank $C=q$，rank $D=r$，

$$D=\begin{bmatrix}D_1\\D_2\end{bmatrix},\quad \begin{matrix}D_1=r\times r\ \text{正則マトリクス}\\ D_2=(q-r)\times r\ \text{マトリクス}\end{matrix}$$

を仮定する。

(iii) 拘束条件 C_2 の代りに C_2' を用いる。

7.2 L－問題への変換

(i) ある制御 $\eta(n)$を行なったとき，離散時刻 $n=N$ で最初に $x(N)=x_1$ かつ $y(N)=y_1$ を満たしたとする。このとき，

$$(7.1)\quad [\Phi(-N)]_i\,x_1-x_{0i}=(r^i,\eta)=\sum_{n=1}^{N}(r^i(n),\eta(n)),$$
$$i=1,\cdots,p$$

$$(7.2)\quad r^i(n)=[\Phi(-n)B]_i$$

$$(7.3)\quad\left\{\begin{aligned}&y(n)=F(n)y_0+\sum_{s=1}^{n}F(n-s)D\eta(s),\\&\qquad n=1,\cdots,N-1\\&y(N)=y_1\end{aligned}\right.$$

が得られる。(7.3)と(6.1)から，次式が導びかれる。

$$(7.4)\quad\left\{\begin{aligned}&\eta(n)=\sum_{s=1}^{n}E(0,1,\cdots,n-s)D^T\{y(s)-F(s)y_0\},\\&\qquad n=1,\cdots,N-1\\&\eta(N)=\sum_{s=1}^{N-1}E(0,1,\cdots,N-s)D^T y(s)+E(0)D^T y_1\\&\qquad-\sum_{s=1}^{N}E(0,1,\cdots,N-s)D^T F(s)y_0\end{aligned}\right.$$

(7.1)に(7.4)を代入すると

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{N}(r^i(n),\eta(n))&=\sum_{n=1}^{N-1}(r^i(n),\eta(n))+(r^i(N),\eta(N))\\&=\sum_{n=1}^{N-1}\Bigl(r^i(n),\sum_{s=1}^{n}E(0,1,\cdots,n-s)D^T\{y(s)-F(s)y_0\}\Bigr)\\&\quad+\Bigl(r^i(N),\sum_{s=1}^{N-1}E(0,1,\cdots,N-s)D^T y(s)+E(0)D^T y_1\\&\quad-\sum_{s=1}^{N}E(0,1,\cdots,N-s)D^T F(s)y_0\Bigr)\end{aligned}$$

を得る。ここで，

$$\begin{aligned}&\sum_{n=1}^{N-1}\Bigl(r^i(n),\sum_{s=1}^{n}E(0,1,\cdots,n-s)D^T y(s)\Bigr)\\&\quad+\Bigl(r^i(N),\sum_{s=1}^{N-1}E(0,1,\cdots,N-s)D^T y(s)\Bigr)\\&=\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{n}\bigl(DE(0,1,\cdots,n-s)^T r^i(n),y(s)\bigr)\\&\quad+\sum_{s=1}^{N-1}\bigl(DE(0,1,\cdots,N-s)^T r^i(N),y(s)\bigr)\\&=\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{n=s}^{N-1}\bigl(DE(0,1,\cdots,n-s)^T r^i(n),y(s)\bigr)\\&\quad+\sum_{s=1}^{N-1}\bigl(DE(0,1,\cdots,N-s)^T r^i(N),y(s)\bigr)\\&=\sum_{s=1}^{N-1}\Bigl(\sum_{n=s}^{N-1}DE(0,1,\cdots,n-s)^T r^i(n)\\&\quad+DE(0,1,\cdots,N-s)^T r^i(N),y(s)\Bigr)\\&=\sum_{s=1}^{N-1}\Bigl(\sum_{n=s}^{N}DE(0,1,\cdots,n-s)^T r^i(n),y(s)\Bigr)\end{aligned}$$

であり，

$$\sum_{n=1}^{N-1}(r^i(n),\ \sum_{s=1}^{n}E(0,1,\cdots,n-s)D^TF(s)y_0)$$

$$+(r^i(N),\ \sum_{s=1}^{N}E(0,1,\cdots,N-s)D^TF(s)y_0)$$

$$=\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{n=s}^{N-1}(F(s)^TDE(0,1,\cdots,n-s)^Tr^i(n),\ y_0)$$

$$+\sum_{s=1}^{N}(F(s)^TDE(0,1,\cdots,N-s)^Tr^i(N),\ y_0)$$

$$=\sum_{s=1}^{N-1}(\sum_{n=s}^{N-1}F(s)^TDE(0,1,\cdots,n-s)^Tr^i(n)$$

$$+F(s)^TDE(0,1,\cdots,N-s)^Tr^i(N),\ y_0)$$

$$+(F(N)^TDE(0)^Tr^i(N),\ y_0)$$

$$=\sum_{s=1}^{N-1}(\sum_{n=s}^{N}F(s)^TDE(0,1,\cdots,n-s)^Tr^i(n),\ y_0)$$

$$+(F(N)^TDE(0)^Tr^i(N),\ y_0)$$

$$=(\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=s}^{N}F(s)^TDE(0,1,\cdots,n-s)^Tr^i(n),\ y_0)$$

である。いま

$$e_i=[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}-(r^i(N),\ E(0)D^Ty_1)+(\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=s}^{N}F(s)^TDE(0,1,\cdots,n-s)^Tr^i(n),y_0) \tag{7.5}$$

$$z^i(s)=\sum_{n=s}^{N}DE(0,1,\cdots,n-s)^Tr^i(n) \tag{7.6}$$

とおくと，結局(7.1)は次式のように変換される。

$$e_i=\sum_{s=1}^{N-1}(z^i(s),\ y(s))=(z^i,\ y),\quad i=1,\cdots,p \tag{7.7}$$

ここに，z^iとyは(5.7)と(5.8)でrをqとしたものを表わす。

(ii) 上式のyは任意に取れるのではなく，$y(N)=y_1$を満たす任意のηに対する系0_2の応答yの集合に限定される。この集合を規定する条件を導出するために，6.2節の(iv)で定義した記号を用いる。(7.3)と(6.10)から，次式が導びかれる。

$$\left\{\begin{aligned}&\eta(n)=\sum_{s=1}^{n}G(0,1,\cdots,n-s)\{\bar{y}(s)-F_1(s)y_0\},\\&\qquad n=1,\cdots,N-1\\&\eta(N)=\sum_{s=1}^{N-1}G(0,1,\cdots,N-s)\bar{y}(s)+G(0)\bar{y}_1\\&\qquad-\sum_{s=1}^{N}G(0,1,\cdots,N-s)F_1(s)y_0\end{aligned}\right. \tag{7.8}$$

上式は$\bar{y}(N)=\bar{y}_1$を満たすηと応答$\bar{y}$との間の一対一対応を示している。従って，$\tilde{y}$は(6.14)の第二式に(7.8)を代入して得られる次式で規定される。

$$\tilde{y}(n)=F_2(n)y_0+\sum_{s=1}^{n}\Psi_2(n-s)\eta(s)$$

$$=F_2(n)y_0+\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{s=\rho}^{n}\Psi_2(n-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)$$

$$\times\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\},\quad n=1,2,\cdots,N-1$$

$$\tilde{y}_1=\tilde{y}(N)=F_2(N)y_0+\sum_{s=1}^{N-1}\Psi_2(N-s)\eta(s)+\Psi_2(0)\eta(N)$$

$$=F_2(N)y_0+\sum_{s=1}^{N-1}\Psi_2(N-s)\sum_{\rho=1}^{s}G(0,1,\cdots,s-\rho)$$

$$\times\{\bar{y}(\rho)-F_1(\rho)y_0\}$$

$$+\Psi_2(0)\sum_{\rho=1}^{N-1}G(0,1,\cdots,N-\rho)\bar{y}(\rho)+\Psi_2(0)G(0)\bar{y}_1$$

$$-\Psi_2(0)\sum_{\rho=1}^{N}G(0,1,\cdots,N-\rho)F_1(\rho)y_0$$

$$=F_2(N)y_0+\sum_{\rho=1}^{N-1}\sum_{s=\rho}^{N}\Psi_2(N-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)\bar{y}(\rho)$$

$$+\Psi_2(0)G(0)\bar{y}_1-\sum_{\rho=1}^{N}\sum_{s=\rho}^{N}\Psi_2(N-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)$$

$$\times F_1(\rho)y_0$$

上式を整理して成分ごとに表わすと

$$\left\{\begin{aligned}&e_{jn}=\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{i=1}^{r}[\sum_{s=\rho}^{n}\Psi_2(n-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)]_{ji}y_i(\rho)\\&\quad-y_{r+j}(n)\\&\quad j=1,\cdots,q-r\ ;\ n=1,\cdots,N-1\\&e_{jN}=\sum_{\rho=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{r}[\sum_{s=\rho}^{N}\Psi_2(N-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)]_{ji}y_i(\rho)\\&\quad j=1,\cdots,q-r\end{aligned}\right. \tag{7.9}$$

と書ける。ただし，

$$\left\{\begin{aligned}&e_{jn}=[\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{s=\rho}^{n}\Psi_2(n-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)F_1(\rho)\\&\qquad-F_2(n)]_jy_0\\&e_{jN}=y_{1\,r+j}-\sum_{i=1}^{r}[\Psi_2(0)G(0)]_{ji}y_{1i}\\&\qquad+[\sum_{\rho=1}^{N}\sum_{s=\rho}^{N}\Psi_2(N-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)F_1(\rho)\\&\qquad-F_2(N)]_jy_0\end{aligned}\right. \tag{7.10}$$

と定義する。更に(7.9)を書き換えると，次式のように表わすことができる。

$$e_{jn}=\sum_{\rho=1}^{N-1}\sum_{g=1}^{q}z_g^{jn}(\rho)y_g(\rho)=\sum_{\rho=1}^{N-1}(z^{jn}(\rho),\ y(\rho))$$
$$=(z^{jn},\ y)$$
$$j=1,\cdots,q-r\ ;\ n=1,\cdots,N \tag{7.11}$$

ここに，固定したj，nに対して$z_g^{jn}(\rho)$はつぎのように定義する。

$$(7.12)\begin{cases} 1\leq g\leq r \text{ かつ } \rho\leq n \text{ のとき,} \\ \quad z_g^{jn}(\rho)=[\sum_{s=\rho}^{n}\Psi_2(n-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)]_{jg} \\ 1\leq g\leq r \text{ かつ } \rho>n \text{ のとき, } z_g^{jn}(\rho)=0 \\ r+1\leq g=r+j\leq q \text{ かつ } \rho=n<N \text{ のとき,} \\ \quad z_g^{jn}(\rho)=-1 \\ r+1\leq g\neq r+j\leq q \text{ または } \rho\neq n<N \text{ または } \rho=N \\ \quad \text{のとき, } z_g^{jn}(\rho)=0 \end{cases}$$

(iii) ノルムが

$$(\mathrm{i})\qquad \|y\|=\max_{1\leq s\leq N-1}\max_{1\leq g\leq q}|y_g(s)|$$

で定義されているyの空間をR^*とする。このとき，空間Rの元zのノルムは

$$(\mathrm{j})\qquad \|z\|=\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{g=1}^{q}|z_g(s)|$$

で定義しなければならない。

以上の準備のもとで，最適制御問題（B, C_2', $q>r$）はつぎのL-問題に変換される。

［P6］ 与えられた$p+(q-r)\times N$個の実数e_i, e_{jn}およびRの元z^i, z^{jn}に対して，(7.7)と(7.11)を同時に最小数$N=N^*$で満たす線形汎関数$y^*\in R^*$, $\|y^*\|\leq 1$を求めよ。

7.3 最適解の存在条件

問題［P6］の最適解はつぎの中間的L-問題を考えることにより見出すことができる。

［LP6］ 離散時刻Nを固定したとき，(7.7)と(7.11)を同時に満たしえる最小ノルムの$\bar{y}\in R^*$を求めよ。

モーメントのL-問題定理により，$p+(q-r)\times N$個のRの元z^i, z^{jn}が線形独立であれば，［LP6］の解は存在し，$\bar{y}$が最小ノルム解であるための必要十分条件は(6.20)と(6.21)で表わされる。従って，［LP6］の解$\bar{y}$のノルムは$\|\bar{y}\|=\lambda(N)$であるから，$\lambda(N)\leq 1$を満たす離散時刻Nが存在すれば，［P6］は解を持つ。

7.4 N^*とη^*の決定

空間Rのノルム定義により，(6.21)は

$$(7.13)\qquad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{g=1}^{q}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_g^i(s)+\sum_{j=1}^{q-r}\sum_{n=1}^{N}\xi_{jn}z_g^{jn}(s)\Big|$$

と書かれる。$\lambda(N)\leq 1$を満たすNが存在するならば，その内の最小数としてN^*が決定できる。このN^*に対する［LP6］の解$\bar{y}$が［P6］の解y^*を与える。従って，(6.20)にRとR^*のノルムの定義を用いると，y^*は次式のように決定される。

$$(7.14)\qquad y_g^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_g^i(s)+\sum_{j=1}^{q-r}\sum_{n=1}^{N^*}\xi_{jn}^0 z_g^{jn}(s)]$$
$$g=1,\cdots,q\ ;\ s=1,\cdots,N^*-1$$

ここに，$\xi^0\in\Omega$は$N=N^*$とした(7.13)の解の一つを表わす。従って，η^*は(7.14)を(7.4)または(7.8)に代入することにより求まる。ただし，$\eta_g^*(s)$の値はいくつかのgとsに対して確定しないが，それらの値は複合系に課せられた諸条件から決定できる。

7.5 例 題

$$(0_1)\qquad x(n+1)=\frac{1}{2}x(n)+u(n)$$

$$(0_2)\qquad \begin{cases} y_1(n+1)=y_1(n)+y_2(n) \\ y_2(n+1)=y_2(n)+2u(n) \end{cases}$$

なる複合系の初期値$x_0=\frac{1}{4}$と$(y_{01}, y_{02})=(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$を拘束条件$|y_g(s)|\leq 1$（$g=1,2;s=1,2,\cdots$）のもとで指定点$x_1=0$と$(y_{11}, y_{12})=(0,0)$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u^*(n)$を求める。

この問題に対して，(7.1)と(7.2)は次式となる。

$$-\frac{1}{4}=(\gamma^1,\eta)\ ,\quad \gamma^1(s)=2^s$$

これは(7.5)～(7.7)によって

$$0=(z^1, y)$$
$$z^1(s)=(z_1^1(s), z_2^1(s))^T=(0, -2^{s-1})^T$$

に変換される。ここに，yの集合を規定する条件は(7.10)～(7.12)に従って次式で書かれる。(注)

$$\frac{1}{2}=(z^{1n}, y)\ ,\quad n=1,\cdots,N$$

$$z_g^{1n}(\rho)=\begin{cases} 1, & (g=1 \text{ かつ } \rho=n<N \text{ のとき}) \\ 0, & (g=1,\ \rho\neq n<N \text{ または } \rho=N \text{ のとき}) \\ -1, & (g=2 \text{ かつ } \rho\leq n \text{ のとき}) \\ 0, & (g=2 \text{ かつ } \rho>n \text{ のとき}) \end{cases}$$

よって，z^1, z^{11}, …, z^{1N}は線形独立である。

$$\Omega=\Big\{\xi=(\xi_1,\{\xi_{1n}\})^T\,\Big|\,\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\xi_{1n}=1\Big\}$$

であるから，$\xi_{1N}=2-\sum_{n=1}^{N-1}\xi_{1n}$とする。$N=2$としたときの最小値問題(7.13)は

$$\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_1,\xi_{11}}\{|\xi_{11}|+|-2-\xi_1+\xi_{11}|\}$$

となるから，$\xi_1=-2$，$\xi_{11}=0$のとき最小値$\lambda^{-1}(2)=0$をとる。$N=3$としたときには(7.13)は

$$\lambda^{-1}(3)=\min_{\xi_1,\xi_{11},\xi_{12}}\{|\xi_{11}|+|\xi_{12}|+|-2-\xi_1+\xi_{11}|+|-2-2\xi_1+\xi_{11}+\xi_{12}|\}$$

(注) $y=(y_1, y_2)=(\tilde{y},\bar{y})$とする。

となるから，$\xi_1=-1$，$\xi_{11}=\xi_{12}=0$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(3)=1$ をとる。故に，$N^*=3$ が求まった。この N^* に対する(7.13)の解として，$\xi_1^0=-1$，$\xi_{11}^0=\xi_{12}^0=0$，$\xi_{13}^0=2$ が定まるから，(7.14)によって

$$y_2^*(1)=\mathrm{sign}\,[-2-\xi_1^0+\xi_{11}^0]=-1$$

が確定する。この条件と $x(3)=y_1(3)=y_2(3)=0$ の条件から，最適制御が計算でき次のように求まる。

$$u^*(0)=-5/8,\ u^*(1)=3/4,\ u^*(2)=-1/4$$

従って，複合系の最適応答は

$$x(0)=1/4,\ x(1)=-1/2,\ x(2)=1/2,\ x(3)=0$$
$$y_1(0)=1/4,\ y_1(1)=1/2,\ y_1(2)=-1/2,\ y_1(3)=0$$
$$y_2(0)=1/4,\ y_2(1)=-1,\ y_2(2)=1/2,\ y_2(3)=0$$

となる。

7.6 例 題

上の例題において，複合系の初期条件のみを $x_0=1/4$，$(y_{01},y_{02})=(1/2,0)$ に変更した場合の最適制御はつぎのようである。

$$\Omega=\left\{\xi=(\xi_1,\{\xi_{1n}\})^T\,\Big|\,\frac{1}{4}\xi_1+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{N}\xi_{1n}=1\right\}$$

であるから，$\xi_1=2\sum_{n=1}^{N}\xi_{1n}-4$ とする。$N=2$ としたときの(7.13)は

$$\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_{11},\xi_{12}}\{|\xi_{11}|+|4-2\xi_{11}-3\xi_{12}|\}$$

