

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-546

回転翼車の自由振動の解析

橋本良作・長松昭男・道村晴一

1978年11月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

回転翼車の自由振動の解析*

橋本良作** 長松昭男*** 道村晴一***

Analysis of The Free Vibration of The Rotating Disk

by

Ryosaku HASHIMOTO, Akio NAGAMATSU
and Seiichi MICHIMURA

ABSTRACT

The vibration of the rotating disk is analyzed with the finite element method, with consideration given to the effect of the centrifugal force. A fan-shaped element is proposed for the first time by the authors for the analysis of both in-plane and bending deformations of the shell structure. The calculated results of the natural modes and their frequencies of a model disk are compared with the experimental ones, and the both results agree well quantitatively.

1. まえがき

ガスタービン・エンジン等の回転機械の高速化，軽量化ならびに大型化により，回転部材の使用条件はますます厳しくなっている。それに伴って，回転機械の設計に際して，機械の安全性と性能向上の上から回転部材の遠心応力分布などの静的な性質を知るばかりではなく，固有振動数や固有モード（あわせて固有ベアとよぶ）のような動的な性質も知ることが重要となっている。本研究はこの問題に対しての基礎資料を与えることを目的として，任意形状の翼車の固有ベアの正確な値を試みる。

従来，翼車の振動解析としては Rayleigh-Ritz の方法などが用いられている。しかし，任意形状の翼車の解析には従来の方法の適用が困難であり，現在，有限要素法による解析が最適であると思われる。本研究では，まず，翼車を面内力と曲げ作用を同時に受ける平面要素の集合としての殻構造物を考え，軸対称殻の非軸対称の変形や振動の解析に便利な扇形要素を新しく開発した。つ

ぎに，これを用いて有限要素法により遠心力の影響を考慮に入れた振動解析を行なうためのプログラムを作成し，例題として単純な形状の円板についての計算を行なって，実験結果と比較した結果よく一致した。

2. 有限要素法による数値解析

本章では翼車のような軸対称殻の非軸対称の変形や振動の解析を行なうために新しく開発した扇形要素を説明し，これを用いて回転中の遠心力による剛性の増加を考慮した振動解析方法を述べる。

翼車を殻構造物と考え，面内力と曲げ作用の両方を同時に受ける平面要素の集合体と仮定すれば，変形が微小である限り，面内力による変形と曲げによる変形とはそれぞれ独立と考えることができる。したがって，この要素の剛性マトリックスは，面内成分の剛性マトリックスと曲げ成分の剛性マトリックスをそれぞれ独立に求め，それらを組み合わせれば得られる。

主な記号

E : ヤング率
 ν : ポアソン比
 h : 板厚
 ρ : 密度

* 昭和53年 8月 5日 受付

** 原動機部

*** 東京工業大学

ω : 固有角振動数

$r\theta z$: 円柱座標系

$\xi\eta z$: 要素座標系

$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix}$: 面内の変位成分

$\{N^p\}$: 面内の変位関数

$\{\delta^p\}$: 節点の面内変位

$\{\epsilon^p\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r^p \\ \epsilon_\theta^p \\ \gamma_{r\theta}^p \end{Bmatrix}$: 面内のひずみ

$\{\sigma^p\}$: 面内応力

$\{D^p\}$: 面内の弾性マトリックス

$\{\delta_i^b\}$: 節点 i の面外変位

$\begin{Bmatrix} w_i \\ (\phi_r)_i \\ (\phi_\theta)_i \end{Bmatrix}$: 節点 i の曲げによる節点変位

$\{\delta^b\}$: 節点の面外変位

$\{N^b\}$: 面外の変位関数

$\{\epsilon^b\}$: 曲げひずみ

$\{\sigma^b\} = \{M\} = \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix}$: 曲げ応力 (モーメント)

$\{D^b\}$: 曲げの弾性マトリックス

$\{m^p\}$: 質量マトリックス (面内変位)

$\{m^b\}$: 質量マトリックス (面外変位)

$\{K^p\}$: 剛性マトリックス (面内変位)

$\{K^b\}$: 剛性マトリックス (面外変位)

$\begin{Bmatrix} \epsilon_r^o \\ \epsilon_\theta^o \\ \gamma_{r\theta}^o \end{Bmatrix}$: 初期応力による付加的ひずみ

$\begin{Bmatrix} \sigma_r^o \\ \sigma_\theta^o \\ \tau_{r\theta}^o \end{Bmatrix}$: 初期応力

$\{G\}$: 傾斜角マトリックス

$\{K_G\}$: 付加剛性マトリックス

$\{F^b\}$: 等価節点力 (面外変位)

$\{F^p\}$: 等価節点力 (面内変位)

$\{M\}$: 全体質量マトリックス

$\{K\}$: 全体剛性マトリックス

$\{\delta_o\}$: 節点振幅ベクトル

2.1 面内剛性

図1に示すような扇形の要素を考え、面内変形は一つの節点に二つの変位成分 (u_r, u_θ) をもつので、要素内の面内変位は8成分値によって一義的に定められなければならない。その最も簡単な表示式を半径方向の変位について示すとつぎのようになる。

$$u_r = [1, \xi, \eta, \xi\eta] \{\alpha^p\} \tag{1}$$

(1)式の定数 $\{\alpha^p\}$ は節点における条件を用いると、つぎに示す式で表示される。

$$\begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ u_{r4} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} \tag{2}$$

