

UDC 519.28:  
629.783.

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-555

軌道決定のためのフィルタリング理論

—航技研における軌道決定プログラム KOSMOS—

村 田 正 秋

1978 年 12 月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 軌道決定のためのフィルタリング理論\*

—航技研における軌道決定プログラム KOSMOS—

村田正秋\*\*

## Filtering Theory Applied to Near-Earth Satellite Orbit Determination

— NAL Statistical Multi-mode Orbit Processing System KOSMOS —

By Masaaki MURATA

### ABSTRACT

This report presents both the mathematical specifications of the KOKEN Statistical Multi-mode Orbit Processing System (KOSMOS) and its applications to the near-Earth satellite orbit determination problem. The specifications include time, coordinates, satellite dynamics, perturbations with its variational equations, radar tracking equations, as well as problems in statistical orbit determination theory.

To evaluate the accuracy of the filtering theory methods applied to orbit determination, extensive simulation studies were conducted using the KOSMOS. From the generated range and range-rate observations at the Katsuura, Masuda, and Okinawa tracking stations, it was found that the accuracy, commensurate with the observation precisions, could be achieved by the extended sequential processor with the State Noise Compensation (SNC) method. Evidence is also presented indicating that, for a sufficiently dense observation data set, the unmodeled acceleration could be recovered by the extended sequential processor through the Dynamic Model Compensation (DMC) method, and that the DMC method can improve the estimation accuracy of the state of the satellite. However the cost of the increased processing time which is about twice more than that of the SNC method, must be paid.

Furthermore, the U-D covariance factorization algorithm is discussed and implemented to investigate the effects of the observation type and precision, as well as the effects of mismodeled observation noise level.

### 1. 序 論

我が国においても、測地衛星 (GS)、海洋観測衛星 (MOS)、測位衛星、防災用衛星、地球物理学用衛星、等による各種管制、測地事業、地球物理学的観測の諸計画が検討されている<sup>1)</sup>。これらの計画を達成するためには観測技術の高精度化と相まって、観測雑音レベルに等価な高精度軌道決定技術の取得が不可欠である。例えば現用の C または S バンドレーダによれば距離および距離変化率の

測定精度はそれぞれ 3 ~ 10 m および 3 ~ 5 cm/sec、また高精度ドップラーによれば 0.5 cm/sec も可能である。さらにレーザー光による測距の精度は現用で約 50 cm であるが将来には 5 ~ 10 cm が期待されている。このような高精度観測データにより軌道決定を行なう場合理想的には軌道推定精度が観測雑音レベルに匹敵することが望ましいが現実には、(1)力学系・観測系のモデル誤差、(2)線型化誤差、(3)計算誤差、等のため観測雑音レベルを達成することは至難である。

軌道決定法としては従来から最小自乗法 (以下では batch プロセッサとも呼ぶ) が常套手段で今日でも軌道決定においては無論、他のあらゆるデータ処理問題に

\* 昭和53年8月4日 受付

\*\* 計測部

好んで使用されている。batch プロセッサは数学的背景・アルゴリズムが簡潔であるうえ、一定の長さの観測データ時系列を束にして同時処理できる長所を有するがこれはまた観測データ時系列が所定の長さ到達するまで推定値は得られないことも意味し、実時間推定の必要のある種のミッションや航法誘導用フィルターとしては不適当な場合がある。つまり実時間計算向きではない。他の重要な欠点として、(1)プロセスノイズは存在しないことまたは存在しても無視し得る程微小であることを前提<sup>2)</sup>にしている、(2)収束速度が遅く、また収束領域も狭い、を挙げることができる。

Kalman-Bucy フィルタリング理論としてここ10年間に理論・応用ともに著しく発展した推定理論は、batch プロセッサのもつ上記欠点を克服するものとして近年特に注目されて、軌道決定のみならず航空機や宇宙船の航法誘導系の構成に不可欠の知識となっている。以下ではフィルタリング理論に基づく推定法を batch に対応して“sequential”プロセッサまたは逐次推定アルゴリズムと呼ぶことにする。

ところで逐次推定アルゴリズムの実問題への適用を阻ませてきた最大の難点は、いわゆるフィルターの“発散”問題<sup>例えは<sup>3)</sup></sup>であった。つまり、推定誤差が理論により予測される標準偏差よりも遙かに大きい値に接近したり、時には無制限に増大してゆく現象である。そのため発散を防止する技術または発散の発生を遅らせるための技術に関する研究が集中的に発表されてきた。先に述べた3つの誤差源のうち、線型化誤差は拡張逐次推定アルゴリズムの使用により殆んどの問題に対して救済され<sup>4)</sup>、また計算誤差は語長に酷しい制限のある航法フィルター以外の軌道決定においては無視して良く、結局モデル誤差がフィルターのパフォーマンスつまり推定精度と安定性に最も強く影響すると考えられる。しかるに、モデル誤差を積極的に補償する従来からの方法は人工的な白色雑音をプロセスノイズとして導入するものである。その際白色雑音の平均値、分散はフィルターのパフォーマンスが最適になるように調整(tune)する。通常は平均値零、分散はシミュレーション等により予測されるモデル誤差の自乗の大きさを目安とする。この手法の自然な拡張は、モデル誤差を一般にN次 Gauss-Markov 過程と見なすことである。実用上1次または2次の確率過程として充分である。Tapley<sup>5)</sup>はこの手法をDMC(Dynamic Model Compensation)法と名付け、これに対して先に述べた慣例の方法をSNC(State Noise Compensation)法またはQ行列法と呼んでいる。SNC法はフィルターの次元を増加せずに安定化するための最も簡単な手法で

あるが欠点として重要な物理現象がQ行列により隠蔽され得ることである。他方DMC法は充分に稠密な観測データに加えてモデル誤差の大きさの観測精度に対する比が充分大ならば、モデル誤差それ自身も極めて高精度に推定できるため、SNC法に較べて相当高精度化が期待される。DMC法の欠点は、(1)フィルターの次元が増大するため計算時間がSNC法の約2倍弱かかること、(2)フィルターの tuning が面倒なこと、である。

モデル誤差の1次 Gauss-Markov 過程による補償は慣性航法機器誤差に対してFitzgerald<sup>6)</sup>, Wilcox<sup>7)</sup>, 大気抵抗の不規則揺動に対してRauch<sup>8)</sup>, により成功裡に試みられたのが最初であろう。もともと文献<sup>6)~8)</sup>ともに定常な1次 Gauss-Markov 過程を仮定し、相関係数および分散を既知な定数としている。TapleyのDMC法では相関係数も未知とする非定常な確率過程と考えることにより、次のような著しい成果を納めた。即ちIngram<sup>9)</sup>, Tapleyは、Apollo 10, 11 ミッションにおける距離変化率の実トラッキングデータに対して、拡張逐次推定アルゴリズムを1次 Gauss-Markov 過程によるDMCモードで適用し、batch プロセッサまたは慣例の逐次推定アルゴリズム(線型 Kalman フィルター)よりも1桁以上高精度な軌道決定の行なえること、および加速度のモデル誤差に対する推定値は月表面のマスコン(mascons)の位置と相関が高いこと、を示した。また Tapley, Schutz<sup>10)</sup>は上と同様な月周回衛星の軌道決定問題に対してシミュレーションスタディを行ないDMC法の推定精度を定量的に論じた。

1~2次 Gauss-Markov 過程によるDMC法は、観測の隣り合う区間( $t_i, t_{i+1}$ )上でモデル誤差を指数関数、三角(双曲線)関数、またはそれらの混合型関数を基本関数とする確率モデルで近似するが、Jazwinski<sup>11), 12)</sup>は確率モデルでも多項式のみを基本関数としてJ-Adaptive プロセッサの理論を展開している。

逐次推定アルゴリズムは数値的に不安定であることが知られている。つまり有限語長計算による丸め誤差および同精度な2数の減算による精度劣化のため、共分散行列の半正定性の破れる場合がある。これは逐次推定アルゴリズム自身の構造的欠陥である。そのため共分散行列の平方根に着目し直接平方根を写像および更新するアルゴリズムが開発された。所謂平方根フィルター理論に関しては、今日 Bierman, Thornton<sup>21), 31)</sup>によるU-D分解アルゴリズムが性能的に最良とされている。近地衛星の軌道決定においては(拡張)逐次推定アルゴリズムが失敗した事例はなく、数値的に安定な平方根フィルターを積極的に採用しなければならない理由はないが、このBi-

erman-Thorntonフィルターは近地衛星の実時間軌道決定アルゴリズムとしても慣例の(拡張)逐次推定アルゴリズムに性能的に勝るとも劣らないことは注目に値する。

以上に述べたようなフィルタリング理論の最新の成果をとり込み、航技研における軌道解析プログラム<sup>13)</sup>

“STANPS”(Space Trajectory and Mission Analysis Program System)を基盤に近地衛星のための研究用軌道決定プログラム“KOSMOS”(KOKEN Statistical Multi-mode Orbit Processing System)を開発した。KOSMOSは実または擬似(つまりシミュレートされた)トラッキングデータによる一般軌道決定は言うに及ばず、特殊目的衛星の実トラッキングデータに基づく地球の極運動、潮汐現象、地殻運動、重力場のごとき地球物理学的研究、測位・測距による衛星測地学的研究、あるいはまた航行管制衛星のような将来の多様なミッションに対するシミュレーション研究、等のために極めて有用である。

本報告ではKOSMOSの概要とともに、拡張逐次推定アルゴリズムおよびそのU-D分解型をSNC またはDMCモードで運用した軌道決定シミュレーションスタディ、および観測精度、観測量、等が軌道決定精度へ及ぼす影響について検討している。

## 2. 航技研における軌道決定プログラム KOSMOS

現在航技研においては研究用多目的軌道解析プログラム STANPS があり、ランデブー・ドッキング等の検討に威力を発揮している。しかしながら、STANPSにより近地衛星に対する高精度長期軌道予測は行なえるものの、トラッキングデータの生成とか実または擬似トラッキングデータに基づく軌道情報処理等々の重要な機能が欠けていた。そこでSTANPS(-B)を基盤に、GSFC<sup>14)</sup>のGTDS(Goddard Trajectory Determination System)およびテキサス大学航空宇宙学科のUTOPIA(University of Texas Orbit Processor Incorporating Statistical Analysis)を参考にして、当所計算センターの計算機組織FACOM 230-75用に開発された軌道決定プログラムがKOSMOSである。STANPS(-B)を基盤とするため、時系および一部の座標系を共有するが、摂動力の計算法、数値積分法等大巾に変更されている。以下ではKOSMOSの理論的背景を述べるが、STANPSの理論解説<sup>13)</sup>と重複しないように配慮した。

注\* Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland

### 2.1 時系

基本となる時系は運動方程式の積分に用いる原子時系AT(Atomic Time)である。原子時系はTAI(Temps Atomique International)を使う。TAIのreference epochはJanuary 1, 1958(UT2)である。才差・章動の計算、太陽・月のエフェメリスは暦表時ET(Ephemeris Time)を独立変数として求められる。ETとTAIとの差は厳密に言えば一定でない(例えば文献<sup>14)</sup>の3-71頁式(3-238)を参照)が実用上十分な精度で、

$$ET - TAI = 32.15 \text{ sec} \quad (2-1)$$

が成り立つ。

地球の自転時角から定まる恒星時ST(Sidereal Time)は、True of Date系O-xyz(2.2.3節)から擬地球固定系O-x<sub>b</sub>'y<sub>b</sub>'z<sub>b</sub>'(2.2.4節)への座標変換に必要である。図1において、グリニジ視恒星時 $\alpha_g$ (true Greenwich Sidereal Time)はグリニジ平均恒星時 $\alpha_{GM}$ (mean Greenwich Sidereal Time)を用いて

$$\alpha_g = \alpha_{GM} + \Delta H \quad (2-2)$$

で与えられる。ここで

$$\alpha_{GM} = K_1 + K_2 D + K_3 D^2 \quad (2-3)$$

D = 1900年1月0.5 UTから起算した世界時

UT1 をユリウス世紀(36525 平均太陽日)

で測る、即ち修正ユリウス暦MJD(Modified Julian Date)に対してD = MJD - 15019.5

$$K_1 = 99^\circ.690983$$

$$K_2 = 360^\circ.9856473$$

$$K_3 = 2^\circ.902 \times 10^{-13}$$

および

$$\Delta H = \delta\phi \cos(\bar{\epsilon} + \delta\epsilon) \quad (2-4)$$

$\Delta H$ は赤径の章動を表わす(2.2.3節参照)。

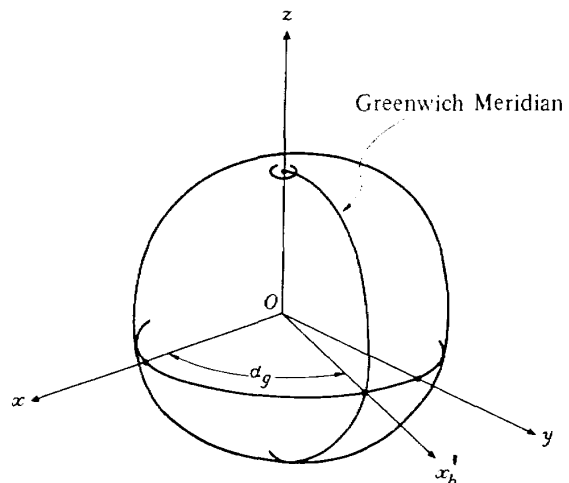


Figure 1 Greenwich Sidereal Time

さらに協定世界時 UTC (Universal Time Coordinated) はプログラムへの入出力 epoch, トラッキングデータに使用する。UT1-TAI, UTC-TAI は Bureau International de l'Heure (B. I. H.) から 5 日間隔で発表されているので必要な値は内挿して求められるが KOSMOS では STANPS (-B) と同様理論式に基づき発生している。

2.2 座標系, 座標変換

2.2.1 1950.0 平均赤道面座標系

運動方程式はこの地球中心の慣性座標系で記述される。図2に示すように, 1950.0の平均赤道面上 epoch(1950.0と同義)における春分点 (vernal equinox) 方向を X 軸とする右手直交座標系である。KOSMOS ではこの座標系に関して積分を行なう。

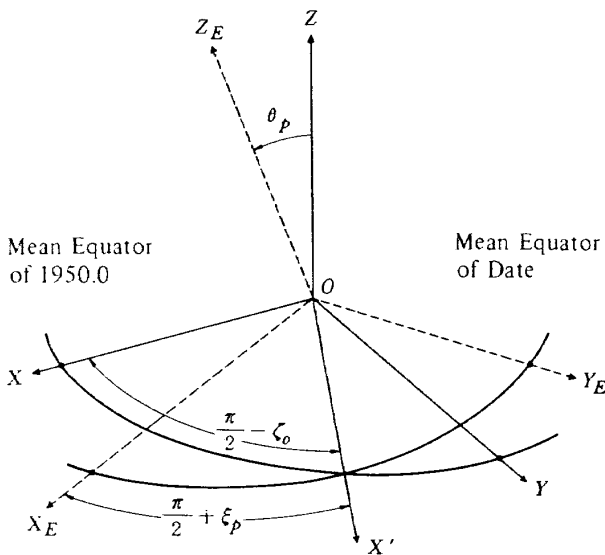


Figure 2 The 1950.0 Inertial and the Mean of Date Systems

2.2.2 瞬時の平均赤道面座標系

瞬時の平均赤道面上, 瞬時の春分点方向を X\_E 軸とする右手直交座標系を瞬時の平均赤道面座標系 (Mean of Date system) といひ, 地球の歳差運動による赤道面変化を補正したものである。1950.0 Inertial から Mean of Date への座標変換は, 図2に示した3つの角度  $\zeta_0, \theta_p, \epsilon_p$  によって定まる。即ち, まず Z 軸回り反時計方向に  $(\frac{\pi}{2} - \zeta_0)$  回転し, 次に新 X 軸 (図2の X' 軸) 回りに  $\theta_p$  回転し, 最後に新 Z 軸 (図2の Z\_E 軸) 回り時計方向に  $(\frac{\pi}{2} + \epsilon_p)$  回転することにより, Mean of Date 系 O-X\_E Y\_E Z\_E を得る。したがって座標変換行列 A\_R は

$$A_R = R_{Z_E} \left( -\frac{\pi}{2} - \epsilon_p \right) R_{X'} (\theta_p) R_Z \left( \frac{\pi}{2} - \zeta_0 \right)$$

$$(2-5)$$

によって与えられる。ここで直交変換行列 R は

$$R_z(\alpha) = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (2-6)$$

および

$$R_x(\alpha) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \\ 0 & -\sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix} \quad (2-7)$$

によって定義される。

座標変換に必要な角度は時間の多項式として次式から計算される (The American Ephemeris and Nautical Almanac, 1971) :

$$\begin{aligned} \zeta_0 &= 2304.''948 T + 0.''302 T^2 + 0.''0179 T^3 \\ \theta_p &= 2004.''255 T - 0.''426 T^2 - 0.''0416 T^3 \\ \epsilon_p &= 2304.''948 T + 1.''093 T^2 + 0.''0192 T^3 \end{aligned}$$

ここで T は 1950.0 年からの経過時間を 100 太陽年単位で測る。

1950.0 Inertial における位置および速度ベクトル ( $\mathbf{R}, \dot{\mathbf{R}}$ ) と, Mean of Date における位置および速度ベクトル ( $\mathbf{r}_E, \dot{\mathbf{r}}_E$ ) の間の変換は夫々

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_E &= A_R \mathbf{R}, \\ \dot{\mathbf{r}}_E &= A_R \dot{\mathbf{R}} \end{aligned} \quad (2-8)$$

に従う。ここで  $\dot{A}_R$  は実用上無視し得ると仮定した。

2.2.3 瞬時の真赤道面座標系

瞬時の真赤道を規準面とし, 瞬時の春分点方向を x 軸とする右手直交座標系を, 瞬時の真赤道面座標系 (True of Date system) といひ, 地球の章動による赤道面の変化を補正したものである。

Mean of Date から True of Date への変換は図3に

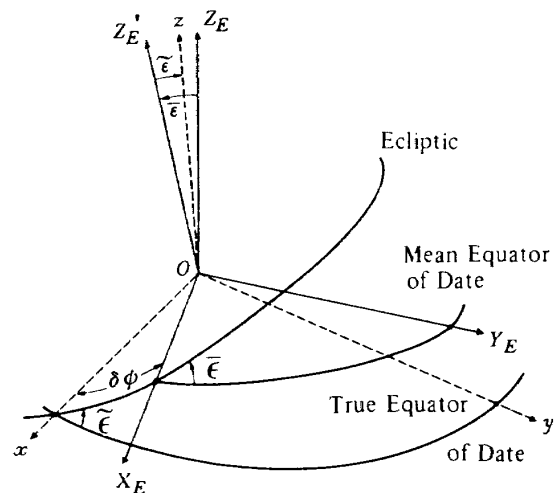


Figure 3 The Mean of Date and the True of Date Systems

示した3つの角  $\delta\phi$ ,  $\bar{\epsilon}$ ,  $\tilde{\epsilon}$  を使ってなされる。ここで  $\delta\phi$  = 黄経の章動 (Nutation in longitude),  $\bar{\epsilon}$  = 平均黄道傾角 (mean obliquity of the ecliptic),  $\tilde{\epsilon}$  = 真黄道傾角 (true obliquity of the ecliptic) である。 $\bar{\epsilon}$  は次式で与えられる (The American Ephemeris and Nautical Almanac, 1971)

$$\bar{\epsilon} = 23^{\circ}27'08''.26 - 46''.845 T_E - 0''.0059 T_E^2 + 0''.00181 T_E^3$$

但し  $T_E$  は 1900年1月0.5 ET から起算してユリウス世紀 (36525 暦表日) で測る, 即ち

$$T_E = \frac{\text{JED} - 2415010.0}{36525}$$

KOSMOS では  $\delta\phi$ ,  $\delta\epsilon (= \tilde{\epsilon} - \bar{\epsilon})$  を NAL エフェメリスファイルから得ている。<sup>13)</sup>

Mean of Date から True of Date への座標変換行列  $N_R$  は, 式 (2-6), (2-7) で定義される直交変換行列  $R$  を用いて

$$N_R = R_x(-\tilde{\epsilon}) R_{z_E'}(-\delta\phi) R_{x_E}(\bar{\epsilon}) \quad (2-9)$$

によって与えられる。それゆえ 1950.0 Inertial および Mean of Date から, True of Date への位置, 速度ベクトルの変換は次式による。

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= N_R \mathbf{r}_E = N_R A_R \mathbf{R} = G_R \mathbf{R}, \\ \dot{\mathbf{r}} &= N_R \dot{\mathbf{r}}_E = G_R \dot{\mathbf{R}} \end{aligned} \quad (2-10)$$

ここで  $(\mathbf{r}, \dot{\mathbf{r}})$  は True of Date 系における位置および速度ベクトルを表わし, また  $G_R = N_R A_R$  とする。 $\dot{N}_R$  は微小量として無視する。

#### 2.2.4 擬地球固定座標系

瞬時の真赤道を規準面とし, それとグリニッジ子午線との交点方向を  $x_b'$  軸とする右手直交座標系を擬地球固定座標系 (pseudo body-fixed system) と呼ぶ。True of Date, Mean of Date, および 1950.0 Inertial から擬地球固定系への位置ベクトルの変換は

$$\mathbf{r}_b' = B_1 \mathbf{r} = B_1 N_R \mathbf{r}_E = B_1 G_R \mathbf{R} \quad (2-11)$$

による。ここで

$$B_1 = \begin{pmatrix} \cos \alpha_g & \sin \alpha_g & 0 \\ -\sin \alpha_g & \cos \alpha_g & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2-12)$$

同様に速度ベクトルの変換は

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_b' &= B_1 \dot{\mathbf{r}} + \dot{B}_1 \mathbf{r} \\ &= B_1 N_R \dot{\mathbf{r}}_E + \dot{B}_1 N_R \mathbf{r}_E \\ &= B_1 G_R \dot{\mathbf{R}} + \dot{B}_1 G_R \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2-13)$$

による。ここで

$$B_1 = \begin{pmatrix} -\sin \alpha_g & \cos \alpha_g & 0 \\ -\cos \alpha_g & -\sin \alpha_g & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \dot{\alpha}_g$$

(2-14)

ただし式 (2-11), (2-13) において擬地球固定系における位置, 速度ベクトルを夫々  $\mathbf{r}_b'$ ,  $\dot{\mathbf{r}}_b'$  とする。

#### 2.2.5 地球固定座標系

擬地球固定座標系に, 地球の極運動による補正を施して得られるのが地球固定座標系である。規準面は, 地心と C. I. O. (Conventional Internatinal Origin) を結ぶ直線に直交し,  $x_b$  軸はグリニッジ子午線との交点方向とする。地球の瞬時の角速度ベクトルは  $z_b$  軸とは一致しない (図4)。擬地球固定, True of Date, Mean of Date, および 1950.0 Inertial から地球固定系への変換は位置ベクトルに対して

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_b &= B_2 \mathbf{r}_b' = B_2 B_1 \mathbf{r} = H_R \mathbf{r} \\ &= H_R N_R \mathbf{r}_E = H_R G_R \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2-15)$$

ここで  $H_R = B_2 B_1$ 。  $B_2$  は  $3 \times 3$  直交行列で

$$B_2 = \begin{pmatrix} \cos x_p & \sin x_p \sin y_p & \sin x_p \cos y_p \\ 0 & \cos y_p & -\sin y_p \\ -\sin x_p & \cos x_p \sin y_p & \cos x_p \cos y_p \end{pmatrix} \quad (2-16)$$

により与えられる。 $x_p, y_p$  は微小な回転角で, 5日間で B. I. H. から発表されている。 $x_p, y_p \ll 1$  から次式は極めて良い近似を与える。

$$B_2 \approx \begin{pmatrix} 1 & 0 & x_p \\ 0 & 1 & -y_p \\ -x_p & y_p & 1 \end{pmatrix} \quad (2-17)$$

また  $\dot{B}_2$  は無視してよい。KOSMOS では線型近似により  $x_p, y_p$  を内挿している

同様に速度ベクトルに対しては

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{r}}_b &= B_2 \dot{\mathbf{r}}_b' = H_R \dot{\mathbf{r}} + B_2 \dot{B}_1 \mathbf{r} \\ &= H_R N_R \dot{\mathbf{r}}_E + B_2 \dot{B}_1 N_R \mathbf{r}_E \\ &= H_R G_R \dot{\mathbf{R}} + B_2 \dot{B}_1 G_R \mathbf{R} \end{aligned} \quad (2-18)$$

が成立する。式 (2-15), (2-18) において地球固定系における位置, 速度ベクトルを夫々  $\mathbf{r}_b, \dot{\mathbf{r}}_b$  とする。

#### 2.2.6 地表面座標系

地表のある観測点における局所鉛直上方向に  $\hat{Z}$  軸, 真東方向に  $\hat{E}$  軸をもつ直交座標系を地表面座標系 (Topocentric System) と呼ぶ。図4において  $\hat{E}, \hat{N}, \hat{Z}$  はこの順序で右手系をなす。地表面座標系に関する衛星の位置, 速度ベクトルを夫々  $\mathbf{r}_{lt}, \dot{\mathbf{r}}_{lt}$  とする。その時,

地球固定系から, 地表面座標系への変換は

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{lt} &= M_{lt} (\mathbf{r}_b - \mathbf{r}_{ob}) \\ \dot{\mathbf{r}}_{lt} &= M_{lt} (\dot{\mathbf{r}}_b) \end{aligned} \quad (2-19)$$

による。ここで  $\mathbf{r}_{ob}$  は観測点の位置ベクトルの地球固定座標系に関する表現とする。 $M_{lt}$  は  $3 \times 3$  直交行列で, 要素は

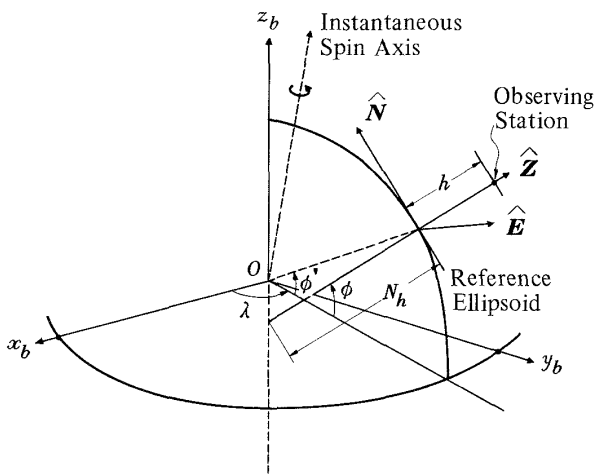


Figure 4 The Body-Fixed and the Topocentric Systems

$$M_{lt} = \begin{pmatrix} -\sin \lambda & \cos \lambda & 0 \\ -\sin \phi \cos \lambda & -\sin \phi \sin \lambda & \cos \phi \\ \cos \phi \cos \lambda & \cos \phi \sin \lambda & \sin \phi \end{pmatrix} \quad (2-20)$$

で与えられる。ここで  $\phi$  を測地学的緯度， $\lambda$  をグリニッジ子午線から東方向に測った経度とする。

### 2.2.7 規準楕円体

KOSMOS では地球の形状モデルとして，次式で定まる回転楕円体を仮定している：

$$\frac{x_b^2}{R_e^2} + \frac{y_b^2}{R_e^2} + \frac{z_b^2}{R_p^2} = 1 \quad (2-21)$$

ここで  $R_e$ ,  $R_p$  は夫々楕円体の赤道面半径および極半径とする。回転楕円体の偏平率  $f$  (flattening), 離心率  $e$  は,

$$f = \frac{R_e - R_p}{R_e} \quad (2-22)$$

および

$$e = \left[ 1 - \left( \frac{R_p}{R_e} \right)^2 \right]^{1/2} = \sqrt{f(2-f)} \quad (2-23)$$

で与えられる。また観測点の位置ベクトルは地球固定座標系で

$$\begin{aligned} x_b &= (N_h + h) \cos \phi \cos \lambda \\ y_b &= (N_h + h) \cos \phi \sin \lambda \\ z_b &= (N_h + h - e^2 N_h) \sin \phi \end{aligned} \quad (2-24)$$

により与えられる。ここで  $h$  は規準楕円体表面からの高度，また

$$N_h = \frac{R_e}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}} \quad (2-25)$$

とする。KOSMOS では地球の形状を決めるパラメータとして，SAO-SE-III (Smithsonian Standard

Earth III, Gaposchkin 1973)<sup>16)</sup> の値を採用している。即ち， $R_e = 6378140.4$  m,  $f = 1/298.256$ 。

## 2.3 力学系

### 2.3.1 運動方程式

近地衛星の運動は 1950.0 Inertial において次の 1 階常微分方程式で記述できる。

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V} \quad (2-26)$$

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{A}_m + (\mathbf{A} - \mathbf{A}_m)$$

ここで  $\mathbf{R}$ ,  $\mathbf{V}$ , および  $\mathbf{A}$  は夫々位置，速度および加速度ベクトル，また添字  $m$  はモデル化された加速度を示す。従って  $\zeta(t) = \mathbf{A} - \mathbf{A}_m$  とおけば， $\zeta(t)$  は考慮されなかった加速度ベクトル，つまり加速度ベクトルのモデル誤差と解釈できる。軌道推定論の立場から言えば，後述するようにこの  $\zeta(t)$  の導入および取扱いは極めて重要な研究課題となった。

さて一般に  $n$  次元状態ベクトル

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{R} \\ \mathbf{V} \\ \dots \\ \mathbf{D} \end{bmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 6 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ l \\ \downarrow \end{matrix} \quad (2-27)$$

を考える。ここで  $\mathbf{D}$  は  $l (= n-6)$  次元ベクトルを表し，軌道決定の過程で同時に推定したい力学系および観測系の未知パラメータとする。例えばトラッキングステーションの座標。  $\mathbf{D}$  は必ずしも定数ベクトルである必要はない。こうして定義された状態ベクトル  $\mathbf{X}$  は，一般に次の一階  $n$  元 (確率) 常微分方程式系を満足する。

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{W}(t) \quad (2-28)$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

ここに  $\mathbf{W}(t)$  は  $n$  次元プロセスノイズとする。

近地衛星の力学によれば， $\mathbf{A}$  は

- 2 体問題による加速度  $\mathbf{A}_{TB}$
- 地球の偏平による加速度  $\mathbf{A}_{NS}$
- 月，太陽の引力による加速度  $\mathbf{A}_{NB}$
- 大気抵抗による加速度  $\mathbf{A}_D$
- 太陽輻射圧による加速度  $\mathbf{A}_{SR}$
- 潮汐現象による加速度  $\mathbf{A}_T$
- 推力加速度  $\mathbf{A}_P$
- 姿勢制御系による加速度  $\mathbf{A}_{TAC}$
- 地球と月の相互ポテンシャルによる加速度  $\mathbf{A}_{IO}$

から成る。KOSMOS では，このうち初めの 5 つの摂動力のみ考慮して，それ以外の加速度は無視している。以下では各摂動力モデルおよびその変分式について説明する。変分式は，2.3.7 節の  $\mathbf{A}$  行列の計算に必要であり，ま