となり，$\xi_{11}=0$，$\xi_{12}=4/3$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(2)=0$ をとる。$N=3$ としたときの(7.13)は

$$\lambda^{-1}(3)=\min_{\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13}}\{|\xi_{11}|+|\xi_{12}|+|4-2\xi_{11}-3\xi_{12}-3\xi_{13}|+|8-4\xi_{11}-4\xi_{12}-5\xi_{13}|\}$$

となり，$\xi_{11}=\xi_{12}=0$，$\xi_{13}=8/5$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(3)=4/5$ (<1) をとる。$N=4$ としたときの(7.13)は

$$\lambda^{-1}(4)=\min_{\xi_{11},\xi_{12},\xi_{13},\xi_{14}}\{|\xi_{11}|+|\xi_{12}|+|\xi_{13}|+|4-2\xi_{11}-3\xi_{12}-3\xi_{13}-3\xi_{14}|+|8-4\xi_{11}-4\xi_{12}-5\xi_{13}-5\xi_{14}|+|16-8\xi_{11}-8\xi_{12}-8\xi_{13}-9\xi_{14}|\}$$

となり，$\xi_{11}=2$，$\xi_{12}=\xi_{13}=\xi_{14}=0$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(4)=2\ (>1)$ をとる。従って，$N^*=4$，$\xi_1^0=0$，$\xi_{11}^0=2$，$\xi_{12}^0=\xi_{13}^0=\xi_{14}^0=0$ が求まったから，(7.14)によって

$$y_1^*(1)=\frac{1}{2}\,\mathrm{sign}\,\xi_{11}^0=\frac{1}{2}$$

を得る。しかし，この条件には最適制御を決定するための情報が含まれていない。このため，最適制御は $x(4)=y_1(4)=y_2(4)=0$ の条件のみから決定すればよく，

$$u(1)=-\frac{9}{16}-\frac{5}{2}u(0)$$
$$u(2)=\frac{1}{32}-\frac{7}{4}u(0)-\frac{3}{2}u(1)$$
$$u(3)=-u(0)-u(1)-u(2)$$

なる関係を満たすものとして求まる。明らかに，$u(0)$ が定まれば，その後の制御値は一意的に決定されるが，$u(0)$ にはそのとりえる値に自由度がある。$u(0)$ の選択しえる値の範囲は系 0_2 に課せられた状態拘束条件から決定され，

$$-\frac{1}{2}\leq u(0)\leq-\frac{1}{24}$$

となる。例えば，$u^*(0)=-1/2$ とすれば，

$$u^*(1)=\frac{11}{16},\ u^*(2)=-\frac{1}{8},\ u^*(3)=-\frac{1}{16}$$

が最適制御となり，最適応答は

$$x(0)=\frac{1}{4},\ x(1)=-\frac{3}{8},\ x(2)=\frac{1}{2},\ x(3)=\frac{1}{8},\ x(4)=0$$
$$y_1(0)=\frac{1}{2},\ y_1(1)=\frac{1}{2},\ y_1(2)=-\frac{1}{2},\ y_1(3)=-\frac{1}{8},\ y_1(4)=0$$
$$y_2(0)=0,\ y_2(1)=-1,\ y_2(2)=\frac{3}{8},\ y_2(3)=\frac{1}{8},\ y_2(4)=0$$

となる。また，$u^*(0)=-1/24$ とすれば

$$u^*(1)=-\frac{11}{24},\ u^*(2)=\frac{19}{24},\ u^*(3)=-\frac{7}{24}$$

が最適制御となり，最適応答は

$$x(0)=\frac{1}{4},\ x(1)=\frac{1}{12},\ x(2)=-\frac{5}{12},\ x(3)=\frac{7}{12},\ x(4)=0$$
$$y_1(0)=\frac{1}{2},\ y_1(1)=\frac{1}{2},\ y_1(2)=\frac{5}{12},\ y_1(3)=-\frac{7}{12},\ y_1(4)=0$$
$$y_2(0)=0,\ y_2(1)=-\frac{1}{12},\ y_2(2)=-1,\ y_2(3)=\frac{7}{12},\ y_2(4)=0$$

となる。

8. 最適制御問題（A，C_2，$q<r$）

8.1 仮 定

(i) 系 0_1 に関して，rank $A=p$ を仮定する。

(ii) 系 0_2 に関して，$q<r$，rank $C=q$，rank $D=q$ を仮定する。さらに，

$$D=[D_1,\ D_2],\quad \begin{array}{l}D_1=q\times q\ \text{正則マトリクス}\\ D_2=q\times(r-q)\ \text{マトリクス}\end{array}$$

を仮定する。

(iii) 拘束条件は C_2 の代りに C_2' を採用する。

8.2 L－問題への変換

(i) つぎの記号

$$F(n)D=[\Psi_1(n),\Psi_2(n)],\quad \begin{array}{l}\Psi_1(n)=q\times q\ \text{マトリクス}\\ \Psi_2(n)=q\times(r-q)\ \text{マトリクス}\end{array}$$

$$\eta=(\bar{\eta},\tilde{\eta})^T,\ \bar{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_q)^T,\ \tilde{\eta}=(\eta_{q+1},\cdots,\eta_r)^T$$

を導入すると，(3.2)から次式が導びかれる。

$$\bar{\eta}(n)=\sum_{s=1}^{n}G(0,1,\cdots,n-s)\{y(s)-F(s)y_0\}-\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=s}^{n}G(0,1,\cdots,n-\rho)\Psi_2(\rho-s)\tilde{\eta}(s),\tag{8.1}$$

$n=1,2,\cdots$

ここで，$q\times q$ マトリクス $G(0,1,\cdots,j)$ は

$$G(0)=\Psi_1^{-1}(0)\tag{8.2}$$

を初期マトリクスとして，つぎの公式に従って逐次決定

されるものとする。

$$(8.3)\quad G(0,1,\cdots,j)=\sum_{i=1}^{j}G(0,i)\Psi_1(0)G(0,1,\cdots,j-i),\quad j=1,2,\cdots$$

ただし

$$(8.4)\quad G(0,i)=-\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(i)\Psi_1^{-1}(0),\quad i=1,2,\cdots$$

とする。

(ii) 帰納法で証明する。$n=1$のとき，(3.2)は$y(1)=F(1)y_0+F(0)D\eta(1)=F(1)y_0+\Psi_1(0)\bar{\eta}(1)+\Psi_2(0)\tilde{\eta}(1)$と書かれる。仮定により$\Psi_1(0)=D_1$は正則であるから，

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(1)&=\Psi_1^{-1}(0)\{y(1)-F(1)y_0-\Psi_2(0)\tilde{\eta}(1)\}\\&=G(0)\{y(1)-F(1)y_0\}-G(0)\Psi_2(0)\tilde{\eta}(1)\end{aligned}$$

が得られる。$n=2$のときは$y(2)=F(2)y_0+F(1)D\eta(1)+F(0)D\eta(2)=F(2)y_0+\Psi_1(1)\bar{\eta}(1)+\Psi_2(1)\tilde{\eta}(1)+\Psi_1(0)\bar{\eta}(2)+\Psi_2(0)\tilde{\eta}(2)$であるから，

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(2)&=\Psi_1^{-1}(0)\{y(2)-F(2)y_0-\Psi_1(1)\bar{\eta}(1)-\Psi_2(1)\tilde{\eta}(1)\\&\quad-\Psi_2(0)\tilde{\eta}(2)\}\\&=\Psi_1^{-1}(0)\{y(2)-F(2)y_0\}-\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(1)G(0)\{y(1)\\&\quad-F(1)y_0\}+\{\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(1)G(0)\Psi_2(0)\\&\quad-\Psi_1^{-1}(0)\Psi_2(1)\}\tilde{\eta}(1)-\Psi_1^{-1}(0)\Psi_2(0)\tilde{\eta}(2)\\&=\sum_{s=1}^{2}G(0,\cdots,2-s)\{y(s)-F(s)y_0\}\\&\quad-\sum_{s=1}^{2}\sum_{\rho=s}^{2}G(0,\cdots,2-\rho)\Psi_2(\rho-s)\tilde{\eta}(s)\end{aligned}$$

が得られる。つぎに，$n=m\ (\geq 3)$までは(8.1)が成立していると仮定する。$n=m+1$のとき，

$$\begin{aligned}y(m+1)&=F(m+1)y_0+\sum_{s=1}^{m+1}\Psi_1(m-s+1)\bar{\eta}(s)\\&\quad+\sum_{s=1}^{m+1}\Psi_2(m-s+1)\tilde{\eta}(s)\\&=F(m+1)y_0+\sum_{s=1}^{m}\Psi_1(m-s+1)\bar{\eta}(s)\\&\quad+\Psi_1(0)\bar{\eta}(m+1)+\sum_{s=1}^{m+1}\Psi_2(m-s+1)\tilde{\eta}(s)\end{aligned}$$

であるから，

$$\begin{aligned}\bar{\eta}(m+1)&=\Psi_1^{-1}(0)\Big\{y(m+1)-F(m+1)y_0\\&\quad-\sum_{s=1}^{m}\Psi_1(m-s+1)\bar{\eta}(s)-\sum_{s=1}^{m+1}\Psi_2(m-s+1)\tilde{\eta}(s)\Big\}\\&=\Psi_1^{-1}(0)\big\{y(m+1)-F(m+1)y_0\big\}\\&\quad-\sum_{s=1}^{m}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(m-s+1)\sum_{\rho=1}^{s}G(0,1,\cdots,s-\rho)\\&\quad\times\big\{y(\rho)-F(\rho)y_0\big\}+\sum_{s=1}^{m}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(m-s+1)\\&\quad\times\sum_{\rho=1}^{s}\sum_{l=\rho}^{s}G(0,1,\cdots,s-l)\Psi_2(l-p)\tilde{\eta}(\rho)\\&\quad-\sum_{s=1}^{m+1}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_2(m-s+1)\tilde{\eta}(s)\end{aligned}$$

を得る。上式の右辺は

第一項＋第二項

$$\begin{aligned}&=\Psi_1^{-1}(0)\{y(m+1)-F(m+1)y_0\}\\&\quad-\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{s=\rho}^{m}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(m-s+1)G(0,1,\cdots,s-\rho)\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\\&=\Psi_1^{-1}(0)\{y(m+1)-F(m+1)y_0\}\\&\quad+\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{s=\rho}^{m}G(0,m-s+1)\Psi_1(0)G(0,1,\cdots,s-\rho)\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\\&=\Psi_1^{-1}(0)\{y(m+1)-F(m+1)y_0\}\\&\quad+\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{i=1}^{m-\rho+1}G(0,i)\Psi_1(0)G(0,1,\cdots,m-\rho+1-i)\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\\&=G(0)\{y(m+1)-F(m+1)y_0\}\\&\quad+\sum_{\rho=1}^{m}G(0,1,\cdots,m-\rho+1)\{y(\rho)-F(\rho)y_0\}\\&=\sum_{\rho=1}^{m+1}G(0,1,\cdots,m-\rho+1)\{y(\rho)-F(\rho)y_0\},\end{aligned}$$

第三項

$$\begin{aligned}&=\sum_{s=1}^{m}\sum_{\rho=1}^{s}\sum_{l=\rho}^{s}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(m-s+1)\\&\qquad\times G(0,1,\cdots,s-l)\Psi_2(l-\rho)\tilde{\eta}(\rho)\\&=\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{s=\rho}^{m}\sum_{l=\rho}^{s}\Psi_1^{-1}(0)\Psi_1(m-s+1)\\&\qquad\times G(0,1,\cdots,s-l)\Psi_2(l-\rho)\tilde{\eta}(\rho)\\&=-\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{s=\rho}^{m}\sum_{l=\rho}^{s}G(0,m-s+1)\Psi_1(0)\\&\qquad\times G(0,1,\cdots,s-l)\Psi_2(l-\rho)\tilde{\eta}(\rho)\\&=-\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{l=\rho}^{m}\sum_{s=l}^{m}G(0,m-s+1)\Psi_1(0)\\&\qquad\times G(0,1,\cdots,s-l)\Psi_2(l-\rho)\tilde{\eta}(\rho)\\&=-\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{l=\rho}^{m}\sum_{i=1}^{m-l+1}G(0,i)\Psi_1(0)\\&\qquad\times G(0,1,\cdots,m-l+1-i)\Psi_2(l-\rho)\tilde{\eta}(\rho)\\&=-\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{l=\rho}^{m}G(0,1,\cdots,m-l+1)\Psi_2(l-\rho)\tilde{\eta}(\rho),\end{aligned}$$

第三項＋第四項

$$\begin{aligned}&=-\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{l=\rho}^{m}G(0,1,\cdots,m-l+1)\Psi_2(l-\rho)\tilde{\eta}(\rho)\\&\quad-\sum_{\rho=1}^{m+1}G(0)\Psi_2(m-\rho+1)\tilde{\eta}(\rho)\\&=-G(0)\Psi_2(0)\tilde{\eta}(m+1)-\sum_{\rho=1}^{m}\Big\{G(0)\Psi_2(m-\rho+1)\\&\quad+\sum_{l=\rho}^{m}G(0,1,\cdots,m-l+1)\Psi_2(l-\rho)\Big\}\tilde{\eta}(\rho)\end{aligned}$$

$$=-G(0)\Psi_2(0)\widetilde{\eta}(m+1)-\sum_{\rho=1}^{m}\sum_{l=\rho}^{m+1}G(0,1,\cdots,m-l+1)$$
$$\times\Psi_2(l-\rho)\widetilde{\eta}(\rho)$$
$$=-\sum_{\rho=1}^{m+1}\sum_{l=\rho}^{m+1}G(0,1,\cdots,m-l+1)\,\Psi_2(l-\rho)\widetilde{\eta}(\rho)$$

となる。

(iii) ある制御 $\eta(n)$ を行なったとき，離散時刻 $n=N$ で最初に系 0_1 の状態が $x(N)=x_1$ を満たしたとすると(2.7)と(2.8)，すなわち

(8.5) $$[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}=(\gamma^i,\ \eta)=\sum_{n=1}^{N}(\gamma^i(n),\ \eta(n)),\quad i=1,\cdots,p$$

(8.6) $$\gamma^i(n)=[\Phi(-n)B]_i$$

が得られる。記号 $\eta=(\bar{\eta},\widetilde{\eta})^T$ に対応して，

$$\gamma^i=(\bar{\gamma}^i,\widetilde{\gamma}^i)^T,\ \ \bar{\gamma}^i=(\bar{\gamma}_1^i,\cdots,\bar{\gamma}_q^i)^T,\ \ \widetilde{\gamma}^i=(\gamma_{q+1}^i,\cdots,\widetilde{\gamma}_r^i)^T$$

なる記号を導入すると次式を得る。

(8.7) $$(\gamma^i,\eta)=(\bar{\gamma}^i,\bar{\eta})+(\widetilde{\gamma}^i,\widetilde{\eta})$$

上式の右辺の第一項に(8.1)を代入すると，

$$(\bar{\gamma}^i,\bar{\eta})=\sum_{n=1}^{N}(\bar{\gamma}^i(n),\ \bar{\eta}(n))$$
$$=\sum_{n=1}^{N}\sum_{s=1}^{n}(\bar{\gamma}^i(n),\ G(0,1,\cdots,n-s)\{y(s)-F(s)y_0\})$$
$$-\sum_{n=1}^{N}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=s}^{n}(\bar{\gamma}^i(n),\ G(0,1,\cdots,n-\rho)\Psi_2(\rho-s)\widetilde{\eta}(s))$$

が導びかれる。上式において，

$$\text{第一項}=\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=s}^{N}(G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ y(s)-F(s)y_0)$$
$$=\sum_{s=1}^{N}\Big(\sum_{n=s}^{N}G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ y(s)-F(s)y_0\Big)$$

$$\text{第二項}=\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=s}^{N}\sum_{\rho=s}^{n}(\bar{\gamma}^i(n),\ G(0,1,\cdots,n-\rho)\Psi_2(\rho-s)\widetilde{\eta}(s))$$
$$=\sum_{s=1}^{N}\sum_{\rho=s}^{N}\sum_{n=\rho}^{N}(\Psi_2(\rho-s)^TG(0,1,\ n-\rho)^T\times\bar{\gamma}^i(n),\ \widetilde{\eta}(s))$$
$$=\sum_{s=1}^{N}\Big(\sum_{\rho=s}^{N}\sum_{n=\rho}^{N}\Psi_2(\rho-s)^TG(0,1,\cdots,n-\rho)^T\times\bar{\gamma}^i(n),\ \widetilde{\eta}(s)\Big)$$

である。これらを(8.7)に代入すると次式を得る。

$$(\gamma^i,\eta)=\sum_{s=1}^{N}\Big(\sum_{n=s}^{N}G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ y(s)-F(s)y_0\Big)$$
$$+\sum_{s=1}^{N}\Big(\widetilde{\gamma}^i(s)-\sum_{\rho=s}^{N}\sum_{n=\rho}^{N}\Psi_2(\rho-s)^T\times G(0,1,\cdots,n-\rho)^T\bar{\gamma}^i(n),\ \widetilde{\eta}(s)\Big)$$

従って，いま

(8.8) $$e_i=[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}+\sum_{s=1}^{N}\Big(\sum_{n=s}^{N}G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ F(s)y_0\Big)$$

(8.9) $$z^i(s)=\sum_{n=s}^{N}G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n)$$

(8.10) $$\lambda^i(s)=\widetilde{\gamma}^i(s)-\sum_{\rho=s}^{N}\sum_{n=\rho}^{N}\Psi_2(\rho-s)^T\times G(0,1,\cdots,n-\rho)^T\bar{\gamma}^i(n)$$

とおくと，結局(8.5)は次式のように変形される。

(8.11) $$e_i=\sum_{s=1}^{N}(z^i(s),\ y(s))+\sum_{s=1}^{N}(\lambda^i(s),\ \widetilde{\eta}(s))=(z^i,\ y)+(\lambda^i,\ \widetilde{\eta}),\quad i=1,\cdots,p$$