(2)式の方程式を解いて $\{\alpha^p\}$ を変位 $\{u\}$ で示した結果はつぎのようになる。

$$\begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \\ \alpha_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ u_{r4} \end{Bmatrix} \tag{3}$$

(3)式を(1)式に代入し、計算すると、つぎに示す式にな

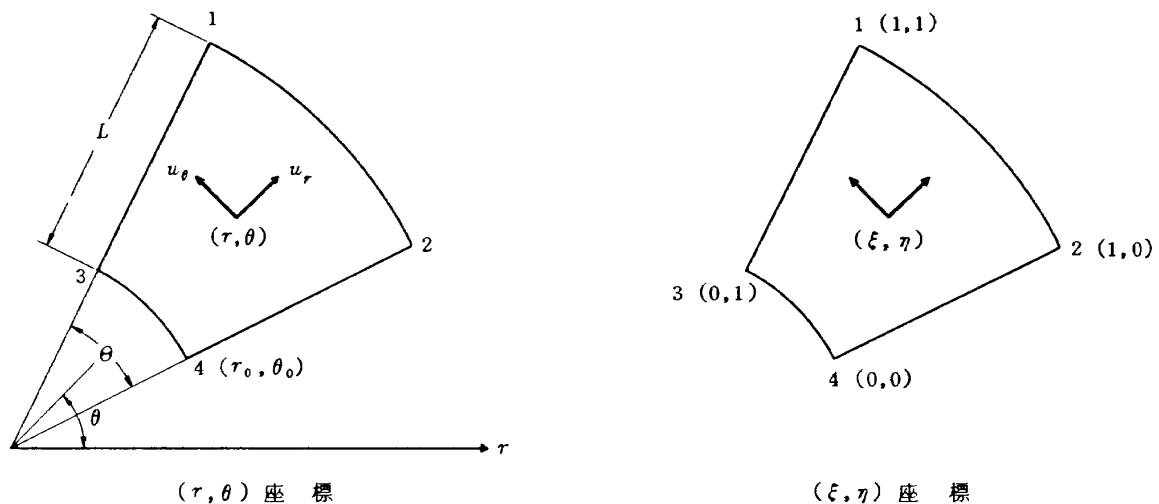


図1 面内変位

る。

$$u_r = [\xi\eta, \xi(1-\eta), (1-\xi)\eta, (1-\xi)(1-\eta)] \begin{Bmatrix} u_{r1} \\ u_{r2} \\ u_{r3} \\ u_{r4} \end{Bmatrix} \quad (4)$$

円周方向変位 (u_θ) も同ように求められる。これより面内変位による要素の変位関数はつぎの式で示される。

$$\begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \xi\eta & 0 & \xi(1-\eta) & 0 & (1-\xi)\eta \\ 0 & \xi\eta & 0 & \xi(1-\eta) & 0 \\ 0 & (1-\xi)(1-\eta) & 0 \\ (1-\xi)\eta & 0 & (1-\xi)(1-\eta) \end{Bmatrix} \{\delta^P\} \\ = [N^P] \{\delta^P\} \quad (5)$$

要素内の任意の点におけるひずみは内部仕事に寄与するつぎの三成分によって定めることができる。

$$\{\epsilon^P\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_r^P \\ \epsilon_\theta^P \\ \gamma_{r\theta}^P \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{u_r}{r} + \frac{\partial u_\theta}{r\partial\theta} \\ \frac{\partial u_r}{r\partial\theta} - \frac{u_\theta}{r} + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \end{Bmatrix}$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/r & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/r \\ 0 & -1/r & 0 & 1 & 1/r & 0 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} u_r \\ u_\theta \\ \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \\ \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \\ \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (6)$$

図1より

$$\begin{aligned} r &= r_0 + L\xi \\ \theta &= \theta_0 + \theta\eta \end{aligned} \quad (7)$$

と表示される。(5)式と(7)式をもちいて(6)式を書きかえると、つぎに示すようになる。

$$\{\epsilon^P\} = \frac{1}{L} \frac{1}{\lambda} \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & \beta & 0 \end{Bmatrix}$$

$$\times \begin{Bmatrix} [N^P] \\ \frac{\partial}{\partial \xi} [N^P] \\ \frac{\partial}{\partial \eta} [N^P] \end{Bmatrix} \{\delta^P\} \quad (8)$$

ただし、 λ と β はつぎの式で定義される。

$$\lambda = r/L, \quad \beta = 1/\theta \quad (9)$$

また

$$[X] = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \beta \\ 0 & -1 & 0 & \lambda & \beta & 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

$$[Y] = \begin{Bmatrix} [N^P] \\ \frac{\partial}{\partial \xi} [N^P] \\ \frac{\partial}{\partial \eta} [N^P] \end{Bmatrix} \quad (11)$$