たA行列が軌道推定論で基本的役割を演じることは第3章で述べる。

2.3.2 2体問題による重力加速度

地球の質量Mに比べて衛星の質量を無視すれば、

$$\mathbf{A}_{TB} = -\mu \frac{\mathbf{R}}{R^3} \quad (2-29)$$

ここで  $\mu = GM$ , Gは重力定数。

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{TB}}{\partial \mathbf{R}} = -\frac{\mu}{R^3} \begin{bmatrix} 1 - \frac{3X^2}{R^2} & -3\frac{XY}{R^2} & -3\frac{XZ}{R^2} \\ -3\frac{YX}{R^2} & 1 - 3\frac{Y^2}{R^2} & -3\frac{YZ}{R^2} \\ -3\frac{ZX}{R^2} & -3\frac{ZY}{R^2} & 1 - 3\frac{Z^2}{R^2} \end{bmatrix} \quad (2-30)$$

ここにX, Y, Zは1950.0 Inertialにおける衛星の位置ベクトルRの成分とする。

2.3.3 地球の偏平による摂動

地球の重力場は、スカラーポテンシャルψから導かれψは次のPoisson方程式を満足する。

$$\nabla^2 \psi(r, \phi', \lambda) = -4\pi\mu\rho(r, \phi', \lambda) \quad (2-31)$$

ここで

r ~ 地球の質量中心から衛星までの距離

φ' ~ 地理学的緯度

λ ~ 経度 (2.2.6節参照)

衛星の場合には明らかに密度ρは零であり、

上式はラプラス方程式  $\nabla^2 \psi = 0$  に等しく、次の解を持つ。

$$\begin{aligned} \psi(r, \phi', \lambda) = & \frac{\mu}{r} + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} C_n^0 \left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n^0(\sin \phi') \\ & + \frac{\mu}{r} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^n \left(\frac{R_e}{r}\right)^n P_n^m(\sin \phi') \\ & \times \left[ S_n^m \sin m\lambda + C_n^m \cos m\lambda \right] \end{aligned} \quad (2-32)$$

ここで

$P_n^m$  ~ ルジャンドル倍関数 (degree n, order m)

$S_n^m, C_n^m$  ~ 重力ポテンシャルの調和係数

- m = 0の時 zonal harmonics,
- m = nの時 sectorial harmonics,
- n > m ≠ 0の時 tesseral harmonics,
- $J_n = -C_n^0$

座標原点が質量中心と一致する時には n = 1 に対応する項は存在しない。KOSMOSでは harmonicsとして、

SAO3 (Smithsonian Astrophysical Observatory Standard Earth III, Gaposchkin<sup>16)</sup>)を用いる。

地球の偏平による重力加速度はそれゆえ

$$\mathbf{A}_{NS_b} = \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}_b} \right]^T \quad (2-33)$$

によって与えられる。 $\mathbf{A}_{NS_b}$ は1950.0 Inertialにおける重力加速度を地球固定座標系で表わしたもので地球固定座標系に関する重力加速度ではないことに特に注意しなければならない。1950.0 Inertialへの変換はそれゆえ

$$\mathbf{A}_{NS} = (\mathbf{H}_R \mathbf{G}_R)^T \mathbf{A}_{NS_b} \quad (2-34)$$

による。次に $\mathbf{A}_{NS}$ に対する変分式は明らかに

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_{NS}}{\partial \mathbf{R}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{R}} (\mathbf{H}_R \mathbf{G}_R)^T \mathbf{A}_{NS_b} \\ &= (\mathbf{H}_R \mathbf{G}_R)^T \frac{\partial \mathbf{A}_{NS_b}}{\partial \mathbf{r}_b} \frac{\partial \mathbf{r}_b}{\partial \mathbf{R}} \\ &= (\mathbf{H}_R \mathbf{G}_R)^T \frac{\partial \mathbf{A}_{NS_b}}{\partial \mathbf{r}_b} (\mathbf{H}_R \mathbf{G}_R) \end{aligned} \quad (2-35)$$

で与えられる。ここで

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{NS_b}}{\partial \mathbf{r}_b} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}_b} \left[ \frac{\partial \psi}{\partial \mathbf{r}_b} \right]^T \quad (2-36)$$

付録2において、重力ポテンシャルψの $\mathbf{r}_b$ に関する2次までの偏導関数を、指定された任意の次数、任意のオーダーまで効率良く評価する計算方法を述べる。

2.3.4 惑星の多体問題による摂動

月、太陽、および他の惑星の引力による摂動力を一般的な形で導出しよう。図5において $M_j$ を規準惑星(この場合地球)、 $M_k$ を他の惑星(自然な衛星を含む)、

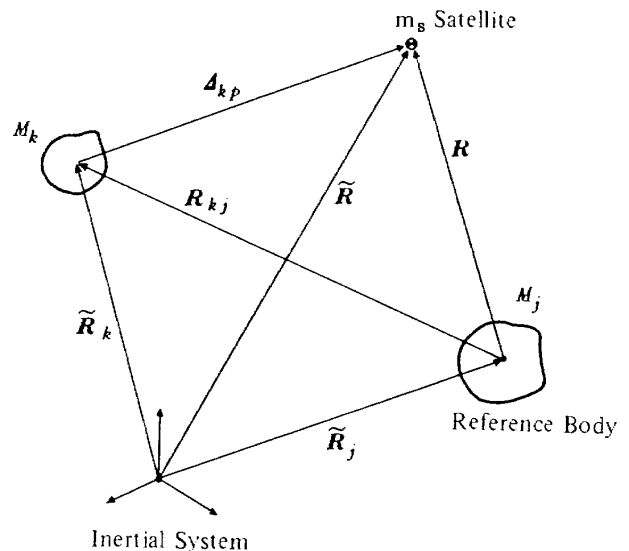


Figure 5 Schematic of Point Mass Gravitational Bodies



$m_s$  を人工衛星の質量とする。惑星  $M_j$ ,  $M_k$  は任意の形状を仮定し,  $m_s$  は質点とみなす。そのとき物体  $m_s$ ,  $M_j$ ,  $M_k$  に対する Newton の運動方程式は, ある慣性座標系においてそれぞれ次式に記述できる。

物体  $M_j$  に対して

$$M_j \ddot{\mathbf{R}}_j = - \frac{\partial U_{M_k/M_j}}{\partial \mathbf{R}_{kj}} - m_s \frac{\partial U_{M_j}}{\partial \mathbf{R}}$$

物体  $M_k$  に対して

$$M_k \ddot{\mathbf{R}}_k = \frac{\partial U_{M_k/M_j}}{\partial \mathbf{R}_{kj}} - m_s \frac{\partial U_{M_k}}{\partial \mathbf{A}_{kp}}$$

物体  $m_s$  に対して

$$m_s \ddot{\mathbf{R}} = m_s \frac{\partial U_{M_j}}{\partial \mathbf{R}} + m_s \frac{\partial U_{M_k}}{\partial \mathbf{A}_{kp}} \quad (2-37)$$

ただし  $\mathbf{R} = \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}}_j$ ,  $\mathbf{R}_{kj} = \tilde{\mathbf{R}}_k - \tilde{\mathbf{R}}_j$ ,  $\mathbf{A}_{kp} = \tilde{\mathbf{R}} - \tilde{\mathbf{R}}_{k0}$

それゆえ

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= \ddot{\tilde{\mathbf{R}}} - \ddot{\tilde{\mathbf{R}}}_j \\ &= \left( \frac{\partial U_{M_j}}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\partial U_{M_k}}{\partial \mathbf{A}_{kp}} \right) - \frac{1}{M_j} \left( - \frac{\partial U_{M_k/M_j}}{\partial \mathbf{R}_{kj}} - m_s \frac{\partial U_{M_j}}{\partial \mathbf{R}} \right) \\ &= \left( 1 + \frac{m_s}{M_j} \right) \frac{\partial U_{M_j}}{\partial \mathbf{R}} + \frac{\partial U_{M_k}}{\partial \mathbf{A}_{kp}} + \frac{1}{M_j} \frac{\partial U_{M_k/M_j}}{\partial \mathbf{R}_{kj}} \end{aligned} \quad (2-38)$$

が成り立つ。ここで

$U_{M_j}$  ~ 物体  $M_j$  のポテンシャル関数

$U_{M_k}$  ~ 物体  $M_k$  のポテンシャル関数

$U_{M_k/M_j}$  ~ 物体  $M_j$ ,  $M_k$  間の相互ポテンシャル関数,

$$U_{M_k/M_j} \triangleq \iint \frac{G_{dm} dm'}{l}$$

特に  $M_k$ ,  $M_j$  を質点系とみなし, また  $M_j, M_k \gg m_s$  を用いると

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{R}} &= -\mu_j \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \mu_k \frac{\mathbf{A}_{kp}}{\Delta_{kp}^3} + \frac{1}{M_j} \left( - \frac{GM_j M_k}{R_{kj}^2} \cdot \frac{\mathbf{R}_{kj}}{R_{kj}} \right) \\ &= -\mu_j \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \mu_k \left[ \frac{\mathbf{A}_{kp}}{\Delta_{kp}^3} + \frac{\mathbf{R}_{kj}}{R_{kj}^3} \right] \end{aligned} \quad (2-39)$$

を得る。ここで  $\mu_k = GM_k$ 。従って一般に

$$\ddot{\mathbf{R}} = -\mu \frac{\mathbf{R}}{R^3} - \sum_{k \neq j}^N \mu_k \left[ \frac{\mathbf{A}_{kp}}{\Delta_{kp}^3} + \frac{\mathbf{R}_{kj}}{R_{kj}^3} \right] \quad (2-40)$$

と書ける ( $\mu = \mu_j$  に注意)。上式の第 1 項は 2 体問題による重力加速度  $\mathbf{A}_{TB}$  を, 第 2 項は, 月, 太陽, および他

の惑星を質点とみなした時, 即ち  $N$  体問題による重力加速度を表わす。つまり

$$\mathbf{A}_{NB} = - \sum_{k=1}^N \mu_k \left[ \frac{\mathbf{A}_k}{\Delta_k^3} + \frac{\mathbf{R}_k}{R_k^3} \right] \quad (2-41)$$

KOSMOS の現 version では, 月と太陽による  $\mathbf{A}_{NB}$  のみ考慮出来る。その際, 月と太陽のエフェメリスは, NAL エフェメリスファイルに, 瞬時の真黄道面座標に関してセーブされているので, ファイルを読んだ後 1950.0 Inertial への座標変換が必要である。

次に  $\mathbf{A}_{NB}$  に対する変分式は明らかに

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{A}_{NB}}{\partial \mathbf{R}} &= - \sum_{k=1}^N \mu_k \left[ \frac{\Delta_k^3 I_3 - 3 \Delta_k^2 \mathbf{A}_k \left( \frac{\partial \Delta_k}{\partial \mathbf{R}} \right)}{\Delta_k^6} \right] \\ &= - \sum_{k=1}^N \frac{\mu_k}{\Delta_k^3} \left[ I_3 - 3 \frac{\mathbf{A}_k}{\Delta_k} \frac{\mathbf{A}_k^T}{\Delta_k} \right] \end{aligned} \quad (2-42)$$

### 2.3.5 大気抵抗による摂動

大気抵抗による加速度は,

$$\mathbf{A}_D = - \frac{1}{2} C_D \frac{A_S}{m_s} \rho_D v_r v_r \quad (2-43)$$

によって与えられる。ここで

$C_D$  ~ 大気抵抗係数

$A_S$  ~ 人工衛星の有効断面積

$\rho_D$  ~ 大気密度

$v_r$  ~ 大気に対する人工衛星の相対速度

$m_s$  ~ 人工衛星の質量

相対速度ベクトル  $v_r$  は, 大気が地球の自転と同じ角速度で回転すると仮定して

$$v_r \triangleq \mathbf{V} - \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \quad (2-44)$$

により計算できる。ここで  $\boldsymbol{\omega}$  は地球の自転角速度ベクトルを 1950.0 Inertial へ変換したものである。 $A_S$  は衛星の姿勢に依存するが平均断面積で代用しても充分実用的である。また,  $C_D$  の値も衛星の形状や大気組成で若干変化するが, KOSMOS では,  $A_S$ ,  $C_D$  とともに一定とみなす。一番難かしいのは大気密度  $\rho_D$  のモデルを確立することである。今日においても, 明確に説明できる理論式はなく, 僅かに 3 ~ 4 の実験式が利用できるのみである。

STANPS (-B)<sup>13)</sup> では, Jacchia 1971 モデルを, NASDA の SMAP では, Jacchia-Nicolet モデルを使用している。その他, Jacchia-Roberts, (modified) Harris-Priester モデルは, GSFC の GTDS で使用されている。<sup>14)</sup> このような実状から, KOSMOS では, 一応最も簡単な指数的に減衰する静的モデル

注\* GTDS では, この第 3 項を indirect oblateness acceleration  $\mathbf{A}_{IO}$  と呼んでいる。

$$\rho_D = \rho_0 e^{-\beta(h-h_0)} \quad (2-45)$$

が繰り返されており、ユーザーは目的に応じて、より正確なモデルを用意するように期待されている。勿論、STANPS(-B)のJacchia 1971モデルは直ちにアクセスできる。各モデルに対する変分式は引用文献に見られる。

### 2.3.6 太陽輻射圧による摂動

人工衛星が太陽輻射圧を受けている場合、それによる加速度ベクトルは、次式で与えられる。

$$\mathbf{A}_{SR} = \eta P_S R_{SUN}^2 \frac{C_R A_S}{m_s} \frac{\mathbf{R}_{VS}}{R_{VS}^3} \quad (2-46)$$

$$\mathbf{R}_{VS} \triangleq \mathbf{R} - \mathbf{R}_S$$

ここで

$P_S$  ~ 太陽輻射圧の地球付近での値

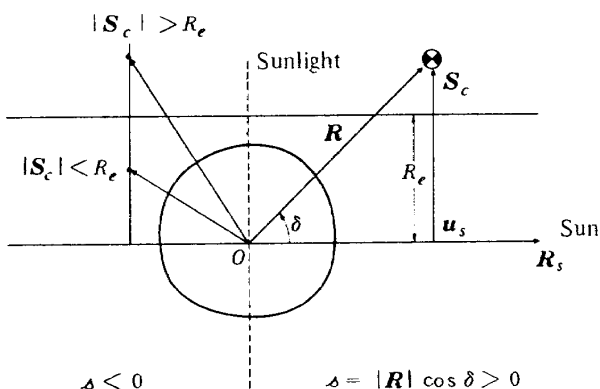


Figure 6 Cylindrical Shadow Model

$R_{SUN}$  ~ 1天文単位 (1 astronomical unit)

$C_R$  ~ 人工衛星の反射係数

$A_S$  ~ 人工衛星の有効断面積

$m_s$  ~ 人工衛星の質量

$\mathbf{R}_S$  ~ 太陽の位置ベクトル (1950.0 Inertial)

$\mathbf{R}$  ~ 衛星の位置ベクトル (同上)

$\eta$  ~ eclipse パラメータ

$\omega = \mathbf{R} \cdot \mathbf{u}_S < 0$  かつ  $|\mathbf{S}_C| < R_e$  ならば、衛星は地球の影に入っている ( $\eta = 0$ ) とし、それ以外は  $\eta = 1$ 。ここで  $\mathbf{S}_C \triangleq \mathbf{R} - \omega \mathbf{u}_S$ ,  $\mathbf{u}_S$  は太陽方向の単位ベクトル,  $R_e$  は地球の平均赤道半径とする。

$\mathbf{A}_{SR}$  の変分式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{SR}}{\partial \mathbf{R}} = \eta \frac{P_S R_{SUN}^2 C_R A_S}{m_s |\mathbf{R} - \mathbf{R}_S|^3} \left[ \mathbf{I}_3 - \frac{3(\mathbf{R} - \mathbf{R}_S)(\mathbf{R} - \mathbf{R}_S)^T}{|\mathbf{R} - \mathbf{R}_S|^2} \right]$$

$$\frac{\partial \mathbf{A}_{SR}}{\partial \mathbf{V}} = 0 \quad (2-47)$$

また慣例により 0 は適当な次元をもつ零行列とし、誤解の生じない限り次元数を明示しない。

### 2.3.7 まとめ

以上から人工衛星の受ける全摂動力  $\mathbf{A}$  は

$$\dot{\mathbf{V}} = \mathbf{A} = \mathbf{A}_{TB} + \mathbf{A}_{NS} + \mathbf{A}_{NB} + \mathbf{A}_D + \mathbf{A}_{SR}$$

となる。  $N$  次元状態ベクトル  $\mathbf{X}$  で書けば

$$\dot{\mathbf{X}} = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{R}} \\ \dot{\mathbf{V}} \\ \dot{\mathbf{D}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{A} \\ \dot{\mathbf{D}} \end{bmatrix} = \mathbf{F} \quad (2-48)$$

であるから、

$$\mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mathbf{V} \\ \mathbf{A}_{TB} + \mathbf{A}_{NS} + \mathbf{A}_{NB} + \mathbf{A}_D + \mathbf{A}_{SR} \\ \dot{\mathbf{D}} \end{pmatrix} \quad (2-49)$$

それゆえ、 $\mathbf{F}$  の  $\mathbf{X}$  に関する Jacobian は、

$$\mathbf{A}(t) \triangleq \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} = \begin{pmatrix} \leftarrow 6 \rightarrow & \leftarrow l \rightarrow & \\ 0 & \mathbf{I}_3 & 0 \\ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{R}} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{D}} \\ \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{R}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{V}} & \frac{\partial \dot{\mathbf{D}}}{\partial \mathbf{D}} \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ 6 \\ \downarrow \\ \uparrow \\ l \\ \downarrow \end{matrix} \quad (2-50)$$

で与えられる。

## 2.4 観測系

状態ベクトル  $\mathbf{X}$  を直接観測することは不可能で、観測量 (observable) は一般に  $\mathbf{X}$  のある非線型関数となり、さらに観測誤差の介入も避けられない。つまり観測値即ち観測データは、状態ベクトル  $\mathbf{X}$  と次の関係式で結ばれている。

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{G}(\mathbf{X}_i, t_i) + \boldsymbol{\epsilon}_i \quad (2-51)$$

ここで  $\mathbf{Y}_i$  はある epoch  $t_i$  における  $p$  次元観測ベクトル,  $\mathbf{G}(\mathbf{X}_i, t_i)$  は  $p$  次元非線型ベクトル値関数,  $\boldsymbol{\epsilon}_i$  は  $p$  次元観測誤差ベクトルとする。

さて KOSMOS の現 version では、距離  $\rho$ , 距離変化率  $\dot{\rho}$ , 上下角  $E_l$  および方位角  $A_2$  の観測に対して、観測データ  $\mathbf{Y}_i$  の生成と、それに基づく軌道決定が可能である。

図 7 において、 $\hat{\mathbf{E}}$ ,  $\hat{\mathbf{N}}$ ,  $\hat{\mathbf{Z}}$  を地表面座標系の基底ベクトルとする (2.2.6 節参照)。ここに

$$\hat{\mathbf{N}} = \begin{bmatrix} -\sin \phi \cos \lambda \\ -\sin \phi \sin \lambda \\ \cos \phi \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{E}} = \begin{bmatrix} -\sin \lambda \\ \cos \lambda \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$\hat{\mathbf{Z}} = \begin{bmatrix} \cos \phi \cos \lambda \\ \cos \phi \sin \lambda \\ \sin \phi \end{bmatrix} \quad (2-52)$$

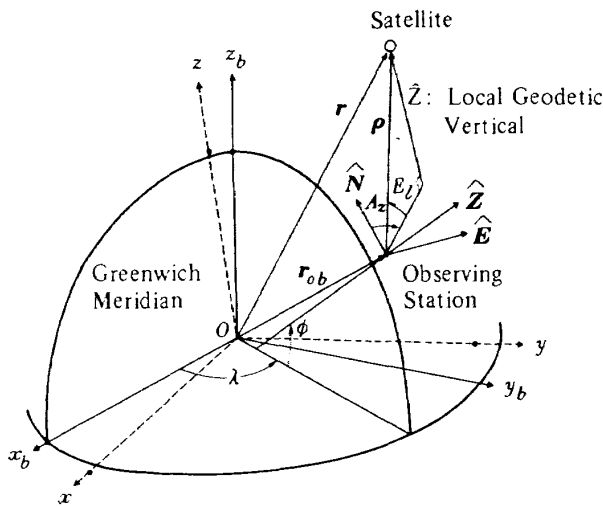


Figure 7 The Tracking Geometry

距離：地球固定座標系に関して，人工衛星および観測局の位置ベクトルを夫々  $\mathbf{r}_b$ 、 $\mathbf{r}_{ob}$  とすると，観測局から見た人工衛星の位置ベクトルは地球固定座標系において

$$\boldsymbol{\rho}_b = \mathbf{r}_b - \mathbf{r}_{ob} \quad (2-53)$$

となるから，距離は

$$\rho = (\boldsymbol{\rho}_b \cdot \boldsymbol{\rho}_b)^{1/2} \quad (2-54)$$

で与えられる。従って，位置・速度ベクトルに対する変分は

$$\frac{\partial \rho}{\partial \mathbf{r}_b} = \frac{\boldsymbol{\rho}_b^T}{\rho}, \quad \frac{\partial \rho}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} = 0 \quad (2-55)$$

距離変化率： $\dot{\mathbf{r}}_{ob} = 0$  から  $\dot{\boldsymbol{\rho}}_b = \dot{\mathbf{r}}_b$  を得る。いま， $\boldsymbol{\rho}_b = \rho \hat{\mathbf{u}}_b$ （即ち  $\hat{\mathbf{u}}_b$  は  $\boldsymbol{\rho}_b$  方向の単位ベクトル）と書くと，

$$\boldsymbol{\rho}_b = \dot{\rho} \hat{\mathbf{u}}_b + \rho \dot{\hat{\mathbf{u}}}_b$$

それ故  $\dot{\boldsymbol{\rho}}_b = (\dot{\rho}, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_b) = (\dot{\mathbf{r}}_b, \dot{\hat{\mathbf{u}}}_b)$  (2-56)

変分式は，地球固定座標系において

$$\begin{aligned} \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \mathbf{r}_b} &= \frac{1}{\rho} \left[ \dot{\mathbf{r}}_b - \frac{\dot{\rho}_b}{\rho} \boldsymbol{\rho}_b \right]^T \\ \frac{\partial \dot{\rho}}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} &= \frac{\boldsymbol{\rho}_b^T}{\rho} \end{aligned} \quad (2-57)$$

となる。

上下角および方位角：方向余弦ベクトル  $l = (\hat{\mathbf{u}}_b, \hat{\mathbf{E}})$ ， $m = (\hat{\mathbf{u}}_b, \hat{\mathbf{N}})$ ， $n = (\hat{\mathbf{u}}_b, \hat{\mathbf{Z}})$  を使って，方位角は

$$A_z = \tan^{-1} \left[ \frac{l}{m} \right] \quad (2-58)$$

また上下角は

$$E_L = \sin^{-1}(n) \quad (2-59)$$

によって計算される。対応する変分式は夫々

$$\frac{\partial A_z}{\partial \mathbf{r}_b} = \frac{m \hat{\mathbf{E}} - l \hat{\mathbf{N}}}{\rho \sqrt{1-n^2}}, \quad \frac{\partial A_z}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} = 0 \quad (2-60)$$

$$\frac{\partial E_L}{\partial \mathbf{r}_b} = \frac{\hat{\mathbf{Z}} - n \hat{\mathbf{u}}}{\rho (1-n^2)}, \quad \frac{\partial E_L}{\partial \dot{\mathbf{r}}_b} = 0 \quad (2-61)$$

で与えられる。

先に定義したベクトル  $\mathbf{D}$  が観測局の位置に関するパラメータを含む場合には， $\mathbf{D}$  に関する変分式も用意しなければならない。

通常大気圏屈折効果の補正は前処理段階でなされるが，もしその補正がなされていない場合 KOSMOS では，距離  $\rho$  に関してのみ次式によって補正を行なうことができる。

$$\rho_c = \rho - \frac{2.77 \nu}{328.5 (0.026 + \sin E_L)} \quad (2-62)$$

ここで  $E_L$  は上下角 (式 (2-59))， $\nu$  は屈折率 (tropospheric index of refraction) を表わす。

### 3. 軌道推定アルゴリズム

既に述べたように近地衛星の運動方程式は 1950.0 慣性座標系において，一般に  $n$  元連立常微分方程式

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{W}(t) \quad (3-1)$$

$$\mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0$$

と記述できる。しばらく， $\mathbf{W} = 0$  とする。その時，式 (3-1) の解は，

$$\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\theta}(t, t_0, \mathbf{X}_0) \quad (3-2)$$

と書ける。軌道決定においては，あるエポック  $t_0$  における状態 (軌道要素など)  $\mathbf{X}_0$  の真値は未知で， $\mathbf{X}_0$  の規準値  $\mathbf{X}_0^*$  のみ既知である。それゆえ  $\mathbf{X}_0^*$  を使って式 (3-2) から計算された  $\mathbf{X}(t)$  は，真値  $\mathbf{X}(t)$  からずれることになる。真の軌道，または規準軌道からのずれを，レーダ追跡，光学観測等による観測データから推定すること，が軌道決定の中心の問題である。

2.4 で述べたように，観測方程式を

$$\mathbf{Y}(t_i) = \mathbf{G}(\mathbf{X}(t_i), t_i) + \boldsymbol{\epsilon}(t_i) \quad (3-3)$$

$$i = 1, 2, \dots, q$$

とする。ここで  $\mathbf{Y}(t_i)$  を  $p$  次元観測データベクトル， $\boldsymbol{\epsilon}(t_i)$  を  $p$  次元観測誤差ベクトルとする。したがって式 (3-3) は方程式数  $p \times q$ ，未知数  $p \times q + n$  (未知ベクトルは  $\mathbf{X}_0$  と  $\boldsymbol{\epsilon}(t_i)$ ， $i = 1, \dots, q$ ) の所謂不定方程式となるから，他の評価規範 (例えば最小分散，あるいは最尤推定など) を導入してはじめて  $\mathbf{X}_0$  の決定が可能になる。

#### 3.1 batch 推定アルゴリズム

batch モードは，KOSMOS の現 version では使用出来ないが，軌道決定において，従来から最も安定して使用されて来た。後述する逐次推定アルゴリズムを導出する便宜上簡単に復習しておく。

まず真の軌道  $\mathbf{X}(t)$  は、時間区間  $t_0 \leq t \leq t_q$  において規準軌道  $\mathbf{X}^*(t)$  に十分に近いものと仮定し、さらに

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{X}(t) - \mathbf{X}^*(t); \quad t_0 \leq t \leq t_q \quad (3-4)$$

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{Y}_i - \mathbf{G}(\mathbf{X}_i^*, t_i), \quad i = 1, \dots, q$$

と書く。式(3-2), (3-3)を規準軌道  $\mathbf{X}^*(t)$  の周りでテイラー展開して

$$\begin{aligned} \mathbf{X}(t) &= \boldsymbol{\theta}(t, t_0, \mathbf{x}_0 + \mathbf{X}_0^*) \\ &= \mathbf{X}^*(t) + \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{X}} \right]^* \mathbf{x}_0 + \dots, \end{aligned}$$

$$\mathbf{Y}_i = \mathbf{Y}_i^* + \left[ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}_i} \right]^* \mathbf{x}_i + \dots + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \dots, q \quad (3-5)$$

0 ( $\|\mathbf{x}\|^2$ ) 以上の高次項を無視し、

$$\boldsymbol{\phi}(t, t_0) = \left[ \frac{\partial \boldsymbol{\theta}}{\partial \mathbf{X}} \right]^*, \quad \tilde{H}_i = \left[ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right]^*, \quad (3-6)$$

と書くと、式(3-5)から

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= \boldsymbol{\phi}(t, t_0) \mathbf{x}(t_0), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}_i &= \tilde{H}_i \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \dots, q. \end{aligned} \right\} (3-7)$$

を得る。式(3-7)の上式から、 $\boldsymbol{\phi}(t, t_0)$  は制御理論における状態遷移行列に他ならず、

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\phi}}(t, t_0) &= \mathbf{A}(t) \boldsymbol{\phi}(t, t_0), \quad \boldsymbol{\phi}(t_0, t_0) = \mathbf{I}_n \\ \mathbf{A}(t) &\triangleq \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right]^* \end{aligned} \quad (3-8)$$

を満足することを注意しておく。

さて式(3-7)より、明らかに

$$\mathbf{x}_i = \boldsymbol{\phi}(t_i, t_k) \mathbf{x}_k \quad (3-9)$$

が成立する。ここに  $t_k$  は任意のエポックとする。

従って

$$\mathbf{y}_i = \tilde{H}_i \boldsymbol{\phi}(t_i, t_k) \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varepsilon}_i, \quad i = 1, \dots, q \quad (3-10)$$

さらに  $H_i = \tilde{H}_i \boldsymbol{\phi}(t_i, t_k)$  とおき、

$$\begin{aligned} \mathbf{y} &= \begin{bmatrix} \mathbf{y}_1 \\ \mathbf{y}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{y}_q \end{bmatrix}, \quad H = \begin{bmatrix} \tilde{H}_1 \boldsymbol{\phi}(t_1, t_k) \\ \tilde{H}_2 \boldsymbol{\phi}(t_2, t_k) \\ \vdots \\ \tilde{H}_q \boldsymbol{\phi}(t_q, t_k) \end{bmatrix}, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_1 \\ \boldsymbol{\varepsilon}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{\varepsilon}_q \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3-11)$$

とすると、式(3-10)は

$$\mathbf{y} = H \mathbf{x}_k + \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3-12)$$

と書ける。ここで  $\mathbf{y}$  は  $p \times q (=m)$  次元ベクトル、 $H$  は  $n \times n$  行列。式(3-12)は未知数  $n+m$  (未知ベクトルは  $\boldsymbol{\varepsilon}$  と  $\mathbf{x}_k$ ) に対して方程式  $m$  の不定形であるから尙他の拘束が必要である。いま評価規範を最小分散とすると、

観測方程式(3-12)に対して次の線型最小分散不偏推定アルゴリズムを得る。参考のため証明を附録3に与える。

$$\mathbf{x}_k = (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \mathbf{y} \quad (3-13)$$

$$P_k = (H^T R^{-1} H)^{-1} \quad (3-14)$$

ここで  $\boldsymbol{\varepsilon}_i$ ,  $i = 1, \dots, q$ , は平均値0, 共分散行列  $R_i$  の正規分布に従い、 $\boldsymbol{\varepsilon}_i$  と  $\boldsymbol{\varepsilon}_j$  とは無相関と仮定する、即ち

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}_i] = 0, \quad E[\boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}_j^T] = R_i \delta_{ij} \quad (3-15)$$

その結果明らかに

$$E[\boldsymbol{\varepsilon}] = 0, \quad E[\boldsymbol{\varepsilon} \boldsymbol{\varepsilon}^T] = R = \begin{bmatrix} R_1 & & & \\ & R_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & R_q \end{bmatrix} \quad (3-16)$$

となる。式(3-13), (3-14)は、重みつき最小自乗法と、重み行列を観測雑音共分散行列  $R$  の逆行列に等しいとした場合に等価であり、また式(3-15)の仮定の下で最尤推定値とも等価である。