(iv) ノルムが

(k) $$\|y\|=\max_{1\le s\le N}\ \max_{1\le g\le q}|y_g(s)|$$

で定義される y の空間を R_1^* とする。このとき，空間 R_1 の元 z のノルムは

(l) $$\|z\|=\sum_{s=1}^{N}\sum_{g=1}^{q}|z_g(s)|$$

で定義しなければならない。また，ノルムが

(m) $$\|\widetilde{\eta}\|=\max_{1\le s\le N}\ \max_{q+1\le i\le r}|\eta_i(s)|$$

で定義される $\widetilde{\eta}$ の空間を R_2^* とする。このとき，空間 R_2 の元 λ のノルムは

(n) $$\|\lambda\|=\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=q+1}^{r}|\lambda_i(s)|$$

で定義しなければならない。いま，$R=R_1\times R_2$ なる直積空間を考え，その元 $\Gamma=(z,\lambda)$，$z\in R_1$，$\lambda\in R_2$ のノルムを

$$\|\Gamma\|=\|z\|+\|\lambda\|$$

で定義する。このとき，R の共役空間は $R^*=R_1^*\times R_2^*$ であり，その元 $L=(y,\widetilde{\eta})$，$y\in R_1^*$，$\widetilde{\eta}\in R_2^*$ のノルムは

$$\|L\|=\max\{\|y\|,\ \|\widetilde{\eta}\|\}$$

で定義される。よく知られているように，R の上の線形汎関数 $L\in R^*$ は次式によって表現される。

$$L(\Gamma)=(z,\ y)+(\lambda,\widetilde{\eta}),\quad \Gamma\in R$$

以上の準備のもとで，最適制御問題(A, C_2, $q<r$)はつぎのL－問題に変換される。

［P7］ 与えられた p 個の実数 e_i および R の元 $\Gamma^i=(z^i,\lambda^i)$ に対して，(8.11)を最小数 $N=N^*$ で満たす線形汎関数 $L^*=(y^*,\widetilde{\eta}^*)\in R^*$，$\|L^*\|\le 1$ を求めよ。

ここで，つぎの注意を必要とする。R^* のノルムの定義により，拘束条件 $\|L\|\le 1$ は

$$\|L\|=\max\{\|y\|,\ \|\widetilde{\eta}\|\}\le 1$$

従って

$$\|y\| \leq 1, \quad \|\tilde{\eta}\| \leq 1$$

を意味する。上式の前者は本問題に課せられた状態拘束条件 C_2' の等価的表現である。また後者は R_2^* のノルムの定義と (2.3) にもとづき,

(8.12) $|u_i(s)| \leq 1$, $i=q+1, \cdots, r$; $s=0, 1, \cdots$

を意味する。$q<r$ の場合には，制御 u の q 個の成分が状態 y に課せられた条件に依存して決定され，残りの $(r-q)$ 個の成分の値は自由に選びうる。このため，最短時間問題に意味を持たせるには $\tilde{u}$ に何らかの拘束を課す必要が出てくる。本章ではその条件として (8.12) を採用したのである。当然，R_2^* のノルムの定義を変更することにより，(8.12) とは異った形の拘束条件を導入できる。

8.3 最適解の存在条件

問題［P7］の最適解はつぎの中間的L－問題を考えることにより見出される。

［LP7］ 離散時刻 N を固定したとき，(8.11) を満足しえる最小ノルムの $\bar{L} \in R^*$ を求めよ。

モーメントのL－問題定理により，$\Gamma^1, \cdots, \Gamma^p$ が線形独立であれば，［LP7］の解は存在し，$\bar{L}$ が最小ノルム解であるための必要十分条件は

$$\bar{L}\left(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^0 \Gamma^i\right)=\|\bar{L}\| \, \|\sum_{i=1}^{p} \xi_i^0 \Gamma^i\|=1$$

すなわち,

$$(8.13) \quad \left(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^0 z^i, \bar{y}\right)+\left(\sum_{i=1}^{p} \xi_i^0 \lambda^i, \bar{\tilde{\eta}}\right) = \left\{\|\sum_{i=1}^{p} \xi_i^0 z^i\|+\|\sum_{i=1}^{p} \xi_i^0 \lambda^i\|\right\}\max\{\|\bar{y}\|, \|\bar{\tilde{\eta}}\|\}=1$$

である。ここで，ξ_i^0 はつぎの最小値問題の解の一つを表わす。

$$(8.14) \quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi \in \Omega}\left\{\|\sum_{i=1}^{p} \xi_i z^i\|+\|\sum_{i=1}^{p} \xi_i \lambda^i\|\right\}$$

ただし,

$$\Omega=\left\{\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_p)^T \mid \sum_{i=1}^{p} \xi_i e_i=1\right\}$$

とする。

(8.13) と (8.14) から，［LP7］の解 $\bar{L}$ のノルムは $\|\bar{L}\|=\lambda(N)$ となる。よって，線形独立性の仮定のもとで，$\lambda(N) \leq 1$ を満たす離散時刻 N が存在するならば，［P7］は最適解を持つ。

8.4 N^* と $\tilde{\eta}^*$ の決定

空間 R のノルムの定義により，(8.14) は

$$(8.15) \quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi \in \Omega}\left\{\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{l=1}^{p} \xi_l z_i^l(s)\right| + \sum_{s=1}^{N}\sum_{i=q+1}^{r}\left|\sum_{l=1}^{p} \xi_l \lambda_i^l(s)\right|\right\}$$

と書ける。$\lambda(N) \leq 1$ を満たす N が存在するならば，その中の最小数が N^* である。この N^* に対する［LP7］の最小ノルム解 $\bar{L}=(\bar{y}, \bar{\tilde{\eta}})$ が［P7］の最適解 $L^*=(y^*, \tilde{\eta}^*)$ を与える。従って，(8.13) と R と R^* のノルムの定義により，y^* と $\tilde{\eta}^*$ は次式のように決定される。

$$(8.16) \quad y_i^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\left[\sum_{l=1}^{p} \xi_l^0 z_i^l(s)\right], \quad i=1, \cdots, q \; ; \; s=1, \cdots, N^*$$

$$(8.17) \quad \eta_i^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\left[\sum_{l=1}^{p} \xi_l^0 \lambda_i^l(s)\right], \quad i=q+1, \cdots, r \; ; \; s=1, \cdots, N^*$$

ここに，$\xi^0 \in \Omega$ は $N=N^*$ としたときの最小値問題 (8.15) の解の一つであり，$\lambda(N^*)$ はその値の逆数を表わす。よって，$\eta_i^*(s)$ $(i=1, \cdots, q ; s=1, \cdots, N^*)$ は (8.16) と (8.17) を (8.1) に代入することにより決定される。ただし，いくつかの i と s に対して $\eta_i^*(s)$ の値が確定しないのが普通であり，それらの値は複合系に課せられた諸条件から決定しなければならない。

8.5 例 題

$$(0_1) \quad \begin{cases} x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n)+u_1(n) \\ x_2(n+1)=x_2(n)+u_2(n) \end{cases}$$

$$(0_2) \quad y(n+1)=y(n)+u_1(n)+u_2(n), \quad y(0)=0$$

なる複合系において，系 0_1 の初期値 $(x_{01}, x_{02})=(2, 0)$ を系 0_2 の状態拘束条件 $|y(s)| \leq 1$ $(s=1, 2, \cdots)$ のもとで指定点 $(x_{11}, x_{12})=(0, 0)$ の最小数 $n=N^*$ で移行しえる最適制御 $u_1^*(n)$, $u_2^*(n)$ を求める。ただし，$|u_2(n)| \leq 1$ $(n=0, 1, \cdots)$ とする。

この問題に対して，(8.5) と (8.6) は次式となる。

$$-2=(\gamma^1, \eta), \quad \gamma^1(s)=(1, -s)^T$$
$$0=(\gamma^2, \eta), \quad \gamma^2(s)=(0, 1)^T$$

これらを (8.8)～(8.11) に従って変形すると,

$$-2=(z^1, y)+(\lambda^1, \eta_2)$$
$$0=(z^2, y)+(\lambda^2, \eta_2)$$
$$\begin{cases} z^1(s)=0, \quad s=1, \cdots, N-1 \\ z^1(N)=1 \end{cases}$$
$$z^2(s)=0, \quad s=1, \cdots, N$$
$$\lambda^1(s)=-(1+s), \quad s=1, \cdots, N$$
$$\lambda^2(s)=1, \quad s=1, \cdots, N$$

が得られる。従って，$\Gamma^1=(z^1, \lambda^1)$ と $\Gamma^2=(z^2, \lambda^2)$ は線形独立である。

$$\Omega=\{\xi=(\xi_1, \xi_2)^T \mid -2\xi_1=1\}$$

であるから，$N=1$ としたときの最小値問題 (8.15) は

$$\lambda^{-1}(1)=\min_{\xi_2}\left\{\left|-\frac{1}{2}\right|+|1+\xi_2|\right\}$$

となる。これは $\xi_2=-1$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(1)=\frac{1}{2}$ (<1) を

とる。$N=2$ としたときの(8.15)は

$$\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_2}\left\{\left|-\frac{1}{2}\right|+\left|1+\xi_2\right|+\left|\frac{3}{2}+\xi_2\right|\right\}$$

であるから，$-\frac{3}{2}\leq\xi_2\leq-1$ なる任意のξ_2に対して最小値 $\lambda^{-1}(2)=1$をとる。よって，$N^*=2$が求まった。このN^*に対する最小値問題(8.15)の解は$\xi_1^0=-\frac{1}{2}$，$-\frac{3}{2}\leq\xi_2^0\leq-1$ であるが，ここでは$\xi_1^0=-\frac{1}{2}$，$\xi_2^0=-\frac{5}{4}$ を採用する。従って，(8.16)と(8.17)より

$$y^*(1)=\mathrm{sign}\,[\,0\,]=\text{不定}$$
$$y^*(2)=\mathrm{sign}\,[\,\xi_2^0]=-1$$
$$\eta_2^*(1)=\mathrm{sign}\,[-2\xi_1^0+\xi_2^0]=-1$$
$$\eta_2^*(2)=\mathrm{sign}\,[-3\xi_1^0+\xi_2^0]=1$$

が求まる。$y^*(1)$が不定のため，$\eta_1^*(n)$を(8.1)から決定することができない。このため，$\eta_1^*(n)$の値は$x_1^*(2)=x_2^*(2)=0$ かつ $|y^*(1)|\leq1$ なる条件，すなわち

$$\eta_1(1)+\eta_1(2)=-1,\quad |\eta_1(1)-1|\leq1$$

を満たすものとして決定する。この解は一意に定まらず，例えば

1) $\eta_1^*(1)=0$，$\eta_1^*(2)=-1$

2) $\eta_1^*(1)=1$，$\eta_1^*(2)=-2$

3) $\eta_1^*(1)=2$，$\eta_1^*(2)=-3$

としえる。これらによる複合系の応答は

1) $x_1^*(1)=2$，$x_2^*(1)=-1$，$y^*(1)=-1$；
$x_1^*(2)=0$，$x_2^*(2)=0$，$y^*(2)=-1$

2) $x_1^*(1)=3$，$x_2^*(1)=-1$，$y^*(1)=0$；
$x_1^*(2)=0$，$x_2^*(2)=0$，$y^*(2)=-1$

3) $x_1^*(1)=4$，$x_2^*(1)=-1$，$y^*(1)=1$；
$x_1^*(2)=0$，$x_2^*(2)=0$，$y^*(2)=-1$

となる。

9. 最適制御問題（B，C_2，$q<r$）

9.1 仮　定

8.1節と同一の仮定をする。

9.2 L－問題への変換

(i) ある制御$\eta(n)$を行なったとき，離散時刻$n=N$で最初に$x(N)=x_1$と$y(N)=y_1$を同時に満たしたとする。このとき，

$$[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}=(\gamma^i,\eta)=\sum_{n=1}^{N}(\gamma^i(n),\eta(n)),\quad i=1,\cdots,p \tag{9.1}$$

$$\gamma^i(n)=[\Phi(-n)B]_i \tag{9.2}$$

$$\begin{cases} y(n)=F(n)y_0+\sum_{s=1}^{n}F(n-s)D\eta(s),\quad n=1,\cdots,N-1\\ y(N)=y_1\end{cases} \tag{9.3}$$

が導びかれる。(9.3)と(8.1)から次式が得られる。

$$\begin{cases} \tilde{\eta}(n)=\sum_{s=1}^{n}G(0,1,\cdots,n-s)[y(s)-F(s)y_0]\\ \qquad-\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=s}^{n}G(0,1,\cdots,n-\rho)\Psi_2(\rho-s)\tilde{\eta}(s),\\ \qquad\qquad n=1,\cdots,N-1\\ \tilde{\eta}(N)=\sum_{s=1}^{N-1}G(0,1,\cdots,N-s)y(s)+G(0)y_1\\ \qquad-\sum_{s=1}^{N}G(0,1,\cdots,N-s)F(s)y_0\\ \qquad-\sum_{s=1}^{N}\sum_{\rho=s}^{N}G(0,1,\cdots,N-\rho)\Psi_2(\rho-s)\tilde{\eta}(s)\end{cases} \tag{9.4}$$

(9.4)を(9.1)に代入すると

$$\begin{aligned}
[\Phi(-N)]_i x_1-x_{0i}=&\sum_{n=1}^{N-1}\Big(\bar{\gamma}^i(n),\ \sum_{s=1}^{n}G(0,1,\cdots,n-s)y(s)\Big)\\
&-\sum_{n=1}^{N-1}\Big(\bar{\gamma}^i(n),\ \sum_{s=1}^{n}G(0,1,\cdots,n-s)F(s)y_0\Big)\\
&-\sum_{n=1}^{N-1}\Big(\bar{\gamma}^i(n),\ \sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=s}^{n}G(0,1,\cdots,n-\rho)\Psi_2(\rho-s)\tilde{\eta}(s)\Big)\\
&+\sum_{n=1}^{N-1}\Big(\tilde{\gamma}^i(n),\tilde{\eta}(n)\Big)+\Big(\bar{\gamma}^i(N),\ \sum_{s=1}^{N-1}G(0,1,\cdots,N-s)y(s)\Big)\\
&+(\bar{\gamma}^i(N),G(0)y_1)-\Big(\bar{\gamma}^i(N),\ \sum_{s=1}^{N}G(0,1,\cdots,N-s)F(s)y_0\Big)\\
&-\Big(\bar{\gamma}^i(N),\ \sum_{s=1}^{N}\sum_{\rho=s}^{N}G(0,1,\cdots,N-\rho)\Psi_2(\rho-s)\tilde{\eta}(s)\Big)\\
&+(\tilde{\gamma}^i(N),\ \tilde{\eta}(N))
\end{aligned}$$

を得る。ここで，

$$\begin{aligned}
\text{第一項}&=\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{n}\left(G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ y(s)\right)\\
&=\sum_{s=1}^{N-1}\Big(\sum_{n=s}^{N-1}G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ y(s)\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{第二項}&=\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{n}\left(F(s)^TG(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ y_0\right)\\
&=\sum_{s=1}^{N-1}\Big(\sum_{n=s}^{N-1}F(s)^TG(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ y_0\Big)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{第三項}&=\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{s=1}^{n}\sum_{\rho=s}^{n}\left(\Psi_2(\rho-s)^TG(0,1,\cdots,n-\rho)^T\bar{\gamma}^i(n),\tilde{\eta}(s)\right)\\
&=\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{n=s}^{N-1}\sum_{\rho=s}^{n}\left(\Psi_2(\rho-s)^TG(0,1,\cdots,n-\rho)^T\bar{\gamma}^i(n),\tilde{\eta}(s)\right)\\
&=\sum_{s=1}^{N-1}\Big(\sum_{\rho=s}^{N-1}\sum_{n=\rho}^{N-1}\Psi_2(\rho-s)^TG(0,1,\cdots,n-\rho)^T\bar{\gamma}^i(n),\tilde{\eta}(s)\Big)
\end{aligned}$$

第一項＋第五項

$$\begin{aligned}
=\sum_{s=1}^{N-1}\Big(&\sum_{n=s}^{N-1}G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n)\\
&+G(0,1,\cdots,N-s)^T\bar{\gamma}^i(N),\ y(s)\Big)
\end{aligned}$$

$$=\sum_{s=1}^{N-1}\left(\sum_{n=s}^{N}G(0,1,\cdots,n-s)^T\,\bar{\gamma}^i(n),\ y(s)\right)$$

第二項＋第七項

$$=\sum_{s=1}^{N-1}\left(\sum_{n=s}^{N-1}F(s)^T G(0,1,\cdots,n-s)^T\,\bar{\gamma}^i(n)\right.$$

$$\left.+F(s)^T G(0,1,\cdots,N-s)^T\,\bar{\gamma}^i(N),\ y_0\right)$$

$$+(F(N)^T G(0)^T\,\bar{\gamma}^i(N),\ y_0)$$

$$=\sum_{s=1}^{N-1}\left(\sum_{n=s}^{N}F(s)^T G(0,1,\cdots,n-s)^T\,\bar{\gamma}^i(n),\ y_0\right)$$

$$+(F(N)^T G(0)^T\,\bar{\gamma}^i(N),\ y_0)$$

$$=\left(\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=s}^{N}F(s)^T G(0,1,\cdots,n-s)^T\,\bar{\gamma}^i(n),\ y_0\right)$$