とすると、(8)式は

$$\{\epsilon^P\} = \frac{1}{L} \frac{1}{\lambda} [X][Y]\{\delta^P\} \quad (12)$$

と書きかえられる。

$$\{\epsilon^P\} = [B^P]\{\delta^P\} \quad (13)$$

とおくと、(12)式より、 $[B^P]$ はつぎのように示される。

$$[B^P] = \frac{1}{L} \frac{1}{\lambda} [X][Y] \quad (14)$$

応力とひずみの関係式は、

$$\{\sigma^P\} = [D^P]\{\epsilon^P\} \quad (15)$$

と示される。ただし、 $\{\sigma^P\}$ は応力、 $\{\epsilon^P\}$ はひずみであり、 $[D^P]$ はつぎに示す弾性マトリックスである。

$$[D^P] = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{Bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{Bmatrix} \quad (16)$$

剛性マトリックスは、全ポテンシャルエネルギー最小の条件から、つぎの形に求められる。

$$[K] = \int [B]^T [D] [B] d(\text{vol}) \quad (17)$$

要素の板厚を h とし、(17)式に(14)式と(16)式を代入すると

$$[K^P] = h \iint \frac{1}{\lambda} [Y]^T [X]^T [D^P] [X] [Y] d\xi d\eta \quad (18)$$

のように示される。これが面内変位による要素の剛性マトリックスである。

2.2 曲げ剛性

曲げによる変形は、図2に示すように、面外垂直変位 w と、二つの回転 ϕ_r と ϕ_θ の三成分で与えられる。

形状関数はスカラー量であって、節点変位 $\{\delta^b\}$ の成分すなわち12個のパラメータにより定義しうるものでなければならない。

そこで、

$$w = \alpha_1 + \alpha_2 \xi + \alpha_3 \eta + \alpha_4 \xi^2 + \alpha_5 \xi \eta + \alpha_6 \eta^2 + \alpha_7 \xi^3 + \alpha_8 \xi^2 \eta + \alpha_9 \xi \eta^2 + \alpha_{10} \eta^3 + \alpha_{11} \xi^3 \eta + \alpha_{12} \xi \eta^3 = [P] \{\alpha^b\} \tag{19}$$

と仮定すれば、 $[P]$ はつぎのようになる。

$$[P] = [1, \xi, \eta, \xi^2, \xi \eta, \eta^2, \xi^3, \xi^2 \eta, \xi \eta^2, \eta^3, \xi^3 \eta, \xi \eta^3] \tag{20}$$

w の変位と回転を節点 i における節点変位ベクトルで示すと、つぎのように定義される。

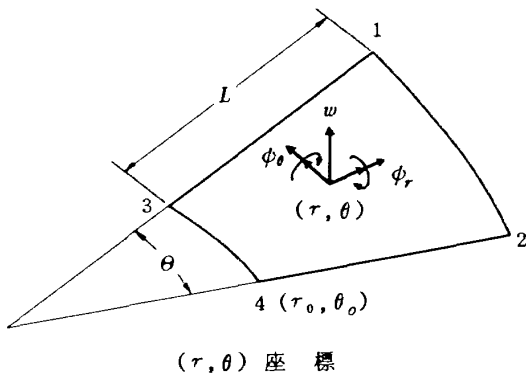
$$\{\delta_i^b\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ (\phi_r)_i \\ (\phi_\theta)_i \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta}\right)_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_i \end{Bmatrix} \tag{21}$$

図2より、 r と θ はつぎの式で示される。

$$\begin{aligned} r &= r_0 + L \xi \\ \theta &= \theta_0 + \theta \eta \end{aligned} \tag{22}$$

21)式に22)式を代入すると、つぎの式で示される。

$$\begin{aligned} \{\delta_i^b\} &= \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{r \partial \theta}\right)_i \\ -\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)_i \end{Bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta r_i} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_i \end{Bmatrix} \end{aligned} \tag{23}$$



23)式はつぎのように書きかえられる。

$$\{\delta_i^b\} = [a_i]^{-1} \{\delta_i^c\} \tag{24}$$

ただし、 $[a_i]$ と $\{\delta_i^c\}$ はつぎの式で示される。

$$[a_i] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \theta r_i & 0 \\ 0 & 0 & -L \end{bmatrix}, \quad \{\delta_i^c\} = \begin{Bmatrix} w_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial \eta}\right)_i \\ \left(\frac{\partial w}{\partial \xi}\right)_i \end{Bmatrix} \tag{25}$$

24)式に19)式を代入すると、

$$\begin{aligned} \{\delta_i^b\} &= [a_i]^{-1} \begin{Bmatrix} [P]_i \\ \left(\frac{\partial}{\partial \eta} [P]\right)_i \\ \left(\frac{\partial}{\partial \xi} [P]\right)_i \end{Bmatrix} \{\alpha^b\} \\ &= [a_i]^{-1} [c_i]^{-1} \{\alpha^b\} \end{aligned} \tag{26}$$

のようになる。

要素の全節点変位を26)式をもちいて示すと

$$\{\delta^b\} = \begin{Bmatrix} \delta_1^b \\ \delta_2^b \\ \delta_3^b \\ \delta_4^b \end{Bmatrix} = [A]^{-1} [C]^{-1} \{\alpha^b\} \tag{27}$$