あるエポック  $t_k$  における推定値  $\hat{\mathbf{x}}_k$  および共分散行列  $P_k$  を、次の観測点  $t_i$  へ写像することを考える。いま、

$$\hat{\mathbf{x}}_k = E[\mathbf{x}_k / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k]$$

$$\bar{\mathbf{x}}_i = E[\mathbf{x}_i / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k], \quad t_k < t_i$$

と書こう。その時、式(3-9)を使って

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}_i &= E[\boldsymbol{\phi}(t_i, t_k) \mathbf{x}_k / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k] \\ &= \boldsymbol{\phi}(t_i, t_k) E[\mathbf{x}_k / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k] \\ &= \boldsymbol{\phi}(t_i, t_k) \hat{\mathbf{x}}_k \end{aligned} \quad (3-17)$$

を得る。さらに  $\tilde{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i - \bar{\mathbf{x}}_i$  として

$$\begin{aligned} \bar{P}_i &= E[\tilde{\mathbf{x}}_i \tilde{\mathbf{x}}_i^T / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_k] \\ &= \boldsymbol{\phi}(t_i, t_k) P_k \boldsymbol{\phi}(t_i, t_k)^T \end{aligned} \quad (3-18)$$

最後に a priori な推定値  $\bar{\mathbf{x}}_i, \bar{P}_i$  と観測データ

$$\mathbf{y}_i = \tilde{H}_i \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\varepsilon}_i \quad (3-19)$$

が与えられた時の線型最小分散不偏推定アルゴリズムを導出しよう。a priori な情報は、次の観測を行なったものと考えられる。

$$\bar{\mathbf{x}}_i = \mathbf{x}_i + \boldsymbol{\eta}_i \quad (3-20)$$

ここで  $E[\boldsymbol{\eta}_i] = \mathbf{0}$ ,  $E[\boldsymbol{\eta}_i \boldsymbol{\eta}_i^T] = \bar{P}_i$ 。式(3-19), (3-20)をまとめて

$$\begin{bmatrix} \mathbf{y}_i \\ \bar{\mathbf{x}}_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tilde{H}_i \\ \mathbf{I}_n \end{bmatrix} \mathbf{x}_i + \begin{bmatrix} \boldsymbol{\varepsilon}_i \\ \boldsymbol{\eta}_i \end{bmatrix}$$

ここで右辺第2項は、平均値0および共分散行列

$$\begin{bmatrix} R_i & 0 \\ 0 & \bar{P}_i \end{bmatrix}$$

の観測雑音とみなせる。そうすると既に導いた公式(3-13), (3-14)が直接利用出来る。即ち、

$$\hat{x}_i = \left( \begin{array}{c} (\tilde{H}_i^T \ I) \\ (\tilde{H}_i^T \ I) \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{cc} R_i^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{P}_i^{-1} \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{cc} R_i^{-1} & 0 \\ 0 & \bar{P}_i^{-1} \end{array} \right] \end{array} \begin{array}{c} \left[ \begin{array}{c} \tilde{H}_i^T \\ I \end{array} \right] \\ \left[ \begin{array}{c} \mathbf{y}_i \\ \bar{x}_i \end{array} \right] \end{array} \right)^{-1} \quad (3-28)$$

上式を整頓して,

$$\hat{x}_i = (\tilde{H}_i^T R_i^{-1} \tilde{H}_i + \bar{P}_i^{-1})^{-1} (\tilde{H}_i^T R_i^{-1} \mathbf{y}_i + \bar{P}_i^{-1} \bar{x}_i) \quad (3-21)$$

を得る。 $\hat{x}_i$  に応ずる共分散行列  $P_i$  は,

$$P_i = (\tilde{H}_i^T R_i^{-1} \tilde{H}_i + \bar{P}_i^{-1})^{-1} \quad (3-22)$$

で与えられる。式(3-21), (3-22)が batch 推定アルゴリズムの一般公式である。実際問題に適用する場合には種々の困難を伴う。例えば式(3-21), (3-22)から明らかのように,  $n \times n$  行列の逆行列を求めなければならないが,  $n$  が大となるとその計算は面倒になるばかりでなく, その行列, 例えば  $\tilde{H}^T R^{-1} \tilde{H}$ , の条件指数が劣化するから数値計算上の配慮も必要になってくる。もうひとつの重要な問題は, batch アルゴリズムを導出する際にプロセスノイズ  $\mathbf{W}$  を零と仮定したことである。実際にはモデル誤差, 計算誤差が必ず存在する上に, 例えば推進系, 姿勢制御系から発生する不規則揺動も無視し得ないであろう。batch アルゴリズムではこのようなプロセスノイズを補償することが出来ないため軌道推定の精度に限界がある。最初の問題は次に述べる逐次推定アルゴリズムを使用することにより解決される。

### 3.2 逐次推定アルゴリズム (CKF)

前節で, あるエポック  $t_k$  での推定値  $x_k, P_k$  は, 次の観測時点  $t_i$  ( $> t_k$ ) に式(3-17), (3-18)によって写像されることを見た。いま,  $t_i$  で観測データ

$$\mathbf{y}_i = H_i x_i + \mathbf{e}_i \quad (3-23)$$

が得られたとしよう。ここに  $E[\mathbf{e}_i] = 0$ ,  $E[\mathbf{e}_i \mathbf{e}_k^T] = R_i \delta_{ik}$ 。その時  $x_i$  の最小分散不偏推定値は, 式(3-21) (3-22) から  $\tilde{H}_i = H_i$  とおいて

$$\hat{x}_i = (H_i^T R_i^{-1} H_i + \bar{P}_i^{-1})^{-1} (H_i^T R_i^{-1} \mathbf{y}_i + \bar{P}_i^{-1} \bar{x}_i) \quad (3-24)$$

$$P_i = (H_i^T R_i^{-1} H_i + \bar{P}_i^{-1})^{-1} \quad (3-25)$$

で与えられる。schur の恒等式<sup>\*</sup>を式(3-25)に適用して

$$\begin{aligned} P_i &= \bar{P}_i - \bar{P}_i H_i^T (H_i \bar{P}_i H_i^T + R_i)^{-1} H_i \bar{P}_i \\ &= (I_n - K_i H_i) \bar{P}_i \end{aligned} \quad (3-26)$$

ただし

$$K_i = \bar{P}_i H_i^T (H_i \bar{P}_i H_i^T + R_i)^{-1} \quad (3-27)$$

その時, 式(3-24)から

$$\begin{aligned} \hat{x}_i &= (I_n - K_i H_i) \bar{P}_i (H_i^T R_i^{-1} \mathbf{y}_i + \bar{P}_i^{-1} \bar{x}_i) \\ &= (I_n - K_i H_i) \bar{x}_i + (I - K_i H_i) \bar{P}_i H_i^T R_i^{-1} \mathbf{y}_i \end{aligned}$$

を得る。しかるに式(3-27)を変形して

$$(I_n - K_i H_i) \bar{P}_i H_i^T R_i^{-1} = K_i$$

であるから, 式(3-28)は

$$\hat{x}_i = \bar{x}_i + K_i (\mathbf{y}_i - H_i \bar{x}_i) \quad (3-29)$$

となる。もとの非線型システム(3-2)の状態  $\mathbf{X}_i$  の推定値  $\hat{\mathbf{X}}_i$  は式(3-4)より

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i^* + \hat{x}_i \quad (3-30)$$

によって与えられる。

式(3-17), (3-18)および(3-26), (3-29)は今日 Kalman-Bucy 線型フィルターの名前で周知の逐次推定アルゴリズム(以後このアルゴリズムをCKFと呼び, 次節の拡張逐次推定アルゴリズムまたは拡張 Kalman-Bucy フィルターをEKFと呼ぶことにする)を与える公式である。CKFの長所は観測データ  $\mathbf{y}_i$  が新たに収取される毎に逐次, 推定値を更新できることであり, また式(3-27)から明らかのように  $\mathbf{y}_i$  の次元  $p$  に対応する  $p \times p$  行列の逆行列を計算するだけでよい。他方欠点は線型化できるという仮定が破れる場合, つまり規準  $\mathbf{X}^*(t)$  が真の軌道  $\mathbf{X}(t)$  の良い近似にならざる時, いわゆるフィルターの発散現象が避けられないことである。また, 式(3-18), (3-26)から予見されるように, 観測データの取り込みが進行するにつれて  $P_i \rightarrow 0$  となり, したがって,  $K_i$  も零に近づき, 推定過程は新しい観測データに不感となる。その結果, 既に述べたところの線型化誤差, 計算誤差, モデル誤差, 等々によりフィルターの発散が加速されることになる。

### 3.3 拡張逐次推定アルゴリズム (EKF)

線型化誤差の影響を最小にするためのひとつの手法が, 前節のCKFを非線型系へ拡張することにより得られる。前節までの定義から

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}^*(t) + x(t), \quad t_i \leq t \leq t_{i+1} \quad (3-31)$$

および

$$\hat{\mathbf{X}}_i = \mathbf{X}_i^* + \hat{x}_i \quad (3-32)$$

が成り立つ。そこで  $\mathbf{X}^*(t)$  のかわりに次式を積分して得られる新規準軌道  $\bar{\mathbf{X}}(t)$  を使うことを考える。

$$\dot{\bar{\mathbf{X}}}(t) = \mathbf{F}(t, \bar{\mathbf{X}}); \quad \bar{\mathbf{X}}(t_i) = \mathbf{X}_i^* + \hat{x}_i = \hat{\mathbf{X}}_i \quad (3-33)$$

その時,  $\mathbf{X}_{i+1}^*$  および式(3-31)から

$$\bar{x}_{i+1} = 0 \quad (3-34)$$

ゆえに式(3-29)における観測残差ベクトルに対して

注\*  $[A_1 - A_{12} A_2^{-1} A_{21}]^{-1} = A_1^{-1} + A_1^{-1} A_{12} [A_2 - A_{21} A_1^{-1} A_{12}]^{-1} A_{21} A_1^{-1}$

$$\begin{aligned} \mathbf{r}_{i+1} &\triangleq \mathbf{y}_{i+1} - H_{i+1} \bar{\mathbf{x}}_{i+1} \\ &= \mathbf{Y}_{i+1} - \mathbf{G}(\bar{\mathbf{X}}_{i+1}, t_{i+1}). \end{aligned} \quad (3-35)$$

また、共分散行列  $P_i$  は式 (3-18) に従って写像される。以上から次の EKF アルゴリズムを得る。

あるエポック  $t_i$  で  $\bar{\mathbf{X}}_i = \hat{\mathbf{X}}_i (= \mathbf{X}_i^* + \hat{\mathbf{x}}_i)$ ,  $P_i$  が与えられた時、

(1) 次の観測時点  $t_{i+1}$  まで写像する、即ち

$$\dot{\bar{\mathbf{X}}} = \mathbf{F}(\bar{\mathbf{X}}, t), \quad \bar{\mathbf{X}}(t_i) = \hat{\mathbf{X}}_i \quad (3-36)$$

$$\dot{\Phi}(t, t_i) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_i), \quad \Phi(t_i, t_i) = \mathbf{I}_n, \quad (3-37)$$

を積分して

$$\bar{P}_{i+1} = \Phi(t_{i+1}, t_i) P_i \Phi(t_{i+1}, t_i)^T \quad (3-38)$$

(2) 観測データ  $\mathbf{Y}_{i+1}$  に対して、

$$K_{i+1} = \bar{P}_{i+1} H_{i+1}^T (H_{i+1} \bar{P}_{i+1} H_{i+1}^T + R_{i+1})^{-1} \quad (3-39)$$

$$P_{i+1} = (\mathbf{I}_n - K_{i+1} H_{i+1}) \bar{P}_{i+1} \quad (3-40)$$

$$\hat{\mathbf{X}}_{i+1} = \bar{\mathbf{X}}_{i+1} + K_{i+1} [\mathbf{Y}_{i+1} - \mathbf{G}(\bar{\mathbf{X}}_{i+1}, t_{i+1})] \quad (3-41)$$

ここで

$$A(t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}}, \quad H_{i+1} = \left[ \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\mathbf{X}=\bar{\mathbf{X}}_{i+1}} \quad (3-42)$$

式 (3-38) における  $\bar{P}_{i+1}$  はまた次の常微分方程式を数値積分しても得られる。

$$\dot{\bar{P}}(t) = A(t) \bar{P}(t) + \bar{P}(t) A(t)^T, \quad \bar{P}(t_i) = P_i \quad (3-43)$$

### 3.4 SNC アルゴリズム

EKF も本質的には線型化フィルターの枠組みを超えるものでないから、もとの物理系の非線型性を忠実に反映するため高次の非線型フィルターを導入するか、またはモデル誤差を補償する何らかの機能を CKF, EKF に付加することが考えられる。近地衛星の軌道決定においては高次の非線型フィルターの性能は EKF に比較して殆んど改善されないことが報告されている。そこで、モデル誤差を正規白色雑音を使って補償する充来的な  $Q$  行列法をまず取り上げる。

規準軌道  $\mathbf{X}^*(t)$  に関する線型化方程式自身が線型化誤差、モデル誤差、計算誤差、不規則プロセス雑音を含むと考えて、式 (3-7) の微分形を

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t) \mathbf{x}(t) + \boldsymbol{\zeta}(t) \quad (3-44)$$

とおく。ここで

$$A(t) = \left[ \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \right]_{\mathbf{X}=\mathbf{X}^*}$$

であり、 $n$  次元ベクトル  $\boldsymbol{\zeta}(t)$  は一般に高次確率過程を表わす。 $\boldsymbol{\zeta}(t)$  の最も簡単なモデルは次の統計量をもつ

正規白色雑音過程である。

$$\begin{aligned} E[\boldsymbol{\zeta}(t)] &= 0, \quad E[\boldsymbol{\zeta}(t) \boldsymbol{\zeta}(\tau)^T] = \mathbf{Q}(t) \delta(t-\tau) \\ E[\boldsymbol{\zeta}(\tau) \mathbf{x}(t_0)^T] &= 0, \quad \tau \geq t_0 \end{aligned} \quad (3-45)$$

式 (3-44) の解過程は遷移行列 (3-8) 式を使って

$$\mathbf{x}(t) = \Phi(t, t_i) \mathbf{x}(t_i) + \int_{t_i}^t \Phi(t, \tau) \boldsymbol{\zeta}(\tau) d\tau \quad (3-46)$$

と書ける。それゆえ条件式 (3-45) より

$$\bar{\mathbf{x}}(t) \triangleq \Phi(t, t_i) \hat{\mathbf{x}}(t_i), \quad t \geq t_i \quad (3-47)$$

またはその微分形として

$$\dot{\bar{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(t) \bar{\mathbf{x}}(t), \quad \bar{\mathbf{x}}(t_i) = \hat{\mathbf{x}}(t_i) \quad (3-48)$$

を得る。いま  $\tilde{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \bar{\mathbf{x}}(t)$  とすると

$$\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = \mathbf{A}(t, t_i) \tilde{\mathbf{x}}(t_i) + \int_{t_i}^t \Phi(t, \tau) \boldsymbol{\zeta}(\tau) d\tau$$

となり、さらに  $E[\tilde{\mathbf{x}}(t_i) \boldsymbol{\zeta}(\tau)^T] = 0$  ( $\tau \geq t_i$ ) より

$$\begin{aligned} \bar{P}(t) &\triangleq E[\tilde{\mathbf{x}}(t) \tilde{\mathbf{x}}(t)^T / \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_i] \\ &= \Phi(t, t_i) P_i \Phi(t, t_i)^T + \Gamma(t, t_i) \end{aligned} \quad (3-49)$$

を得る。ただし

$$\Gamma(t, t_i) = \int_{t_i}^t \Phi(t, \tau) \mathbf{Q}(\tau) \Phi(t, \tau)^T d\tau \quad (3-50)$$

とする。式 (3-49) の微分形は、Leibnitz の微分則を適用して得られる式 (3-50) の微分形

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{P}}(t, t_i) &= \mathbf{A}(t) \bar{P}(t, t_i) + \bar{P}(t, t_i) \mathbf{A}(t)^T \\ &\quad + \mathbf{Q}(t), \\ \bar{P}(t_i, t_i) &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (3-51)$$

より直ちに得られて周知のように

$$\left. \begin{aligned} \dot{\bar{P}}(t) &= \mathbf{A}(t) \bar{P}(t) + \bar{P}(t) \mathbf{A}(t)^T + \mathbf{Q}(t), \\ \bar{P}(t_i) &= P(t_i) \end{aligned} \right\} \quad (3-52)$$

で与えられる。この手法を Tapley らは SNC (State Noise Compensation) 法と呼んでいる。以上から明らかのように時刻  $t_i$  における推定値を  $t_{i+1}$  へ写像する方式として結局次の 2 通りあることがわかる。

(1) 式 (3-48), (3-52) を直接数値積分する方式、

(2) 式 (3-47), および式 (3-49) から

$$\begin{aligned} \bar{P}_{i+1} &= \Phi(t_{i+1}, t_i) P_i \Phi(t_{i+1}, t_i) \\ &\quad + \Gamma(t_{i+1}, t_i) \end{aligned} \quad (5-53)$$

を計算する方式。

尚 CKF の場合  $\bar{\mathbf{x}}_{i+1}$  および  $\bar{P}_{i+1}$  が全く独立に計算できることは運用上極めて重要である。つまり、 $\mathbf{A}(t)$  はある規準軌道  $\mathbf{X}^*(t)$  に関して評価され従って既知関数

であるから、例えば式 (3-48) および (3-52) は夫々独立した方程式系を構成し、それゆえ別個の積分演算子または異なる精度、刻み巾を指定して数値積分してよい。この性質は後に見るように EKF の場合と著しく異なる利点と言える。

SNC 法を拡張逐次推定アルゴリズムへ導入することは容易であり、3.3 節同様規準軌道として  $\mathbf{X}^*(t)$  のかわりに  $\bar{\mathbf{X}}(t)$  をとればよい。即ち

$$A(t) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}} \end{bmatrix} \mathbf{X}(t) = \bar{\mathbf{X}}(t) \quad (3-54)$$

結果のみまとめると、時刻  $t_i$  で推定値  $\hat{\mathbf{X}}_i$ ,  $P_i$  が与えられた時  $t_{i+1}$  への写像は

$$[1] \begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{X}}} = \mathbf{F}(t, \bar{\mathbf{X}}), \bar{\mathbf{X}}(t_i) = \hat{\mathbf{X}}_i & (3-55) \\ \dot{\bar{P}} = A(t)\bar{P} + \bar{P}A(t)^T + Q(t), \\ \bar{P}(t_i) = P_i & (3-56) \end{cases}$$

または

$$\begin{cases} \dot{\bar{\mathbf{X}}} = \mathbf{F}(t, \bar{\mathbf{X}}), \bar{\mathbf{X}}(t_i) = \hat{\mathbf{X}}_i & (3-57) \\ \dot{\Phi}(t, t_i) = A(t)\Phi(t, t_i), \\ \Phi(t_i, t_i) = I_n & (3-58) \end{cases}$$

$$[2] \begin{cases} \dot{\Gamma} = A(t)\Gamma + \Gamma A(t)^T + Q(t), \\ \Gamma(t_i, t_i) = 0 & (3-59) \\ \text{を積分して} \\ \bar{P}(t_{i+1}) = \Phi(t_{i+1}, t_i)P_i\Phi(t_{i+1}, t_i)^T \\ \quad + \Gamma(t_{i+1}, t_i) & (3-60) \end{cases}$$

による。

$A(t)$  の定義式 (3-54) から明らかに、例えば式 (3-55), (3-56) は相互に関連した (coupled) 方程式系となり併行して連立的に数値積分されなければならない。<sup>注\*</sup>

以上のように観測間の写像方式として CKF, EKF とも 2 通りあることを指摘した。EKF につき両方式の計算量を比較してみると、方式 [1] は共分散行列の対称性を考慮して合計  $n + n(n+1)/2$  個の連立常微分方程式系を解かねばならないのに対し、方式 [2] は  $\Phi$  の次元  $n \times n$ , 対称行列  $\Gamma$  の次元  $n(n+1)/2$  であるから合計  $n + n^2 + n(n+1)/2$  個の連立常微分方程式の数値積分が必要となる。もともと、近地衛星の軌道決定においては次節で導くように  $\Gamma$  行列に対して近似的な解析的表式が利用できるので式 (3-59) の積分は不要となるがそれでも方式 [2] は [1] に較べて多元の数値積分を必要とする。ただし計算コストの見地から言えば、 $n$  大なる

注\* もともと、ある種の功妙な積分演算コード<sup>18)</sup> を使えば式 (3-55) またはその中のある要素に関してのみ指定した精度を保つように刻み巾の制御ができて計算効率を向上できる。

る時 Riccati 方程式 (3-56) 右辺の導函数評価に較べて、遷移行列式 (3-58) 右辺の導函数評価の方がかなり低コストにすむ (5.3.4 参照)。

以上では写像アルゴリズムのみ考察したが、観測データによる更新アルゴリズムは SNC 法の導入で何ら影響を受けず、CKF については 3.2 節、EKF については 3.3 節に述べたアルゴリズムがそのまま成り立つ。

SNC 法により共分散行列  $P$  は観測データによる更新が進んでも零に収束せず、 $Q$  行列に依存するある正定行列によって常に下に有界となるから、(拡張) 逐次推定アルゴリズムによって安定な推定値の期待できる最も簡単な手法を提供するものである。

### 3.5 DMC アルゴリズム

前節において、フィルタ性能を劣化させる各種の誤差を補償するために一般な  $n$  次元確率過程ベクトル  $\zeta(t)$  を導入し、最も簡単なモデルとして白色雑音過程を採用することにより SNC 法を導いた。テキサス大学航空宇宙学科の Tapley のグループは、さらに高次の Gauss-Markov 過程を導入することの良否を集中的に検討した。まず Ingram<sup>9)</sup> は 1 次の Gauss-Markov 過程を仮定し、Apollo 10, 11 ミッションにおける月周回軌道上の距離変化率データを拡張逐次推定アルゴリズムで処理し、観測残差において NASA-MSD の計算結果をある領域で約 10 倍も上まわる推定結果を得た。そして、 $\zeta(t)$  に対する推定値の変化  $\hat{\zeta}(t)$  が、月のマスコンと密接な相関関係にあることを示した。また Hagar<sup>17)</sup> は 2 次までの Gauss-Markov 過程を仮定し、宇宙船の推進系の不規則揺動を精度良く推定出来ることを示した。このような成功例に裏打ちされて、Tapley 等はこの手法を DMC (Dynamic Model Compensation) 法と呼んでいる。

ここでは、 $\zeta(t)$  を 1 次 Gauss-Markov 過程と仮定し、近地人工衛星の軌道決定の場合に限定する。運動方程式は、

$$\dot{\mathbf{R}} = \mathbf{V}, \quad \dot{\mathbf{V}} = \mathbf{A}_m(\mathbf{R}, \mathbf{V}, t) + \zeta(t) \quad (3-61)$$

$$\dot{\zeta}(t) = -B(t)\zeta(t) + \mathbf{u}_\zeta(t) \quad (3-62)$$

ただし

$$E[\mathbf{u}_\zeta(t)] = 0, \quad E[\mathbf{u}_\zeta(t)\mathbf{u}_\zeta(s)^T] = Q_\zeta(t)\delta(t-s) \quad (3-63)$$

および

$$B_{ij}(t) = \beta_i \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (3-64)$$

とする。  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  は  $\zeta(t)$  過程の時定数の逆数に等しく、新たに 3 次元ベクトル  $\beta(t) = [\beta_1(t) \beta_2(t) \beta_3(t)]^T$  を定義する。  $\beta(t)$  は次の酔歩 (random walk) 過程に従うとする。

$$\dot{\beta}(t) = \mathbf{u}_\beta(t) \quad (3-65)$$

ただし

$$E[\mathbf{u}_\beta(t)] = 0, E[\mathbf{u}_\beta(t)\mathbf{u}_\beta^T(s)] = Q_\beta(t)\delta(t-s) \quad (3-66)$$

特に  $\dot{\beta}(t) = 0$  と仮定すればもっと簡単なモデルが得られるが適応性は弱くなる。以上から、状態ベクトル

$$\mathbf{X}^T = (\mathbf{R}^T \mathbf{V}^T \boldsymbol{\zeta}^T \boldsymbol{\beta}^T) \quad (3-67)$$

および

$$\mathbf{W}^T = (0^T 0^T \mathbf{u}_\zeta^T \mathbf{u}_\beta^T) \quad (3-68)$$

を定義すると、式(3-61), (3-62), (3-65)は一般に

$$\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X}) + \mathbf{W}, \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \quad (3-69)$$

と記述できるから、前節の方式〔1〕または〔2〕が直接使用できる。ただし方式〔2〕による場合は以下の近似式を採用することにより、 $\Gamma$ 方程式(3-59)の積分を避けることができ、また精度の低下は実用上無視し得る程度である。

まず式(3-62)において区間  $(t_{k-1}, t)$  上で  $\boldsymbol{\beta}(t)$  を定数と仮定し形式的に積分すると

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\zeta}(t) &= \phi_\zeta(t, t_{k-1}) \boldsymbol{\zeta}_{k-1} \\ &+ \int_{t_{k-1}}^t \phi_\zeta(t, \tau) \mathbf{u}_\zeta(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-70)$$

ここで  $\phi_\zeta(t, \tau)$  は  $\boldsymbol{\zeta}(t)$  過程(3-62)の遷移行列で

$$\phi_\zeta(t, t_{k-1}) = D_{diag}[\alpha_1(t) \alpha_2(t) \alpha_3(t)], \quad (3-71)$$

$$\alpha_i(t) = e^{-\beta_i(t-t_{k-1})}, \quad i=1, 2, 3 \quad (3-72)$$

とする。いま式(3-70)の右辺第2項を

$$\tilde{\mathbf{u}}_\zeta(t) = \int_{t_{k-1}}^t \phi_\zeta(t, \tau) \mathbf{u}_\zeta(\tau) d\tau \quad (3-73)$$

とおく。 $\mathbf{u}_\zeta(\tau)$  を区間  $(t_{k-1}, t)$  上の無相関な定常過程、従って式(3-63)における  $Q_\zeta(t)$  は定数の対角行列  $Q_\zeta$  と仮定すれば、 $\tilde{\mathbf{u}}_\zeta(t)$  は正規雑音過程となり平均値0および共分散行列  $\tilde{Q}_\zeta(t)$  を持つ(誘導は附録4参照)。

ここに

$$\begin{aligned} [\tilde{Q}_\zeta(t)]_{ij} &= \sigma_i^2 [1 - \alpha_i^2(t)] \delta_{ij}, \quad i, j=1, 2, 3, \\ \sigma_i^2 &= Q_{\zeta_{ii}} / 2\beta_i, \quad i=1, 2, 3 \end{aligned} \quad (3-74)$$

次に式(3-65)を積分して

$$\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\beta}_{k-1} + \tilde{\mathbf{u}}_\beta(t) \quad (3-75)$$

ただし

$$\tilde{\mathbf{u}}_\beta(t) = \int_{t_{k-1}}^t \mathbf{u}_\beta(\tau) d\tau \quad (3-76)$$

とする。同様に  $\mathbf{u}_\beta(t)$  を区間  $(t_{k-1}, t)$  上の無相関な定常過程、従って式(3-66)の  $Q_\beta(t)$  は定数の対角行列  $Q_\beta$  と仮定すれば明らかに  $\tilde{\mathbf{u}}_\beta(t)$  は平均値0、共分散行

列

$$\tilde{Q}_\beta(t) = Q_\beta \Delta t, \quad \Delta t = t - t_{k-1} \quad (3-77)$$

の正規分布に従う。

最後に式(3-61)を積分して

$$\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}_{k-1} + \mathbf{V}_{k-1} \Delta t + \int_{t_{k-1}}^t [\mathbf{A}_m + \boldsymbol{\zeta}(\tau)](t-\tau) d\tau, \quad (3-78)$$

$$\mathbf{V}(t) = \mathbf{V}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^t [\mathbf{A}_m + \boldsymbol{\zeta}(\tau)] d\tau \quad (3-79)$$

を得る。上式に式(3-70)を代入して

$$\begin{aligned} \mathbf{R}(t) &= \mathbf{R}_{k-1} + \mathbf{V}_{k-1} \Delta t \\ &+ \int_{t_{k-1}}^t [\mathbf{A}_m + \phi_\zeta(\tau, t_{k-1}) \boldsymbol{\zeta}_{k-1}](t-\tau) d\tau \\ &+ \int_{t_{k-1}}^t \tilde{\mathbf{u}}_\zeta(\tau)(t-\tau) d\tau, \end{aligned} \quad (3-80)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V}(t) &= \mathbf{V}_{k-1} + \int_{t_{k-1}}^t [\mathbf{A}_m + \phi_\zeta(\tau, t_{k-1}) \boldsymbol{\zeta}_{k-1}] d\tau \\ &+ \int_{t_{k-1}}^t \tilde{\mathbf{u}}_\zeta(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (3-81)$$

それゆえ常微分方程式(3-69)の解は、式(3-80), (3-81), (3-70), および(3-75)により一般に

$$\mathbf{X}(t) = \boldsymbol{\Theta}(\mathbf{X}_{k-1}, t_{k-1}, t) + \boldsymbol{\eta}(t) \quad (3-82)$$

と書ける。ここで

$$\boldsymbol{\eta}^T = [\boldsymbol{\eta}_R^T \boldsymbol{\eta}_V^T \boldsymbol{\eta}_\zeta^T \boldsymbol{\eta}_\beta^T]$$

はそれぞれ次式で与えられる。

$$\boldsymbol{\eta}_R = \int_{t_{k-1}}^t \tilde{\mathbf{u}}_\zeta(\tau)(t-\tau) d\tau,$$

$$\boldsymbol{\eta}_V = \int_{t_{k-1}}^t \tilde{\mathbf{u}}_\zeta(\tau) d\tau, \quad \boldsymbol{\eta}_\zeta = \tilde{\mathbf{u}}_\zeta, \quad \boldsymbol{\eta}_\beta = \tilde{\mathbf{u}}_\beta$$

(3-83)

実用上、 $\tilde{\mathbf{u}}_\zeta(\tau)$  および  $\tilde{\mathbf{u}}_\beta(\tau)$  は微小な、しかし有限な時間々隔  $\Delta t$  上でこれと等価な統計量を持つ不規則離散化時系列  $\tilde{\mathbf{u}}_{\zeta_{k-1}}, \tilde{\mathbf{u}}_{\beta_{k-1}}$  で置き換えてよい。その時、

$$\boldsymbol{\eta}(t) \cong \begin{bmatrix} B_{k-1} & \tilde{\mathbf{w}}_{k-1} \end{bmatrix} \quad (3-84)$$

ただし

$$\tilde{\mathbf{w}}_{k-1}^T = [\tilde{\mathbf{u}}_{\zeta_{k-1}}^T \tilde{\mathbf{u}}_{\beta_{k-1}}^T]$$

および

$$B_{k-1} = \begin{bmatrix} I_3 \Delta t^2 / 2 & 0 \\ I_3 \Delta t & 0 \\ I_3 & 0 \\ 0 & I_3 \end{bmatrix} \quad (3-85)$$