第三項＋第八項

$$=\sum_{s=1}^{N-1}\left(\sum_{\rho=s}^{N-1}\sum_{n=\rho}^{N-1}\Psi_2(\rho-s)^T G(0,1,\cdots,n-\rho)^T\,\bar{\gamma}^i(n)\right.$$

$$\left.+\sum_{\rho=s}^{N}\Psi_2(\rho-s)^T G(0,1,\cdots,N-\rho)^T\,\bar{\gamma}^i(N),\tilde{\eta}(s)\right)$$

$$+(\Psi_2(0)^T G(0)^T\,\bar{\gamma}^i(N),\ \tilde{\eta}(N))$$

$$=\sum_{s=1}^{N-1}\left(\sum_{\rho=s}^{N-1}\sum_{n=\rho}^{N}\Psi_2(\rho-s)^T G(0,1,\cdots,n-\rho)^T\,\bar{\gamma}^i(n)\right.$$

$$\left.+\Psi_2(N-s)^T G(0)^T\,\bar{\gamma}^i(N),\ \tilde{\eta}(s)\right)$$

$$+(\Psi_2(0)^T G(0)^T\,\bar{\gamma}^i(N),\ \tilde{\eta}(N))$$

$$=\sum_{s=1}^{N}\left(\sum_{\rho=s}^{N}\sum_{n=\rho}^{N}\Psi_2(\rho-s)^T G(0,1,\cdots,n-\rho)^T\,\bar{\gamma}^i(n),\tilde{\eta}(s)\right)$$

第四項＋第九項－第三項－第八項

$$=\sum_{s=1}^{N}\left(\tilde{\gamma}^i(s)\right.$$

$$\left.-\sum_{\rho=s}^{N}\sum_{n=\rho}^{N}\Psi_2(\rho-s)^T G(0,1,\cdots,n-\rho)^T\,\bar{\gamma}^i(n),\tilde{\eta}(s)\right)$$

である。いま

$$(9.5)\quad e_i=[\Phi(-N)]_i\,x_1-x_{0i}-(\bar{\gamma}^i(N),\ G(0)\,y_1)$$

$$+\left(\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=s}^{N}F(s)^T G(0,1,\cdots,n-s)^T\,\bar{\gamma}^i(n),\ y_0\right)$$

$$i=1,\ \cdots,\ p$$

$$(9.6)\quad z^i(s)=\sum_{n=s}^{N}G(0,1,\cdots,n-s)^T\,\bar{\gamma}^i(n),\ s=1,\cdots,N-1$$

$$(9.7)\quad \lambda^i(s)=\tilde{\gamma}^i(s)-\sum_{\rho=s}^{N}\sum_{n=\rho}^{N}\Psi_2(\rho-s)^T$$

$$\times G(0,1,\cdots,n-\rho)^T\,\bar{\gamma}^i(n),\quad s=1,\ \cdots,\ N$$

とおくと，結局(9.1)は次式のように変形される。

$$(9.8)\quad e_i=\sum_{s=1}^{N-1}(z^i(s),\,y(s))+\sum_{s=1}^{N}(\lambda^i(s),\,\tilde{\eta}(s))$$

$$=(z^i,\ y)+(\lambda^i,\ \tilde{\eta}),\quad i=1,\ \cdots,\ p$$

(ii)　ノルムが

$$(\mathrm{o})\quad \|y\|=\max_{1\le s\le N-1}\ \max_{1\le g\le q}\ |y_g(s)|$$

で定義される y の空間を R_1^* とする。このとき，空間 R_1 の元 z のノルムは

$$(\mathrm{p})\quad \|z\|=\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{g=1}^{q}|z_g(s)|$$

で定義しなければならない。また，空間 R_2^* と直積空間 $R=R_1\times R_2$ のノルムは 8.2 節の(iv)のごとく定義する。こうすると，最適制御問題(B, C_2, $q<r$)はつぎのL－問題に変換される。

［P8］　与えられた p 個の実数 e_i および R の元 $\Gamma^i=(z^i, \lambda^i)$ に対して，(9.8)を最小数 $N=N^*$ で満たす線形汎関数 $L^*=(y^*, \tilde{\eta}^*)\in R^*$, $\|L^*\|\le 1$ を求めよ。

ここで，本最短時間制御問題に意味を持たせるために，$|u_i(n)|\le 1$ ($i=q+1, \cdots, r$: $n=0, 1, \cdots$) なる条件が導入されたことに注意する。

9.3　最適解の存在条件

［LP8］　離散時刻 N を固定したとき，(9.8)を満足しえる最小ノルム解 $\bar{L}\in R^*$ を求めよ。

これは問題［P8］の最適解を見出す上で必要となる中間的L－問題である。容易にわかるように，本節の記述は 8.3 節と全く同一である。

9.4　N^* と η^* の決定

空間 R のノルムの定義により，(8.14)は

$$(9.9)\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\left\{\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{i=1}^{p}\xi_l\,z_i^l(s)\right|\right.$$

$$\left.+\sum_{s=1}^{N}\sum_{i=q+1}^{r}\left|\sum_{l=1}^{p}\xi_l\,\lambda_i^l(s)\right|\right\}$$

と書かれる。$\lambda(N)\le 1$ を満たす N が存在するならば，その中の最小数として N^* が決定される。この N^* に対する［LP8］の最小ノルム解 $\bar{L}=(\bar{y}, \bar{\eta})$ が［P8］の最適解 $L^*=(y^*, \tilde{\eta}^*)$ を与える。$\bar{L}$ に対する平行条件と R, R^* のノルムの定義により，y^* と $\tilde{\eta}^*$ は次式のように決定される。

$$(9.10)\quad y_l^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0\,z_l^i(s)\right],$$

$$l=1,\ \cdots,\ q\ ;\ s=1,\ \cdots,\ N^*-1$$

$$(9.11)\quad \eta_j^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\left[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0\,\lambda_j^i(s)\right],$$

$$j=q+1,\ \cdots,\ r\ ;\ s=1,\ \cdots,\ N^*$$

ここに，$\xi^0\in\Omega$ は $N=N^*$ における最小値問題(9.9)の解の一つであり，$\lambda(N^*)$ はその値の逆数を表わす。(9.10)と(9.11)を(9.4)に代入すれば，$\eta_i^*(s)$ ($i=1, \cdots, q$; $s=1, \cdots, N^*$) の値が決定される。なお，8.4 節の終りに述べたと同様のことが注意される。

9.5 例題

$$(0_1)\quad \begin{cases} x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n)+u_1(n) \\ x_2(n+1)=x_2(n)+u_2(n) \end{cases}$$

$$(0_2)\quad y(n+1)=\frac{1}{2}y(n)+u_1(n)+u_2(n)$$

なる複合系の初期値$(x_{01}, x_{02})=\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$と$y_0=\frac{1}{2}$を拘束条件$|y(n)|\leq 1$ $(n=0, 1, \cdots)$のもとで指定点$(x_{11}, x_{12})=(0, 0)$と$y_1=0$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u_1^*(n)$, $u_2^*(n)$を求める。ただし，$|u_2(n)|\leq 1$ $(n=0, 1, \cdots)$とする。

この問題に対して，(9.1)と(9.2)は次式となる。

$$-\frac{1}{2}=(\gamma^1, \eta), \quad \gamma^1(s)=(1, -s)^T$$

$$-\frac{1}{2}=(\gamma^2, \eta), \quad \gamma^2(s)=(0, 1)^T$$

これらを(9.5)〜(9.8)に従って変形すると，

$$-\frac{1}{4}=(z^1, y)+(\lambda^1, \eta_2)$$

$$-\frac{1}{2}=(z^2, y)+(\lambda^2, \eta_2)$$

$$z^1(s)=\frac{1}{2}$$

$$z^2(s)=0$$

$$\lambda^1(s)=-s-1, \quad s=1, \cdots, N$$

$$\lambda^2(s)=1$$

が得られる。従って，$\Gamma^1=(z^1, \lambda^1)$と$\Gamma^2=(z^2, \lambda^2)$は線形独立である。

$$\Omega=\left\{\xi=(\xi_1, \xi_2)^T \,\middle|\, -\frac{1}{4}\xi_1-\frac{1}{2}\xi_2=1\right\}$$

であるから，$N=2$としたときの最小値問題(9.9)は

$$\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_2}\left\{|-2-\xi_2|+|8+5\xi_2|+|12+7\xi_2|\right\}$$

となる。これは$\xi_2=-\frac{12}{7}$のとき最小値$\lambda^{-1}(2)=\frac{6}{7}\,(<1)$をとる。$N=3$としたときの(9.9)は

$$\lambda^{-1}(3)=\min_{\xi_2}\{2|-2-\xi_2|+|8+5\xi_2| + |12+7\xi_2|+|16+9\xi_2|\}$$

であるから，$\xi_2=-\frac{12}{7}$のときに最小値$\lambda^{-1}(3)=\frac{12}{7}(>1)$をとる。よって$N^*=3$が求まった。この$N^*$に対する最小値問題(9.9)の解は$\xi_1^0=-\frac{4}{7}$, $\xi_2^0=-\frac{12}{7}$と求まるから，(9.10)と(9.11)より

$$y^*(1)=y^*(2)=\frac{7}{12}\operatorname{sign}\left[\frac{1}{2}\xi_1^0\right]=-\frac{7}{12}$$

$$\eta_2^*(1)=\frac{7}{12}\operatorname{sign}[-2\xi_1^0+\xi_2^0]=-\frac{7}{12}$$

$$\eta_2^*(2)=\frac{7}{12}\operatorname{sign}[-3\xi_1^0+\xi_2^0]=\text{不定}$$

$$\eta_2^*(3)=\frac{7}{12}\operatorname{sign}[-4\xi_1^0+\xi_2^0]=\frac{7}{12}$$

が求まる。これらを(9.4)に代入すると

$$\eta_1^*(1)=y^*(1)-F(1)y_0-\eta_2^*(1)=-\frac{1}{4}$$

が求まる。残りの制御量は$x_1(3)=x_2(3)=y(3)=0$なる条件，すなわち

$$\frac{7}{24}+\eta_1(1)+\eta_2(2)=0$$

$$\frac{1}{2}+\eta_2(2)=0$$

$$\frac{7}{24}+\eta_1(3)=0$$

から決定され，$\eta_1^*(2)=\frac{5}{24}$, $\eta_1^*(3)=-\frac{7}{24}$, $\eta_2^*(2)=-\frac{1}{2}$と求まる。従って，複合系の最適応答は

$$x_1^*(1)=\frac{3}{4}, \quad x_1^*(2)=\frac{7}{8}, \quad x_1^*(3)=0$$

$$x_2^*(1)=-\frac{1}{12}, \quad x_2^*(2)=-\frac{7}{12}, \quad x_2^*(3)=0$$

$$y^*(1)=-\frac{7}{12}, \quad y^*(2)=-\frac{7}{12}, \quad y^*(3)=0$$

となる。

10. 最適制御問題(A, C_3, $\boldsymbol{q}=\boldsymbol{r}$)

10.1 仮定

(i) 系0_1に対して，rank $A=p$を仮定する。

(ii) 系0_2に対して，rank $C=$ rank $D=r=q$を仮定する。

(iii) C_3のかわりに，正規化した拘束条件C_3'すなわちC_1'かつC_2'を採用する。

10.2 L－問題への変換

(i) 最適制御問題(A, C_1')は第2章で論じたように，次式を最小数N^*で満たす$\|\eta^*\|\leq 1$なるη^*を求めるL－問題

$$(10.1)\quad e_i=(\gamma^i, \eta)=\sum_{s=1}^{N}(\gamma^i(s), \eta(s)), \quad i=1, \cdots, p$$

ただし，

$$(10.2)\quad e_i=[\Phi(-N)]_i\,x_1-x_{0i}$$

$$(10.3)\quad \gamma^i(s)=[\Phi(-s)B]_i$$

に変換できる。ここで，ηは(a)なるノルムを持つ空間R_1^*に属するものとすれば，γ^iは(b)なるノルムを持つ空間R_1の元と考えなければならない。

(ii) 最適制御問題(A, C_2', $q=r$)は第4章で論じたように，次式を最小数N^*で満たす$\|y^*\|\leq 1$なるy^*を見出すL－問題

$$(10.4)\quad \varepsilon_i=(z^i, y)=\sum_{s=1}^{N}(z^i(s), y(s)), \quad i=1, \cdots, p$$

ただし，

$$(10.5)\quad \varepsilon_i=[\Phi(-N)]_i\,x_1-x_{0i}+(\gamma^i(1), D^{-1}F(1)\,y_0)$$

$$(10.6)\quad \begin{cases} z^i(s)=D^{-1^T}\gamma^i(s)-F(1)^T D^{-1^T}\gamma^i(s+1), \quad s=1, \cdots, N-1 \\ z^i(N)=D^{-1^T}\gamma^i(N) \end{cases}$$

に変換できる。ここで，y は(c)なるノルムを持つ空間 R_2^* に属するものとすれば，z^i は(d)なるノルムを持つ空間 R_2 の元と考えなければならない。

(iii) 本章の最適制御問題（A, C_3', $q=r$）はつぎのように考えれば，上記(i)と(ii)を複合した問題として定式化できる。まず，直積空間 $R=R_1\times R_2$ の元 $\Gamma=(\gamma, z)$, $\gamma\in R_1$, $z\in R_2$ のノルムを

$$\|\Gamma\|=\|\gamma\|+\|z\|$$

で定義する。このとき，R の共役空間は $R^*=R_1^*\times R_2^*$ であり，R^* の元 $L=(\eta, y)$, $\eta\in R_1^*$, $y\in R_2^*$ のノルムは

$$\|L\|=\max\{\|\eta\|,\|y\|\}$$

で定義される。この R の上の線形汎関数 $L\in R^*$ は

$$L(\Gamma)=(\gamma,\eta)+(z,y),\ \Gamma\in R$$

と表現される。

ノルムの定義により，$\|L\|\leq 1$ は $\|\eta\|\leq 1$ かつ $\|y\|\leq 1$ に同等であるから，本問題の拘束条件は

(C_3') $\|L\|\leq 1$, $L\in R^*$

と表わせる。また，$L\in R^*$ は（C_3'）を満たせば任意に選択しえるのではなく，さらにつぎの関係を満足するものに限定される。

$$y(n)=F(n)y_0+\sum_{s=1}^{n}F(n-s)D\eta(s),\ n=1,\cdots,N \tag{10.7}$$

従って，本問題はつぎのように定式化される。

［P9］ 与えられた p 個の実数 $e_i+\epsilon_i$ および R の元 $\Gamma^i=(\gamma^i, z^i)$ に対して，（C_3'）と (10.7) を満たす線形汎関数 $L\in R^*$ の中から

$$L(\Gamma^i)=(\gamma^i,\eta)+(z^i,y)=e_i+\varepsilon_i \tag{10.8}$$

を最小数 $N=N^*$ で成立させる $L^*=(\eta^*, y^*)$, $\eta^*\in R_1^*$, $y^*\in R_2^*$ を求めよ。

(iv) 問題［P9］は (10.7) を R 上での線形汎関数表現に改めることによりもっと取り扱い易くなる。表現の仕方はいろいろ考えられるが，ここでは (10.7) を少し変形して成分ごとに書いた次式をもとにする。

$$y_{0j}=-\sum_{s=1}^{n}[F(-s)D]_j\eta(s)+[F(-n)]_j y(n), \tag{10.9}$$

$$j=1,\cdots,q;\ n=1,\cdots,N$$

まず，$n=1$ のときは

$$y_{0j}=-[F(-1)D]_j\eta(1)+[F(-1)]_j y(1),$$
$$j=1,\cdots,q$$

だから，この式の汎関数表現

$$y_{0j}=(\gamma^{1j},\eta)+(z^{1j},y),\ j=1,\cdots,q$$

における R の q 個の元 $\Gamma^{1j}=(\gamma^{1j}, z^{1j})$ は次式で定義される。

$$\gamma^{1j}(s)=\begin{cases}-[F(-1)D]_j, & \text{if } s=1\\ 0, & \text{if } s>1\end{cases}$$

$$z^{1j}(s)=\begin{cases}[F(-1)]_j, & \text{if } s=1\\ 0, & \text{if } s\neq 1\end{cases}$$

つぎに，$n=2$ のときは

$$y_{0j}=-[F(-1)D]_j\eta(1)-[F(-2)D]_j\eta(2)$$
$$+[F(-2)]_j y(2)$$

だから，この式の汎関数表現

$$y_{0j}=(\gamma^{2j},\eta)+(z^{2j},y),\ j=1,\cdots,q$$

における R の q 個の元 $\Gamma^{2j}=(\gamma^{2j}, z^{2j})$ は次式で定義される。

$$\gamma^{2j}(s)=\begin{cases}-[F(-s)D]_j, & \text{if } s\leq 2\\ 0, & \text{if } s>2\end{cases}$$

$$z^{2j}(s)=\begin{cases}[F(-2)]_j, & \text{if } s=2\\ 0, & \text{if } s\neq 0\end{cases}$$

以下同様にして調べると，(10.9) の汎関数表現は

$$y_{0j}=(\gamma^{nj},\eta)+(z^{nj},y),\quad \begin{matrix}n=1,\cdots,N\\ j=1,\cdots,q\end{matrix} \tag{10.10}$$

であって，R の $N\times q$ 個の元 $\Gamma^{nj}=(\gamma^{nj}, z^{nj})$ は次式で定義される。

$$\gamma^{nj}(s)=\begin{cases}-[F(-s)D]_j, & \text{if } s\leq n\\ 0, & \text{if } s>n\end{cases} \tag{10.11}$$

$$z^{nj}(s)=\begin{cases}[F(-n)]_j, & \text{if } s=n\\ 0, & \text{if } s\neq n\end{cases} \tag{10.12}$$

(v) (10.7) を (10.10) で置き換えれば，［P7］したがって最適制御問題（A, C_3', $q=r$）はつぎの L－問題に変換できる。

［P10］ 与えられた p 個の実数 $e_i+\varepsilon_i$ および R の元 $\Gamma^i=(\gamma^i, z^j)$ に対しては (10.8) を，$N\times q$ 個の R の元 $\Gamma^{nj}=(\gamma^{nj}, z^{nj})$ に対しては (10.10) を最小数 $N=N^*$ で同時に満たす線形汎関数 $L^*=(\eta^*, y^*)$, $\|L^*\|\leq 1$, $L^*\in R^*$, $\eta^*\in R_1^*$, $y^*\in R_2^*$ を求めよ。