のようにあらわされる。

ただし、 $[A]$ 、 $[C]^{-1}$ はつぎの式で示される。

$$[A] = \begin{bmatrix} [a_1] & 0 & 0 & 0 \\ 0 & [a_2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & [a_3] & 0 \\ 0 & 0 & 0 & [a_4] \end{bmatrix}, \quad [C]^{-1} = \begin{Bmatrix} [c_1]^{-1} \\ [c_2]^{-1} \\ [c_3]^{-1} \\ [c_4]^{-1} \end{Bmatrix}$$

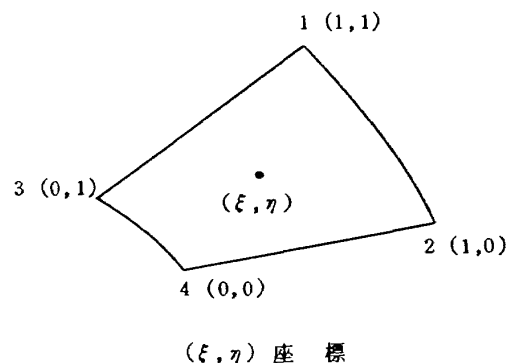


図2 曲げ変位

27式を $\{a^b\}$ について解くと

$$\{a^b\} = [C][A]\{\delta^b\} \quad (28)$$

となる。

以上より、要素内の変位を四節点での変位で示すと、つぎに示す式のようになる。

$$w = [P]\{a^b\} = [P][C][A]\{\delta^b\} = [N^b]\{\delta^b\} \quad (29)$$

したがって、曲げの作用を受ける要素の変位関数は、つぎの式で示される。

$$[N^b] = [P][C][A] \quad (30)$$

曲げによるひずみは、平板の曲げ理論より、つぎに示される三つの曲率で定義される。

$$\{\epsilon^b\} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \\ -\frac{\partial^2 w}{r^2 \partial \theta^2} - \frac{\partial w}{r \partial r} \\ -2\frac{\partial^2 w}{r \partial \theta \partial r} + 2\frac{\partial w}{r^2 \partial \theta} \end{Bmatrix} \quad (31)$$

これと対応する一般化された応力はつぎの式で示される。

$$\{\sigma^b\} = \{M\} = \begin{Bmatrix} M_r \\ M_\theta \\ M_{r\theta} \end{Bmatrix} = [D^b]\{\epsilon^b\} \quad (32)$$

板厚を h 、ポアソン比を ν とすると $[D^b]$ はつぎの式で定義される。

$$[D^b] = \frac{E h^3}{12(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & (1-\nu)/2 \end{bmatrix} \quad (33)$$

22式と $\lambda = r/L$ 、 $\beta = 1/\theta$ をもちいて、31式を書きかえると、つぎの式で示すことができる。

$$\{\epsilon^b\} = -\frac{1}{L^2} \frac{1}{\lambda^2} \begin{bmatrix} \lambda^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \beta^2 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 2\lambda\beta & 0 & 2\beta \end{bmatrix} \times \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial \xi^2 \\ \partial^2 w / \partial \eta^2 \\ \partial^2 w / \partial \xi \partial \eta \\ \partial w / \partial \xi \\ \partial w / \partial \eta \end{Bmatrix} = -\frac{1}{L^2} \frac{1}{\lambda^2} [X^b]$$

$$\times \begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial \xi^2 \\ \partial^2 w / \partial \eta^2 \\ \partial^2 w / \partial \xi \partial \eta \\ \partial w / \partial \xi \\ \partial w / \partial \eta \end{Bmatrix} \quad (34)$$

19式より、つぎの式が求められる。

$$\begin{Bmatrix} \partial^2 w / \partial \xi^2 \\ \partial^2 w / \partial \eta^2 \\ \partial^2 w / \partial \xi \partial \eta \\ \partial w / \partial \xi \\ \partial w / \partial \eta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \partial^2 [P] / \partial \xi^2 \\ \partial^2 [P] / \partial \eta^2 \\ \partial^2 [P] / \partial \xi \partial \eta \\ \partial [P] / \partial \xi \\ \partial [P] / \partial \eta \end{Bmatrix} \{a^b\} = [Y^b] \{a^b\} \quad (35)$$

34式を28式と35式をもちいて書きかえると、

$$\{\epsilon^b\} = -\frac{1}{L^2} \frac{1}{\lambda^2} [X^b][Y^b][C][A]\{\delta^b\} \quad (36)$$

のようになる。

ひずみと変位の関係式を

$$\{\epsilon^b\} = [B^b]\{\delta^b\} \quad (37)$$

と書きかえると、36式より

$$[B^b] = -\frac{1}{L^2} \frac{1}{\lambda^2} [X^b][Y^b][C][A] \quad (38)$$

となる。

これより、曲げによる剛性マトリックスも、面内力による剛性マトリックスと同様に、板厚を要素内で一定とすれば、つぎのように示すことができる。

$$[K^b] = \iint (B^b)^T [D^b] [B^b] r d\theta dr = \frac{\theta}{L^2} [A][C]^T \iint \frac{1}{\lambda^3} (Y^b)^T [X^b]^T \times [D^b] [X^b] [Y^b] d\xi d\eta [C][A] \quad (39)$$