とする。

また明らかに

$$E[\tilde{\mathbf{w}}_{k-1}] = 0, E[\tilde{\mathbf{w}}_{k-1} \tilde{\mathbf{w}}_{k-1}^T] = \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1}$$

である。ただし

$$\tilde{\mathbf{Q}}_{k-1} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{Q}}_{c_{k-1}} & 0 \\ 0 & \tilde{\mathbf{Q}}_{\rho_{k-1}} \end{bmatrix} \quad (3-86)$$

従って方式(2)による写像は常微分方程式  $\dot{\mathbf{X}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{X})$ ,  $\bar{\mathbf{X}}(t_{k-1}) = \hat{\mathbf{X}}_{k-1}$  および  $\dot{\Phi}(t, t_{k-1}) = \mathbf{A}(t)\Phi(t, t_{k-1})$ ,  $\Phi(t_{k-1}, t_{k-1}) = \mathbf{I}_n$  を時刻  $t_k$  まで同時に積分した後

$$\bar{\mathbf{P}}(t_k) = \Phi(t_k, t_{k-1}) \mathbf{P}_{k-1} \Phi(t_k, t_{k-1})^T + \mathbf{B}_{k-1} \tilde{\mathbf{Q}}_{k-1} \mathbf{B}_{k-1}^T \quad (3-87)$$

を計算することにより完了する。式(3-87)が平方根フィルターの適用に極めて有効であることは次節で明らかとなる。

DMC 法の特徴は、モデル誤差を補償して推定精度の向上が図れるだけでなく、その量  $\zeta$  (つまりモデル化されなかった加速度) の推定値から、より精密な数学的モデルの確立のために有益な情報が得られることである。他方欠点として、フィルターの次元が増加すること、フィルターの tuning (つまり最も安定で高精度な推定値を得るために  $\zeta, \beta, \mathbf{u}_c, \mathbf{u}_\rho$  に関する統計量を変化させて調整すること) が困難であること、が挙げられる。

### 3.6 Bierman-Thornton アルゴリズム

ある種の重要な問題に対して、共分散行列が逐次推定アルゴリズム(式(3-26))による更新後計算誤差のために非半正定値(理論的に不可能)になることがある。<sup>\*</sup>この難点を克服するために Potter は共分散行列  $P$  の平方根  $S \triangleq P^{1/2}$  に着目し、<sup>\*\*</sup>直接  $S$  を更新するアルゴリズム

注\* 例えば、観測データ

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & e \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \nu_1 \\ \nu_2 \end{bmatrix}$$

$$\nu_i \sim N(0, 1)$$

により、 $\mathbf{x} \sim N(0, \sigma^2 \mathbf{I})$  を更新する (Bierman<sup>21)</sup>)。ただし  $1+e > 1$ ,  $1+e^2 \leq 1$  および  $\sigma = 1/e$  とする。  $\triangleq$  は計算値を表わす。その結果、共分散は

$$P = \frac{1}{d_r} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, d_r \triangleq 1-2e$$

となり明らかに非正定行列である。他の例が Bierman,<sup>22)</sup> Kaminski<sup>23,35)</sup> に見られる。

注\*\* 正定行列  $S$  は一般に一意には決まらない。

を提案した。 $P = SS^T$  から半正定値性は常に満たされる。Potter アルゴリズムはシステム雑音が存在せず、しかもスカラー観測という条件下で導かれたがその後の研究<sup>25)~28)</sup>でこの条件は除去された。さらに Carlson は  $S$  を上(または下)三角行列に制限することにより処理時間、コア容量を Potter よりも節約できるアルゴリズムを提案した。しかし慣例の Kalman-Bucy フィルターに比べて状態ベクトルが低次元 ( $n < 10 \sim 20$ ) の時特に高コストであり (Bierman<sup>21)</sup>),  $n$  次元 Carlson フィルターは 1 スカラー観測値の更新に  $n$  回の平方根演算を必要とする。<sup>21)</sup> Bierman は共分散行列  $P$  の  $U-D$  分解、即ち

$$P = U D U^T \quad (3-88)$$

$$U = \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} & \cdots & u_{1n} \\ & 1 & u_{23} & & u_{2n} \\ & & 1 & & u_{3n} \\ & & & \ddots & \\ \mathbf{0} & & & & 1 \end{bmatrix} D = \text{Diag}(d_1, d_2, \dots, d_n)$$

に着目した。即ちスカラー観測値  $y = \mathbf{h}x + \epsilon$ ,  $\epsilon \sim N(0, r)$  の更新に対して式(3-26)

$$P = \bar{P} - \mathbf{K} \mathbf{h} \bar{P}$$

に  $P$  および  $\bar{P}$  の  $U-D$  分解  $P = U D U^T$  および  $\bar{P} = \bar{U} \bar{D} \bar{U}^T$  を代入すると

$$U D U^T = \bar{U} [\bar{D} - \mathbf{V} \mathbf{V}^T / \alpha] \bar{U}^T \quad (3-89)$$

となる。ここで

$$\mathbf{V} = \bar{D} \mathbf{f} \quad (3-90)$$

$$\mathbf{f} = \bar{U}^T \mathbf{h}^T \quad (3-91)$$

$$\alpha = \mathbf{f}^T \bar{D} \mathbf{f} + r \quad (3-92)$$

とする。いま式(3-89)の  $\bar{D} - \mathbf{V} \mathbf{V}^T / \alpha$  の Agee-Turner 分解<sup>\*\*\*</sup>を  $(\tilde{U}, \tilde{D})$  とする。即ち

$$\tilde{U} \tilde{D} \tilde{U}^T = \bar{D} - \mathbf{V} \mathbf{V}^T / \alpha \quad (3-93)$$

この結果を式(3-89)に代入して

$$U D U^T = \bar{U} \tilde{U} \tilde{D} \tilde{U}^T \bar{U}^T = (\bar{U} \tilde{U}) \tilde{D} (\bar{U} \tilde{U})^T$$

を得る。対称行列に対する  $U-D$  分解の一意性により上式は

注\*\*\* Agee, Turner<sup>30)</sup> は対称行列  $\bar{P}$  の  $U-D$  分解

$\bar{P} = \bar{U} \bar{D} \bar{U}^T$  が与えられた時、 $\lambda$  を任意のスカラーとして

$$P = \bar{P} + \lambda \mathbf{Z} \mathbf{Z}^T,$$

$$\mathbf{Z}^T = (z_1, z_2, \dots, z_n)$$

により定まる対称行列  $P$  の  $U-D$  分解  $P = U D U^T$  を計算するアルゴリズムを与えた (Agee-Turner 分解)。

$$U = \bar{U} \bar{U}^{***}, \quad D = \bar{D} \quad (3-94)$$

を意味する。式(3-94)は $\bar{P}$ の $U-D$ 分解( $\bar{U}, \bar{D}$ )を、再び $P$ の $U-D$ 分解形( $U, D$ )として更新できることを示す。Bierman は $U$ を上三角行列に制限して式(3-93), (3-94)から $u_{ij}, d_i$ を計算するアルゴリズムを導いているが、ここでは $U$ を下三角行列に制限した場合のアルゴリズムを示す。式(3-90), (3-91)から計算される $V, f$ の要素を $V_i, f_i$ として、

$$\nu_{n+1} = r \quad (3-95)$$

$i = n \sim 1$ として

$$\nu_i = \nu_{i+1} + V_i f_i \quad (3-96)$$

$$d_i = \bar{d}_i \nu_{i+1} / \nu_i \quad (3-97)$$

$$b_{ii-1} = V_i \quad (3-98)$$

$$\left. \begin{aligned} u_{ij} &= \bar{u}_{ij} + b_{ij} \delta_j \\ \delta_j &= -f_j / \nu_{j+1} \\ b_{ij-1} &= b_{ij} + \bar{u}_{ij} \nu_j \end{aligned} \right\} j = (i-1) \sim 1 \quad (3-100)$$

$$K_i = b_{i0} / \alpha \quad (3-101)$$

$y$ が $p$ 次元観測ベクトルの場合には要素毎に処理するとして、上式(3-95)~(3-101)を $p$ 回繰り返せばよい。

Bierman アルゴリズムの特徴は

$$P = (U D^{1/2}) (U D^{1/2})^T = S S^T \quad (3-102)$$

より平方根フィルタに属し勿論共分散行列の半正定値性は常に保証されている、処理時間およびコア容量においてKalman-Bucyフィルタと殆んど同程度である、平方根演算は不要である、ことである。

以上の議論は、 $\mathbf{x}_k \sim N(\bar{\mathbf{x}}_k, \bar{P}_k)$ の観測データによる更新のアルゴリズムに関してであったが次に $N(\hat{\mathbf{x}}_{k-1}, P_{k-1})$ の観測時刻 $t_k$ への写像について考察する。写像について考察する。写像に関しても、共分散行列 $P$ の平方根 $S$ または $P$ の $U-D$ 分解を直接写像する方式が当然検討されている<sup>24)~29)</sup>。3.4節において写像の方式として2通りあることを見たが、 $S$ または $(U, D)$ に関しても全く同様に2方式を構築することが可能である。即ち方式(1)として $S$ または $(U, D)$ の満足する常微分方程式を直接数値積分する、方式(2)として遷移行列 $\Phi$ を経由して最終的に

$$\bar{P} = \Phi P \Phi^T + B \tilde{Q} B^T \quad (3-103)$$

より $\bar{S}$ または $(\bar{U}, \bar{D})$ を求めるものである\*。ここで $B$ を $n \times k$ 行列、 $\tilde{Q}$ を $k \times k$ 対角行列( $\tilde{Q}_{ii} \geq 0$ )とする。方

注\*\*\*\* 上対角行列の積もまた上対角行列となる。

注\* 記述を簡潔にするため、この節では紛らわしくない限り時間を表わす添字を省略する。

式(1)は、常微分方程式の数値解法に対する高性能なコード<sup>18)</sup>が開発されている今日尚一層注目に値するが、数値実験等においてまだ経験不足といわざるを得ない。方式(1)については別稿で考察することにして、以下では方式(2)に対するBierman-Thornton<sup>31), 32)</sup>の手法を述べる。式(3-103)より

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \Phi (U D U^T) \Phi^T + B \tilde{Q} B^T \\ &= [\Phi U : B] \begin{bmatrix} D & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & \tilde{Q} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U^T \Phi^T \\ B^T \end{bmatrix} \end{aligned}$$

と書けるから今

$$W = \left[ \begin{array}{c} n \\ \Phi U : \frac{k}{B} \end{array} \right] n \quad (3-104)$$

$$\tilde{D} = D_{diag} \left( \frac{n}{D}, \frac{k}{\tilde{Q}} \right) \quad (3-105)$$

を定義すると

$$\bar{P} = W \tilde{D} W^T \quad (3-106)$$

となる。この時 $\bar{P}$ の $U-D$ 分解は $W$ の列ベクトルに対して、修正重み付きGram-Schmidt直交化法(Modified Weighted Gram-Schmidt orthogonalization, MWGS)を適用して直接得られる。

写像アルゴリズム(Bierman-Thornton<sup>31)</sup>)

$W$ を $n \times m$ 行列( $n \leq m$ )かつ $\text{rank } W = n$ 、 $\tilde{D}$ を $m$ 次元正定対角行列、 $W$ の列ベクトルを $\{W_i\}$ とする。その時、 $W \tilde{D} W^T$ の $U-D$ 分解( $\bar{U}, \bar{D}$ )は次式で与えられる\*\*

$$j = n, n-1, \dots, 1 \text{ に対して} \\ \bar{d}_j = \|W_j^{(n-j)}\|_{\tilde{D}}^2 \quad (3-107)$$

$$\bar{u}_{ij} = \frac{1}{\bar{d}_j} \left( W_i^{(n-j)}, W_j^{(n-j)} \right)_{\tilde{D}} \quad (3-108)$$

$$W_i^{(n-j+1)} = W_i^{(n-j)} - \bar{u}_{ij} W_j^{(n-j)} \quad (3-109)$$

ただし

$$W_i^{(0)} = W_i, \quad i = 1, \dots, n$$

$\bar{P}$ の $U-D$ 分解は勿論通常のリウヴィン重みつきGram-Schmidt直交化法(WGS)<sup>33)</sup>によっても達成されるが、Jordan<sup>34)</sup>, RiceによつてGS法よりもMGS法の方が演算数、コア容量ともに節減できて、しかもHouseholderおよびGivens変換<sup>35)</sup>に匹敵する高精度計算が可能であることが示されている。この理由でBierman-Thorntonは、写像のために上の定理で述べたMWGSを使うことを推奨している。

方式(2)に対するものとしてその他、SchmidtによるHouseholderまたはMGS法がよく知られている。式

注\*\*  $(V, W)_D = V^T D W$ および $\|V\|_D^2 = (V, V)_D$ とする。

(3-103) は

$$\begin{aligned} \bar{P} &= \Phi S (\Phi S)^T + B \tilde{Q}^{1/2} (B \tilde{Q}^{1/2})^T \\ &= (\Phi S \quad B \tilde{Q}^{1/2}) \begin{pmatrix} S^T \Phi^T \\ \tilde{Q}^{1/2} B^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と書けるから、今

$$W = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{n}{\Phi S} & \frac{k}{B \tilde{Q}^{1/2}} \end{array} \right]_n \quad (3-110)$$

を定義する。その時ある  $(n+k) \times (n+k)$  直交行列  $T$  があって、

$$(W^*)T = \left[ \begin{array}{c|c} \frac{n}{\bar{S}} & \frac{k}{0} \end{array} \right]_n \quad (3-111)$$

とできる。ただし  $\bar{P} = \bar{S} \bar{S}^T$ 。Householder または MGS 法によって  $W$  を三角行列化するアルゴリズムは Kamin-ski et al.<sup>36)</sup> に見られる。\*\*\* Thornton-Bierman<sup>31)</sup> は、Kalman-Bucy, Schmidt-Householder, MWGS による各写像アルゴリズムに必要な平方根および四則演算四数の比較から、Schmidt よりも MWGS の方が常に低コストであるとしている。Schmidt 法は直接上(または下)三角行列として  $\bar{S}$  を得られるから、特に方式(1)による場合 Carlson と結合したアルゴリズムを構成すれば都合が良い(Carlson-Schmidt フィルター)。一方、Potter と結合すれば観測データの更新の過程で  $S$  がある正方行列に戻るが問題とはならない(Potter-Schmidt フィルター)。

結論として Potter-Schmidt, Carlson-Schmidt, および Bierman-Thornton の各平方根フィルターは精度的には全く同等であり、Kalman-Bucy アルゴリズムの持つ欠点を完全に克服するものであるが、性能を CPU 時間およびコア容量から比較した場合 Bierman-Thornton フィルターが最も優れており、しかも性能的に Kalman-Bucy フィルターと殆んど同等であると言える。

近地衛星の軌道決定においては大型電子計算機を使用できるので、積極的に平方根フィルターを採用しなければならない理由はなく、実際(拡張)逐次推定プロセッサが期待通りに働かなかつた事例を具体的に報告した文献は筆者の知る限り見当たらない。発散例の殆んどすべては所謂フィルターの tuning が不十分であることに帰されよう。平方根フィルター、特に Bierman-Thornton フィルターは机上計算機による宇宙航行用フィルターに より適していると言える。しかしながら数値的安定性、高速処理性、および省コア容量という特徴をもつ Bierman-Thornton フィルターは、近地衛星の実時間軌道決

定アルゴリズムとしても慣例の(拡張)逐次推定アルゴリズムに勝るとも劣らない性能を有していることは注目してよい。

### 3.7 補遺

ある時点  $t_i$  で、 $p$  個の観測データ  $Y_i$  が同時に得られたとする。3.3 節の(拡張)逐次推定アルゴリズムによると、 $p \times p$  行列の逆行列を求め、式(3-40)を1回だけ計算すればよい。他方もし観測データを1個ずつプロセス出来るならば、式(3-40)は単にスカラーの除算だけで  $p$  回評価すればよい。 $p$  の大きさと、逆行列を求めるアルゴリズムにもよるが、一般には後で述べた手法が能率的であろう。KOSMOS では、後者の立場をとり、その際毎回状態ベクトル  $X_i$  の推定値  $\hat{X}_i$  を更新するのではなく、 $p$  個の観測データのプロセスがすべて終了した時点でのみ、更新している(附録5参照)。この手法は、 $p$  個の観測データを同時にプロセスする、前者の手法に等価であることが知られている。

3.3 節の式(3-36), (3-37)における推定値の写像は推定理論ではしばしば予測(prediction)と称されることが多い。また通常観測時間々隔  $\Delta t = t_{i+1} - t_i$  は数秒~数十秒である。一方人工衛星がある追跡局の視界を離れて次の追跡局の視界に入るまでの時間は、追跡局の配置やミッションにもよるが数分から、場合によっては数時間かかることがある。つまり長時間におよぶ軌道予測は、この章で述べた写像(または予測)とは質的に異なったものでなければならない。運用上長期軌道予測では、より高精度な数学モデルを使用する。その際共分散行列の写像においては  $Q$  行列を零とするか、またはそれでもなお存在するモデル、計算誤差を補償する目的で充分小さな値を仮定してもよい。とにかく、長期軌道予測(long term prediction)は別問題であることを指摘しておく。

## 4. 軌道決定プログラム KOSMOS の構造

航技研における軌道決定プログラム KOSMOS は、(1) 追跡管制システムの検討、(2) 実トラッキングデータによる測地学、地球物理学への応用、(3) 近地衛星ミッション(例えば DAS)の検討、(4) 軌道決定方式に関する研究、等様々を目的に最小のロードで応じられるように配慮された“modify”プログラムである。図8に示すように KOSMOS の現 version は 4 modes の選択枝をもつ。即ち mode 1 は、拡張(SNC)逐次推定アルゴリズムによる軌道決定を行なう。状態ベクトルの次元は最大20までは無条件で選べる。mode 2 は、人工衛星の高精度軌道計算を行ない、摂動力としては(1)地球の偏平による加速

注\*\*\*  $k$  の値が  $n$  に近づく時、Householder よりも MGS が処理時間において優ってくる。

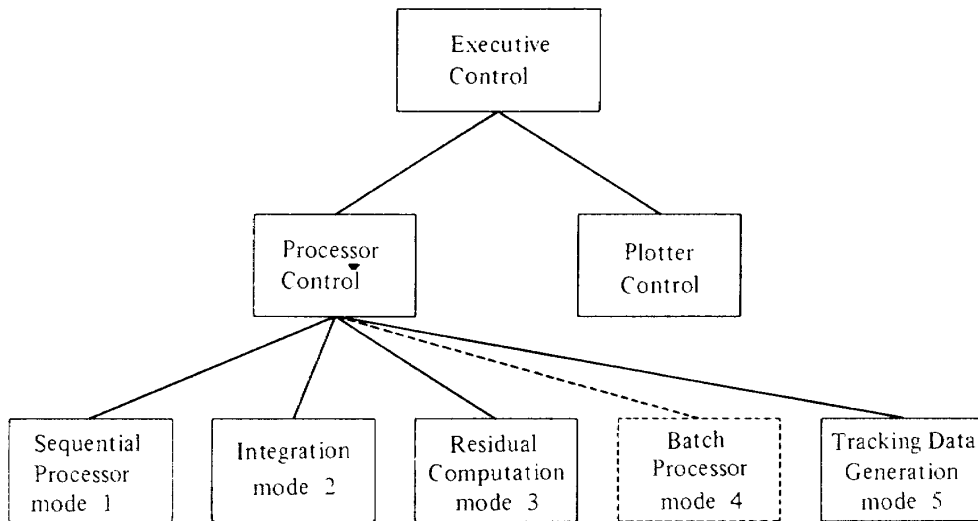


Figure 8 KOSMOS structure

度, (2)月・太陽の引力, (3)大気抵抗, (4)太陽輻射圧, の任意の組合せを選択できる。特に地球の偏平性による重力加速度については任意の次数と任意のオーダーを指定して計算できる。

即ちポテンシャル函数  $\Psi(r, \phi', \lambda)$  (2-32) 式を

$$\Psi(r, \phi', \lambda) \approx \frac{\mu}{r} \left\{ 1 - \sum_{n=2}^{NJMAX} J_n \left( \frac{R_e}{r} \right)^n P_n^0(\sin \phi') \right. \\ \left. + \sum_{n=2}^{NMAX} \sum_{m=1}^n \left( \frac{R_e}{r} \right)^n P_n^m(\sin \phi') \right. \\ \left. \times [C_{nm} \cos m\lambda + S_{nm} \sin m\lambda] \right\}$$

で打ち切り, 次数  $NJMAX$  とオーダー  $NMAX$  を入力データとして与える。ここでポテンシャル係数は既に述べたように SAO3 による。SAO3 は次数 18, オーダー 18 つまり  $18 \times 18$  の harmonics プラス次数 36 までの  $J_n$  および resonant 項から成るが, KOSMOS ではプログラム上の問題で次数 29 までのみ考慮できる。

mode 3 は, 観測残差 ( $O-C$ ) のみを計算するものでフィルタリングは行なわない。

生の追跡データ等から軌道決定を行なう前に, ある程度数学モデルや初期推定値を検討するのに使用される。mode 5 はトラッキングデータの生成を行なうもので, 最大 10 局までのシミュレーションが可能である。全 mode を通して地球の極運動に対する補正が可能である。また運動方程式の基本時系として TAI を使い, 運動方程式の積分のために Runge-Kutta-Fehlberg 4(5), 7(8) および Shampine-Gordon の ODE (予測子  $q$ , 修

正子  $q+1$  の Adams 多段階法, ただし  $q < 13$ ) が用意されており, 任意に選択することができる。さらにベクトルと行列の四則演算に対してコアの有効利用を意図した功妙なサブルーチン群を用意した。<sup>19)</sup> また衛星軌道のグラウンドトラックを図示するための WSPS (World Seashore Plotting System) が当所磯部俊夫主任研究官により開発されたことを附記する。

## 5. 軌道決定

拡張逐次推定アルゴリズムによる軌道決定法を評価し技術的な資料を得るため, 軌道決定プログラム KOSMOS を運用して, (1)超高度衛星 (例: DAS)<sup>20)</sup> および (2)中高度衛星 (例: TANSEI) に対する擬似トラッキングデータに基づき軌道決定を行なった結果について述べる。

### 5.1 実力学系

両衛星の真の軌道および擬似観測データは, KOSMOS (mode 5) によりシミュレートする。シミュレーションで使用した真の初期軌道要素を表 1, 2 に示す。表 1 は 1950.0 慣性直交座標系に関する初期位置, 速度ベクトルの成分を, また表 2 は同じ座標系に関する初期ケプラー軌道要素を示す。摂動力としては, case 1 に対して, 地球の偏平による重力加速度  $A_{NS}$ , 月および太陽の 2 体問題による引力  $A_{NB}$ , および大気抵抗による加速度  $A_D$  を考慮し, また case 2 に対しては  $A_{NS}$ ,  $A_{NB}$ , および太陽輻射圧による加速度  $A_{SR}$  を考慮する。特に地球の偏平による重力加速度  $A_{NS}$  の計算においては, 次数 8, オーダー 6 までの SAO3 の調和係数を使用する。月・太陽のエフェメリスは NAL エフェメリスファイルによる。大気抵抗による加速度  $A_D$  は, 既に述べたように

**Table 1 Initial Cartesian Orbit Elements in the 1950.0 Inertial Coordinate System**

State	Case 1	Case 2
X (km)	5740.230326	5735.267939
Y (km)	1202.185690	-2852.322457
Z (km)	3012.216162	3647.929179
$\dot{X}$ (km/sec)	-2.802103228	3.238057630
$\dot{Y}$ (km/sec)	7.597440595	6.632442713
$\dot{Z}$ (km/sec)	1.466756019	0.05415783369

**Table 2 Initial Kepler Orbital Elements in the 1950.0 Inertial Coordinate System**

Data Arc, Dates	Case 1	Case 2
Epoch (GMT)	71Y06M24D22H47.0M	71Y02M16D04H12.05M
Semi-Major Axis (km)	7493.868	7426.642
Eccentricity	0.129	.00794
Inclination (deg)	29.910	29.667
Nodal Longitude (deg)	308.598	244.716
Argument of Perigee (deg)	90.304	109.359
Mean Anomaly (deg)	341.570	339.949
Period (min)	107.601	106.157
Height of Perigee (km)	149.02	987.53
Height of Apogee (km)	2082.44	1107.47

**Table 3 Location of Tracking Stations**

Station	ID No.	Latitude	Longitude East	Height (km)
Katsuura	1	35°12'40".43174	140°17'56".41254	180.661
Masuda	2	30°33'19".19000	130°01'03".72100	137.500
Okinawa	3	26°29'53".72300	127°54'01".46200	120.547

$$\mathbf{A}_D = -\frac{1}{2} C_D \left( \frac{A_S}{m_S} \right) \rho_D v_r \mathbf{v}_r \quad (5-1)$$

により与えられる。大気密度  $\rho_D$  は指数的に減衰する静的モデル

$$\rho_D = \rho_0 e^{-\beta(h-h_0)} \quad (5-2)$$

に従うとし、シミュレーションでは次の諸値を使う。

$$A_S = 4 \text{ m}^2$$

$$m_S = 350 \text{ kg}$$

$$C_D = 2.2$$

$$\rho_0 = 1.822 \text{ kg/km}^3$$

$$h_0 = 150 \text{ km}$$

$$\beta = 0.0436 \text{ km}^{-1}$$

$\rho_0$  の値は高度 150 km, 外圏温度  $T_{ex}$  800°K<sup>13)</sup> に対応する。追跡網として、勝浦, 増田, および沖縄の3局を考慮する。追跡局の位置, つまり経度, 測地学的緯度, および高度を表3に示す。観測量として, 距離  $\rho$  および距離変化率  $\dot{\rho}$  に関する疑似観測データを KOSMOS (mode 5) より発生させた。その際観測時間々隔を2秒とし, 各局で同時観測が行なえるとする。また上下角  $E$  の下限を5 degとした。観測雑音として, 各局ともに平均値零および標準偏差値  $\sigma_\rho = 10\text{m}$ ,  $\sigma_{\dot{\rho}} = 1 \text{ cm/sec}$  の正規白色雑音を附加し, 観測バイアスは存在しないと仮定する。

これらの諸値は現用の追跡網で充分可能である。図9, 10は追跡局の配置および両衛星の追跡局の捕捉領域におけるグラウンドトラックを示す。両ケースとも表2の初期ケプラー軌道要素から明らかなように追跡局は近地点附近における衛星を観測している。case 1の場合近地点高度が約150kmであるから当然捕捉時間は短かく、表4に示すように最初のパスで388秒、2番目のパスで312秒となる。case 2の場合近地点高度は約1000kmであるから、捕捉時間は夫々最初のパスで1020秒、2番目のパスで900秒と長くなり、また3番目のパスに対しては沖繩(ID番号3)のみが250秒間観測できる。

## 5.2 フィルターモデル

両衛星ともに摂動力は地球の偏平による重力加速度  $A_{NS}$ のみとし、しかも調和係数は次数2、つまり  $J_2$  項のみを考慮する。従って前節で述べた実力学系とフィルターモデルの間に明らかなモデル誤差が存在する。このモデルは次の2点で重要な意味を持つ。即ち、(1)実観測データに基づく軌道決定においてもモデル誤差が必ず存在するという実際の状況を反映している、(2)2体問題モデルに次いで簡単なモデルであり、もしこのモデルを使用したフィルターのパフォーマンスが良好ならば、計

算時間が大巾に短縮され、実時間処理のためにも大いに利する、からである。

フィルターの初期推定値(平均値)は、表1の真の初期座標に対して、 $+0.3 \sim +0.5$  km (位置) および  $+0.01$  km/sec (速度)、対応する標準偏差値を夫々1 km および  $0.1$  km/sec とし、共分散行列の非対角要素は全て零とする。また観測系にモデル誤差はないものと仮定する。尚運動方程式の積分には、衛星が捕捉領域にある時 Runge-Kutta-Fehlberg 7(8)を使い、領域外の時 Shampine-Gordon の ODE を使用した。

## 5.3 計算結果と考察

シミュレーションスタディの意義は、言うまでもなく、真軌道が既知であるから厳密に推定精度が評価できることにある。他方軌道決定の実際の運用においては観測残差即ち

$$y_i = Y_i - G(\hat{X}_i, t_i)$$

のみが軌道決定精度の判定規準になる。実際  $Y_i$  から状態ベクトル  $X$  に関する情報が完全に抽出されておれば  $y_i$  の統計量は、 $e_i$  [(2-51)式] のそれと殆んど等価とならなければならない。

本報告ではフィルタ性能を評価するため、慣例により、

Table 4 Tracking Schedule Summary

Case 1			Case 2		
Pass No.	Time (sec)	Observing Stations (ID No.)	Pass No.	Time (sec)	Observing Stations (ID No.)
1	0	3	1	0	3, 2
	8	3, 2		166	3, 2, 1
	184	3, 2, 1		930	2, 1
	246	2, 1		936	1
	284	1		1020	
	388			2	6782
2	6870	3, 2		6812	3, 2
	6972	3, 2, 1		7050	3, 2, 1
	7062	2, 1		7608	3, 2
	7092	1		7644	3
				7682	
				3	13744
				13994	

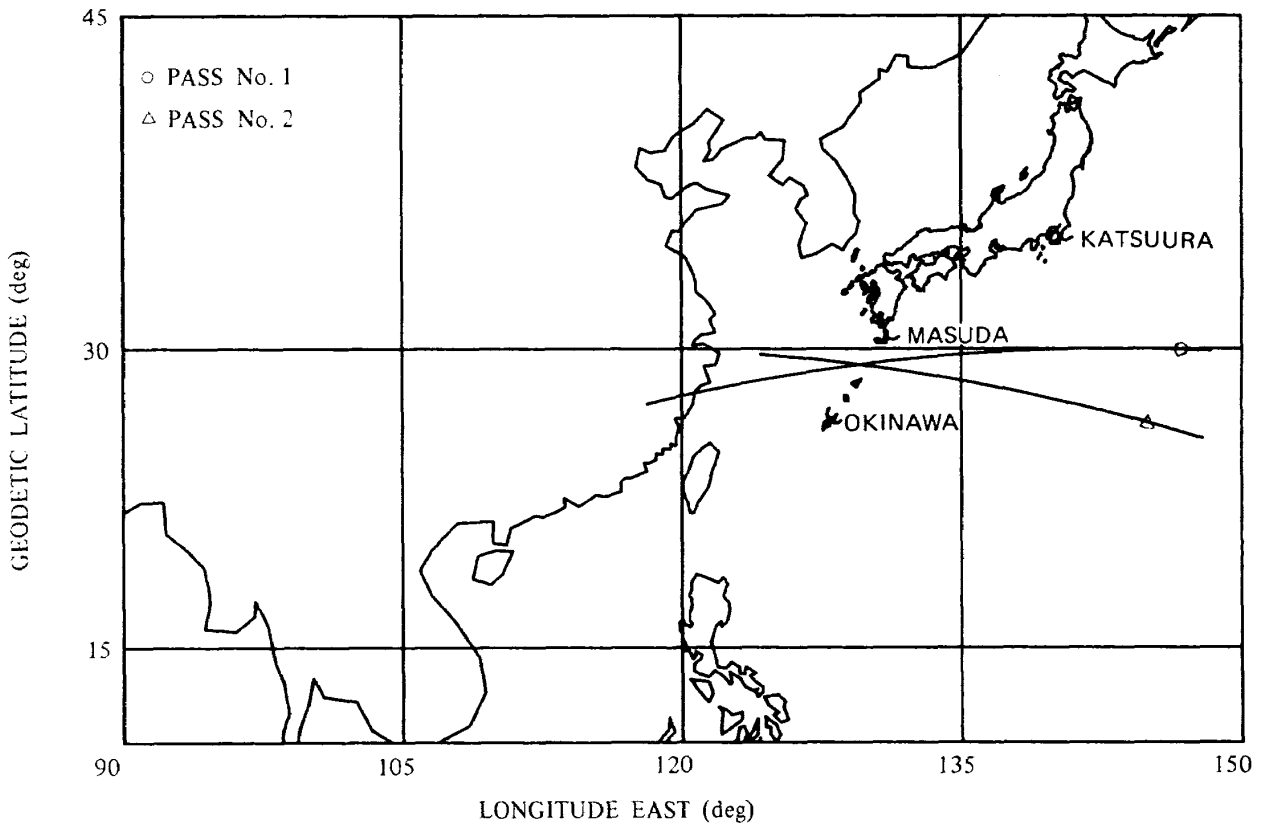


Figure 9 Ground Tracks for Very Low Altitude Satellite (Case 1).  
Solid Lines Indicate Satellite Observed