10.3 最適解の決定

最適解の存在条件はこれまでの問題と同様に考えればよい。まず，つぎの問題を調べる。

［LP10］ 離散時刻 N を固定したときに，(10.8) と (10.10) を同時に満たす最小ノルムの $\bar{L}\in R^*$ を求めよ。

$p+N\times q$ 個の R の元 $\{\Gamma^i\}$, $\{\Gamma^{nj}\}$ が線形独立ならば，$\bar{L}$ が存在し，そのノルムの値は $\|\bar{L}\|=\lambda(N)$ である。ここに，$\lambda(N)$ は次式で定義される。

$$\lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\left\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\Gamma^i+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\Gamma^{nj}\right\| \tag{10.13}$$

$$=\min_{\xi\in\Omega}\left\|\left(\sum_{i=1}^{p}\xi_i\gamma^i+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\gamma^{nj},\right.\right.$$
$$\left.\left.\sum_{i=1}^{p}\xi_i z^i+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}z^{nj}\right)\right\|$$

$$=\min_{\xi\in\Omega}\Big\{\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\gamma_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\gamma_l^{nj}(s)\Big|+\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}z_l^{nj}(s)\Big|\Big\}$$

第3の等号はR^*のノルムの定義による。また

$$\Omega=\Big\{\xi=(\{\xi_i\},\{\xi_{nj}\})^T\,\Big|\,\sum_{i=1}^{p}\xi_i(e_i+\varepsilon_i)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\,y_{0j}=1\Big\}$$

とする。

従って，$\lambda(N)\leq 1$を満たす離散時刻Nが存在すれば，[P10]は最適解を持ち，N^*は$\lambda(N)\leq 1$を満たす最小数として決定される。このN^*に対する最小値問題(10.13)の解を$\xi^0=(\{\xi_i^0\},\{\xi_{nj}^0\})^T$とすれば，[P10]の最適解の満たすべき必要十分条件は

$$L^*\Big(\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0\Gamma^i+\sum_{n=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}^0\Gamma^{nj}\Big)=\|L^*\|\Big\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0\Gamma^i+\sum_{n=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}^0\Gamma^{nj}\Big\|=1$$

である。RとR^*のノルムの定義により，上式が成立するための必要十分条件は

(10.14) $$\eta_l^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\Big[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0\gamma_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}^0\gamma_l^{nj}(s)\Big],\quad s=1,\cdots,N^*,\quad l=1,\cdots,q$$

(10.15) $$y_l^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\Big[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}^0\gamma_l^{nj}(s)\Big],\quad s=1,\cdots,N^*,\quad l=1,\cdots,q$$

である。こうして，最適解は決定された。なお，いくつかのlとsに対して，$\eta_l^*(s)$または$y_l^*(s)$または両者の値が確定しないのが普通であるが，それらの値は複合系に課せられた諸条件から決定できる。

10.4 例 題

$$(0_1')\quad\begin{cases}x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n)\\ x_2(n+1)=\frac{1}{2}x_2(n)+\frac{1}{4}u'(n)\end{cases}$$

$$(0_2')\quad y'(n+1)=\frac{1}{2}y'(n)+\frac{1}{3}u'(n),\quad y'(0)=0$$

なる複合系において，系$0_1'$の初期値$(x_{01},x_{02})=(\frac{1}{2},0)$を拘束条件

$$|u'(n)|\leq 2,\quad |y'(n)|\leq\frac{1}{3},\quad n=0,1,2,\cdots$$

のもとで，指定点$(x_{11},x_{12})=(0,0)$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u'^*(n)$を求める。

まず，$u(n)=\frac{1}{2}u'(n)$，$y(n)=3y'(n)$なる変数変換を行なうと，

$$(0_1)\quad\begin{cases}x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n), & x_{01}=x_1(0)=\frac{1}{2}\\ x_2(n+1)=\frac{1}{2}x_2(n)+\frac{1}{2}u(n), & x_{02}=x_2(0)=0\end{cases}$$

$$(0_2)\quad y(n+1)=\frac{1}{2}y(n)+2u(n),\quad y(0)=0$$

$$|u(n)|\leq 1,\quad |y(n)|\leq 1,\quad n=0,1,2,\cdots$$

となる。

複合系$(0_1,0_2)$に対して，本論の解析が適用でき，(10.8)は次式となる。

$$-1=(\gamma^1,\eta)+(z^1,y),\quad 0=(\gamma^2,\eta)+(z^2,y)$$

$$\gamma^1(s)=1-2^s,\quad \gamma^2(s)=2^{s-1}$$

$$\begin{cases}z^1(s)=\frac{1}{4}\\ z^1(N)=\frac{1}{2}-2^{N-1}\end{cases},\quad\begin{cases}z^2(s)=0\\ z^2(N)=2^{N-2}\end{cases},\quad s=1,\cdots,N-1$$

また，(10.10)は次式となる。

$$0=(\gamma^{n1},\eta)+(z^{n1},y),\quad n=1,\cdots,N$$

$$\gamma^{n1}(s)=\begin{cases}-2^{s+1}, & \text{if } s\leq n\\ 0, & \text{if } s>n\end{cases}$$

$$z^{n1}(s)=\begin{cases}2^s, & \text{if } s=n\\ 0, & \text{if } s\neq n\end{cases}$$

定義により

$$\Omega=\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_{11},\cdots,\xi_{N1})^T\,|\,-\xi_1=1\}$$

であるから，$N=1$としたときの最小値問題(10.13)は

$$\lambda^{-1}(1)=\min_{\xi_2,\xi_{11}}\Big\{|1+\xi_2-4\xi_{11}|+\Big|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\xi_2+2\xi_{11}\Big|\Big\}$$

となる。これは$\xi_2=-1$，$\xi_{11}=0$のとき最小値$\lambda^{-1}(1)=0$をとる。$N=2$としたときの(10.13)は

$$\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_2,\xi_{11},\xi_{21}}\Big\{|1+\xi_2-4\xi_{11}-4\xi_{21}|+|3+2\xi_2-8\xi_{21}|+\Big|-\frac{1}{4}+2\xi_{11}\Big|+\Big|\frac{3}{2}+\xi_2+4\xi_{21}\Big|\Big\}$$

となり，$\xi_2=-\frac{3}{2}$，$\xi_{11}=-\frac{1}{8}$，$\xi_{21}=0$のとき最小値$\lambda^{-1}(2)=\frac{1}{2}$をとる。$N=3$としたときの(10.13)は

$$\lambda^{-1}(3)=\min_{\xi_2,\xi_{11},\xi_{21},\xi_{31}}\Big\{|1+\xi_2-4\xi_{11}-4\xi_{21}-4\xi_{31}|+|3+2\xi_2-8\xi_{21}-8\xi_{31}|+|7+4\xi_2-16\xi_{31}|+\Big|-\frac{1}{4}+2\xi_{11}\Big|+\Big|-\frac{1}{4}+4\xi_{21}\Big|+\Big|\frac{7}{2}+2\xi_2+16\xi_{31}\Big|\Big\}$$

となる。これは$\xi_2=-\frac{7}{4}$，$\xi_{11}=-\frac{1}{8}$，$\xi_{21}=-\frac{1}{16}$，$\xi_{31}=0$のときに最小値$\lambda^{-1}(3)=1$をとる。よって，$N^*=3$が求まった。このN^*に対する最小値問題(10.13)の解は$\xi_1^0=-1$，$\xi_2^0=-\frac{7}{4}$，$\xi_{11}^0=-\frac{1}{8}$，$\xi_{21}^0=-\frac{1}{16}$，$\xi_{31}^0=0$である。従って，(10.14)と(10.15)により，

$$y^*(1) = \mathrm{sign}\,[-\tfrac{1}{4}+2\xi_{11}^0] = -1$$

$$y^*(2) = \mathrm{sign}\,[-\tfrac{1}{4}+4\xi_{21}^0] = -1$$

$$y^*(3),\ \eta^*(1),\ \eta^*(2),\ \eta^*(3) = \text{不定}$$

が得られる。$\eta^*(1)$と$\eta^*(2)$は系0_2の$n=0$, 1における条件

$$y^*(1) = 2\eta^*(1)\ ,\quad y^*(2) = \tfrac{1}{2}y^*(1)+2\eta^*(2)$$

から，$\eta^*(1) = -\frac{1}{2}$，$\eta^*(2) = -\frac{1}{4}$と求まる。$\eta^*(1)$は系0_1の終端条件

$$0 = x_2^*(3) = \tfrac{1}{8}\eta^*(1)+\tfrac{1}{4}\eta^*(2)+\tfrac{1}{2}\eta^*(3)$$

から，$\eta^*(3) = \frac{1}{4}$と求まる。従って，$y^*(3)$は

$$y^*(3) = \tfrac{1}{2}y^*(2)+2\eta^*(3) = 0$$

である。

以上求まった変数を原問題の複合系$(0_1', 0_2')$の変数にもどすと，最適制御は

$$u'^*(0) = -1\ ,\ u'^*(1) = -\tfrac{1}{2},\ u'^*(2) = \tfrac{1}{2}$$

であって，このときの複合系の最適応答は

$$x_1(0) = \tfrac{1}{2},\quad x_1(1) = \tfrac{1}{2}\ ,\quad x_1(2) = \tfrac{1}{4}\ ,\quad x_1(3) = 0$$

$$x_2(0) = 0\ ,\quad x_2(1) = -\tfrac{1}{4},\quad x_2(2) = -\tfrac{1}{4},\quad x_2(3) = 0$$

$$y'(0) = 0\ ,\quad y'(1) = -\tfrac{1}{3},\quad y'(2) = -\tfrac{1}{3},\quad y'(3) = 0$$

である。

11. 最適制御問題（B，C₃，$q=r$）

11.1 仮 定

10.1 節と同じ仮定をする。

11.2 L－問題への変換

(i) 最適制御問題（B, C_1'）は第3章で論じたように，次式を最小数N^*で満たす$\|\eta^*\|\le 1$なるη^*を求めるL－問題

$$(11.1)\quad e_i = (r^i, \eta) = \sum_{s=1}^{N}(r^i(s), \eta),\quad i=1,\cdots,\ p+q$$

ただし

$$(11.2)\quad e_i = \begin{cases}[\Phi(-N)]_i x_1 - x_{0i}, & i=1,\cdots,p\\ [F(-N)]_j y_1 - y_{0j}, & i=p+j,\ j=1,\cdots,q\end{cases}$$

$$(11.3)\quad r^i(s) = \begin{cases}[\Phi(-s)B]_i & ,\ i=1,\cdots,p\\ [F(-s)D]_j & ,\ i=p+j,\ j=1,\cdots,q\end{cases}$$

に変換される。ここで，ηは(a)なるノルムを持つ空間R_1^*に属するものとすれば，r^iは(b)なるノルムを持つ空間R_1の元と考えなければならない。

(ii) 最適制御問題（B, C_2', $q=r$）は第5章で論じたように，次式を最小数N^*で満たす$\|y^*\|\le 1$なるy^*を見出すL－問題

$$(11.4)\quad \varepsilon_i = (z^i, y) = \sum_{s=1}^{N-1}(z^i(s), y(s)),\quad i=1,\cdots,p$$

ただし

$$(11.5)\quad \varepsilon_i = [\Phi(-N)]_i x_1 - x_{0i} + (r^i(1), D^{-1}F(1)y_0) - (r^i(N), D^{-1}y_1)$$

$$(11.6)\quad z^i(s) = D^{-1^T}r^i(s) - F(1)^T D^{-1^T} r^i(s+1),\quad s=1,\cdots,N-1$$

に変換される。ここで，yは(e)なるノルムを持つ空間R_2^*に属するものとすれば，z^iは(f)なるノルムを持つ空間R_2の元と考えなければならない。

(iii) 本章の問題（B, C_3', $q=r$）を上記(i)と(ii)の複合問題として定式化するために，10.2節(iii)と同様の直積空間Rとその共役空間R^*を定義する。このとき，R^*のノルムの定義に従い，拘束条件C_3'は$\|L\|\le 1$，$L=(\eta, y)$，$L\in R^*$，$\eta\in R_1^*$，$y\in R_2^*$と表わせる。選択しえるR^*の元Lには更につぎの条件が課せられる。

$$(11.7)\quad y(n) = F(n)y_0 + \sum_{s=1}^{n}F(n-s)D\eta(s),\ n=1,\cdots,N-1$$

以上の制約を満たす$L=(\eta, y)\in R^*$の中から，

$$(11.8)\quad e_i+\varepsilon_i = (r^i, \eta)+(z^i, y)\ ,\quad i=1,\cdots,p$$

$$(11.9)\quad e_{p+j} = (r^{p+j}, \eta)\qquad ,\ j=1,\cdots,q$$

を最小数$N=N^*$で成立させえる$L^*=(\eta^*, y^*)$が見出せれば本問題は解決する。

10.2章(v)と同じ考え方に基づくと，(11.7)と(11.9)はそれぞれつぎの線形汎関数の形に表現できる。

$$(11.10)\quad y_{0j} = (r^{nj}, \eta)+(z^{nj}, y)\ ,\quad n=1,\cdots,N-1$$

$$(11.11)\quad y_{0j} - [F(-N)]_j y_1 = (r^{Nj}, \eta)+(z^{Nj}, y)\ ,\quad j=1,\cdots,q$$

ただし，Rの$(N-1)\times q$個の元$\Gamma^{nj}=(r^{nj}, z^{nj})$は(10.11)～(10.12)で定義し，$q$個の元$\Gamma^{Nj}=(r^{Nj}, z^{Nj})$は

$$(11.12)\quad r^{Nj}(s) = -[F(-s)D]_j$$

$$(11.13)\quad z^{Nj}(s) = 0$$

で定義する。

(v) 以上により，最適制御問題（B, C_3', $q=r$）はつぎのL－問題に変換される。

［P11］ 与えられたp個の実数$e_i+\varepsilon_i$およびRの元$\Gamma^i=(r^i, z^i)$に対しては(11.8)を，$N\times q$個のRの元$\Gamma^{nj}=(r^{nj}, z^{nj})$に対しては(11.10)～(11.11)を最小数$N=N^*$で同時に満たす線形汎関数$L^*=(\eta^*, y^*)$，$\|L^*\|\le 1$，$L^*\in R^*$，$\eta^*\in R_1^*$，$y^*\in R_2^*$を求めよ。

11.3 最適解の決定

つぎの問題を調べることから始める。

［LP11］ 離散時刻Nを固定したときに，(11.8)，(11.10)および(11.11)を同時に満たす最小ノルムの$\bar{L}\in R^*$を見出せ。

$p+N\times q$ 個の R の元 $\{\Gamma^i\}$, $\{\Gamma^{nj}\}$ が線形独立であれば，$\bar{L}$ が存在し，$\|\bar{L}\|=\lambda(N)$ である。従って，$\lambda(N)\leq 1$ を満たす離散時刻 N が存在すれば，N^* は $\lambda(N)\leq 1$ なる最小数として求まる。ここで，$\lambda(N)$ は次式で定義される。

$$\text{(11.14)}\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\Gamma^i+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\Gamma^{nj}\|$$
$$=\min_{\xi\in\Omega}\{\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\gamma_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\gamma_l^{nj}(s)|+\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{q}|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}z_l^{nj}(s)|\}$$

ただし，

$$\Omega=\Big\{\xi=(\{\xi_i\},\{\xi_{nj}\})^T\,|\sum_{i=1}^{p}\xi_i(e_i+\varepsilon_i)+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}y_{0j}+\sum_{j=1}^{q}\xi_{Nj}(y_{0j}-[F(-N)],y_1)=1\Big\}$$

この N^* に対する最小値問題(11.14)の解を $\xi^0=(\{\xi_i^0\},\{\xi_{nj}^0\})^T$ とすれば，$\bar{L}$ したがって L^* の満たすべき必要十分条件（平行条件）から，η^* と y^* の関数表現が次式のように得られる。

$$\text{(11.15)}\quad \eta_l^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0\gamma_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}^0\gamma_l^{nj}(s)],\quad s=1,\cdots,N^*$$

$$\text{(11.16)}\quad y_l^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N^*-1}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}^0 z_l^{nj}(s)],\quad s=1,\cdots,N^*-1$$

ここで，$l=1,\cdots,q$ である。

なお，10.3節の終りに述べたと同様のことが注意される。

11.4 例 題

$$(0_1)\quad \begin{aligned} x_1(n+1)&=x_1(n)+x_2(n)\\ x_2(n+1)&=x_2(n)+u(n)\end{aligned}$$

$$(0_2')\quad y'(n+1)=\frac{1}{2}y'(n)+u(n)$$

なる複合系の初期値 $(x_{01},x_{02})=(\frac{1}{4},0)$ と $y_0'=\frac{1}{4}$ を拘束条件

$$|u(n)|\leq 1,\quad |y'(n)|\leq\frac{3}{4},\quad n=0,1,\cdots$$

のもとで，指定点 $(x_{11},x_{12})=(0,0)$ と $y_1'=0$ に最小数 $n=N^*$ で移行しえる最適制御 $u^*(n)$ を求める。まず，$y(n)=\frac{4}{3}y'(n)$ なる変数変換を行なうと

$$(0_2)\quad y(n+1)=\frac{1}{2}y(n)+\frac{4}{3}u(n),\quad y_0=\frac{1}{3},\quad y_1=0$$

となり，拘束条件は $|y(n)|\leq 1$ となる。

複合系 $(0_1,0_2)$ に本章の結果を適用すると，(11.8)は次式となる。

$$-\frac{1}{4}=(\gamma^1,\eta)+(z^1,y),\quad \gamma^1(s)=-s,\quad z^1(s)=\frac{3}{8}(1-s)$$
$$0=(\gamma^2,\eta)+(z^2,y),\quad \gamma^2(s)=1,\quad z^2(s)=\frac{3}{8}$$