2.3 質量マトリックス

質量マトリックスの一般式はつぎの式で示される。

$$[m] = \int [N]^T \rho [N] d(\text{vol}) \quad (40)$$

ここに、 $[N]$ と ρ はそれぞれ変位関数と密度である。

剛性マトリックスと同様に、質量マトリックスも、(40)式をもちいて、面内変形によるものと曲げ変形によるものを別々に求めて、組み合わせればよい。(40)式に(5)式の面内変形の変位関数を代入し、(7)式の関係をもちいて書きかえを行なうと、面内変形による質量マトリックスはつぎのようになる。

$$\{m^p\} = \rho h L^2 \theta \int_t^{t+1} \lambda \left(\int_0^1 \{N^p\}^T \{N^p\} d\eta \right) d\lambda \quad (41)$$

ただし、板厚(h)は一定とし、t と λ はつぎのように定義する。

$$t = r_0/L, \quad \lambda = r/L = t + \xi$$

曲げによる質量マトリックスも同様に、40式に30式を代入し、22式の関係をもちいると

$$\{m^b\} = \rho h L^2 \theta \{A\} \{C\}^T \int_0^1 \int_0^1 (\xi + t) \times \{P\}^T \{P\} d\xi d\eta \{C\} \{A\} \quad (42)$$

のようになる。

2.4 遠心力の影響

翼車が、回転時に遠心力の作用を受けて変形する。この時、翼車に存在する面内応力 {σ_o} は面外変位(w)に影響されると仮定する。これより第一次近似として、問題を線形化して取り扱うと、面外変位は、板の中央面に半径および円周方向に付加的な伸びを生じ、半径方向変位(dr)は、dr' に変化する。

$$dr' = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2} dr = \left\{ 1 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \dots \right\} dr \quad (43)$$

これより、半径方向の付加的ひずみは、高次の項を省略して、

$$\epsilon_r^o = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 \quad (44)$$

同様にして、円周方向のひずみとせん断ひずみは、

$$\epsilon_\theta^o = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right)^2 \quad (45)$$

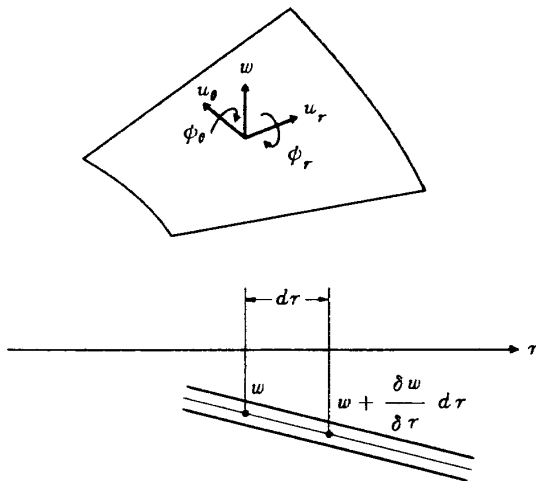


図3 横変位による中立面長さの増加

$$\tau_{\theta}^o = \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right) \quad (46)$$

となる。

これらのひずみが生じることにより、面内初期応力(遠心力)による、単位体積あたりのポテンシャルエネルギーは、

$$\frac{1}{2} \sigma_r^o \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2} \sigma_\theta^o \left(\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right)^2 + \tau_{\theta}^o \left(\frac{\partial w}{\partial r}\right) \left(\frac{\partial w}{r\partial\theta}\right) \quad (47)$$

だけ増加する。この式は、また、

$$\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{r\partial\theta} \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \sigma_r^o & \tau_{\theta}^o \\ \tau_{\theta}^o & \sigma_\theta^o \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{r\partial\theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{r\partial\theta} \end{Bmatrix}^T \times \{ \sigma_o \} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{r\partial\theta} \end{Bmatrix} \quad (48)$$

と書くことができる。板の傾斜角が節点変位の関数であることに注意し、それをつぎのように

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{r\partial\theta} \end{Bmatrix} = [G] \{ \delta^b \} \quad (49)$$

と表示すると、要素全体の付加ポテンシャルエネルギーは容易に

$$\frac{1}{2} \{ \delta^b \}^T [K_G] \{ \delta^b \} \quad (50)$$

と書くことができる。これより、付加剛性マトリックスは、つぎのようになる。

$$\begin{aligned} [K_G] &= \iiint [G]^T \begin{Bmatrix} \sigma_r^o & \tau_{\theta}^o \\ \tau_{\theta}^o & \sigma_\theta^o \end{Bmatrix} [G] r dr d\theta dz \\ &= h \iint [G]^T \{ \sigma_o \} [G] r d\theta dr \quad (51) \end{aligned}$$

傾斜角マトリックス[G]は29式とつぎに示す式を用いて求められる。

図2より

$$r = r_0 + L\xi, \quad \theta = \theta_0 + \theta\eta$$

$$\text{また、} \lambda = r/L, \quad \beta = 1/\theta \text{ とする。}$$

これより

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{r\partial\theta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{L} & 0 \\ 0 & \frac{1}{\theta r} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

$$= \frac{1}{L\lambda} \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \beta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L\lambda} [T] \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (52)$$

となる。また、(20)式と(29)式よりつぎの式が示される。

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial [P]}{\partial \xi} \\ \frac{\partial [P]}{\partial \eta} \end{Bmatrix} [C][A]\{\delta^b\} \\ = [G'] [C][A]\{\delta^b\} \quad (53)$$