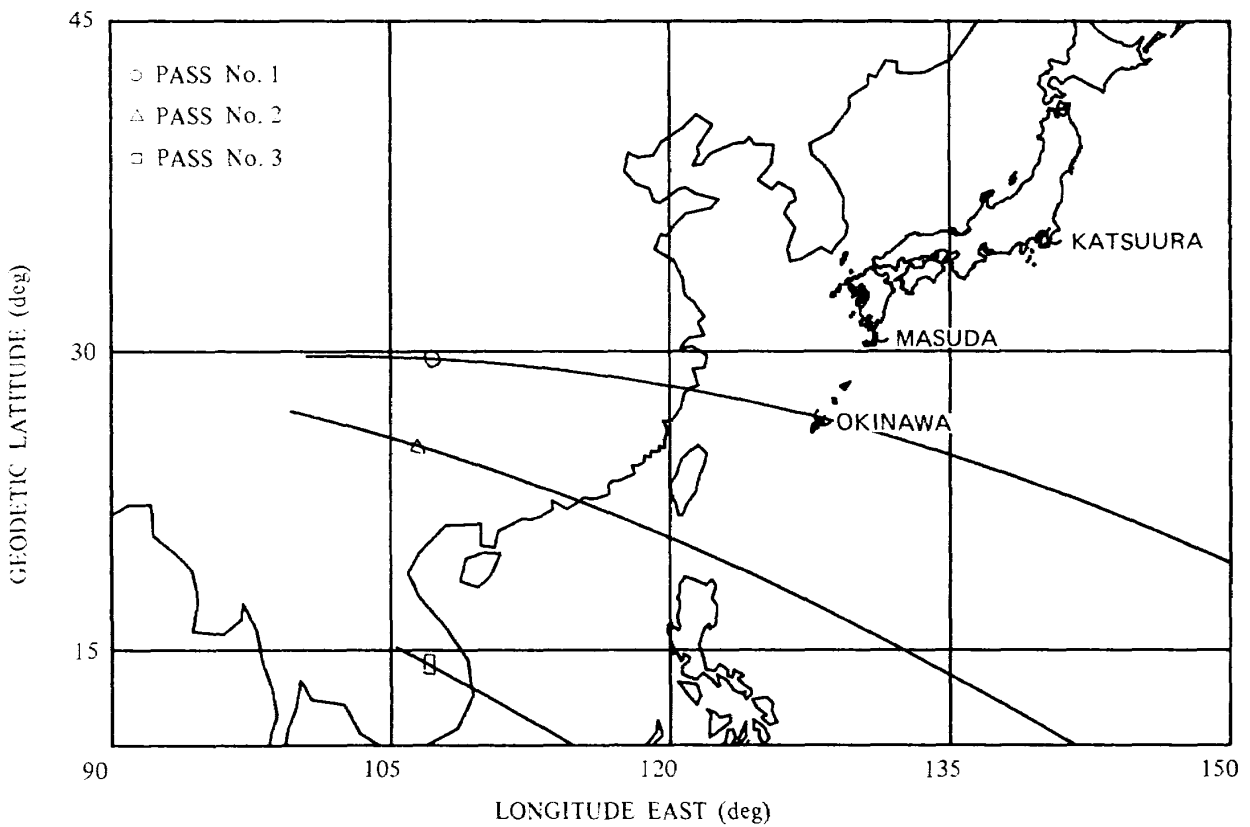


Figure 10 Ground Tracks for Intermediate Altitude Satellite (Case 2).  
Solid Lines Indicate Satellite Observed

軌道に関する RSS (Root Sum Square) 誤差ノルム

$$\begin{aligned} \Delta R &= | \mathbf{R} - \hat{\mathbf{R}} |, \\ \Delta V &= | \mathbf{V} - \hat{\mathbf{V}} |, \\ \Delta \zeta &= | \zeta - \hat{\zeta} | \end{aligned} \quad (5-3)$$

およびある意味で RSS 誤差ノルムの信頼度を反映する共分散ノルム

$$\begin{aligned} N_R &= (P_{11} + P_{22} + P_{33})^{1/2}, \\ N_V &= (P_{44} + P_{55} + P_{66})^{1/2}, \\ N_\zeta &= (P_{77} + P_{88} + P_{99})^{1/2} \end{aligned} \quad (5-4)$$

を定義する。ここで  $P_{ii}$  は共分散行列  $P$ , 即ち

$$P = E[(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})(\mathbf{X} - \hat{\mathbf{X}})^T]$$

の対角要素とし, SNC 法では  $\mathbf{X}^T = (\mathbf{R}^T \mathbf{V}^T)$ , DMC 法では  $\mathbf{X}^T = (\mathbf{R}^T \mathbf{V}^T \zeta^T \beta^T)$  である。 $\Delta R, \Delta V$  の挙動から視察によってフィルタ性能を比較できることが多いが, しかしながら, 例えば SNC 法と DMC 法の場合のように挙動が極めて類似している時にはどちらとも判定

し難いことがある。そのような場合のひとつの指標として, 平均化された RSS 誤差ノルム即ち MRSS 誤差ノルムを次式で定義する。

$$\begin{aligned} EPR &= \frac{\sum_j \Delta R_j \Delta t_j}{\sum_j \Delta t_j}, \\ EPV &= \frac{\sum_j \Delta V_j \Delta t_j}{\sum_j \Delta t_j} \end{aligned} \quad (5-5)$$

ただし  $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ 。MRSS 誤差ノルムはフィルターの過渡状態を除くデータスパンの上で測る。

### 5.3.1 低高度衛星 (case 1)

あるエポックにおける, 近地点附近での真の各摂動力と,  $J_2$  モデルに対する加速度誤差の大きさを参考のために表 5 に示す。表 5 では勿論数値よりもオーダーが重要な意味をもつ。 $J_2$  モデルの場合, 予測される加速度

Table 5 Modeled and Unmodeled Acceleration Levels at Some Epoch in the Vicinity of Perigee

Accelerations	Case 1	Case 2
Modeled :		
Two Body	$9.35 \times 10^{-3}$	$7.35 \times 10^{-3}$
Asphericity	$1.32 \times 10^{-5}$	$8.14 \times 10^{-6}$
Luni-solar forces	$9.27 \times 10^{-10}$	$1.05 \times 10^{-9}$
Atmospheric drag	$1.41 \times 10^{-6}$	0.0
Solar radiation	0.0	$1.03 \times 10^{-10}$
Unmodeled acceleration	$1.44 \times 10^{-6}$	$2.07 \times 10^{-7}$

Unit: km/sec<sup>2</sup>

モデル誤差の自乗は大気抵抗による加速度が最も寄与して, 概ね  $2 \times 10^{-12} (\text{km/sec})^2$  となる。このモデル誤差を SNC 法で補償しようとする時最適な  $Q$  行列をまず見出さねばならない。そこで  $q_V$  の代表値として  $2 \times 10^{-11}$ ,  $8 \times 10^{-11}$ ,  $2 \times 10^{-10}$ , および  $6 \times 10^{-10}$  を採用し, また当然  $q_R \equiv 0$  として  $J_2$  フィルターの性能を比較した。その結果  $q_V = 2 \times 10^{-11}$  は  $N_V$  が小さくなり過ぎて発散現象を示すが, 他の 3 例とも充分実用に供しうることがわかった (表 6 参照)。図 11.1 に拡張逐次推定アルゴリズムを SNC モード  $q_V = 6 \times 10^{-10}$  で運用した場合の位置および速度の推定誤差  $\Delta R, \Delta V$  と, 対応する共分散ノルム  $N_R, N_V$  を示す。衛星の初期軌道誤差は位置, 速度に関して夫々 660m, 17m/sec および共分散ノルム 1.7km, 0.17 km/sec とする。衛星が日本の追跡網に入って初め

の約 180 秒間は沖縄, 増田 2 局の捕捉領域にあり, その間に位置・速度誤差は夫々約 27m, 78 cm/sec まで減少できる。184 秒から 246 秒までは上の 2 局に加えて勝浦の捕捉領域にも入り, 勝浦のデータもプロセスし始めると同時に推定誤差および共分散ノルムは急激に減少し大概位置誤差 6m, 速度誤差 8 cm/sec を得た。246 秒以後衛星の捕捉領域が 2 局から 1 局へと減小するにつれ, 共分散は徐々に増大するが推定誤差にあまり変化はなく安定な推定値が得られた。また図 11.1 から明らかに共

Table 6 State Noise Variances for SNC Algorithm

Case	1	2
$Q_\zeta (\text{km/sec}^2)^2$	$6 \times 10^{-10}$	$2 \times 10^{-12}$



Table 7 A priori Statistics for DMC Algorithm

Case	$\zeta_0$ (km/sec <sup>2</sup> )	$\beta_0$ (sec <sup>-1</sup> )	$P_{\zeta_0}$ (km/sec <sup>2</sup> ) <sup>2</sup>	$P_{\beta_0}$ (sec <sup>-1</sup> ) <sup>2</sup>	$Q_{u_\zeta}$ (km/sec <sup>3</sup> ) <sup>2</sup>	$Q_{u_\beta}$ (sec <sup>-2</sup> ) <sup>2</sup>
1	0.0	10 <sup>-3</sup>	5 × 10 <sup>-10</sup>	4 × 10 <sup>-6</sup>	4 × 10 <sup>-13</sup>	4 × 10 <sup>-7</sup>
2	0.0	10 <sup>-3</sup>	5 × 10 <sup>-15</sup>	10 <sup>-6</sup>	10 <sup>-15</sup>	10 <sup>-8</sup>

分散ノルムは推定誤差に対する不確定度 (uncertainty) の尺度として統計学的に合理的な値を保持している。

次に拡張逐次推定アルゴリズムを DMC モードで運用した計算結果を述べる。DMC 法に必要なパラメータは、その値を種々変化させて tuning したところ、表 7 に示す値が case 1 に対しては最適に近いパフォーマンスを与えることがわかった。

ここで DMC 法によるフィルターの tuning 法について述べておく。3.5 節で見たように Gauss-Markov 過程の実現のためにパラメータとして初期値  $\zeta_0$ ,  $\beta_0$  に対する統計量、即ち平均値  $\bar{\zeta}_0$ ,  $\bar{\beta}_0$  および共分散行列  $P_{\zeta_0}$ ,  $P_{\beta_0}$ 、さらには正規白色過程  $u_\zeta$ ,  $u_\beta$  (式 (3-63), (3-66)) に対する共分散行列  $Q_{u_\zeta}$  および  $Q_{u_\beta}$  の値を指定する必要がある。この中、 $P_{\zeta_0}$  は既に述べた SNC 法の場合と同様に予備計算による、加速度のモデル誤差の大きさの予測値に基づいて限定できる。 $\bar{\zeta}_0$ ,  $\bar{\beta}_0$  に対しては殆んどの場合  $\bar{\zeta}_0 = 0$ 、および  $\bar{\beta}_0 = 10^{-3} \sim 10^{-4} \text{ sec}^{-1}$  が良い結果を与えることがシミュレーション結果より確認された。特に  $\bar{\beta}_0$  のパフォーマンスに対する感度は鋭敏で  $10^{-3}$  より 1 桁大きな  $10^{-2}$  では性能劣化は著しい。 $P_{\beta_0}^{1/2}$  は経験的に  $\bar{\beta}_0$  の 1~5 倍にとるのが良さそうである。選択が一番困難でしかもパフォーマンスに最も影響を与えるパラメータは  $Q_{u_\zeta}$ ,  $Q_{u_\beta}$  と言える。 $Q_{u_\beta}$  は式 (3-87) から粗く言って  $P_{\beta_0}$  の値を写像の段階で  $Q_{u_\beta} \Delta t$  だけ増加させる ( $\beta$  に対応する  $\Phi(t_k, t_{k-1})$  の部分行列は単位行列であるから)。他方観測データによる更新の過程で  $P_{\beta_0}$  は、 $K_k H_k P_k$  (式 (3-40)) だけ減少する。それゆえ、 $P_{\beta_0}$  の減少分を  $Q_{u_\beta} \Delta t$  で補償して、 $P_{\beta_0}$  が適当な値域に落ち着くようにすればよい。同様な考え方は  $Q_{u_\zeta}$  の選択にも適用される。実際の計算を通して  $P_{\zeta_0}$  の挙動から視察により決定することになる。

図 11.2 に示すように、2~3 局の可視領域にある 180 秒~280 秒間は位置誤差、速度誤差は挙動および精度ともに SNC 法と同等であるがその間以外精度は相対的に SNC 法に劣る。とくに増田の捕捉領域を抜ける 280 秒以後位置・速度誤差とも漸次増大し、衛星が勝浦の捕捉領域を最後に抜ける 388 秒後には夫々大概 30 m, 45 cm

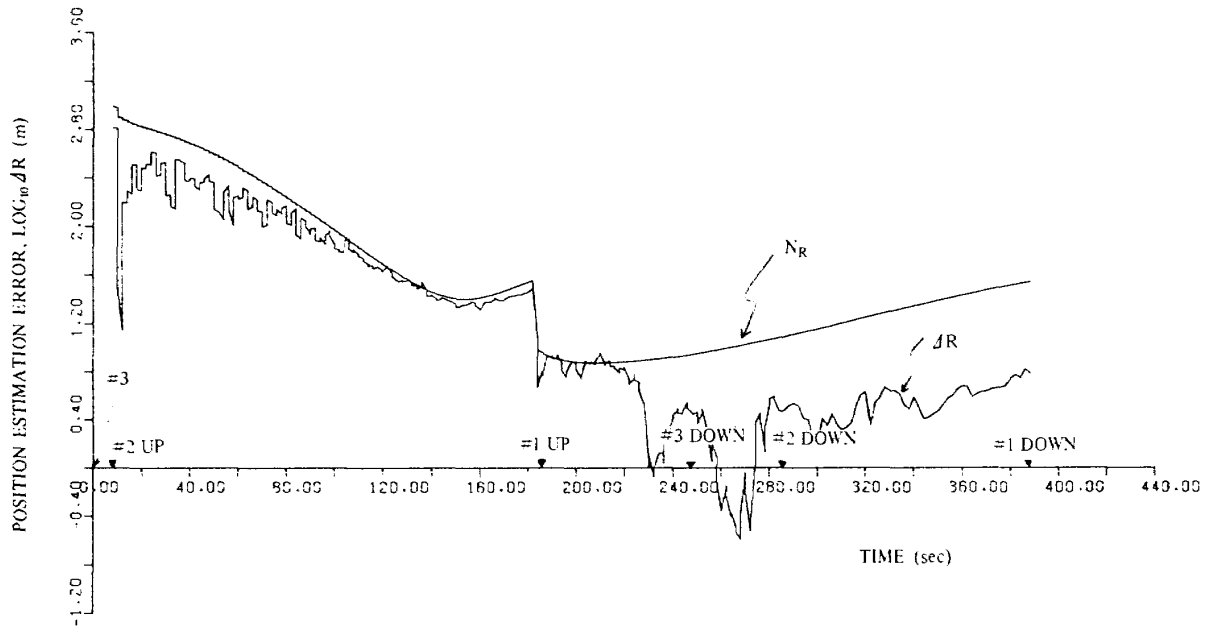
/sec に達する。図 11.3 (a), (b), (c) に  $\zeta$  の真値と推定値の挙動を示した。図 11.3 (d), (e), (f) は  $\hat{\beta}$  と対応する標準偏差を示す。 $\beta$  の真値はシミュレーションにおいても未知であるから  $\beta$  推定性能を量的に比較することはできない。図 11.3 (d), (e), (f) から本シミュレーション条件 (case 1) 下では  $\beta$  は観測データに不感で適応性が極めて弱いと言える。僅かに  $\beta_x$  が 200 秒前後に  $10^{-3}$  から  $5 \times 10^{-3}$  へ飛躍し 280 秒前後まで過敏に変動するが、衛星が勝浦 1 局のみの捕捉領域にある 280 秒以後は再び不感となる。これらの事情は  $\hat{\zeta}$  の挙動を示す図 11.3 (a), (b), (c) に明確にあらわれており、衛星が 2~3 局の捕捉領域にある時を除き、 $\zeta$  に対する追従性は殆んど改善されていない。

図 11.4 は、2 体問題モデルを使用し、拡張逐次推定アルゴリズムを SNC モード  $q_V = 8 \times 10^{-10}$  で運用した計算結果を示す。 $J_2$  モデルに較べて精度が悪いうえ、発散現象を呈している。同じことは DMC モードで運用した場合にも言える。

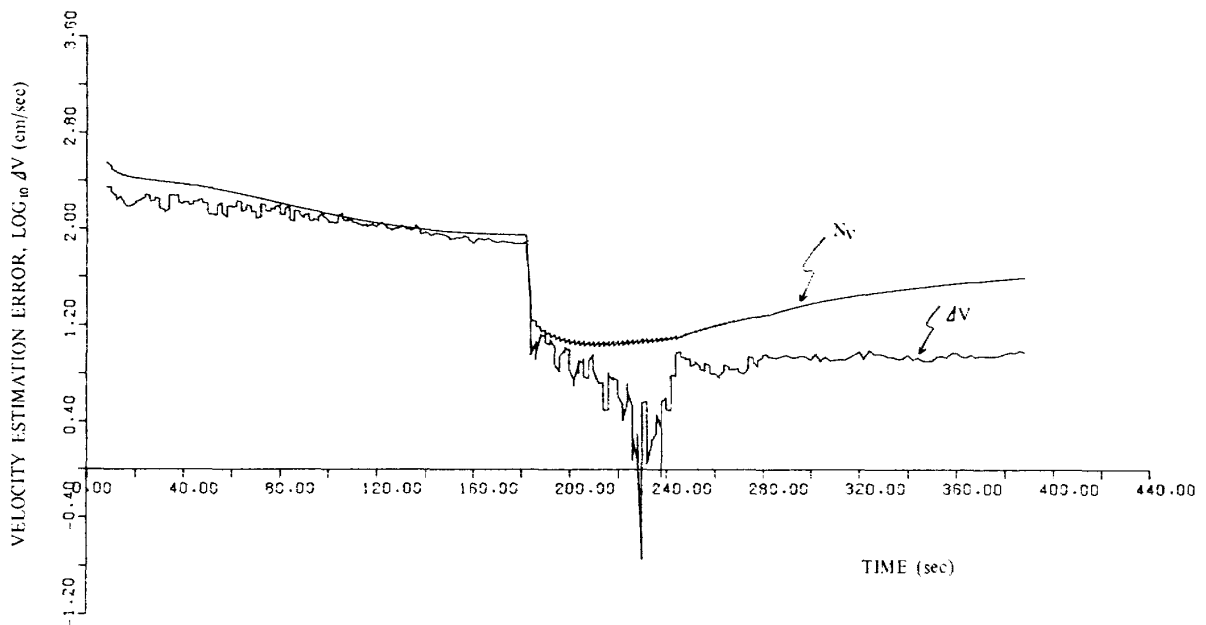
以上から、case 1 のような軌道要素で高度 150 km クラスの超低高度衛星の軌道決定を拡張逐次推定アルゴリズムで行なう場合には SNC 法が DMC 法に優るパフォーマンスを示す。日本の追跡網による捕捉可能時間は数百秒以下で、DMC 法により加速度のモデル誤差を精度良く推定するには短か過ぎるデータスパンであるからである。追跡のために他の人工衛星を使う (tracking & data relay satellite, TDRS) ことにすれば、データスパンの問題は相当緩和され DMC 法が威力を発揮するであろう。

### 5.3.2 中高度衛星 (case 2)

$J_2$  モデルの場合、予測される加速度モデル誤差の自乗は表 5 から地球の偏平による  $J_2$  項以外の重力加速度が最も寄与し、概ね  $4 \times 10^{-14} (\text{km}/\text{sec}^2)^2$  である。図 12.1 は拡張逐次推定アルゴリズムを SNC モード  $q_V = 2 \times 10^{-12} (\text{km}/\text{sec}^2)^2$  で運用して軌道決定を行なった例である。衛星の初期軌道誤差を位置 660 m, 速度 17 m/sec および共分散ノルム 1.7 km, 0.17 km/sec とする。衛星が日本の追跡網に入って初めの 166 秒間は沖縄、増



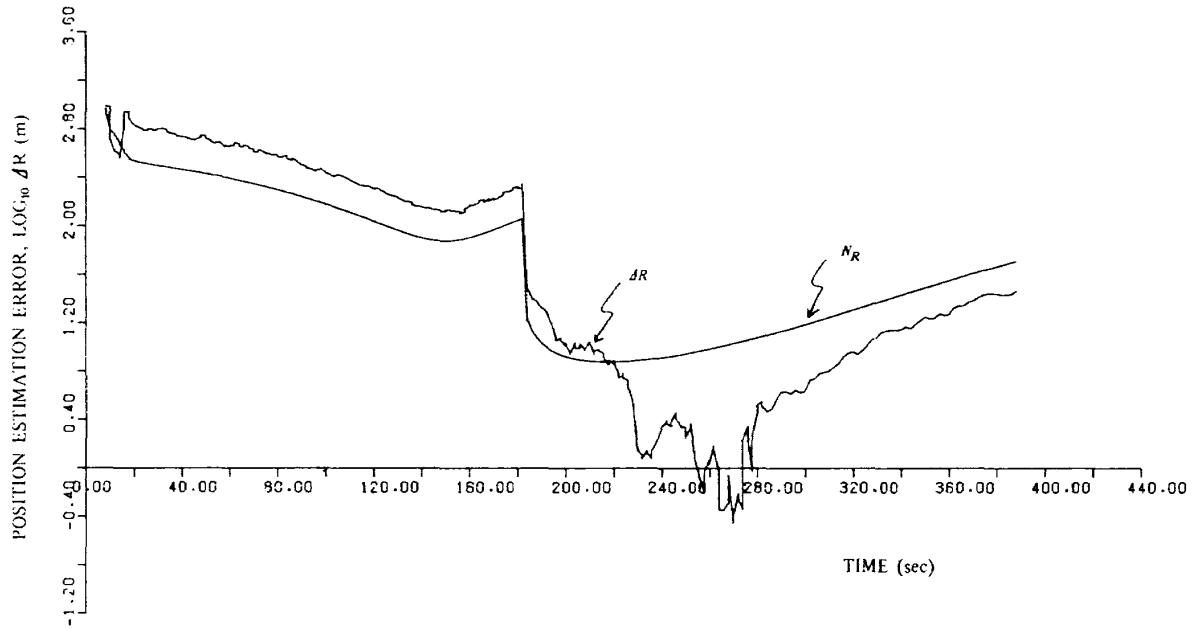
(a) POSITION ERROR



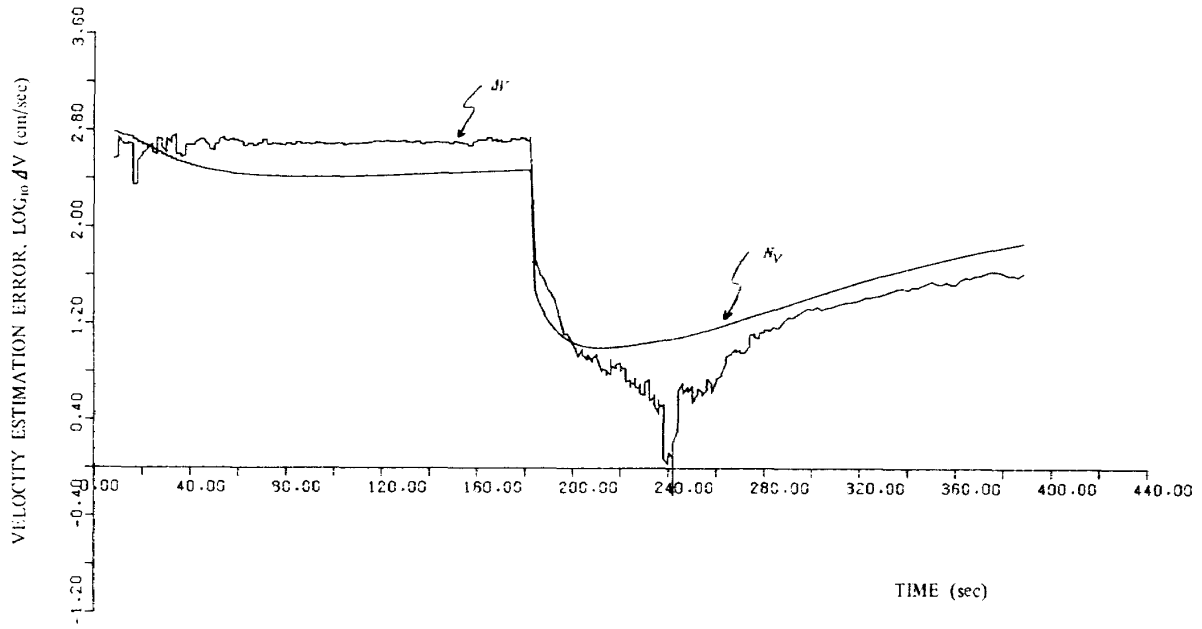
(b) VELOCITY ERROR

Figure 11.1 Performance of the SNC Algorithm for Case 1

- #1 KATSUURA
- #2 MASUDA
- #3 OKINAWA

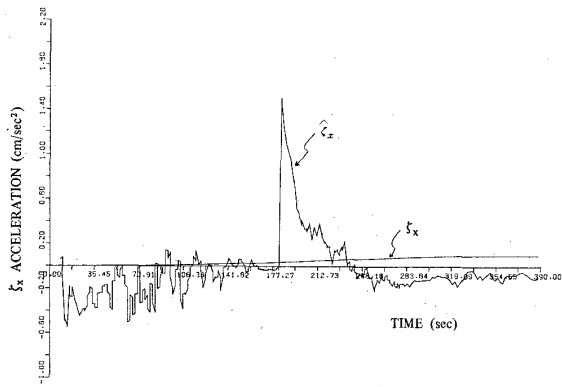


(a) POSITION ERROR

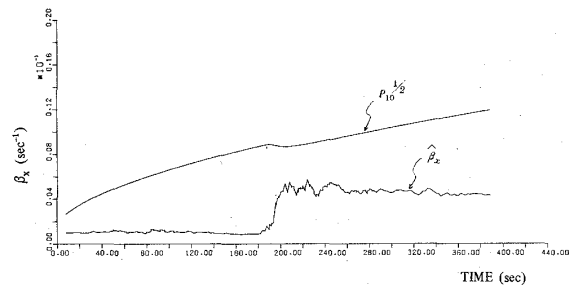


(b) VELOCITY ERROR

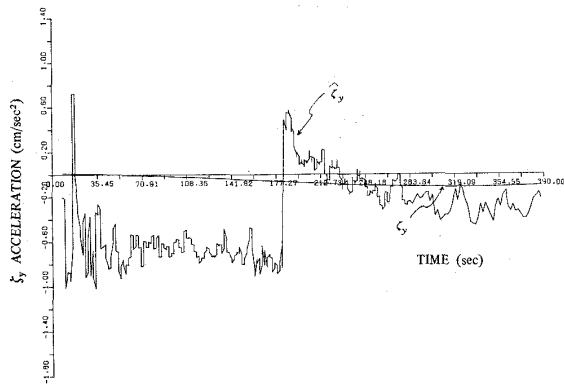
Figure 11.2 Performance of the DMC Algorithm for Case 1