また，(11.10)と(11.11)は次式となる。

$$\frac{1}{3}=(\gamma^{n1},\eta)+(z^{n1},y),\quad n=1,\cdots,N$$
$$\gamma^{n1}(s)=\begin{cases}-\dfrac{2^{s+2}}{3}, & \text{if } s\leq n\\ 0, & \text{if } s>n\end{cases}$$
$$z^{n1}(s)=\begin{cases}2^s, & \text{if } s=n<N\\ 0, & \text{if } s\neq n \text{ or } n=N\end{cases}$$

定義により

$$\Omega=\Big\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\xi_{11},\cdots,\xi_{N1})^T\,|\,-\frac{5}{8}\xi_1+\frac{1}{8}\xi_2+\frac{1}{3}\sum_{n=1}^{N}\xi_{N1}=1\Big\}$$

$\lambda^{-1}(2)$を計算すると $\lambda^{-1}(2)<1$ を得る。$N=3$ のときの最小値問題(11.14)は，$\xi_2=8+5\xi_1-\frac{8}{3}(\xi_{11}+\xi_{21}+\xi_{31})$を使うと，

$$\lambda^{-1}(3)=\min_{\xi_1,\xi_{11},\xi_{21},\xi_{31}}\Big\{|4\xi_1-\frac{16}{3}\xi_{11}-\frac{16}{3}\xi_{21}-\frac{16}{3}\xi_{31}+8|+|3\xi_1-\frac{8}{3}\xi_{11}-8\xi_{21}-8\xi_{31}+8|+|2\xi_1-\frac{8}{3}\xi_{11}-\frac{8}{3}\xi_{21}-\frac{40}{3}\xi_{31}+8|+|\frac{15}{8}\xi_1+\xi_{11}-\xi_{21}-\xi_{31}+3|+|\frac{12}{8}\xi_1-\xi_{11}+3\xi_{21}-\xi_{31}+3|\Big\}$$

となる。これは

$$\xi_1=-\frac{16}{9}\xi_{11}-\frac{4}{3},\quad 0\leq\xi_{11}\leq\frac{3}{32},\quad \xi_{21}=\frac{1}{8}-\frac{7}{3}\xi_{11},\quad \xi_{31}=\frac{3}{8}$$

を満たすときに最小値 $\lambda^{-1}(3)=1$をとる。よって，$N^*=3$ である。いま，$\xi_{11}^0=\frac{1}{16}$にとると，$\xi_1^0=-\frac{13}{9}$，$\xi_2^0=-\frac{1}{3}$，$\xi_{21}^0=-\frac{1}{48}$，$\xi_{31}^0=\frac{3}{8}$ が $N^*=3$ に対する(11.14)の解である。従って，(11.15)と(11.16)により，

$$\eta^*(2)=\mathrm{sign}[3\xi_1^0-\frac{8}{3}\xi_{11}^0-8\xi_{21}^0-8\xi_{31}^0+8]=1$$
$$y^*(2)=\mathrm{sign}[\frac{12}{8}\xi_1^0-\xi_{11}^0+3\xi_{21}^0-\xi_{31}^0+3]=1$$
$$\eta^*(1),\quad \eta^*(3),\quad y^*(1)=\text{不定}$$

が求まる。$\eta^*(1)$を決定する条件は

$$y^*(2)=\frac{1}{12}+\frac{2}{3}\eta^*(1)+\frac{4}{3}\eta^*(2)=1$$

であり，$\eta^*(1)=-\frac{5}{8}$と定まる。$\eta^*(3)$を決定する条件は

$$x_2^*(3)=\eta^*(1)+\eta^*(2)+\eta^*(3)=0$$

であり，$\eta^*(3)=-\frac{3}{8}$と求まる。この最適制御による原複合系の応答は

$$x_1(0)=\frac{1}{4},\ x_1(1)=\frac{1}{4},\ x_1(2)=-\frac{3}{8},\ x_1(3)=0$$

$$x_2(0)=0,\ x_2(1)=-\frac{5}{8},\ x_2(2)=\frac{3}{8},\ x_2(3)=0$$

$$y'(0)=\frac{1}{4},\ y'(1)=-\frac{1}{2},\ y'(2)=\frac{3}{4},\ y'(3)=0$$

である。

12. 最適制御問題（A，C_3，$q>r$）

12.1 仮定

6.1節の仮定(i)と(ii)に加えて，つぎのことを仮定する。

(iii) C_3のかわりに，正規化した拘束条件C_3'すなわちC_1'かつC_2'を採用する。

12.2 L－問題への変換

(i) 最適制御問題（A, C_1'）は10.2節(i)で示したL－問題に変換される。

(ii) 最適制御問題（A, C_2', $q>r$）は第6章で論じたように，次式を最小数$N=N^*$で満たす$\|y^*\|\leq 1$なるy^*を見出すL－問題

$$(12.1)\quad \varepsilon_i=(z^i,y)=\sum_{s=1}^{N}(z^i(s),y(s)),\quad i=1,\cdots,p$$

$$(12.2)\quad e_{jn}=(z^{jn},y)=\sum_{s=1}^{N}(z^{jn}(s),y(s)),\quad n=1,\cdots,N,\ j=1,\cdots,q-r$$

ただし

$$(12.3)\quad \varepsilon_i=[\Phi(-N)]_i\,x_1-x_{0\,i}+\sum_{\rho=1}^{N}\Big(\sum_{n=\rho}^{N}DE(0,1,\cdots,n-\rho)^T\gamma^i(n),F(\rho)y_0\Big)$$

$$(12.4)\quad z^i(s)=\sum_{n=s}^{N}DE(0,1,\cdots,n-s)^T\gamma^i(n)$$

$$(12.5)\quad e_{jn}=\Big[\sum_{\rho=1}^{n}\sum_{s=\rho}^{n}\Psi_2(n-s)G(0,1,\cdots,s-\rho)F_1(\rho)-F_2(n)\Big]_j\,y_0$$

$$(12.6)\quad z_g^{jn}(s)=\begin{cases}\Big[\sum_{\rho=s}^{n}\Psi_2(n-\rho)G(0,1,\cdots,\rho-s)\Big]_{jg}, & \text{if } 1\leq g\leq r \text{ and } s\leq n\\ 0, & \text{if } 1\leq g\leq r \text{ and } s>n\\ -1, & \text{if } r+1\leq g=r+j\leq q \text{ and } s=n\\ 0, & \text{if } r+1\leq g\neq r+j\leq q \text{ or } s\neq n\end{cases}$$

に変換される。ここで，yは(g)なるノルムを持つ空間R_2^*に属するものとすれば，z^jとz^{jn}は(h)なるノルムを持つ空間R_2の元と考えなければならない。

(iii) 本章の問題を上記(i)と(ii)の複合問題として定式化するために，10.2節(iii)と同様の直積空間Rとその共役空間R^*を定義する。このとき，拘束条件C_3'は

$$\|L\|\leq 1,\ L=(\eta,y),\ L\in R^*,\ \eta\in R_1^*,\ y\in R_2^*$$

で表わされる。選択しえるR^*の元Lには更に(10.7)の条件が課せられる。(10.7)の線形汎関数表現は

$$(12.6)\quad y_{0j}=(\gamma^{nj},\eta)+(z^{nj},y),\ n=1,\cdots,N,\ j=1,\cdots,q$$

ただし

$$(12.7)\quad \gamma^{nj}(s)=\begin{cases}-[F(-s)D]_j, & \text{if } s\leq n\\ 0, & \text{if } s>n\end{cases}$$

$$(12.8)\quad z^{nj}(s)=\begin{cases}[F(-n)]_j, & \text{if } s=n\\ 0, & \text{if } s\neq n\end{cases}$$

であった。ここで注意すべき点は条件(12.2)と条件(12.6)とが汎関数の形は異なるが，互に等価であるということである。これは(6.14)が(10.7)の別表現であることから明らかである。ここでは(12.2)ではなく，(12.6)の表現を採用する。

このことに注意して，最適制御問題（A, C_3', $q>r$）をL－問題の形に定式化するとつぎのようである。

［P12］ 与えられたp個の実数$e_i+\varepsilon_i$およびRの元$\Gamma^i=(\gamma^i,z^i)$に対しては

$$(12.9)\quad e_i+\varepsilon_i=(\gamma^i,\eta)+(z^i,y),\quad i=1,\cdots,p$$

を，$N\times q$個のRの元$\Gamma^{nj}=(\gamma^{nj},z^{nj})$に対しては(12.6)を最小数$N=N^*$で同時に満たす線形汎関数$L^*=(\eta^*,y^*)\in R^*$，$\|L^*\|\leq 1$，$\eta^*\in R_1^*$，$y^*\in R_2^*$を求めよ。

12.3 最適解の決定

［P10］と［P12］の字句上の同一性に注目すると分かるように，与えられた実数および関数は全て前節で定義したものと解釈すれば，本節の記述は10.3節と同じである。ただし，$q>r$であるから，(10.14)のlは$l=1,\cdots,r$とし，(10.13)はつぎのようにわずかに修正される。

$$(12.10)\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\Big\{\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\gamma_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\gamma_l^{nj}(s)\Big|+\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}z_l^{nj}(s)\Big|\Big\}$$

12.4 例題

$$(0_1)\quad x(n+1)=\frac{1}{2}x(n)+u(n)$$

$$(0_2)\quad \begin{cases}y_1(n+1)=y_1(n)+y_2(n), & y_{01}=y_1(0)=0\\ y_2(n+1)=y_2(n)+u(n), & y_{02}=y_2(0)=0\end{cases}$$

なる複合系で，系0_1の初期値$x_0=2$を拘束条件

$$|u(n)|\leq 1,\ |y_1(n)|\leq 1.\ |y_2(n)|\leq 1,\ n=0,1,\cdots$$

のもとで，指定点$x_1=0$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u^*(n)$を求める。

この問題では(12.9)は次式となる。

$$-4=(\gamma^1,\eta)+(z^1,y)$$

$$\gamma^1(s)=2^s,\quad z^1(s)=(z_1^1(s),\ z_2^1(s))^T$$

$$z_1^1(s)=0,\quad z_2^1(s)=\begin{cases}-2^s, & \text{if } s=1,\cdots,N-1\\ 2^N, & \text{if } s=N\end{cases}$$

また，(12.6)は次式となる。

$$0=(\gamma^{nj},\eta)+(z^{nj},y),\quad n=1,\cdots,N,\quad j=1,2$$

$$\gamma^{n1}(s)=\begin{cases}s\\0\end{cases},\quad \gamma^{n2}(s)=\begin{cases}-1, & \text{if } s\le n\\ 0, & \text{if } s>n\end{cases}$$

$$z^{n1}(s)=\begin{cases}(1,-n)^T\\0\end{cases},\quad z^{n2}(s)=\begin{cases}(0,1)^T, & \text{if } s=n\\ 0, & \text{if } s\neq n\end{cases}$$

定義により

$$\Omega=\{\xi=(\xi_1,\{\xi_{nj}\})^T\mid -4\xi_1=1\}$$

である。$N=1$ としたときの最小値問題(12.10)は

$$\lambda^{-1}(1)=\min_{\xi_{11},\xi_{12}}\left\{\left|-\frac{1}{2}+\xi_{11}-\xi_{12}\right|+|\xi_{11}|+\left|-\frac{1}{2}-\xi_{11}+\xi_{12}\right|\right\}$$

となり，$\xi_{11}=0$，$\xi_{12}=\frac{1}{2}$ または $\xi_{11}=0$，$\xi_{12}=-\frac{1}{2}$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(1)=1$ をとる。よって，$N^*=1$ が求まった。このときの(12.10)の解は2つあり，$\xi_1^0=-\frac{1}{4}$，$\xi_{11}^0=0$，$\xi_{12}^0=\frac{1}{2}$ に対しては(10.14)より

$$\eta^*(1)=\mathrm{sign}\,[\,2\xi_1^0+\xi_{11}^0-\xi_{12}^0\,]=-1$$

が求まる。$\xi_1^0=-\frac{1}{4}$，$\xi_{11}^0=0$，$\xi_{12}^0=-\frac{1}{2}$ に対しては(10.15)より

$$y_2^*(1)=\mathrm{sign}\,[\,2\xi_1^0-\xi_{11}^0+\xi_{12}^0\,]=-1$$

が求まる。この条件から $\eta^*(1)=-1$ が得られ，上の最適制御と一致する。この場合の複合系の最適応答は

$$x(0)=2,\quad x(1)=0$$

$$y_1(0)=0,\quad y_1(1)=0\ ;\ y_2(0)=0,\quad y_2(1)=-1$$

である。

13. 最適制御問題(B，C_3，$q>r$)

13.1 仮　定

12.1節に同じ。

13.2 L－問題への変換

(i) 最適制御問題(B，C_1')は11.2節(i)で示したL－問題に変換される。

(ii) 最適制御問題(B，C_2，$q>r$)は第7章で論じたように，次式を最小数$N=N^*$で満たす$\|y^*\|\le 1$なるy^*を見出すL－問題に変換される。

$$\text{(13.1)}\quad \varepsilon_i=(z^i,y)=\sum_{s=1}^{N-1}(z^i(s),y),\quad i=1,\cdots,p$$

$$\text{(13.2)}\quad e_{jn}=(z^{jn},y)=\sum_{s=1}^{N-1}(z^{jn}(s),y),\quad \begin{matrix}n=1,\cdots,N,\\ j=1,\cdots,q-r\end{matrix}$$

ただし

$$\text{(13.3)}\quad \varepsilon_i=[\Phi(-N)]_i\,x_1-x_{0i}-(\gamma^i(N),\ E(0)D^T y_1)+\Big(\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=s}^{N}F(s)^T DE(0,1,\cdots,n-s)^T\gamma^i(n),\ y_0\Big)$$

$$\text{(13.4)}\quad z^i(s)=\sum_{n=s}^{N}DE(0,1,\cdots,n-s)^T\gamma^i(n)$$

$$e_{jn}=(7.10)$$

$$z^{jn}(s)=(7.12)$$

ここで，yは(i)なるノルムを持つ空間R_2^*に属するものとするならば，z^iとz^{jn}は(j)なるノルムを持つ空間R_2の元と考えなければならない。

(iii) 本章の問題を上記(i)と(ii)の複合問題として定式化するために，10.2節の(iii)と同様の直積空間Rとその共役空間R^*を定義する。(13.2)と$i=q+1,\cdots,\ p+q$に対する(11.1)のかわりに，これと等価な汎関数表現(11.10)～(11.11)を使用するならば，最適制御問題(B,C_3', $q>r$)のL－問題はつぎのように記述される。

［P13］ 与えられたp個の実数$e_i+\varepsilon_i$およびRの元$\Gamma^i=(\gamma^i,z^i)$に対しては

$$\text{(13.5)}\quad e_i+\varepsilon_i=(\gamma^i,\eta)+(z^i,y),\quad i=1,\cdots,p$$

を，$N\times q$個のRの元$\Gamma^{nj}=(\gamma^{nj},z^{nj})$に対しては(11.10)～(11.11)を最小数$N=N^*$で同時に満たす$L^*=(\eta^*,y^*)\in R^*$，$\|L^*\|\le 1$，$\eta^*\in R_1^*$，$y^*\in R_2^*$ を求めよ。

13.3 最適解の決定

［P11］と［P13］の字句上の同一性に注目すると分るように，与えられた実数および関数は全て前節で定義したものをあてはめれば，本節の記述は11.3節と同じである。ただし，$q>r$であるから，(11.15)のlは$l=1,\cdots,r$とし，(11.14)はつぎのようにわずかに修正される。

$$\text{(13.5)}\quad \lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\Big\{\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{r}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\gamma_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\gamma_l^{nj}(s)\Big|+\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{q}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}z_l^{nj}(s)\Big|\Big\}$$

13.4 例　題

$$(0_1)\quad x(n+1)=\frac{1}{2}x(n)+u(n)$$

$$(0_2)\quad \begin{cases}y_1(n+1)=y_1(n)+y_2(n)\\ y_2(n+1)=y_2(n)+2u(n)\end{cases}$$

なる複合系の初期値$x_0=\frac{1}{4}$，$(y_{01},y_{02})=(\frac{1}{4},\frac{1}{4})$を拘束条件

$$|u(n)|\le 1,\quad |y_1(n)|\le 1,\quad |y_2(n)|\le 1,\quad n=0,1,\cdots$$

のもとで，指定点$x_1=0$，$(y_{11},y_{12})=(0,0)$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u^*(n)$を求める。

この問題では(13.5)は次式となる。

$$-\frac{1}{4}=(\gamma^1,\eta)+(z^1,y)$$

$$\gamma^1(s)=2^s,\quad z^1(s)=(z_1^1(s),\ z_2^1(s))^T$$

$$z_1^1(s)=0,\quad z_2^1(s)=-2^{s-1}$$

また，(11.10)～(11.11)は次式となる。

$$\frac{1}{4}=(\gamma^{nj},\ \eta)+(z^{nj},\ y),\quad n=1,\ \cdots,N,\quad j=1,2$$

$$\gamma^{n1}(s)=\begin{cases}2s & \\ 0 & \end{cases},\qquad \gamma^{n2}(s)=\begin{cases}-2 & ,\ \text{if } s\leq n\\ 0 & ,\ \text{if } s>n\end{cases}$$

$$z^{n1}(s)=\begin{cases}(1,-n)^T \\ 0\end{cases},\quad z^{n2}(s)=\begin{cases}(0,\ 1)^T, & \text{if } s=n<N\\ 0 & ,\ \text{if } s\neq n \text{ or } n=N\end{cases}$$

定義により，

$$\Omega=\left\{\xi=(\xi_1,\{\xi_{nj}\})^T\,\middle|-\frac{1}{4}\xi_1+\frac{1}{4}\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{2}\xi_{nj}=1\right\}$$

である。$N=2$ のときの最小値問題(13.5)は $\xi_1=-4+\sum_{n=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\xi_{nj}$ を使えば，