(52)式と(53)式より

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial r} \\ \frac{\partial w}{r\partial \theta} \end{Bmatrix} = \frac{1}{L\lambda} [T][G'] [C][A]\{\delta^b\} = [G]\{\delta^b\} \quad (54)$$

のようになる。

(51)式と(54)式より、付加剛性マトリックスはつぎのように求められる。

$$[K_G] = h\theta [A][C]^T \iint [G']^T [T]\{\sigma_o\} \\ \times [T][G'] \frac{1}{\lambda} d\xi d\eta [C][A] \quad (55)$$

ただし、上式の面内力 $\{\sigma_o\}$ は、(12)式と(15)式より、つぎの式をもちいて求められる。

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r^o \\ \sigma_\theta^o \\ \tau_{r\theta}^o \end{Bmatrix} = \frac{1}{L} \frac{1}{\lambda} [D^p][X^p][Y^p]\{\delta^p\} \quad (56)$$

2.5 遠心力による等価節点力

有限要素法においては、要素に働く境界上の応力や要素内の分布荷重(物体力など)は静的に等価な節点力として定義される。すなわち、要素内の分布荷重を $\{p\}$ とすると、等価節点力 $\{F_p\}$ は、つぎの式で示される。

$$\{F_p\} = -\int [N]^T \{p\} d(\text{vol}) \quad (57)$$

図4より、遠心力による分布荷重はつぎの式で示される。

$$f_r = \rho r' \omega^2 \cos \phi = \rho \omega^2 L (t+\xi) \cos^2 \phi \\ f_\theta = 0 \\ f_z = \rho r' \omega^2 \sin \phi = \rho \omega^2 L (t+\xi) \cos \phi \sin \phi \quad (58)$$

ただし、 ρ =密度、 ω =角速度、 $t=r_0/L$ 、 $r=r_0+L\xi$ とする。

面内の等価節点力は(5)式と(58)式を(57)式に代入して求められる。

$$\{F_p\} = -h \iint [N^p]^T \begin{Bmatrix} f_r \\ f_\theta \end{Bmatrix} r d\theta dr \\ = -\rho \omega^2 h \theta L^3 \cos^2 \phi \iint [N^p]^T \begin{Bmatrix} (t+\xi)^2 \\ 0 \end{Bmatrix} d\xi d\eta \quad (59)$$

(59)式は面内の遠心力による等価節点力を示している。面外の等価節点力も同様にして、(57)式に(50)式と(58)式を代入すれば求められる。

$$\{F_b\} = -h \iint [N_b]^T \{f_z\} r d\theta dr \\ = -\rho \omega^2 h \theta L^3 \cos \phi \sin \phi [A][C]^T \\ \times \iint [P]^T (t+\xi)^2 d\xi d\eta \quad (60)$$