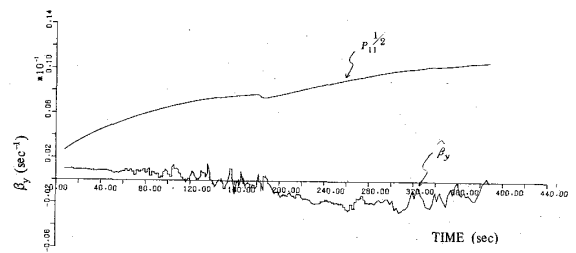
(a)  $\xi_x$  COMPONENT



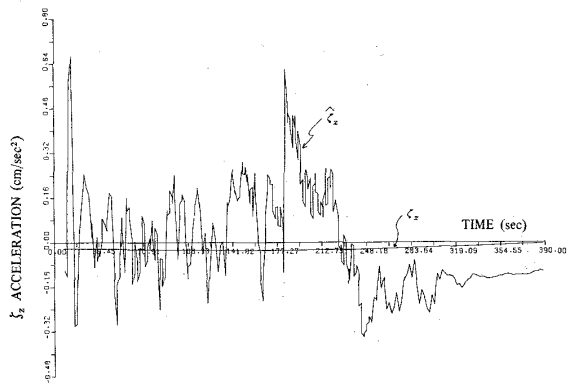
(d)  $\beta_x$  COMPONENT



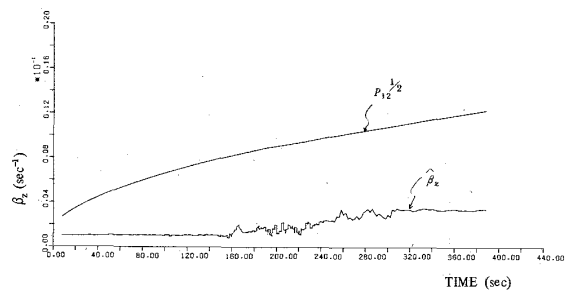
(b)  $\xi_y$  COMPONENT



(e)  $\beta_y$  COMPONENT

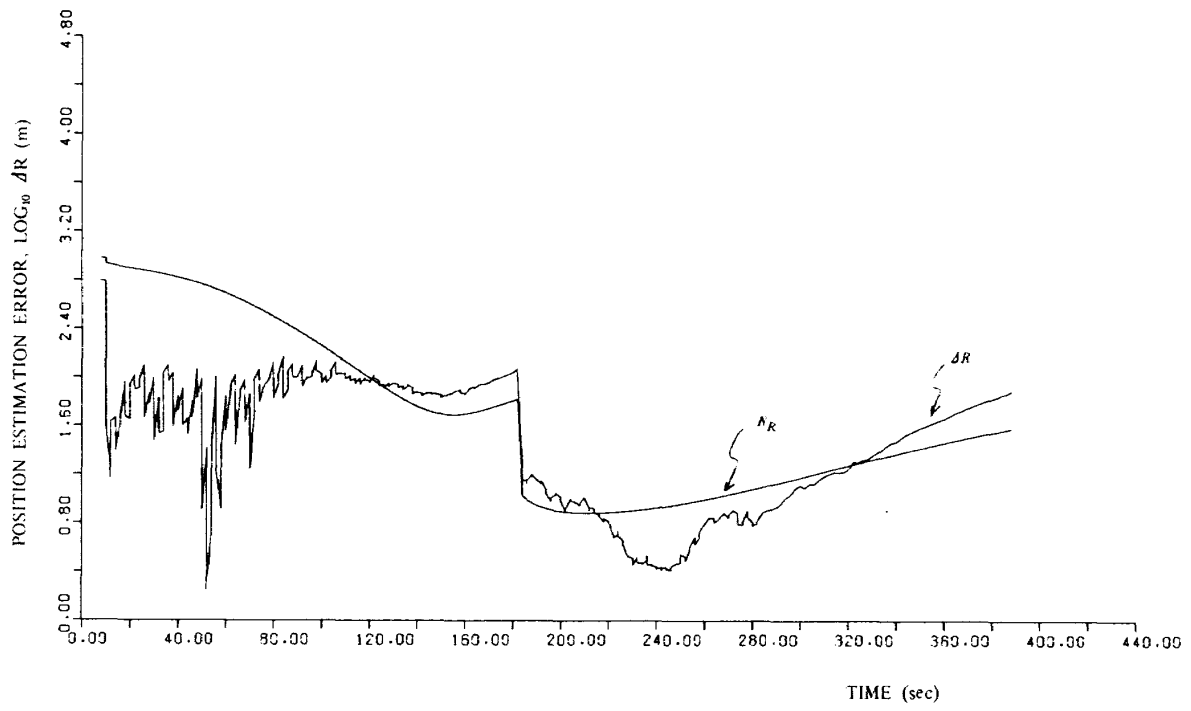


(c)  $\xi_z$  COMPONENT

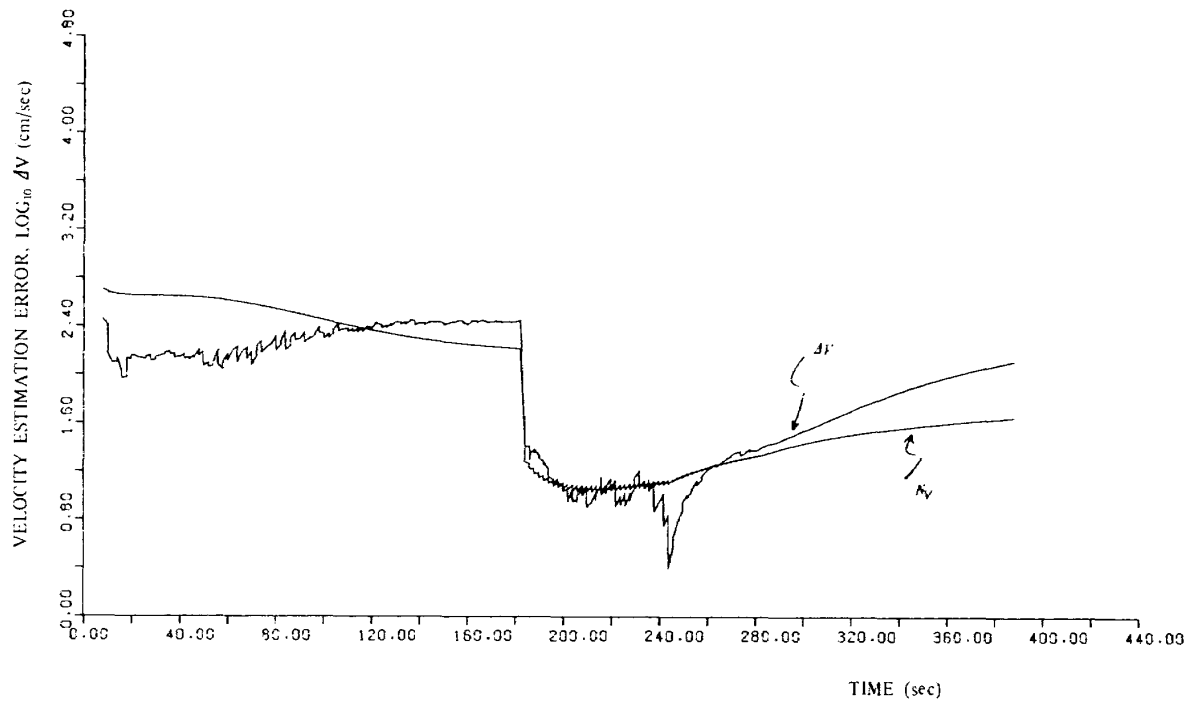


(f)  $\beta_z$  COMPONENT

Figure 11.3 Estimate of Components in the Gauss-Markov Structure



(a) POSITION ERROR



(b) VELOCITY ERROR

Figure 11.4 Performance of the SNC Algorithm with Two-Body Model for Case 1

田2局の捕捉領域にあり、その間に位置・速度誤差は夫々約350m, 1 m/secまで減少し, 上の2局に加え勝浦の捕捉領域にも入る166~928秒間は最も安定な推定値が得られ, MRSS誤差ノルムEPR, EPVは夫々5.05 m, 5.94 cm/secである。勝浦1局のみ観測できる936~1020秒間は推定誤差, 共分散ノルムとも僅かに増加する傾向を示す。

次に拡張逐次推定アルゴリズムをDMCモードで運用した計算結果を述べる。DMC法に必要なパラメータはtuning後最終的に表7の値に設定した。図12.2はその場合の軌道誤差と共分散ノルムを示す。164秒まではSNC法に較べて精度的に大差は見られないが, 3局ともに同時観測できる166~928秒間におけるMRSS誤差ノルムEPR, EPVは夫々3.44m, 4.83 cm/secとなり, SNC法のMRSS誤差ノルムに較べて夫々約32%, 20%精度が向上している。930秒以後は位置・速度誤差ともに増大し, 1020秒には $\Delta R$ ,  $\Delta V$ は夫々約27m, 15 cm/secに達する。図12.3(a), (b), (c)は加速度モデル誤差 $\zeta$ の真値と推定値 $\hat{\zeta}$ の挙動を示す。 $\zeta$ は400秒前後から特に正確に追従されていることがわかる。これは $\hat{\beta}$ の挙動を示す図12.3(d), (e), (f)において明らかに300~400秒あたりから $\beta$ が観測データに極めて過敏に変動し, 従って適応性が満足されていることによる。

case 2 に対して2体問題モデルの可能性を検討した。図12.4は2体問題モデル $q_V = 2 \times 10^{-11} (\text{km/sec}^2)^2$ とした計算例であるが, 明らかに発散現象を呈し, 少くとも $J_2$ モデルの必要性を立証している。しかしながら, 計算結果は追跡網とデータスパンに依存するので, 上の例は2体問題モデルを完全に否定するものではない。実際図11.4において衛星が3局どもの捕捉領域にある時には推定精度は相対的に良好である。前節で述べた様に他の複数個の人工衛星によって連続的に追跡できれば, 2体問題モデルでも充分実用的であり得る。

以上から, case 2 のような中高度衛星でデータスパンも比較的長い場合には, 拡張逐次推定アルゴリズムをDMCモードで適用することにより, 観測精度と殆んど等価な軌道決定を行なえる可能性がある。ここでは特に注意すべきことがある。今までの結論はすべてシミュレーションスタディに基づいたものであり, さらに観測系の誤差として統計量が既知の白色雑音のみという極めて楽観的な仮定をした。実データによる軌道決定の場合には, 観測雑音の統計的性質のあいまいさ, 追跡局の位置誤差, 電離層・大気屈折の補正誤差, 等極めて複雑な誤差因子のために正確に観測精度を達成することは出来ないとしても, 拡張逐次推定アルゴリズムをDMCモ

ードで適用することにより, 観測精度に依存して, それに近い精度で軌道決定を行なえる可能性はあると言っても良い。

### 5.3.3 DMC法に対する観測系の影響

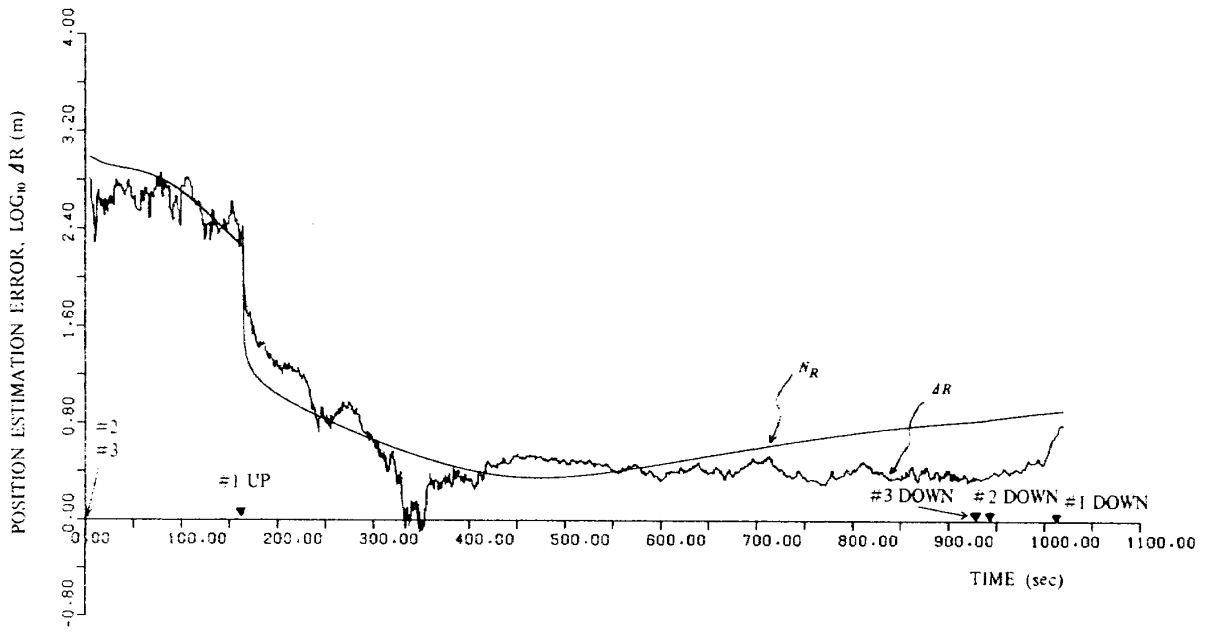
前節まで観測量として距離 $\rho$ および距離変化率 $\dot{\rho}$ を考慮し, 観測雑音として各局共通に平均値零および標準偏差値 $\sigma_\rho = 10\text{m}$ ,  $\sigma_{\dot{\rho}} = 1\text{ cm/sec}$ の正規白色雑音を附加した。この設定を規準として, 観測雑音レベルまたは観測量が変わった時中高度衛星に対するDMC法による軌道決定精度および加速度のモデル誤差 $\zeta$ に対する追従性への影響を調べる。本節の結論はBierman-Thorntonアルゴリズムによる。

#### (1) 観測雑音レベル

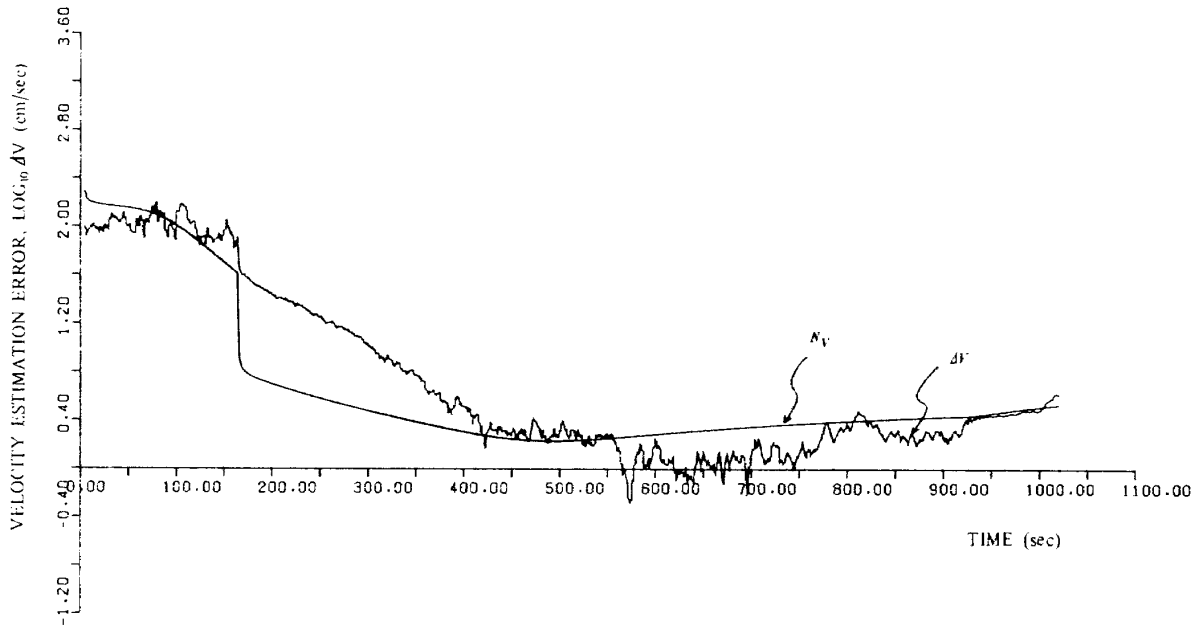
観測量はそのままとして, 即ち各局共距離および距離変化率を測定するとして, 観測精度のみ1桁向上した場合を考える。まず $\sigma_\rho$ を規準値に保ち $\sigma_\rho = 1\text{ m}$ とした場合 $\hat{\zeta}$ の追従性は規準に較べて殆んど変化せず,  $\Delta R$ ,  $\Delta V$ も衛星が同時に3局の可視領域にある間ほぼ観測精度を達成できる。次に $\sigma_{\dot{\rho}}$ を規準値に保ち $\sigma_{\dot{\rho}} = 0.1\text{ cm/sec}$ とした場合の軌道誤差を図13.1に,  $\hat{\zeta}$ および $\hat{\beta}$ の挙動を図13.2に示す。 $\hat{\zeta}$ の追従性は極めて良く, 過渡期の立ち上がりも非常にシャープかつ急速に真値近くまで減衰しその後はかなり小さな振幅で良く追従している。 $\hat{\beta}$ の挙動はこの様相を反映して規準の場合とは著しく異なる。即ち $\hat{\beta}$ の立ち上がりは衛星が3局の可視領域に入ってもない200秒前後( $\sigma_\rho = 10\text{m}$ ,  $\sigma_{\dot{\rho}} = 1\text{ cm/sec}$ の場合は図12.3(d), (e), (f)から明らかに400秒前後)に始まり100秒以内で殆んど定常状態に落ち着く。定常値は $\hat{\beta}_x \sim 3 \times 10^{-3} (\text{sec}^{-1})$ (規準では $2 \times 10^{-3}$ ),  $\hat{\beta}_y, \hat{\beta}_z$ に対しては規準と殆んど等価である。 $\zeta$ が極めて高精度に追跡されていることは当然衛星の位置・速度に対する推定精度にも反映している。特に $\Delta R$ は衛星が追跡網を抜け出る直前まで極めて高精度( $\sim 2\text{ m}$ 以下)かつ安定であることは注目値する。さらに観測精度を同時に1桁向上させた $\sigma_\rho = 1\text{ m}$ ,  $\sigma_{\dot{\rho}} = 0.1\text{ cm/sec}$ の場合追従性, 過渡応答とも一層向上し, 特性が際立ってくるが $\sigma_{\dot{\rho}}$ のみ向上させた場合に較べて全体的な挙動に著しい差異はない。

#### (2) 観測量

衛星利用の測地学において, レーザー光による高精度測距データは極めて有用である。そこで観測量として距離のみを考慮し測距精度がDMC法による軌道決定に及ぼす影響を調べる。まず $\sigma_\rho = 10\text{ m}$ の場合予想通り $\hat{\zeta}$ の追従性は極めて悪く, 殆んど追跡し得ないと言える。 $\hat{\beta}$ の立ち上がりには600~800秒までの観測データの取り



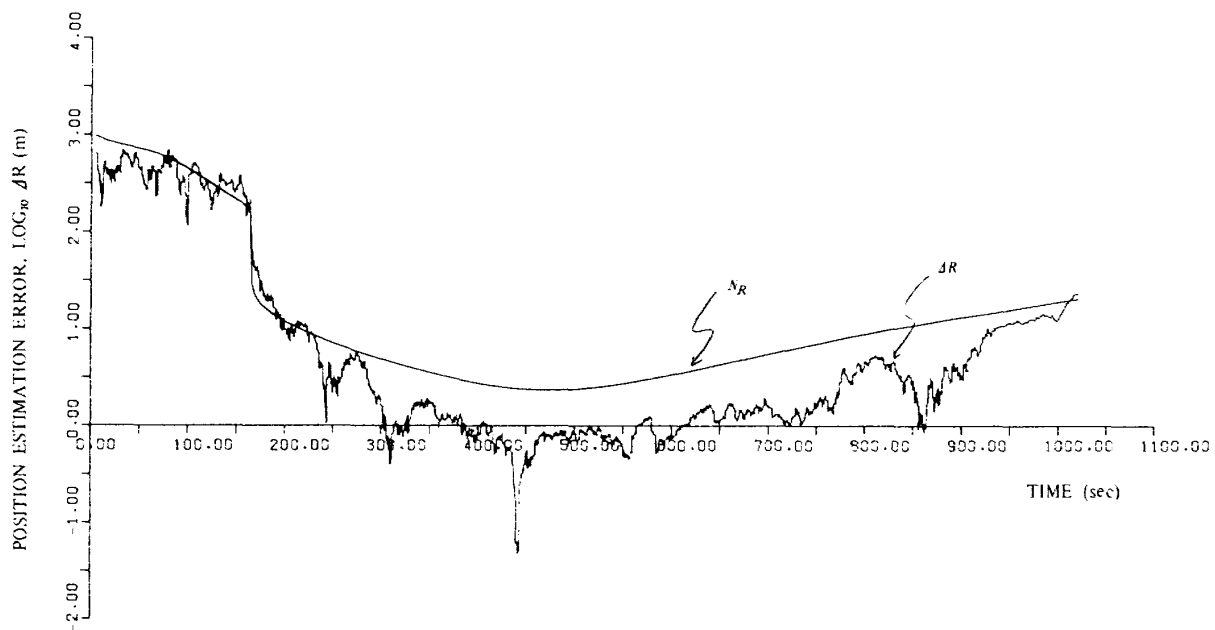
(a) POSITION ERROR



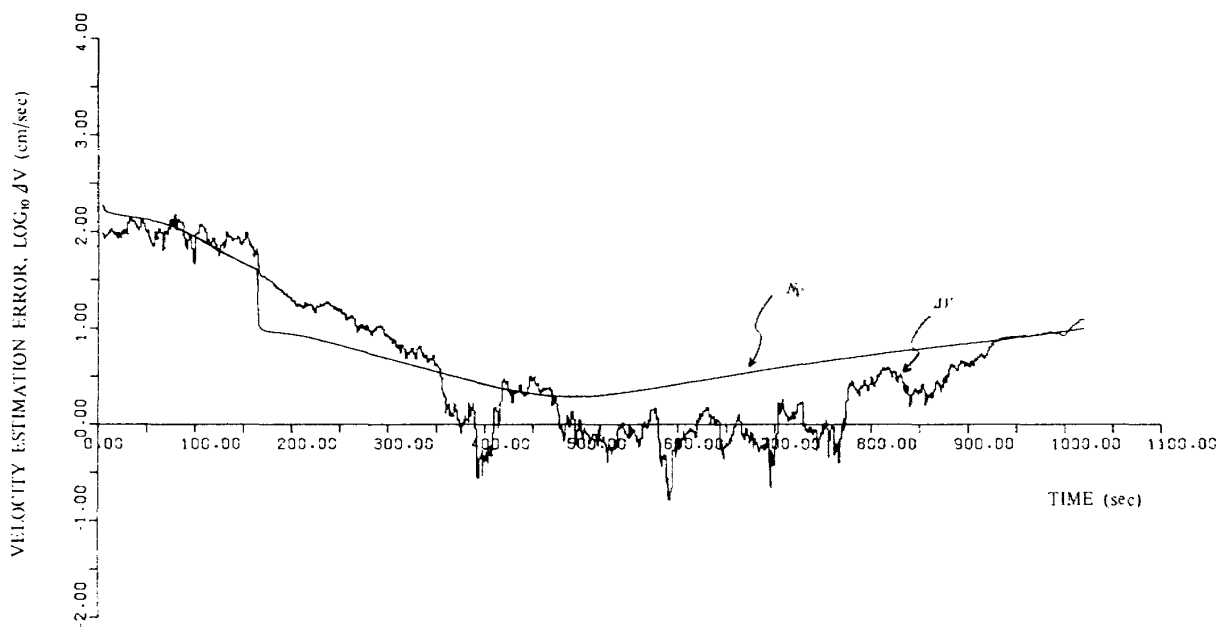
(b) VELOCITY ERROR

Figure 12.1 Performance of the SNC Algorithm for Case 2

- #1 KATSUURA
- #2 MASUDA
- #3 OKINAWA



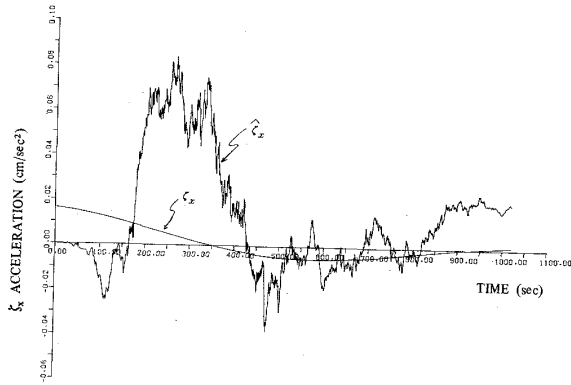
(a) POSITION ERROR



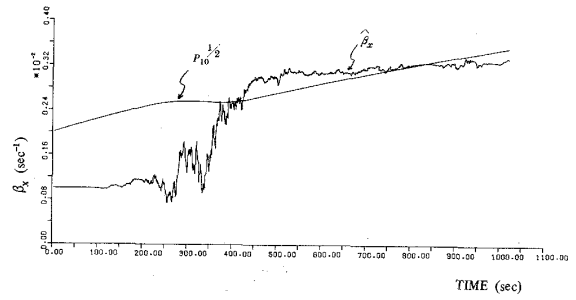
(b) VELOCITY ERROR

Figure 12.2 Performance of the DMC Algorithm for Case 2

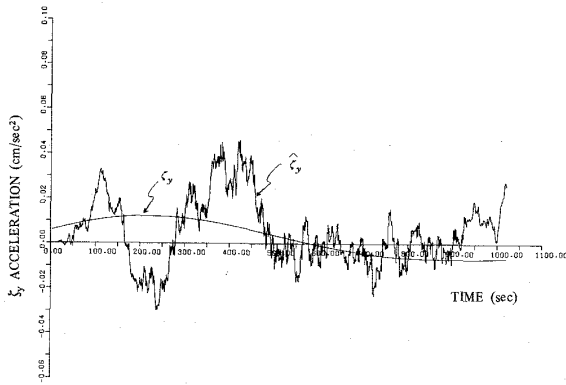




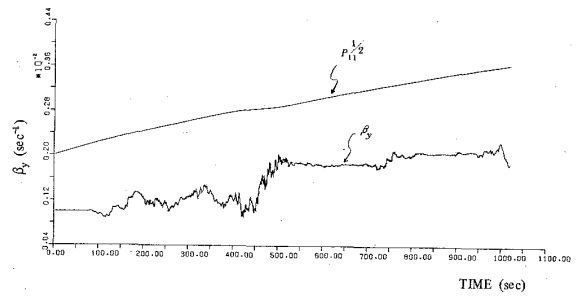
(a)  $\hat{\xi}_x$  COMPONENT



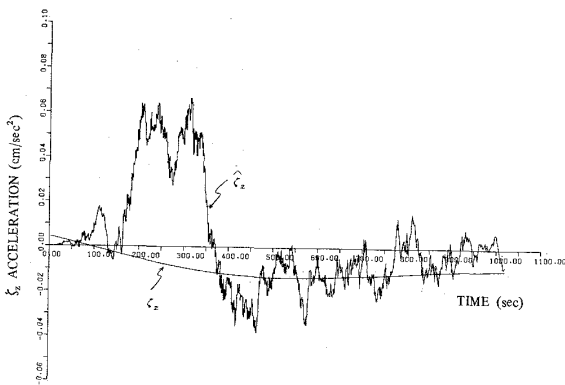
(d)  $\hat{\beta}_x$  COMPONENT



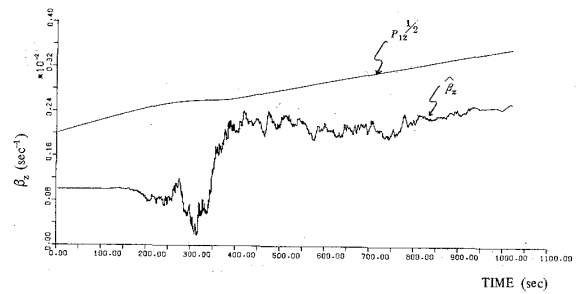
(b)  $\hat{\xi}_y$  COMPONENT



(e)  $\hat{\beta}_y$  COMPONENT

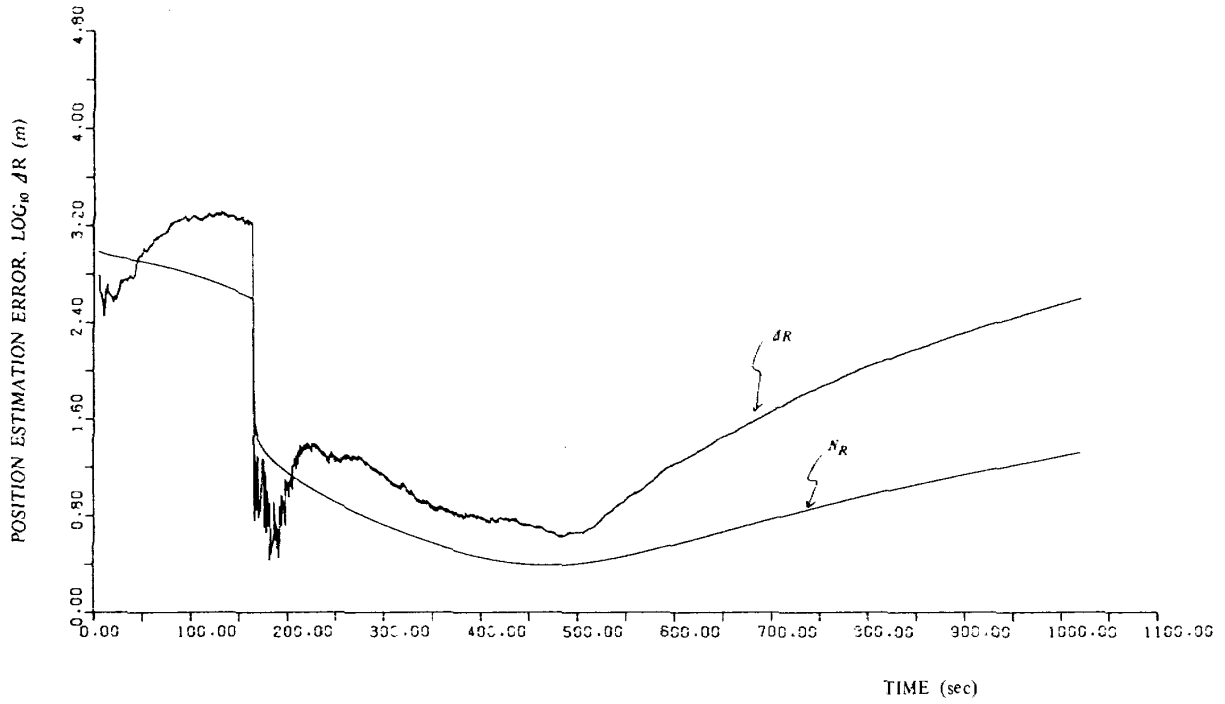


(c)  $\hat{\xi}_z$  COMPONENT

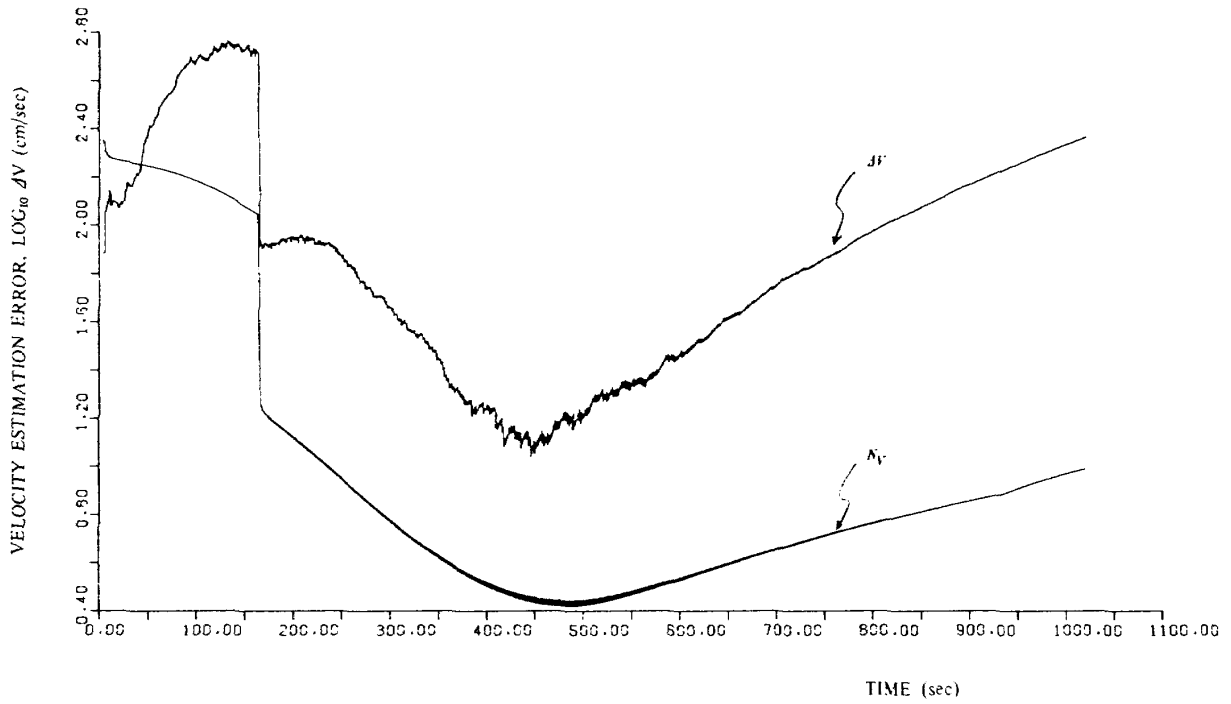


(f)  $\hat{\beta}_z$  COMPONENT

Figure 12.3 Estimate of Components in the Gauss-Markov Structure



(a) POSITION ERROR



(b) VELOCITY ERROR

Figure 12.4 Performance of the SNC Algorithm with Two-Body Model for Case 2

込みが必要であるが、それでも変動量は $\hat{C}$ の追従性を改善させる程十分ではない。 $\hat{C}$ の精度が悪いにも拘らず $\Delta R$ は衛星が3局の可視領域にある間概ね観測精度レベルにある。これは高精度化のために導入した $\hat{C}$ が仮に追跡不能であっても、 $\hat{C}$ に仮定した共分散行列があたかも SNC 法における Q 行列のように振る舞いからである。一方 $\Delta V$ は衛星が追跡網を抜け出る直前まで10~15 cm/sec 以下に維持できる。次に $\sigma_p = 1$  mとした場合の軌道誤差を図14.1に、また $\hat{C}$ および $\hat{\beta}$ の挙動を図14.2に示す。 $\hat{C}$ の追従性はかなり改善されれば400秒前後から追跡を始める傾向にあるが、真値の近傍での変動が激しい。 $\Delta R$ は衛星が3局の可視領域にある時ほぼ1~2 m以内、 $\Delta V$ はその間約5 cm/sec 以下となり、 $\sigma_p = 10$  mの場合に較べて相当の性能向上が期待できる。比較のため観測量として距離 $\sigma_p = 10$  m, 方位角 $\sigma_A = 100$  arc sec, 上下角 $\sigma_E = 100$  arc sec の場合を計算したが結果は距離 $\sigma_p = 10$  m のみの場合と殆んど同様であった。