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}(2)=\min_{\{\xi_{nj}\}}\{&|-8+4\xi_{11}+4\xi_{21}|\\&+|-16+4\xi_{11}+4\xi_{12}+6\xi_{21}+2\xi_{22}|+|\xi_{11}|\\&+|4-2\xi_{11}-\xi_{21}-\xi_{22}|\}\end{aligned}$$

となる。これは $\xi_{11}=0$，$\xi_{12}=-1$，$\xi_{21}=2$，$\xi_{22}=4$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(2)=0$ をとる。$N=3$ のときの(13.5)は $\xi_1=-4+\sum_{n=1}^{3}\sum_{j=1}^{2}\xi_{nj}$ を使うと

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}(3)=\min_{\{\xi_{nj}\}}\{&|-8+4\xi_{11}+4\xi_{21}+4\xi_{31}|\\&+|-16+4\xi_{11}+4\xi_{12}+8\xi_{21}+2\xi_{22}+8\xi_{31}+2\xi_{32}|\\&+|-32+8\xi_{11}+8\xi_{12}+8\xi_{21}+8\xi_{22}+14\xi_{31}+6\xi_{32}|\\&+|\xi_{11}|+|4-2\xi_{11}-\xi_{21}-\xi_{22}-\xi_{31}-\xi_{32}|+|\xi_{21}|\\&+|8-2\xi_{11}-2\xi_{12}-4\xi_{21}-\xi_{22}-2\xi_{31}-2\xi_{32}|\}\end{aligned}$$

となる。これは $\xi_{11}=0$，$\xi_{12}=-\frac{3}{2}$，$\xi_{21}=0$，$\xi_{22}=-1$，$\xi_{31}=2$，$\xi_{32}=4$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(3)=1$ をとる。よって，$N^*=3$ が求まり，$\{\xi_{nj}\}$ の上の値に対して $\xi_1=-\frac{1}{2}$ が得られるから ξ^0 も定まった。従って，(11.15)～(11.16)から

$$y_2^*(1)=\text{sign}\left[\xi_1^0 z_2^1(1)+\sum_{n=1}^{2}\sum_{j=1}^{2}\xi_{nj}^0 z_2^{nj}(1)\right]=-1$$

その他の $y_l^*(s)$ と $\eta^*(s)$ は不定

が求まる。$u^*(s)$の決定条件は

$$y_2^*(1)=\frac{1}{4}+2u^*(0)=-1$$

$$y_1^*(3)=1+4u^*(0)+2u^*(1)=0$$

$$y_2^*(3)=\frac{1}{4}+2u^*(0)+2u^*(1)+2u^*(2)=0$$

であり，$u^*(0)=-\frac{5}{8}$，$u^*(1)=\frac{3}{4}$，$u^*(2)=-\frac{1}{4}$ と求まる。この最適制御による複合系の応答は

$$x(0)=\frac{1}{4},\ x(1)=-\frac{1}{2},\ x(2)=\frac{1}{2}\ ,\ x(3)=0$$

$$y_1(0)=\frac{1}{4},\ y_1(1)=\frac{1}{2}\ ,\ y_1(2)=-\frac{1}{2},\ y_1(3)=0$$

$$y_2(0)=\frac{1}{4},\ y_2(1)=-1\ ,\ y_2(2)=\frac{1}{2}\ ,\ y_2(3)=0$$

である。

14. 最適制御問題（A，C_3，$q<r$）

14.1 仮 定

8.1 節の仮定(i)と(ii)に加えて，つぎのことを仮定する。

(iii) C_3のかわりに，正規化した拘束条件C_3'すなわちC_1'かつC_2'を採用する。

14.2 L－問題への変換

(i) (10.1)はまた次式のように書くことができる。

$$\begin{aligned}(14.1)\quad e_i&=(\bar{\gamma}^i,\ \bar{\eta})+(\tilde{\gamma}^i,\ \tilde{\eta})\\&=\sum_{s=1}^{N}(\bar{\gamma}^i(s),\ \bar{\eta}(s))+\sum_{s=1}^{N}(\tilde{\gamma}^i(s),\ \tilde{\eta}(s)),\\&\quad i=1,\ \cdots,\ p\end{aligned}$$

ただし，

$$\eta=(\bar{\eta},\ \tilde{\eta})^T,\ \bar{\eta}=(\eta_1,\cdots,\eta_q)^T,\ \tilde{\eta}=(\eta_{q+1},\ \cdots,\ \eta_r)^T$$
$$\gamma^i=(\bar{\gamma}^i,\tilde{\gamma}^i)^T,\ \bar{\gamma}^i=(\gamma_1^i,\cdots,\gamma_q^i)^T,\ \tilde{\gamma}^i=(\gamma_{q+1}^i,\ \cdots,\ \gamma_r^i)^T$$

とする。さて，$\bar{\eta}$は

$$(\mathrm{q})\qquad \|\bar{\eta}\|=\max_{1\leq s\leq N}\ \max_{1\leq j\leq q}|\eta_j(s)|$$

なるノルムを持つ空間$\bar{R}^*$に属するものとすれば，$\bar{\gamma}^i$は

$$(\mathrm{r})\qquad \|\gamma\|=\sum_{s=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}|\gamma_j(s)|$$

なるノルムを持つ空間$\bar{R}$の元と考えなければならない。また，$\tilde{\eta}$は(m)なるノルムを持つ空間$\tilde{R}^*$に属すものとすれば，$\tilde{\gamma}^i$は(n)なるノルムを持つ空間$\tilde{R}$の元と考えなければならない。そこで，直積空間$R_1=\bar{R}\times\tilde{R}$の元$\gamma^i$のノルムを(b)で定義するならば，その共役空間$R_1^*=\bar{R}^*\times\tilde{R}^*$の元$\eta$のノルムは(a)で定義される。よって，最適制御問題(A，C_1')は(14.1)を最小数$N=N^*$で満たす。$\|\eta^*\|\leq 1$なる$\eta^*=(\bar{\eta}^*,\ \tilde{\eta}^*)\in R_1^*$，$\bar{\eta}^*\in\bar{R}^*$，$\tilde{\eta}^*\in\tilde{R}^*$を見出すというL－問題に変換しえる。

(ii) 最適制御問題(A，C_2'，$q<r$)は第8章で論じたように，附加的条件$\|\tilde{\eta}\|\leq 1$のもとでは，次式を最小数$N=N^*$で満たす$\|y^*\|\leq 1$なるy^*を見出すL－問題に変換される。

$$\begin{aligned}(14.2)\quad \varepsilon_i&=(\lambda^i,\ \tilde{\eta})+(z^i,\ y)=\sum_{s=1}^{N}(\lambda^i(s),\ \tilde{\eta}(s))\\&\quad+\sum_{s=1}^{N}(z^i(s),\ y(s)),\quad i=1,\ \cdots,\ p\end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned}(14.3)\quad \varepsilon_i&=[\Phi(-N)]_i\,x_1-x_{0i}\\&\quad+\sum_{s=1}^{N}\left(\sum_{n=s}^{N}G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ F(s)y_0\right)\end{aligned}$$

$$(14.4)\quad z^i(s)=\sum_{n=s}^{N}G(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n)$$

$$(14.5)\quad \lambda^i(s)=\tilde{\gamma}^i(s)-\sum_{\rho=s}^{N}\sum_{n=\rho}^{N}\Psi_2(\rho-s)^T G(0,1,\cdots,n-\rho)^T\bar{\gamma}^i(n)$$

ここで，yは(k)なるノルムを持つ空間$\widehat{R}^*$に属するものとすれば，z^iは(1)なるノルムを持つ空間$\widehat{R}$の元と考えなければならない。また，$\lambda^i\in\widetilde{R}$，$\widetilde{\eta}\in\widetilde{R}^*$と考える。

(iii) 本章の問題を上記(i)と(ii)の複合問題として定式化するために，直積空間$R=\bar{R}\times\widetilde{R}\times\widehat{R}$ をその元$\Gamma=(\bar{\gamma}, \widetilde{\gamma}, z)$，$\bar{\gamma}\in\bar{R}$，$\widetilde{\gamma}\in\widetilde{R}$，$z\in\widehat{R}$のノルムが

$$\|\Gamma\|=\|\bar{\gamma}\|+\|\widetilde{\gamma}\|+\|z\|$$

であるものとして定義する。このとき，Rの共役空間は$R^*=\bar{R}^*\times\widetilde{R}^*\times\widehat{R}^*$ であり，R^*の元$L=(\bar{\eta}, \widetilde{\eta}, y)$，$\bar{\eta}\in\bar{R}^*$，$\widetilde{\eta}\in\widetilde{R}^*$，$y\in\widehat{R}^*$のノルムは

$$\|L\|=\max\{\|\bar{\eta}\|, \|\widetilde{\eta}\|, \|y\|\}$$

で定義される。このRの上の線形汎関数$L\in R^*$は

$$L(\Gamma)=(\bar{\gamma}, \bar{\eta})+(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\eta})+(z, y), \quad \Gamma\in R$$

と表現される。

ノルムの定義により，$\|L\|\le 1$は$\|\bar{\eta}\|\le 1$，$\|\widetilde{\eta}\|\le 1$，$\|y\|\le 1$すなわち，$\|\eta\|\le 1$かつ$\|y\|\le 1$に同等であるから，本問題の拘束条件は

(C_3') $\quad \|L\|\le 1, \quad L\in R^*$

と表現できる。選択しえるR^*の元Lには更に(10.7)の条件が課せられる。(10.7)の汎関数表現(10.10)はまた次式のように書くことができる。

(14.6) $$y_{0j}=(\bar{\gamma}^{nj}, \eta)+(\widetilde{\gamma}^{nj}, \widetilde{\eta})+(z^{nj}, y), \quad n=1, \cdots, N, \quad j=1, \cdots, q$$

ただし

(14.7) $$[\bar{\gamma}^{nj}]_l(s)=\begin{cases}-[F(-s)D]_{jl}, & \text{if } s\le n \text{ and } l=1,\cdots,q\\ 0, & \text{if } s>n\end{cases}$$

(14.8) $$[\widetilde{\gamma}^{nj}]_l(s)=\begin{cases}-[F(-s)D]_{jl}, & \text{if } s\le n \text{ and } l=q+1,\cdots,r\\ 0, & \text{if } s>n\end{cases}$$

(14.9) $$z^{nj}(s)=\begin{cases}[F(-n)]_j, & \text{if } n=s\\ 0, & \text{if } n\neq s\end{cases}$$

以上の準備のもとで，最適制御問題(A, C_3', $q<r$)をL－問題の形式に定式化するとつぎのようである。

［P14］ 与えられたp個の実数$e_i+\varepsilon_i$およびRの元$\Gamma^i=(\bar{\gamma}^i, \widetilde{\gamma}^i+\lambda^i, z^i)$に対しては

(14.10) $$e_i+\varepsilon_i=(\bar{\gamma}^i, \bar{\eta})+(\widetilde{\gamma}^i+\lambda^i, \widetilde{\eta})+(z^i, y), \quad i=1, \cdots, p$$

を，$N\times q$個のRの元$\Gamma^{nj}=(\bar{\gamma}^{nj}, \widetilde{\gamma}^{nj}, z^{nj})$に対しては(14.6)を最小数$N=N^*$で同時に満たす線形汎関数$L^*=(\bar{\eta}^*, \widetilde{\eta}^*, y^*)\in R^*$，$\|L^*\|\le 1$，$\bar{\eta}^*\in\bar{R}^*$，$\widetilde{\eta}^*\in\widetilde{R}^*$，$y^*\in\widehat{R}^*$を求めよ。

14.3 最適解の決定

最適解の存在条件はこれまでの問題と同様に考えればよく，$p+N\times q$個のRの元$\{\Gamma^i\}$，$\{\Gamma^{nj}\}$が線形独立で，次式で定義される$\lambda(N)$に対して$\lambda(N)\le 1$となる離散時刻Nが存在するならば，［P14］は解を持ち，N^*は$\lambda(N)\le 1$を満たす最小数として決定される。

(14.11)
$$\begin{aligned}\lambda^{-1}(N)&=\min_{\xi\in\Omega}\Big\|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\Gamma^i+\sum_{n=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\Gamma^{nj}\Big\|\\
&=\min_{\xi\in\Omega}\Big\{\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\gamma_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\gamma_l^{nj}(s)\Big|+\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=q+1}^{r}\\
&\quad\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i(\gamma_l^i(s)+\lambda_l^i(s))+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\gamma_l^{nj}(s)\Big|\\
&\quad+\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}z_l^{nj}(s)\Big|\Big\}\end{aligned}$$

ただし，

$$\Omega=\Big\{\xi=(\{\xi_i\}, \{\xi_{nj}\})^T\,\Big|\,\sum_{i=1}^{p}\xi_i(e_i+\varepsilon_i)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}y_{0j}=1\Big\}$$

このN^*に対する最小値問題(14.11)の解の一つをξ^0とするならば，最適解は次式によって表現される。

(14.12) $$\eta_l^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\Big[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0\gamma_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}^0\gamma_l^{nj}(s)\Big], \quad l=1, \cdots, q$$

(14.13) $$\eta_l^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\Big[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0(\gamma_l^i(s)+\lambda_l^i(s))+\sum_{n=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}^0\gamma_l^{nj}(s)\Big], \quad l=q+1, \cdots, r$$

(14.14) $$y_l^*(s)=\lambda(N^*)\,\mathrm{sign}\Big[\sum_{i=1}^{p}\xi_i^0 z_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N^*}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}^0 z_l^{nj}(s)\Big], \quad l=1, \cdots, q$$

ここで，$s=1, \cdots, N^*$である。なお，いくつかのlとsに対して，$\eta_l^*(s)$，$y_l^*(s)$の値が確定しないのが普通である。それらの値は複合系に課せられた諸条件から決定する。

14.4 例 題

(0_1) $$\begin{cases}x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n)+u_1(n)\\ x_2(n+1)=x_2(n)+u_2(n)\end{cases}$$

(0_2) $$y(n+1)=y(n)+u_1(n)+u_2(n), \quad y_0=y(0)=0$$

なる複合系で，系0_1の初期値$(x_{01}, x_{02})=(2, 0)$を拘束条件

$$|u_1(n)|\le 1, \quad |u_2(n)|\le 1, \quad |y(n)|\le 1, \quad n=0, 1, \cdots$$

のもとで指定点$(x_{11}, x_{12})=(0, 0)$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u_1^*(n)$, $u_2^*(n)$を求める。

この問題では(14.10)は次式となる。ただし，ここでは

$\tilde{\eta}(s)=\eta_1(s)=u_1(s-1)$, $\tilde{\eta}(s)=\eta_2(s)=u_2(s-1)$ にとる。

$$-4=(\gamma_1^1,\ \eta_1)+(\gamma_2^1+\lambda^1,\ \eta_2)+(z^1,\ y)$$
$$0=(\gamma_1^2,\ \eta_1)+(\gamma_2^2+\lambda^2,\ \eta_2)+(z^2,\ y)$$
$$\gamma^1(s)=(\gamma_1^1(s),\ \gamma_2^1(s))^T=(1,-s)^T$$
$$\gamma^2(s)=(\gamma_1^2(s),\ \gamma_2^2(s))^T=(0,\ \ 1)^T$$
$$\lambda^1(s)=-(1+s)\ ,\quad \lambda^2(s)=1$$
$$\begin{cases} z^1(s)=0, & s=1,\cdots,N-1 \\ z^1(N)=1 \end{cases},\quad z^2(s)=0$$

また，(14.6)は次式となる。

$$0=(\gamma_1^{n1},\ \eta_1)+(\gamma_2^{n1},\ \eta_2)+(z^{n1},\ y),\ n=1,\cdots,N$$
$$\gamma_1^{n1}(s)=\gamma_2^{n1}(s)=\begin{cases}-1, & \text{if}\quad s\leq n \\ 0, & \text{if}\quad s>n\end{cases}$$
$$z^{n1}(s)=\begin{cases}1, & \text{if}\quad n=s \\ 0, & \text{if}\quad n\neq s\end{cases}$$

定義により

$$\Omega=\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\{\xi_{n1}\})^T\,|\,-4\,\xi_1=1\}$$

である。$N=1$ としたときの最小値問題(14.11)は

$$\lambda^{-1}(1)=\min_{\xi_2,\xi_{11}}\left\{\left|-\frac{1}{4}-\xi_{11}\right|+\left|\frac{3}{4}+2\xi_2-\xi_{11}\right|+\left|-\frac{1}{4}+\xi_{11}\right|\right\}$$

となり，$\xi_2=-\frac{1}{2}$，$\xi_{11}=-\frac{1}{4}$ のとき最小値 $\lambda^{-1}(1)=\frac{1}{2}$ をとる。$N=2$ としたときの(14.11)は

$$\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_2,\xi_{11},\xi_{21}}\left\{\left|-\frac{1}{4}-\xi_{11}-\xi_{21}\right|+\left|-\frac{1}{4}-\xi_{21}\right|+\left|\frac{3}{4}+2\xi_2-\xi_{11}-\xi_{21}\right|+\left|\frac{5}{4}+2\xi_2-\xi_{21}\right|+|\xi_{11}|+\left|-\frac{1}{4}+\xi_{21}\right|\right\}$$

である。これは $\xi_2=-\frac{1}{2}$ or $-\frac{3}{4}$，$\xi_{11}=0$，$\xi_{21}=-\frac{1}{4}$ のときに最小値 $\lambda^{-1}(2)=1$ をとる。よって，$N^*=2$ が求まった。

このN^*に対する(14.11)の解は2つあり，一つの解$\xi_1^0=\frac{1}{4}$，$\xi_2^0=-\frac{1}{2}$，$\xi_{11}^0=0$，$\xi_{21}^0=-\frac{1}{4}$に対しては(14.12)〜(14.14)により

$$\eta_2^*(2)=\mathrm{sign}\,[\,5\,\xi_1^0+2\,\xi_2^0-\xi_{21}^0\,]=1$$
$$y^*(2)=\mathrm{sign}\,[\,-\xi_1^0+\xi_{21}^0\,]=-1$$