この(60)式が面外の遠心力による等価節点力を示している。

2.6 固有値問題

前節までに述べた方法により、剛性マトリックスと質量マトリックスを求め、系全体の運動方程式を立てると

$$[M]\{\ddot{\delta}\} + [K]\{\delta\} = 0 \quad (61)$$

のようになる。ただし、 $[M]$ は質量マトリックス、 $[K]$ は剛性マトリックスである。

自由振動においては、系のすべての点が同位相で運動するので

$$\{\delta\} = \{\delta_o\} \sin \omega t \quad (62)$$

と書くことができる。この式より

$$\{\ddot{\delta}\} = -\omega^2 \{\delta_o\} \sin \omega t \quad (63)$$

が求まる。ここで、 $\{\delta_o\}$ は節点振幅ベクトル(固有モード)、 ω は固有角振動数をあらわす。

(61)式に(62)式を代入して $\{\delta_o\} \neq 0$ とすれば、結局つぎの式で示される固有値問題に帰することができる。

$$|[K] - \omega^2 [M]| = 0 \quad (64)$$

この固有値問題をサブスペース反復法を用いて解き、固有ベクトルを求めた。

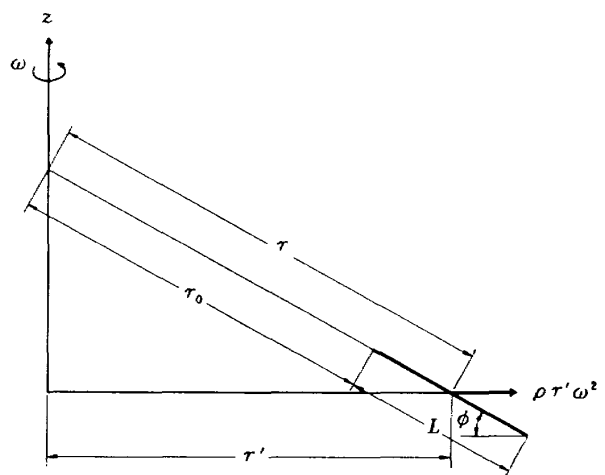


図4 要素に作用する遠心力

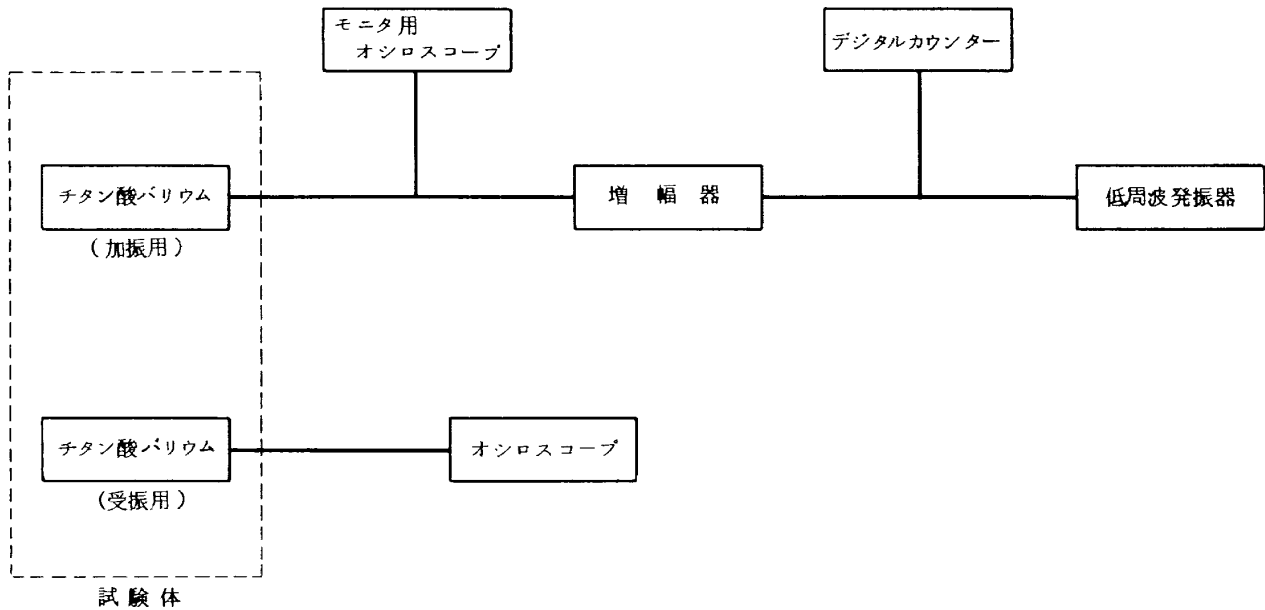


図5 実験の概略図

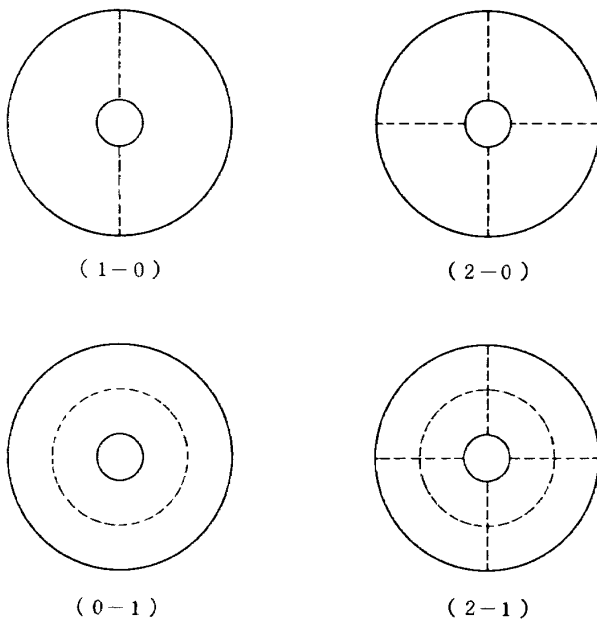


図6 振動モード

3. 実験方法

実験の概略は、図5に示すような方法で行なった。すなわち、翼車には、圧電素子(チタン酸バリウム磁片)を、主要な振動モードにおいて曲げモーメントが大きい部分(翼車の中心になるべく近い所)に接着して加振する。その結果生じる振動ひずみを、同様に接着した圧電素子により検出して電気信号に変える。そしてその波形を、オシロスコープによって観察し、固有振動数を求めた。また、振動モードは、クラド=図形を描かせること

により観察した。

実験により求めた振動モードを $(n-s)$ 形で示すと図6ように示される。ここで、 n は節線の数、 s は節円の数である。

4. 実験結果と計算結果の比較および検討

表1および図7(A)に示した円板の内径を固定した場合について実験と計算を行なった。これによって得られた固有振動数を表2に示す。表2によると、固有振動数の実測値と理論値は良く一致している。しかし、9次の振動数は誤差が少し大きく(約10%)になっている。これは、要素分割が粗いためであると思われる。このように、振動モードの複雑な高次の固有ベアを求めるためには、要素分割を細かくすれば良いと思われる。なお、計算は図8に示した要素分割(60要素、70節点)を用いて行なった。

実験は図7の(A)に示した通りの平板について行なったが、(B)、(C)の形状のものについても本研究で作成したプログラムを用いて解析することが出来る。その結果を、表3に示した。この結果によると(A)の形状の円板より(B)、(C)の形状の円板のほうが固有振動数が小さくなるといえる。