### (3) 観測雑音レベルのモデル誤差

先の2ケースにおける軌道決定では観測雑音の真の分散値を既知とし、観測データの発生に用いた $\sigma_p^2, \sigma_b^2$ と同じ値をフィルターモデルでも使用した。実際の運用においては分散の標準値を利用し得るのみであるから分散のモデル誤差の影響を調べることは意義がある。 $\sigma_p^2, \sigma_b^2$ の規準値に対して、フィルター側ではまず分散の10倍を仮定する。その場合 $\hat{C}$ の追従性は極めて悪く、むしろ追従不能と言って良い。当然 $\hat{\beta}$ の変動も微小である。観測雑音の分散 $R_{i+1}$ (式(3-15)参照)を真値よりも大きく見積ることは、カルマン利得 $K_{i+1}$ が最適利得よりも小さく計算されることを意味し、それゆえ新しい観測データに対する感度が弱くなる(他方 $R_{i+1}$ を過小評価すると感度は強くなる)。 $\Delta R, \Delta V$ の振る舞いは上の事情を反映してかなり滑らかになる。規準に較べると全体的に精度は劣るが $\Delta R$ はほぼ10 m以下、 $\Delta V$ も7 cm/sec 以下の精度が得られる。このケースの特徴として $\Delta R, \Delta V$ は共分散行列の計算値により常に上から押さえられ、準最適モードであるにも拘らず見かけ上フィルターの安定化が達成され得ることである。次に分散の1/10倍を仮定した場合の軌道誤差を図15.1に、 $\hat{C}$ および $\hat{\beta}$ の挙動を図15.2に示す。 $\hat{C}$ は激しく振動しながら追従する傾向を示し、過渡期の立ち上がりも良好である。極めて初期から $\hat{\beta}$ の変動が引き起こされるが明らかに発散現象を呈している。 $\Delta R, \Delta V$ は概ね600秒前後までは規準の場合と殆んど同レベルの精度であるがその直後から急速に発散現象が成長する。このような場合に対して、観測雑音の統計量を同時に推定する適応フィルターが有効に

なろう。

以上から次の結論が導かれる。(1)距離および距離変化率の追跡データを併用する場合には $\hat{C}$ は距離変化率の観測精度により敏感である。(2)距離のみの追跡データによる場合観測精度が向上するにつれ、つまり $\sigma_p$ が小さくなるにつれ $\hat{C}$ の過渡応答特性および追従性が飛躍的に改善される。(3)観測雑音レベルの過大評価は $\hat{C}$ を不感にするがフィルターを見かけ上安定化し、一方過小評価すると $\hat{C}$ の追従性は向上するがフィルターの発散を誘起する。(4)DMC法により、仮に $\hat{C}$ の推定精度が極めて悪くても、 $\hat{C}$ に仮定した共分散行列があたかも SNC 法における Q 行列の役目を演ずるため、観測量にかかわらず概ね観測精度を達成できる。

### 5.3.4 コストパフォーマンス

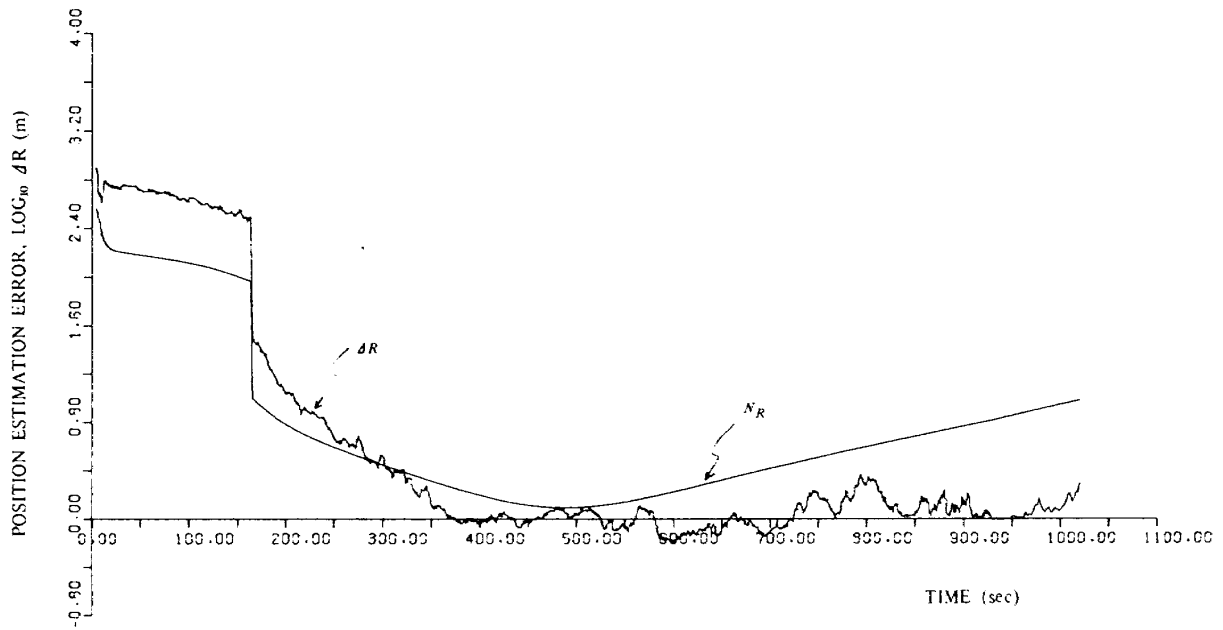
KOSMOSにより拡張逐次推定アルゴリズムを SNC および DMC モードで運用する場合に必要な処理時間を表8に示した。但し Riccati 方程式に対する積分法として Runge-Kutta-Fehlberg RKF 7(8)を使用し、相対誤差 $10^{-12}$ , 絶対誤差 $10^{-8}$ を与えてステップサイズ制御をしている。また初期ステップは $(t_{i+1}-t_i)/4$ とする。表8から明らかに DMC 法が SNC 法の CPU 秒の

Table 8 Total CPU Time for SNC versus DMC

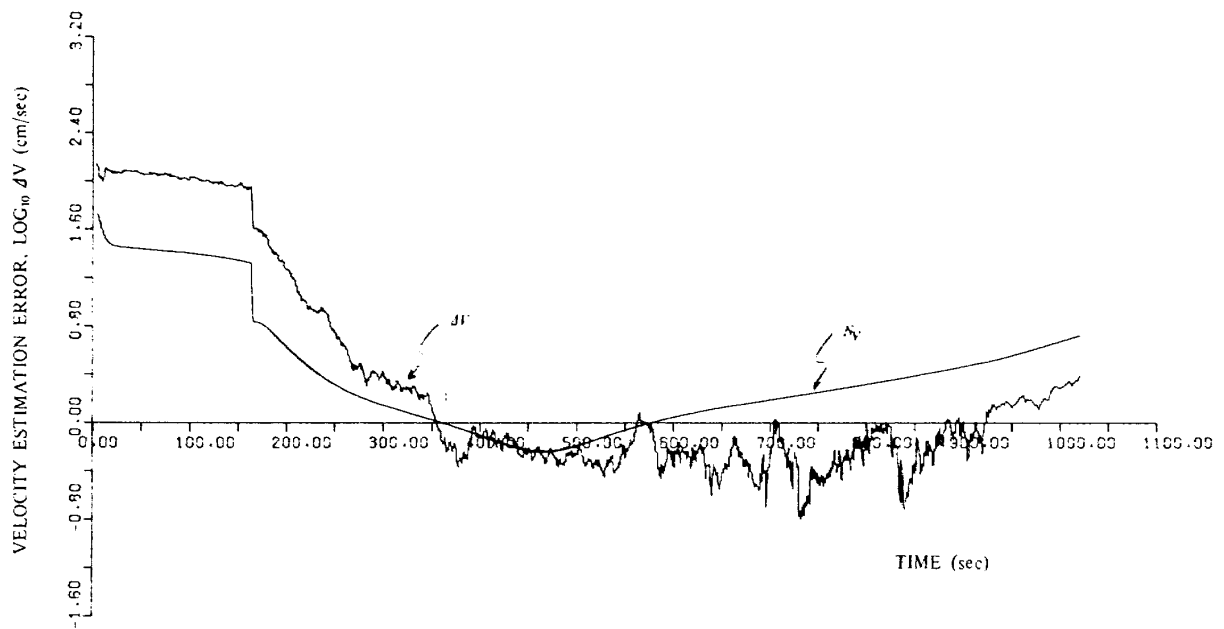
Case	SNC CPU Time	DMC CPU Time
1	49.3	84.4
2	138.8	229.7

Unit: second

約1.7倍多くかかっている。もつとも DMC 法においては解析解を活用した零要素からなる部分行列に関する演算をなくする等プログラムの最適化を図れば CPU 秒は相当減少することが予想されるから、この意味で表8は最悪な場合を考えるべきである。他の計算例によると固定ステップサイズ $(t_{i+1}-t_i)/4$ の RKF 7は CPU 秒を倍増させる(ステップサイズ制御の効果が著しい)が実は固定ステップサイズ $(t_{i+1}-t_i)$ の RKF 4でも精度的に(少くとも有効数字10桁まで) RKF 7(8), RKF 7と全く同等であることがわかっている。RKF 4によると RKF 7(8)の場合の約30%で済む。他方 Bierman-Thornton アルゴリズムによる DMC 法は、方式(1)(式(3-56))による拡張逐次推定アルゴリズムによる CPU 秒の約1割減であった。これは注意すべき結果で

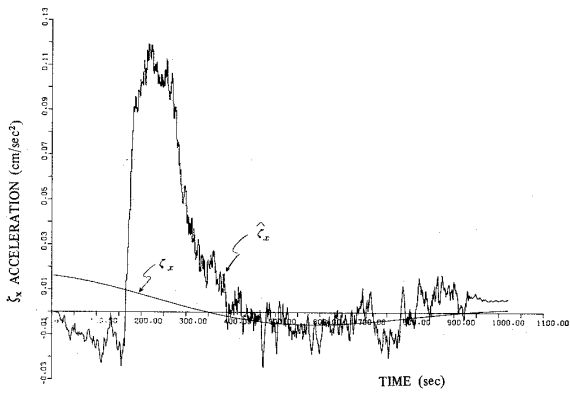


(a) POSITION ERROR

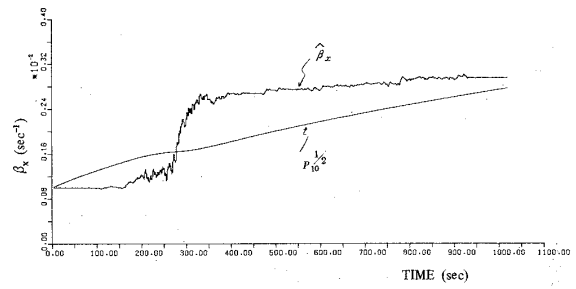


(b) VELOCITY ERROR

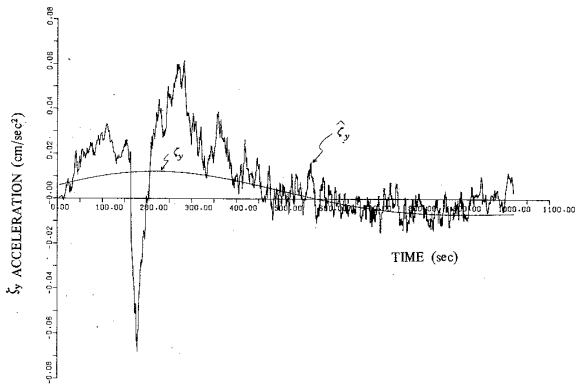
Figure 13.1 Performance of the DMC Algorithm for Case 2:  
 $\sigma_p = 10$  m and  $\sigma_v = 0.1$  cm/sec



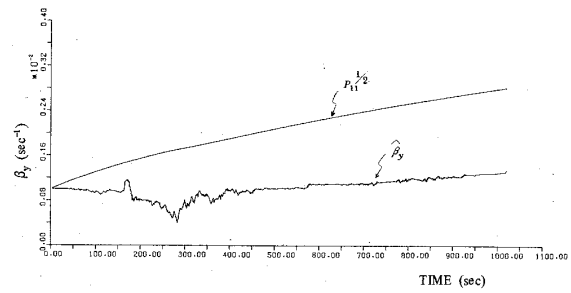
(a)  $\xi_x$  COMPONENT



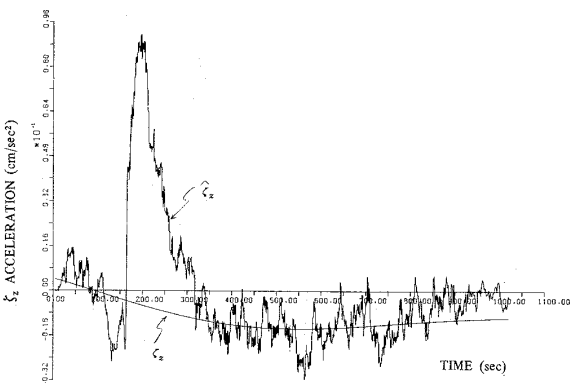
(d)  $\beta_x$  COMPONENT



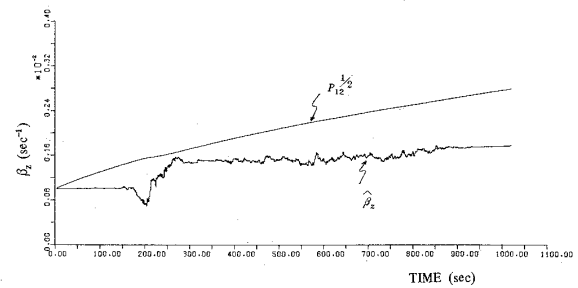
(b)  $\xi_y$  COMPONENT



(e)  $\beta_y$  COMPONENT

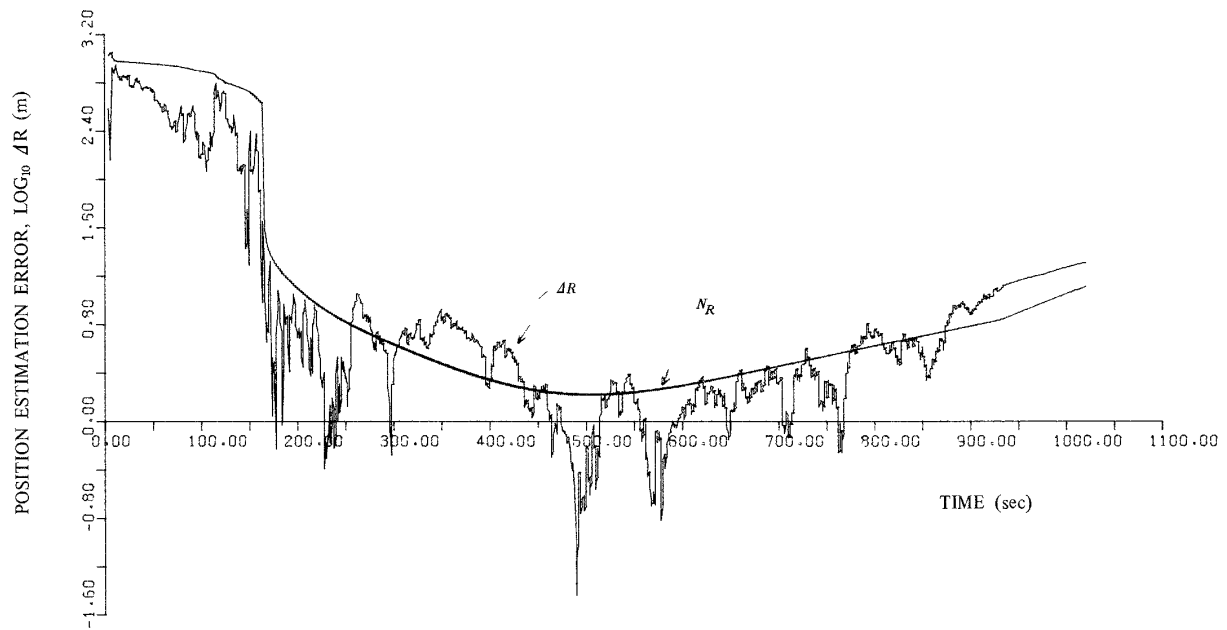


(c)  $\xi_z$  COMPONENT

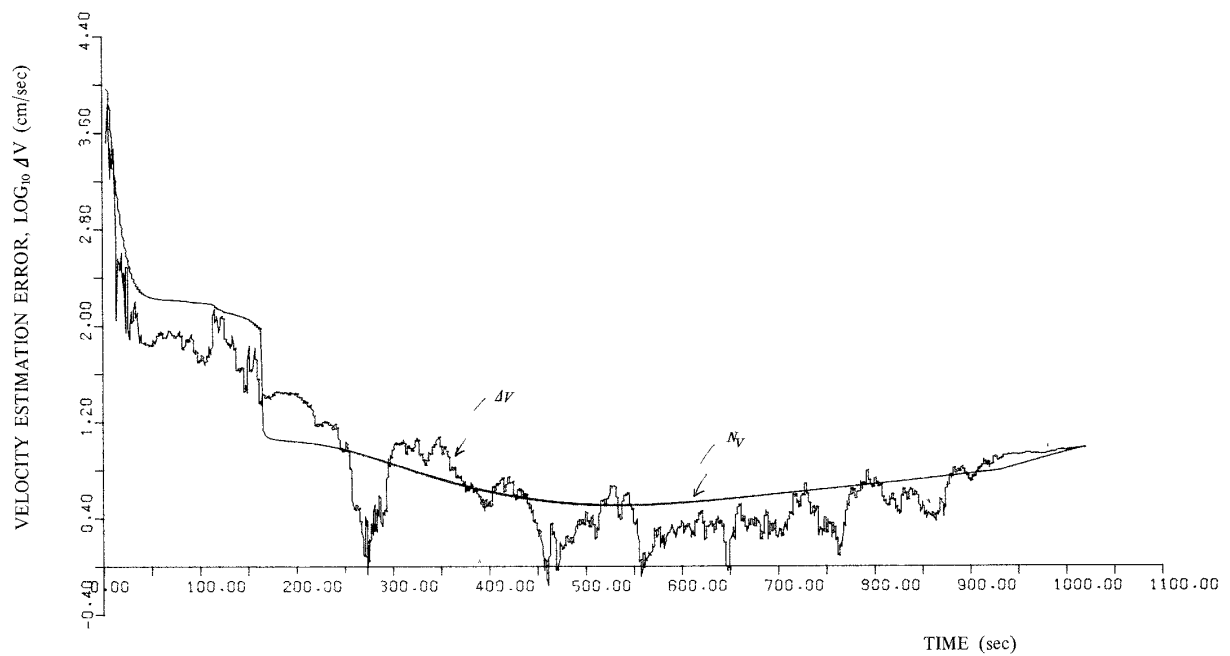


(f)  $\beta_z$  COMPONENT

Figure 13.2 Estimate of Components in the Gauss-Markov Structure;  
 $\sigma_\rho = 10$  m and  $\sigma_\delta = 0.1$  cm/sec

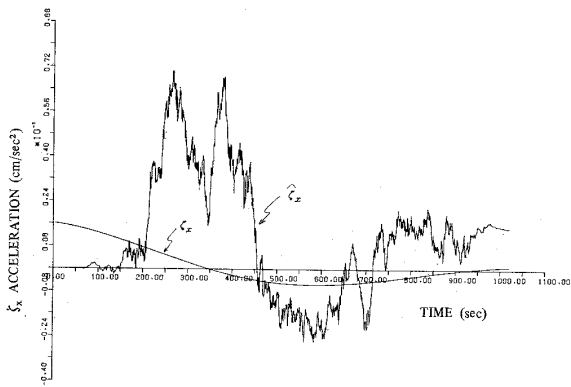


(a) POSITION ERROR

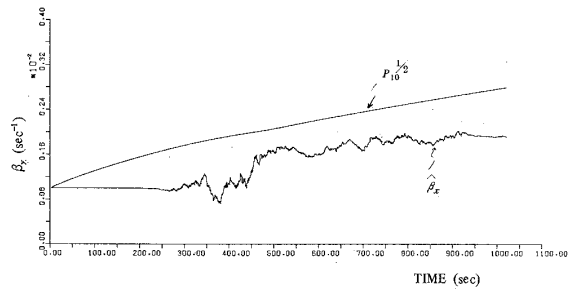


(b) VELOCITY ERROR

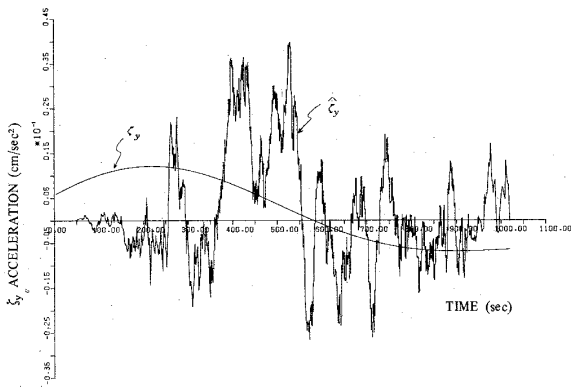
Figure 14.1 Performance of the DMC Algorithm for Case 2;  
 $\sigma_\rho = 1$  m only



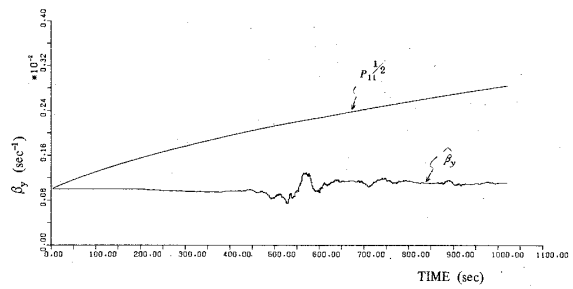
(a)  $\xi_x$  COMPONENT



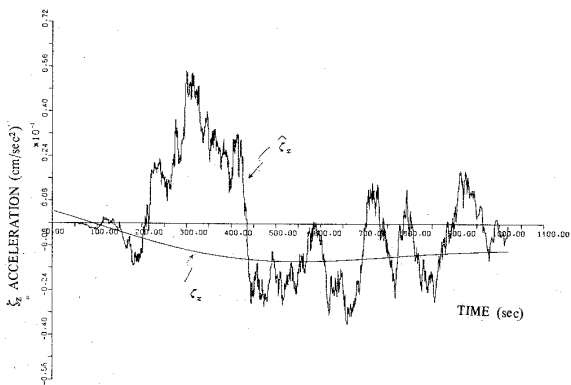
(d)  $\beta_x$  COMPONENT



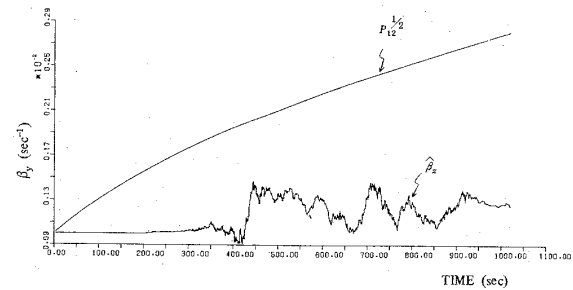
(b)  $\xi_y$  COMPONENT



(e)  $\beta_y$  COMPONENT

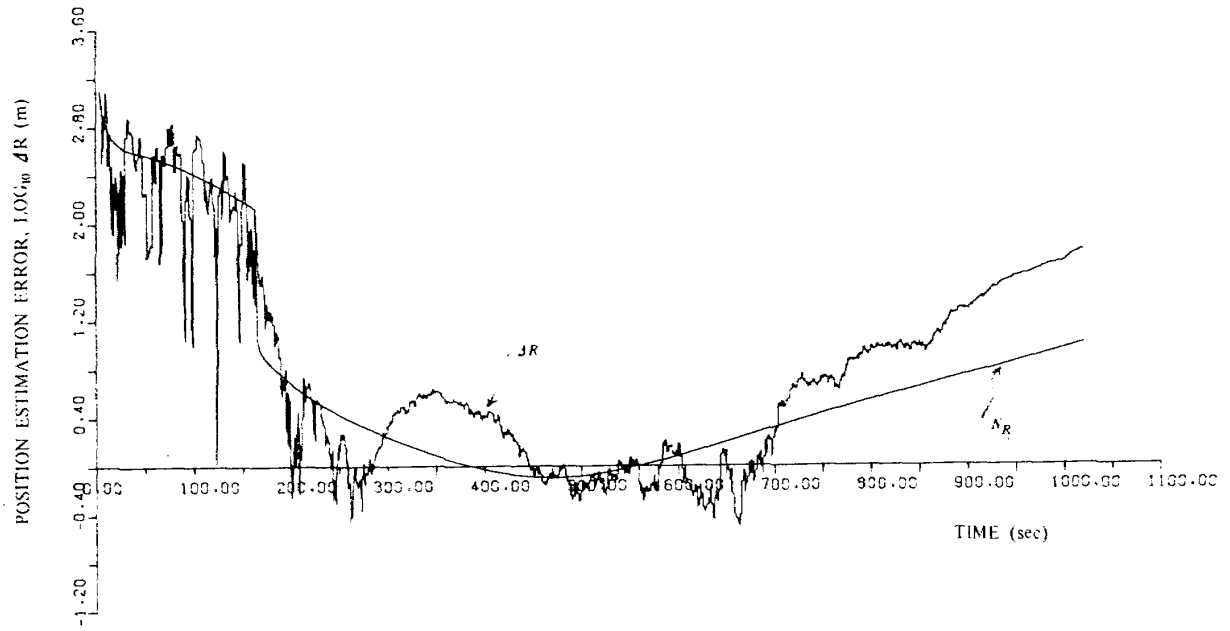


(c)  $\xi_z$  COMPONENT

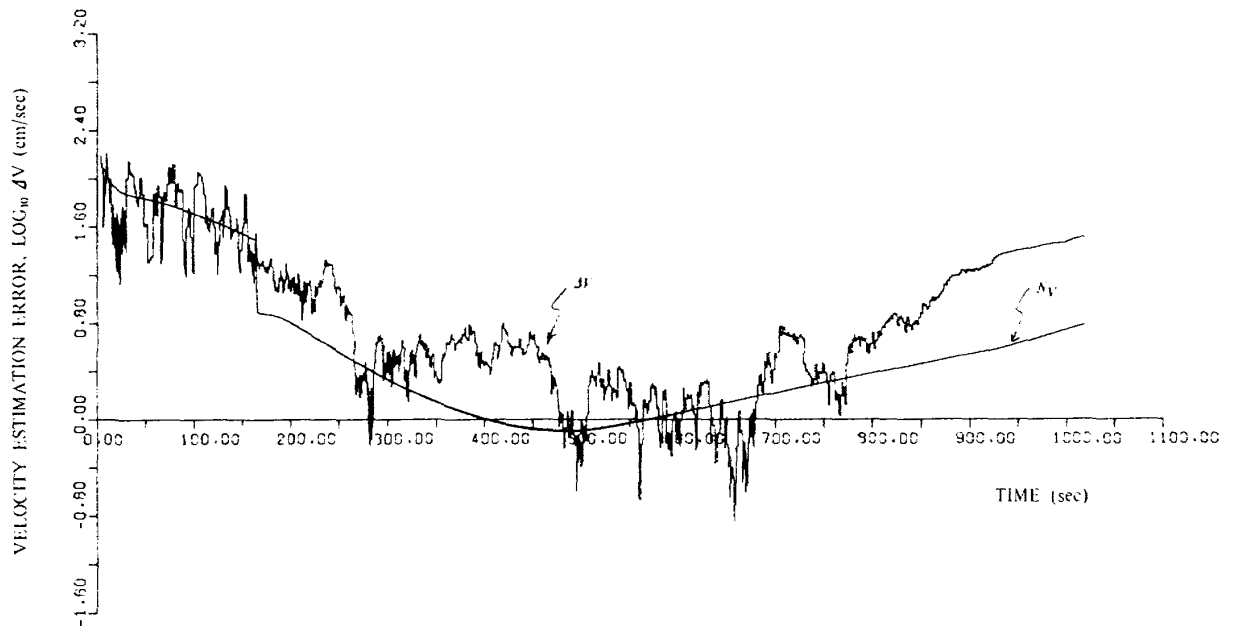


(f)  $\beta_z$  COMPONENT

Figure 14.2 Estimate of Components in the Gauss-Markov Structure;  
 $\sigma_p = 1$  m only



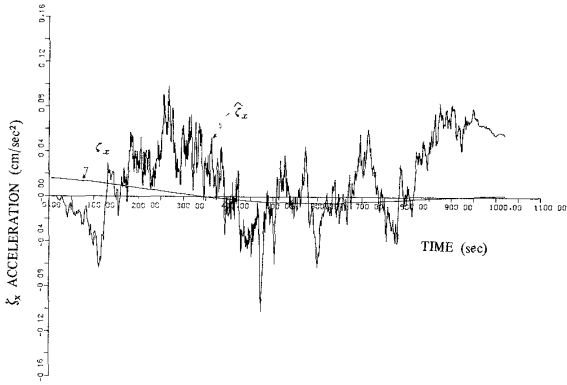
(a) POSITION ERROR



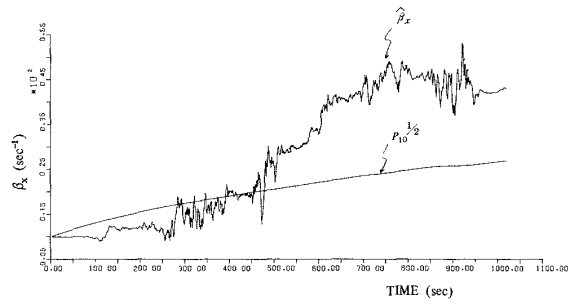
(b) VELOCITY ERROR

Figure 15.1 Performance of the DMC Algorithm for Case 2;  
Underestimated Observation Noise Level