が求まる。その他の制御量はつぎの諸条件から決定する。

$$x_1^*(2)=2+\eta_1^*(1)+\eta_1^*(2)+\eta_2^*(1)=0$$
$$x_2^*(2)=\eta_2^*(1)+\eta_2^*(2)=0$$
$$y^*(2)=\eta_1^*(1)+\eta_1^*(2)+\eta_2^*(1)+\eta_2^*(2)=-1$$
$$|y^*(1)|=|\eta_1^*(1)+\eta_2^*(1)|\leq 1,\quad |\eta_1^*(1)|\leq 1$$

これらから，

$$\eta_2^*(1)=-1,\quad \eta_1^*(1)+\eta_1^*(2)=-1,\quad 0\leq\eta_1^*(1)\leq 1$$

が得られる。ここで，$\eta_1^*(1)=0$ に選べば，$\eta_1^*(2)=-1$ であり，このときの複合系の最適応答は

$$x_1(0)=2,\quad x_1(1)=2\ ,\quad x_1(2)=0$$
$$x_2(0)=0,\quad x_2(1)=-1,\quad x_2(2)=0$$
$$y(0)=0,\quad y(1)=-1,\quad y(2)=-1$$

である。

もう一つの解 $\xi_1^0=\frac{1}{4}$，$\xi_2^0=-\frac{3}{4}$，$\xi_{11}^0=0$，$\xi_{21}^0=-\frac{1}{4}$に対しては(14.12)〜(14.14)により

$$\eta_2^*(1)=\mathrm{sign}\,[\,3\,\xi_1^0+2\,\xi_2^0-\xi_{11}^0-\xi_{21}^0\,]=-1$$
$$y^*(2)=\mathrm{sign}\,[\,-\xi_1^0+\xi_{21}^0\,]=-1$$

が求まる。その他の制御量の満たすべき諸条件は上の場合と同一となる。

この例題では $\eta_1^*(s)$，$s=1$，2の値が一意的に定まるのではなく，その決め方には一定条件のもとで自由度があることを示している。

15. 最適制御問題(B，C_3，$q<r$)

15.1 仮 定

14.1節と同一の仮定をする。

15.2 L－問題への変換

(i) (11.1)はまたつぎのように書くことができる。

$$(15.1)\qquad e_i=(\bar{\gamma}^i,\bar{\eta})+(\tilde{\gamma}^i,\tilde{\eta})=\sum_{s=1}^{N}(\bar{\gamma}^i(s),\bar{\eta}(s))+\sum_{s=1}^{N}(\tilde{\gamma}^i(s),\tilde{\eta}(s)),\quad i=1,\cdots,p+q$$

ただし，記号$\bar{\gamma}^i$，$\tilde{\gamma}^i$，$\bar{\eta}$，$\tilde{\eta}$は14.2節(i)と同じく定義し，それらの属する空間も同様にそれぞれ$\bar{R}$，$\tilde{R}$，$\bar{R}^*$，$\tilde{R}^*$とする。そうすれば，最適制御問題(B，C_1')は(15.1)を最小数$N=N^*$で満たす$\|\bar{\eta}^*\|\leq 1$，$\|\tilde{\eta}^*\|\leq 1$なる$\bar{\eta}^*\in\bar{R}^*$，$\tilde{\eta}^*\in\tilde{R}^*$を見出す問題になる。

(ii) 最適制御問題(B，C_2'，$q<r$)は第9章で論じたように，附加的条件$\|\tilde{\eta}\|\leq 1$のもとで，次式を最小数$N=N^*$で満たす$\|y^*\|\leq 1$なるy^*を見出すL－問題に変換される。

$$(15.2)\qquad \varepsilon_i=(\lambda^i,\tilde{\eta})+(z^i,\ y)=\sum_{s=1}^{N}(\lambda^i(s),\tilde{\eta}(s))+\sum_{s=1}^{N-1}(z^i(s),\ y(s)),\quad i=1,\cdots,p$$

ただし

$$(15.3)\qquad \varepsilon_i=[\Phi(-N)]_i\,x_1-x_{0i}-(\bar{\gamma}^i(N),\ G(0)\,y_1)+\left(\sum_{s=1}^{N}\sum_{n=s}^{N}F(s)^TG(0,1,\cdots,n-s)^T\bar{\gamma}^i(n),\ y_0\right)$$

$$(15.4)\qquad \lambda^i(s)=\tilde{\gamma}^i(s)-\sum_{\rho=s}^{N}\sum_{n=\rho}^{N}\Psi_2(\rho-s)^TG(0,1,\cdots,n-\rho)^T\bar{\gamma}^i(n)$$

$$(15.5)\qquad z^i(s)=\sum_{n=s}^{N}G(0,\ 1,\cdots,\ n-s)^T\,\bar{\gamma}^i(n)$$

ここで，yは(0)なるノルムを持つ空間$\hat{R}^*$に属するならば，z^iは(p)なるノルムを持つ空間$\hat{R}$の元と考えなければならない。また$\lambda^i\in\tilde{R}$，$\tilde{\eta}\in\tilde{R}^*$と考える。

(iii) 本章の問題を上記(i)と(ii)の複合問題として定式化するために，14.3節(iii)と同様の直積空間Rとその共役空

間R^*を定義する。$i=p+1,\cdots,p+q$ に対する(15.1)と(11.7)のかわりに，これと等価なつぎの汎関数表現を使用する。

(15.6) $$y_{0j}=(\bar{\gamma}^{nj},\bar{\eta})+(\tilde{\gamma}^{nj},\tilde{\eta})+(z^{nj},y),\quad n=1,\cdots,N,\ \ j=1,\cdots,q$$

ただし，Rの$(N-1)\times q$個の元$\Gamma^{nj}=(\bar{\gamma}^{nj},\tilde{\gamma}^{nj},z^{nj})$は(14.7)～(14.9)で定義し$q$個の元$\Gamma^{Nj}=(\bar{\gamma}^{Nj},\tilde{\gamma}^{Nj},z^{Nj})$は

(15.7) $[\bar{\gamma}^{Nj}]_l(s)=-[F(-s)D]_{jl}$, $l=1,\cdots,q$

(15.8) $[\tilde{\gamma}^{Nj}]_l(s)=-[F(-s)D]_{jl}$, $l=q+1,\cdots,r$

(15.9) $z^{Nj}(s)=0$

で定義する。以上の準備のもとで，最適制御問題(B, C_3, $q<r$)のL-問題はつぎのように記述される。

［P15］ 与えられたp個の実数$e_i+\varepsilon_i$およびRの元$\Gamma^i=(\bar{\gamma}^i,\tilde{\gamma}^i+\lambda^i,z^i)$に対しては

(15.10) $$e_i+\varepsilon_i=(\bar{\gamma}^i,\bar{\eta})+(\tilde{\gamma}^i+\lambda^i,\tilde{\eta})+(z^i,y),\quad i=1,\cdots,p$$

を，$N\times q$個のRの元$\Gamma^{nj}=(\bar{\gamma}^{nj},\tilde{\gamma}^{nj},z^{nj})$に対しては(15.6)を最小数$N=N^*$で同時に満たす線形汎関数$L^*=(\bar{\eta}^*,\tilde{\eta}^*,y^*)\in R^*$，$\|L^*\|\leq 1$，$\bar{\eta}^*\in\bar{R}^*$，$\tilde{\eta}^*\in\tilde{R}^*$，$y^*\in\hat{R}^*$を求めよ。

15.3 最適解の決定

［P14］と［P15］の字句上の同一性に注目すると分るように，与えられた実数と関数は全て前節で定義したものをあてはめれば，本節の記述は14.3節と同じである。ただし，問題がB形であるから，(14.14)のsは$s=1,\cdots,N^*-1$とし，(14.11)はつぎのようにわずかに修正される。

(15.11) $$\begin{aligned}\lambda^{-1}(N)=\min_{\xi\in\Omega}\Big\{&\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=1}^{q}\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\,\gamma_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\,\gamma_l^{nj}(s)\Big|+\sum_{s=1}^{N}\sum_{l=q+1}^{r}\\&\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i\,(\gamma_l^i(s)+\lambda_l^i(s))+\sum_{n=1}^{N}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\,\gamma_l^{nj}(s)\Big|+\sum_{s=1}^{N-1}\sum_{l=1}^{q}\\&\Big|\sum_{i=1}^{p}\xi_i z_l^i(s)+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\,z_l^{nj}(s)\Big|\Big\}\end{aligned}$$

ただし，

$$\Omega=\Big\{\xi=(\{\xi_i\},\{\xi_{nj}\})^T\,\Big|\,\sum_{i=1}^{p}\xi_i(e_i+\varepsilon_i)+\sum_{n=1}^{N-1}\sum_{j=1}^{q}\xi_{nj}\,y_{0j}+\sum_{j=1}^{q}\xi_{Nj}\,(y_{0j}-[F(-N)]_j\,y_1)=1\Big\}$$

とする。

15.4 例 題

$$(0_1)\quad\begin{cases}x_1(n+1)=x_1(n)+x_2(n)+u_1(n)\\x_2(n+1)=x_2(n)+u_2(n)\end{cases}$$

$$(0_2)\quad y(n+1)=\frac{1}{2}\,y(n)+\frac{1}{2}\,u_1(n)+\frac{1}{2}\,u_2(n)$$

なる複合系の初期値$(x_{01},x_{02})=(2,0)$，$y_0=1$を拘束条件

$$|u_1(n)|\leq1,\quad|u_2(n)|\leq1,\quad|y(n)|\leq1,\quad n=0,1,\cdots$$

のもとで指定点$(x_{11},x_{12})=(0,0)$，$y_1=0$に最小数$n=N^*$で移行しえる最適制御$u_1^*(n)$，$u_2^*(n)$を求める。

この問題では$i=1$，2に対する(15.1)は次式となる。ただし，$\bar{\eta}=\eta_1$，$\tilde{\eta}=\eta_2$にとる。

$$-3=(\gamma_1^1,\eta_1)+(\gamma_2^1+\lambda^1,\eta_2)+(z^1,y)$$
$$0=(\gamma_1^2,\eta_1)+(\gamma_2^2+\lambda^2,\eta_2)+(z^2,y)$$
$$\gamma^1(s)=(\gamma_1^1(s),\gamma_2^1(s))^T=(1,-s)^T$$
$$\gamma^2(s)=(\gamma_1^2(s),\gamma_2^2(s))^T=(0,1)^T$$
$$\lambda^1(s)=-s-1,\quad\lambda^2(s)=1$$
$$z^1(s)=1,\quad z^2(s)=0$$

また，(15.6)は次式となる。

$$1=(\gamma^{n1},\eta_1)+(\gamma_2^{n1},\eta_2)+(z^{n1},y),\quad n=1,\cdots,N$$
$$\gamma_1^{n1}(s)=\gamma_2^{n1}(s)=\begin{cases}-2^{s-1}, & \text{if } s\leq n\\0, & \text{if } s>n\end{cases}$$
$$z^{n1}(s)=\begin{cases}2^n, & \text{if } s=n<N\\0, & \text{if } s\neq n \text{ or } n=N\end{cases}$$

定義により

$$\Omega=\Big\{\xi=(\xi_1,\xi_2,\{\xi_{n1}\})^T\,\Big|\,-3\xi_1+\sum_{n=1}^{N}\xi_{n1}=1\Big\}$$

である。$N=2$のときの最小値問題(15.11)は$\xi_{21}=1+3\xi_1-\xi_{11}$をつかえば，

$$\begin{aligned}\lambda^{-1}(2)=\min_{\xi_1,\xi_2,\xi_{11}}\{&|-1-2\xi_1|+|-2-5\xi_1+2\xi_{11}|\\&+|-1-6\xi_1+2\xi_2|+|-2-11\xi_1+2\xi_2+2\xi_{11}|\\&+|\xi_1+2\xi_{11}|\}\end{aligned}$$

である。これは$\xi_1=-\frac{1}{3}$，$\xi_2=-\frac{1}{2}$ or -1，$\xi_{11}=\frac{1}{6}$のときに最小値$\lambda^{-1}(2)=\frac{4}{3}$をとる。よって$N^*=2$が求まった。

このN^*に対する(15.11)の解は2つあり，一つの解$\xi_1^0=-\frac{1}{3}$，$\xi_2^0=-\frac{1}{2}$，$\xi_{11}^0=\frac{1}{6}$，$\xi_{21}^0=-\frac{1}{6}$に対しては(14.12)～(14.14)より

$$\eta_1^*(1)=-\frac{3}{4},\quad\eta_2^*(2)=\frac{3}{4}$$

が求まる。その他の制御量はつぎの諸条件から決定する。

$$x_1^*(2)=2+\eta_1^*(1)+\eta_1^*(2)+\eta_2^*(1)=0$$
$$x_2^*(2)=\eta_2^*(1)+\eta_2^*(2)=0$$

これから，

$$\eta_1^*(2)=-\frac{1}{2},\quad\eta_2^*(1)=-\frac{3}{4}$$

が得られる。もう一つの解$\xi_1^0=-\frac{1}{3}$，$\xi_2^0=-1$，$\xi_{11}^0=\frac{1}{6}$，$\xi_{21}^0=-\frac{1}{6}$に対しては(14.12)～(14.14)より

$$\eta_1^*(1)=-\frac{3}{4}\ ,\quad \eta_2^*(1)=-\frac{3}{4}$$

が求まる。その他の制御量は上記2つの条件から求まり，$\eta_1^*(2)=-\frac{1}{2}$，$\eta_2^*(2)=\frac{3}{4}$となるから最適制御は一致する。このときの複合系の最適応答は

$$x_1(0)=2\ ,\quad x_1(1)=\frac{5}{4}\ ,\quad x_1(2)=0$$

$$x_2(0)=0\ ,\quad x_2(1)=-\frac{3}{4}\ ,\quad x_2(2)=0$$

$$y\ (0)=1\ ,\quad y\ (1)=-\frac{1}{4}\ ,\quad x\ (2)=0$$

である。

16. おわりに

本稿では定係数の複合線形離散制御系の最短時間状態移行問題を考え，L－問題に関するモーメント理論にもとづいて最適制御を導出した。この最適制御は未知パラメータ・ベクトルに関する最小値問題の最適解を含んだ形で表現されている。従って，最適制御の決定のためにはこの最小値問題が解ければよく，解くことが主題になるから，各場合の最適問題について具体的な例題を取上げ，解き方を示しておいた。一般的な数値解法には線形計画法で開発されている諸アルゴリズムの使用が有力であろう。

注意すべき点は，導出された最適制御の表現からは，全ての成分の全ての離散時刻における最適制御の値が必ずしも確定しないことである。少し考えると判るように，このことはつぎのことを意味している。ある成分のある離散時刻における最適制御の値が不定であるとき，その最適値は必ず制御の拘束条件を満すが，必ずしも一意に定まるとはかぎらない。その値を決定する条件は複合系の境界条件であり，状態に拘束の課されている場合には更に複合系の過渡条件が加わることもある。すなわち，状態拘束問題の場合には最適制御だけでなく拘束を受ける状態の最適応答の表現も導出されているが，ある成分のある時刻でその応答が確定するときにはこの過渡条件は最適制御を決定する条件に加えられる。一方，その応答が不確定になるときにはその成分のその時刻で状態制御のもとで拘束を侵すことは決してない。従って，拘束を受ける状態の最適応答が全ての成分の全ての時刻で不確定となるならば，状態拘束付きの最適問題は状態拘束を無視して取り扱かってよいということを意味している。

また，本稿で考察した最適制御問題を分類して，拘束条件C_1またはC_2を持つものを基本的問題とよぶならば，拘束条件C_3を持つ問題は直積空間の概念を応用することによって，容易に基本的問題のL－問題表示をつかって解くことができる。一方，基本的問題のうち，制御の拘束C_1を持つ問題では容易に一般的最適解を見出しえるが，状態の拘束C_2を持つ問題では$q=r$，$q>r$，$q<r$の場合に分けてそれぞれ最適解を求めなければならない。

最適制御問題において拘束を受ける変数を$w(n)=(w_1(n),\cdots,w_a(n))^T$で表わしたとき，(注) 本稿で考察した拘束条件は

$$|w_i(n)|\leq 1\ ,\quad n=0,1,\cdots,\quad i=1,\cdots,a$$

であった。他の重要な拘束条件としては

$$\sum_n\sum_i |w_i(n)|\leq 1$$

$$\sum_n\sum_i |w_i(n)|^2\leq 1$$

$$\sum_n (\,w(n),\ Mw(n)\,)\leq 1\ ,\quad M>0$$

などが上げられよう。一般的議論を何ら変更することなく，$u(n)$または$y(n)$の拘束条件が上のどれによって表現されていても，本稿の手法にもとづいてそれぞれの問題の最適制御が導出しえることは容易に理解できるであろう。

最後に，本稿で提案している離散的最適制御問題の解法は，不幸にして連続的最適制御問題を解く手法としては有効でないことがある。しかし，本稿とは異なった手法を用いれば，後者の問題をモーメント法にもとづいて解くことが可能である。詳細については稿を改めて論じたい。

引用文献

1) R. Gabasov; On Optimal Processes in Coupled Digital Systems, Automation and Remote Control, Vol. 23, No. 7, (1962) pp. 808 ~ 817.
2) R. Gabasov and F. M. Kirillova; Optimum Control of Linked Discrete Systems, Automation and Remote Control, Vol. 24, No. 7 (1963) pp. 825 ~ 830.
3) 畑山：制御に時間遅れを伴う線形系の最適制御，航技研報告 TR－522 (1978)

注）本稿では$w(n)$として$u(n)$または$y(n)$であった。

航空宇宙技術研究所報告544号

昭和53年9月発行

発行所　航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所　株式会社　共進
東京都杉並区久我山4－1－7(羽田ビル)

Printed in Japan