つぎに、遠心力の影響について計算を行なった。その結果は表4に示すように静止時の固有振動数より回転時の固有振動数のほうが全体に高い値を得た。これは、遠心力により剛性が増したからだと思われる。

表1 円板の性質

材 質	アルミニウム板
ヤング率	7200 kg/mm ²
密 度	0.2755 × 10 ⁻⁹ kg sec ² /mm ⁴
ポアソン比	0.33
板 厚	2.0 mm
外 半 径	150 mm
内 半 径	30 mm

表2 計算値と実験値

振動次数	計算値(Hz)	実験値(Hz)	モード形(n-s)
1	104	107	(1-0)
2	115	113	(0-0)
3	136	153	(2-0)
4	276	291	(3-0)
5	492	494	(4-0)
6	717	719	(0-1)
7	743	776	(1-1)
8	745	735	(5-0)
9	857	930	(2-1)

(n: 節線の数, s: 節円の数)

表3 計 算 値

振動次数	A (Hz)	B (Hz)	C (Hz)
1	104	98	83
2	115	109	92
3	136	133	129
4	276	275	274
5	492	491	489
6	717	674	573
7	743	703	605
8	745	744	734
9	857	821	739

表4 回転時の一次固有振動数
(図7(A)の形状のもの)

回転数(R.P.M.)	0	2500	5000	7500
一次固有振動数(Hz)	104	114	140	175

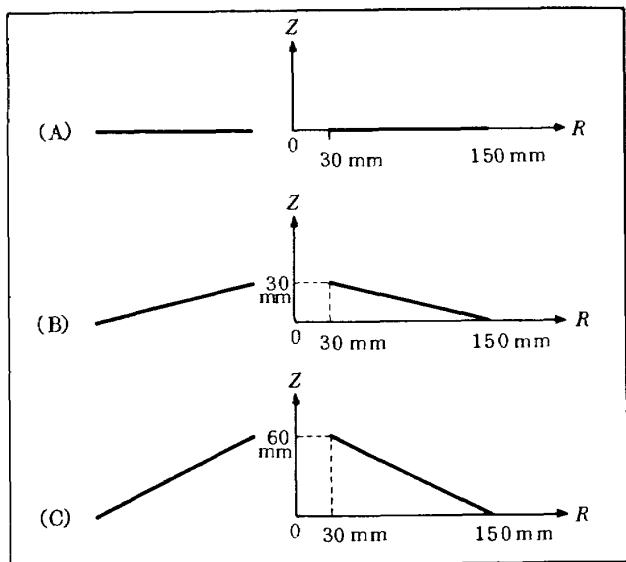


図7 翼車の断面図

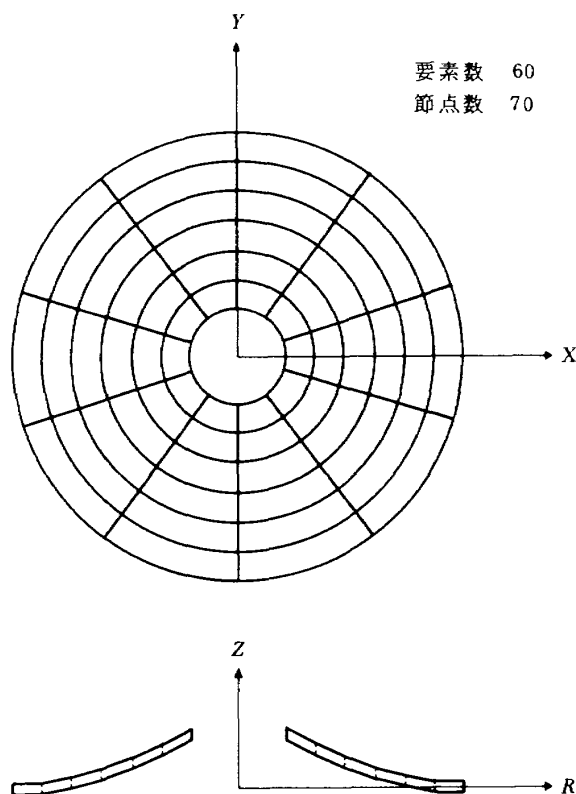


図8 要素分割

5. 結 び

本研究で行なった内容を要約すれば、つぎのようになる。

1. 任意形状の回転翼車を殻構造物と考え、面内力と曲げ作用の両方を同時に受ける扇形板要素を開発した。そして、それを用いて固有ベアを求めるプログラムを作成した。
2. 翼車モデルの振動実験を行ない、その結果と計算結果は良く一致した。
3. 例題は、ごく単純な形状のモデルについて行なっ

たが、このプログラムは、もっと複雑な形状、例えばコンプレッサ、タービン等のディスクやコーン型のシャフトなどの振動解析に適用できる。

6. 文 献

1. Zienkiewicz, O.C., *The Finite Element Method in Engineering Science*, (1971), McGraw-Hill, (吉識雅夫, 山田嘉昭監訳, 基礎工学におけるマトリックス有限要素法, (1975), 培風館)
2. 山田嘉昭, 佐藤俊雄, 有限要素法における最近の固有値問題解法, 生産研究, 26 卷 6 号 (1974.6)

航空宇宙技術研究所報告546号

昭和53年11月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)

Printed in Japan