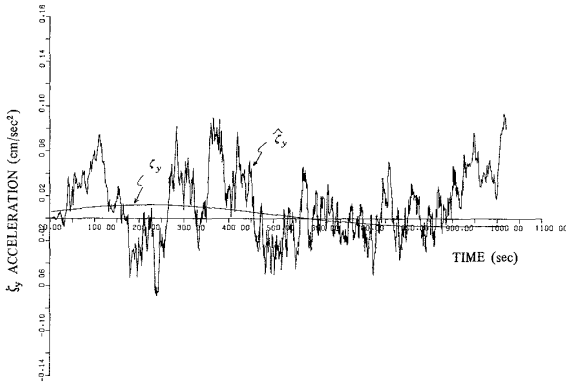




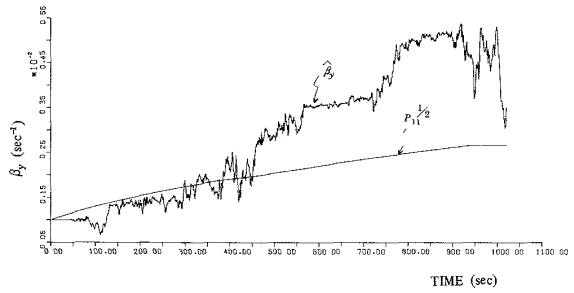
(a)  $\xi_x$  COMPONENT



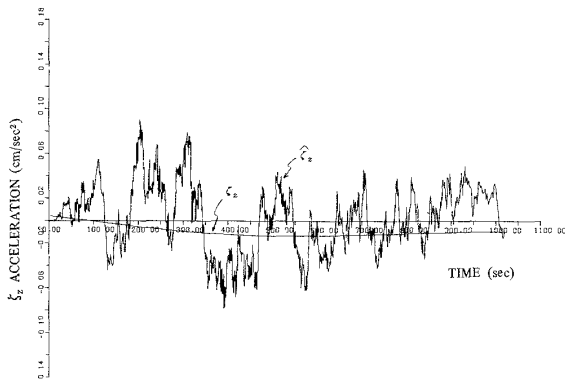
(d)  $\beta_x$  COMPONENT



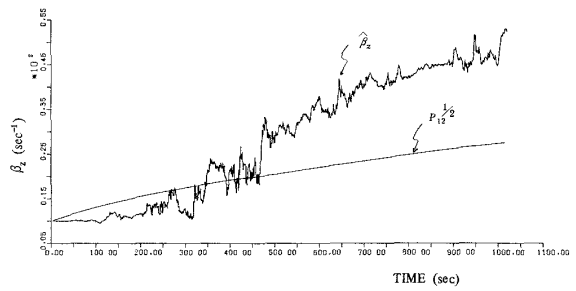
(b)  $\xi_y$  COMPONENT



(e)  $\beta_y$  COMPONENT



(c)  $\xi_z$  COMPONENT



(f)  $\beta_z$  COMPONENT

Figure 15.2 Estimate of Components in the Gauss-Markov Structure; Underestimated Observation Noise Level

ある。方式〔1〕は共分散行列に対する  $n(n+1)/2$  元 Riccati 方程式の積分を必要とするのに対し、 $r$  行列として解析的表式（もし利用し得るならば）を使った方式〔2〕（式（3-58））は  $n \times n$  元遷移行列の積分を必要とするから、元数のみに着目すると  $n$  大の時方式〔2〕が方式〔1〕を圧倒する。しかしながら導関数評価に必要な四則演算の回数比較によると逆に方式〔1〕が方式〔2〕を  $O(n^2)$  で上回る。数値積分の所要時間の殆んどは導関数評価のために占められるから、方式〔2〕による Bierman-Thornton アルゴリズムが方式〔1〕による拡張逐次推定アルゴリズムに処理時間において勝る理由が説明される。近地衛星に対する軌道決定においては 3.5 節で導いた近似式（3-82）が精度的にも十分実用に供されることが知られているから、方式〔2〕による拡張逐次推定アルゴリズムの使用を積極的に考えるべきである。次に参考のためコア容量に言及すると、KOSMOS ではすべて FORTRAN H (OPT2) による倍精度計算を行っており、SNC 法に対して 105 KW, DMC 法に対して 134 KW (Bierman-Thornton は 141 KW) 必要であった。

## 6. 結 論

STANPS (-B) を基盤にして、近地衛星のための研究用軌道決定プログラム KOSMOS を開発した。KOSMOS の現 version は機能として、(1) 拡張逐次推定アルゴリズムによる軌道決定、(2) 軌道予測、(3) 観測残差の計算、(4) トラッキングデータの生成、を有し近い将来衛星測地学におけるような多量のデータを同時処理するための (5) batch アルゴリズムによる軌道情報処理機能も加える予定である。

拡張逐次推定アルゴリズムによる軌道決定法を評価するために KOSMOS による広汎なシミュレーションスタディを試み、次の興味ある結果を得た。

(1) 軌道決定問題において不可避な、加速度のモデル誤差はフィルターを発散させる最大の要因であるが拡張逐次推定アルゴリズムを SNC または DMC モードで適用することにより、フィルターの安定化が図れる。

(2) 加速度のモデル誤差を精度良くトラックするのに十分なデータスパンならば、即ち十分に長い観測データ時系列が利用できるならば DMC 法により軌道決定精度を向上でき、しかもその推定値に基づくモデル誤差のパラメータ表示はポストフライトアナリシスに有用な情報を与える。他方データスパンが相対的に短いならば、SNC 法の方が高精度な結果を与える事がある。

(3) 中低高度衛星に対するフィルターモデルとして少くとも重力ポテンシャルの  $J_2$  項までを含む  $J_2$  モデル

が必要であり、他の摂動力、例えば月・太陽の引力、太陽輻射圧、大気抵抗は加速度のモデル誤差と見なしても精度的に大差はない。これは宇宙船に対する航法誘導フィルターの設計において、 $J_2$  モデルの妥当性を意味し重要である。

(4) SNC 法および DMC 法の精度は、パラメータの値に極めて鋭敏なので運用に際しては case by case で最適なパフォーマンスを与えるパラメータを発見する必要がある。

(5) 拡張逐次推定アルゴリズムを最適に tune されたパラメータによる SNC または DMC モードで運用することにより観測精度に等価な軌道決定精度を達成し得る。

(6) 観測量、観測精度、および観測精度の誤認が DMC 法による軌道決定へ及ぼす影響を Bierman-Thornton アルゴリズムにより明らかにした。

最後に、本研究に関して米国テキサス大学宇宙工学科の Byron D. Tapley 教授、Bob E. Schutz 教授から教示を得たことを記し、謝意を表す。また当所松島弘一、志雨徹主任研究官から STANPS の理論に関して討論があったことを付記する。

## 参 考 文 献

- 1) 宇宙開発委員会長期ビジョン特別部会；我が国の宇宙開発に関する長期ビジョン（資料1），昭和52年7月。
- 2) B. D. Tapley & B. E. Schutz; A Comparison of Estimation Methods for the Reduction of Laser Range Observations, Proc. Symposium on Earth's Gravitational Field & Secular Variations in Position (1973), pp. 489 ~ 508.
- 3) A. Gelb (ed.); Applied Optimal Estimation (1975), pp. 277 ~ 315, The M.I.T. Press.
- 4) K. A. Myers; Filtering Theory Methods and Applications to the Orbit Determination Problem for Near-Earth Satellite, AMRL Rept. No. 1058 (1973), Applied Mechanics Research Laboratory, The University of Texas at Austin.
- 5) B. D. Tapley; Statistical Orbit Determination Theory, In Recent Advances in Dynamical Astronomy (B. D. Tapley & V. Szebeheley ed.) (1973), D. Reidel, Dordrecht.
- 6) R. J. Fitzgerald; Filtering Horizon-Sensor Measurements for Orbital Navigation, J. Spacecraft Vol. 4, No. 4 (1967), pp. 428 ~ 435.
- 7) J. C. Wilcox; Self-Contained Orbital Navigation Systems with Correlated Measurement Errors,

- J. Spacecraft Vol. 3, No. 11 (1966), pp. 1585 ~ 1591.
- 8) H. E. Rauch; Optimum Estimation of Satellite Trajectories Including Random Fluctuations in Drag, AIAA Journal Vol. 3, No. 4 (1965), pp. 717 ~ 722.
  - 9) B. D. Tapley & D. S. Ingram; Orbit Determination in the Presence of Unmodeled Accelerations, IEEE Trans. on Automatic Control AC-18 (1973), pp. 369 ~ 373.
  - 10) B. D. Tapley & B. E. Schutz; Estimation of Unmodeled Forces on a Lunar Satellite, Celestial Mechanics 12 (1975), pp. 409 ~ 424.
  - 11) A. H. Jazwinski; Adaptive Sequential Estimation with Applications, Automatica Vol. 10 (1974), pp. 203 ~ 207.
  - 12) A. H. Jazwinski & C. Hipkins; J-Adaptive Estimation with Estimated Noise Statistics, Business and Technological Systems, Inc. (1973), BTS-TR-73-5.
  - 13) 松島, 他; 宇宙飛行体の汎用軌道解析用プログラム "STANP S" (1)人工衛星および惑星間宇宙船の軌道生成プログラム, 航技研資料 TM-359 (1978).
  - 14) J. O. Cappellari, et al; Mathematical Theory of the Goddard Trajectory Determination System, Goddard Space Flight Center N76-24291-24302 (1976), Greenbelt, Maryland.
  - 15) J. D. McMillan; Mathematical Specifications of the University of Texas Orbit Processor and Application to the Laser Observations of the Beacon Explorer-C Satellite, University of Texas Applied Mechanics Research Laboratory Report 1052 (1973).
  - 16) E. M. Gaposchkin (ed.); 1973 Smithsonian Standard Earth (3), Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report No. 353 (1973).
  - 17) B. D. Tapley & H. Hagar, Jr.; Estimation of Unmodeled Forces on a Low-Thrust Space Vehicle, Proceedings of the 3rd Symposium on Nonlinear Estimation Theory and Its Applications, San Diego, Calif. (1972).
  - 18) 村田; 常微分方程式のためのソフトウェアパッケージ, 航技研資料 TM-353 (1978).
  - 19) B. E. Schutz & R. Fleming; User's Guide to MATRIX: A Collection of Matrix Manipulation Routines for Fortran and Algol Programs on the UT 6400/6600 Computer System, University of Texas Applied Mechanics Research Laboratory (1973).
  - 20) 大坪, 他; 超低高度人工衛星 DAS の軌道に関する初期解析, 航技研 TR-507 (1977).
  - 21) G. J. Bierman; Measurement Updating using the U-D Factorization, Automatica Vol. 12 (1976), pp. 375 ~ 382.
  - 22) G. J. Bierman; Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation (1977), Academic Press.
  - 23) P. G. Kaminski; Square Root Filtering and Smoothing for Discrete Processes, Ph. D. dissertation, Dept. Aeronaut. Astronaut., Stanford Univ., Stanford, Calif., Sept. 1971.
  - 24) R. H. Battin; Astronautical Guidance (1964), McGraw-Hill, New York, pp. 338 ~ 339.
  - 25) J. F. Bellantoni & K. W. Dodge; A Square Root Formulation of the Kalman-Schmidt Filter, AIAA J., Vol. 5, No. 7, July 1967, pp. 1309 ~ 1314.
  - 26) A. Andrews; A Square Root Formulation of the Kalman Covariance Equations, AIAA J., Vol. 6, No. 6, June 1968, pp. 1165 ~ 1166.
  - 27) S. F. Schmidt; Computational Techniques in Kalman Filtering, in Theory and Applications of Kalman Filtering, NATO Advisory Group for Aerospace Research and Development, AGARDOGRAPH 139, Feb. 1970.
  - 28) P. Dyer & S. McReynolds; Extension of Square-Root Filtering to Include Process Noise, J. of Optimization Theory and Applications, Vol. 3, No. 6 (1969), pp. 444 ~ 459.
  - 29) N. A. Carlson; Fast Triangular Formulation of the Square Root Filter, AIAA J., Vol. 11, No. 9, Sept. 1973, pp. 1259 ~ 1265.
  - 30) W. S. Agec & R. H. Turner; Triangular Decomposition of a Positive Definite Matrix plus a Symmetric Dyad with Applications to Kalman Filtering, Math. Services Branch, Analysis and Computation Division, Tech. Report 38, White Sands Missile Range, (1972).
  - 31) C. L. Thornton & G. J. Bierman; Gram-Schmidt Algorithms for Covariance Propagation, Int. J. Control (1977), Vol. 25, No. 2, pp. 243 ~ 260.
  - 32) C. L. Thornton; Triangular Covariance Factorizations for Kalman Filtering, Ph. D. in Engineering, Systems Science Dept., University of California, Los Angeles (1976).

- 33) T. L. Jordan; Experiments on Error Growth Associated with Some Linear Least-Squares Procedures, *Math. of Comp.*, Vol. 22 (1968), pp. 579 ~ 588.
- 34) J. R. Rice; *Experiments on Gram-Schmidt Orthogonalization*, *Math. of Comp.*, Vol. 20 (1966), pp. 325 ~ 328.
- 35) W. M. Gentleman; Least-Squares Computations by Givens Transformations without Square Roots, *Journal of the Institute of Mathematics Applications*, Vol. 12 (1973), pp. 329 ~ 336.
- 36) P. G. Kaminski, A. E. Bryson & S. F. Schmidt; *Discrete Square Root Filtering; A Survey of Current Techniques*, *IEEE Trans. Aut. Control AC-16* (1971), pp. 727 ~ 736.

## 附録1 記号

使用した主な記号を以下に示す。

$A$	: $F$ の $X$ に関するヤコビアン, $\partial F / \partial X$	$m$	: 観測データ数
$A$	: 衛星の加速度ベクトル	$m_s$	: 衛星の質量
$A_{TB}$	: 2体問題による引力	$M, M_k$	: 地球または惑星の質量
$A_{NS}$	: 地球の偏平による摂動力	$M_{lt}$	: 地球固定系から地表面座標系への座標変換行列
$A_{NB}$	: 月, 太陽の引力による摂動力	MJD	: 修正ユリウス暦
$A_D$	: 大気抵抗による摂動力	$n$	: 状態ベクトル $X$ の次元
$A_{SR}$	: 太陽輻射圧による摂動力	$N_R$	: Mean of Date から True of Date への座標変換行列
$A_R$	: 1950.0 Inertial から Mean of Date への座標変換行列	$O$	: 適切な次元を持つ零行列
$A_S$	: 衛星の有効断面積	$P$	: 一般に $n \times n$ 共分散行列
$A_z$	: 方位角	$P_s$	: 太陽輻射圧の地球付近での値
$B$	: $12 \times 6$ 係数行列 (第3章式(3-85))	$p$	: ある epoch における観測データベクトルの次元
	: $3 \times 3$ 対角行列 (第3章式(3-64))	$q$	: 観測データ時系列の長さ
$B_1$	: True of Date から擬地球固定系への座標変換行列	$Q$	: 一般にプロセスノイズの $n \times n$ 共分散行列
$B_2$	: 擬地球固定系から地球固定系への座標変換行列	$Q_c$	: $u_c$ の $3 \times 3$ 共分散行列
$C_D$	: 大気抵抗係数	$Q_p$	: $u_p$ の $3 \times 3$ 共分散行列
$C_R$	: 衛星の反射係数	$R$	: $R$ のノルム (第2章)
$D$	: 位置, 速度ベクトル以外の推定したい未知パラメータベクトル		: 観測雑音の共分散行列 (第3章)
$D$	: $U-D$ 分解における $n \times n$ 対角行列	$R_{SUN}$	: 1 天文単位
$e$	: 地球の離心率	$R, \dot{R}$	: 衛星の位置, 速度ベクトル (1950.0 Inertial)
$E$	: 数学的期待値	$R_e$	: 地球の赤道面平均半径
$E_l$	: 上下角	$R_k$	: 惑星の地球に関する位置ベクトル
ET	: 暦表時	$R_z(\alpha)$	: $z$ 軸回り $\alpha$ 度の回転に対する直交行列
$f$	: 地球の偏平率	$R_S$	: 太陽の位置ベクトル (1950.0 Inertial)
$F$	: $n$ 次元ベクトル値非線型関数	$r$	: スカラー観測における観測雑音の分散
$G$	: 重力常数	$r_E, \dot{r}_E$	: 衛星の位置, 速度ベクトル (Mean of Date)
$G$	: 観測量を表わす $p$ 次元ベクトル値非線型関数	$r, \dot{r}$	: 衛星の位置, 速度ベクトル (True of Date)
$G_R$	: 1950.0 Inertial から True of Date への座標変換行列	$r_b, \dot{r}_b$	: 衛星の位置, 速度ベクトル (地球固定座標系)
$h$	: スカラー観測における $1 \times n$ 観測感度行列	$r_b, \dot{r}_b'$	: 衛星の位置, 速度ベクトル (擬地球固定座標系)
$h$	: 衛星高度	$r_{lt}, \dot{r}_{lt}$	: 衛星の位置, 速度ベクトル (地表面座標系)
$H, \tilde{H}$	: 観測感度行列, $\partial G / \partial X$	$r_{ob}$	: 観測点の位置ベクトル (地球固定座標系)
$H_R$	: True of Date から地球固定系への座標変換行列	$S$	: 共分散行列 $P$ の平方根, $P = SS^T$
$I_n$	: $n \times n$ 単位行列	ST	: 恒星時
JD	: ユリウス暦	$T, t$	: 時刻
$K$	: カルマン利得行列	TAI	: 国際原子時
$l$	: 未知パラメータベクトル $D$ の次元	$U$	: 対角要素 1 の $n \times n$ 上三角行列
		UT	: 世界時
		UTC	: 協定世界時
		$u_c, u_p$	: 白色雑音過程
		$\hat{u}_b$	: $a_b$ 方向の単位ベクトル

$V$	: 衛星の速度ベクトル (1950.0 Inertial)	$\rho$	: レンジ
$v_r$	: 衛星の対気速度	$\dot{\rho}$	: レンジレート
$W$	: プロセスノイズ	$\rho_b$	: 観測局に関する衛星の位置ベクトル (地球固定系)
$w, \tilde{w}$	: $u_\zeta, u_\beta$ からなる 6次元確率過程	$\rho_c$	: $\rho$ の大気圏屈折効果に対する補正值
$X, x$	: 一般に $n$ 次元状態ベクトル	$\rho_D$	: 大気密度
$x_p, y_p$	: 極運動パラメータ	$\sigma$	: 標準偏差
$Y$	: $p$ 次元観測データベクトル	$\phi$	: 測地学的緯度
$y$	: $p$ 次元観測残差ベクトル	$\phi_\zeta$	: $3 \times 3$ 遷移行列
$\alpha_g$	: グリニジ視恒星時	$\phi'$	: 地理学的緯度
$\alpha_{GM}$	: グリニジ平均恒星時	$\Phi$	: 一般に $n \times n$ 状態遷移行列
$\alpha$	: 1 軸回りの回転角	$\Psi$	: 地球の重力ポテンシャル
$\beta$	: 大気密度の減衰係数 (第 2 章)	$\delta\phi$	: 黄経の章動
$\beta$	: 相関時間係数ベクトル (第 3 章)	$\omega$	: 地球の自転角速度ベクトル (1950.0 Inertial)
$\Gamma$	: 共分散行列 $P$ の写像におけるプロセスノイズの寄与項, $n \times n$ 行列	$\mu$	: 地球の重力定数 (= $GM$ )
$\Delta t$	: ある epoch からの経過時間, 通常観測時間々隔	$\mu_k$	: 惑星の重力定数 (= $GM_k$ )
$\Delta H$	: 赤径の章動	添字など	
$\Delta_k$	: 惑星に関する衛星の位置ベクトル	$(\ )_m$	: モデル化された加速度ベクトル
$\delta_{ij}$	: クロネッカーのデルタ関数	$(\bar{\ })$	: 予測値を示し, $E(\cdot)$ と同様
$\delta$	: ディラックのデルタ関数	$(\hat{\ })$	: 更新 (推定) 値 (第 3 章以降)
$\bar{\varepsilon}$	: 平均黄道傾斜角	$(\hat{\ })$	: 単位ベクトル (第 2 章)
$\tilde{\varepsilon}$	: 真黄道傾斜角	$(\tilde{\ })$	: 推定誤差ベクトル
$e$	: $p$ 次元観測誤差ベクトル	$(\ )^T$	: 行列の転置
$\zeta$	: 加速度のモデル化誤差ベクトル	$(\ )_b$	: 地球固定座標系に関する表現
$\eta$	: eclipse パラメータ	$(\ )'_b$	: 擬地球固定座標系に関する表現
$\lambda$	: グリニジ子午線からの東経度	$(\ )_{lt}$	: 地表面座標系に関する表現
$\Theta$	: $n$ 次元ベクトル値非線型関数	$(\ )^*$	: 規準値による評価
$\nu$	: 屈折率 (2.4 節)		

附録 2 重力ポテンシャルの偏導関数

2.3.3 節で述べたように、地球の偏平による重力加速度、および対応する変分式の評価のために重力ポテンシャル  $\Psi$  の  $\mathbf{r}_b$  に関する 2 次までの偏導関数の評価が必要である。まず  $\partial\Psi/\partial\mathbf{r}_b$  を計算する。式(2-33)から

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{NS_b} &\triangleq (A_{x_b} \ A_{y_b} \ A_{z_b})^T \\ &= \left[ \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}_b} \right]^T \\ &= \frac{\partial\Psi}{\partial r} \left( \frac{\partial r}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T + \frac{\partial\Psi}{\partial\phi'} \left( \frac{\partial\phi'}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T \\ &\quad + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T \end{aligned}$$

と書けることに注意しよう。 $\Psi$  の  $(r, \phi', \lambda)$  に関する偏導関数は式(2-32) から容易に得られる：即ち

$$\begin{aligned} \frac{\partial\Psi}{\partial r} &= -\frac{1}{r} \cdot \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n (n+1) \sum_{m=0}^n \\ &\quad \times (C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda) \times P_n^m(\sin\phi') \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\phi'} &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n \\ &\quad \times (C_n^m \cos m\lambda + S_n^m \sin m\lambda) \\ &\quad \times [P_n^{m+1}(\sin\phi') - m \tan\phi' P_n^m(\sin\phi')] \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} &= \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left( \frac{R_e}{r} \right)^n \sum_{m=0}^n m (S_n^m \cos m\lambda \\ &\quad - C_n^m \sin m\lambda) P_n^m(\sin\phi') \end{aligned}$$

さらに Legendre 関数  $P_n^m(\sin\phi')$ ,  $\cos m\lambda$ ,  $\sin m\lambda$ , および  $m \tan\phi'$  は次の漸化式に従って逐次計算される：

$$\begin{aligned} P_n^0(\sin\phi') &= [(2n-1) \sin\phi' P_{n-1}^0(\sin\phi') \\ &\quad - (n-1) P_{n-2}^0(\sin\phi')] / n \\ P_n^m(\sin\phi') &= P_{n-2}^m(\sin\phi') + (2n-1) \cos\phi' \\ &\quad P_{n-1}^{m-1}(\sin\phi'), \quad m \neq 0, \quad m < n \\ P_n^n(\sin\phi') &= (2n-1) \cos\phi' P_{n-1}^{n-1}(\sin\phi'), \\ &\quad m \neq 0, \quad m = n \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} P_0^0(\sin\phi') &= 1, \quad P_1^0(\sin\phi') = \sin\phi', \\ P_1^1(\sin\phi') &= \cos\phi' \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sin m\lambda &= 2 \cos\lambda \sin(m-1)\lambda - \sin(m-2)\lambda \\ \cos m\lambda &= 2 \cos\lambda \cos(m-1)\lambda - \cos(m-2)\lambda \\ m \tan\phi' &= [(m-1) \tan\phi'] + \tan\phi' \end{aligned}$$

また  $r, \phi', \lambda$  の  $\mathbf{r}_b$  に関する偏導関数は次式による。

$$\begin{aligned} \frac{\partial r}{\partial\mathbf{r}_b} &= \frac{\mathbf{r}_b^T}{r}, \\ \frac{\partial\phi'}{\partial\mathbf{r}_b} &= \frac{1}{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \left[ -\frac{z_b \mathbf{r}_b^T}{r^2} + \frac{\partial z_b}{\partial\mathbf{r}_b} \right], \end{aligned}$$

$$\frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{r}_b} = \frac{1}{x_b^2 + y_b^2} \left[ x_b \frac{\partial y_b}{\partial\mathbf{r}_b} - y_b \frac{\partial x_b}{\partial\mathbf{r}_b} \right]$$

ここで

$$\frac{\partial x_b}{\partial\mathbf{r}_b}, \quad \frac{\partial y_b}{\partial\mathbf{r}_b}, \quad \text{および} \quad \frac{\partial z_b}{\partial\mathbf{r}_b}$$

は夫々列ベクトル  $(1\ 0\ 0)$ ,  $(0\ 1\ 0)$ , および  $(0\ 0\ 1)$  となる。それゆえ

$$\begin{aligned} A_{x_b} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{z_b}{r^2 \sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi'} \right) x_b \\ &\quad - \left( \frac{1}{x_b^2 + y_b^2} \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} \right) y_b \\ A_{y_b} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} - \frac{z_b}{r^2 \sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi'} \right) y_b \\ &\quad + \left( \frac{1}{x_b^2 + y_b^2} \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} \right) x_b \\ A_{z_b} &= \left( \frac{1}{r} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) z_b + \frac{\sqrt{x_b^2 + y_b^2}}{r^2} \frac{\partial\Psi}{\partial\phi'} \end{aligned}$$

を得る。

次に 2 次偏導関数も同様にして

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial r} \right) \left( \frac{\partial r}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T \\ &\quad + \frac{\partial\Psi}{\partial r} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial r}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\phi'} \right) \left( \frac{\partial\phi'}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T \\ &\quad + \frac{\partial\Psi}{\partial\phi'} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial\phi'}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T \\ &\quad + \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} \right) \left( \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T \\ &\quad + \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_b} \left( \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{r}_b} \right)^T \end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial\mathbf{r}_b} \begin{bmatrix} \frac{\partial\Psi}{\partial r} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\phi'} \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\lambda} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial^2\Psi}{\partial r^2} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial r \partial\phi'} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial r \partial\lambda} \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi' \partial r} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi'^2} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial\phi' \partial\lambda} \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda \partial r} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda \partial\phi'} & \frac{\partial^2\Psi}{\partial\lambda^2} \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial\mathbf{r}_b} \\ \frac{\partial\phi'}{\partial\mathbf{r}_b} \\ \frac{\partial\lambda}{\partial\mathbf{r}_b} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

を評価すれば得られる。ここで

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2} = \frac{\mu}{r^3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n (n+2)(n+1) \sum_{m=0}^n$$

$$\times (C_n^m \cos \lambda + S_n^m \sin m \lambda) P_n^m(\sin \phi')$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \phi'} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi' \partial r} = -\frac{\mu}{r^3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n$$

$$\times (n+1) \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m \lambda + S_n^m \sin m \lambda)$$

$$\times [P_n^{m+1}(\sin \phi') - m \tan \phi' P_n^m(\sin \phi')]$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r \partial \lambda} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial r} = -\frac{\mu}{r^3} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n$$

$$\times (n+1) \sum_{m=0}^n m (S_n^m \cos m \lambda$$

$$- C_n^m \sin m \lambda) P_n^m(\sin \phi')$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi'^2} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n (C_n^m \cos m \lambda$$

$$+ S_n^m \sin m \lambda) \{ \tan \phi' P_n^{m+1}(\sin \phi')$$

$$+ [m^2 \sec^2 \phi' - m \tan^2 \phi' - n(n+1)]$$

$$\times P_n^m(\sin \phi') \}$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \phi' \partial \lambda} = \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda \partial \phi'} = \frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n m$$

$$\times (S_n^m \cos m \lambda - C_n^m \sin m \lambda)$$

$$\times (P_n^{m+1}(\sin \phi') - m \tan \phi' P_n^m(\sin \phi'))$$

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \lambda^2} = -\frac{\mu}{r} \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{R_e}{r}\right)^n \sum_{m=0}^n m^2 (C_n^m \cos \lambda$$

$$+ S_n^m \sin m \lambda) \times P_n^m(\sin \phi')$$

$$\frac{\partial^2 \tau}{\partial \mathbf{r}_b^2} = \frac{1}{r} \left[ I_3 - \frac{\mathbf{r}_b \mathbf{r}_b^T}{r^2} \right]$$

$$\frac{\partial^2 \phi'}{\partial \mathbf{r}_b^2} = -\frac{1}{(x_b^2 + y_b^2)^{3/2}} \left[ \left( \frac{\partial z_b}{\partial \mathbf{r}_b} \right)^T - \frac{z_b \mathbf{r}_b}{r^2} \right]$$

$$\times \left[ x_b \left( \frac{\partial x_b}{\partial \mathbf{r}_b} \right) + y_b \left( \frac{\partial y_b}{\partial \mathbf{r}_b} \right) \right]$$

$$- \frac{1}{r^2 \sqrt{x_b^2 + y_b^2}} \left[ \mathbf{r}_b \left( \frac{\partial z_b}{\partial \mathbf{r}_b} \right) + z_b I_3 \right]$$

$$- \frac{2 z_b}{r^2} \mathbf{r}_b \mathbf{r}_b^T \Big]$$

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial \mathbf{r}_b^2} = -\frac{2}{(x_b^2 + y_b^2)} \begin{bmatrix} -y_b \\ x_b \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\times \left[ x_b \left( \frac{\partial x_b}{\partial \mathbf{r}_b} \right) + y_b \left( \frac{\partial y_b}{\partial \mathbf{r}_b} \right) \right]$$

$$+ \frac{1}{(x_b^2 + y_b^2)} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$



### 附録 3 線型最小分散不偏推定アルゴリズム

アルゴリズムの線型性から、

$$\hat{x}_k = M \mathbf{y}$$

を得る。ここに  $M$  は  $n \times m$  未知行列とする。上式は、観測データの線型結合として、推定値  $\hat{x}$  が得られることを意味する。次に不偏性から

$$E[\hat{x}_k] = x_k$$

を満足しなければならない。式(3-12), (3-15)から

$$E[M \mathbf{y}] = E[M(Hx_k + \boldsymbol{\epsilon})] = x_k$$

即ち  $E[\boldsymbol{\epsilon}] = \mathbf{0}$  に注意すると

$$MH = I$$

を得る。 $I$  は勿論  $n \times n$  単位行列である。最後に最小分散の条件を使って  $M$  を決定しよう。まず定義により

$$\begin{aligned} P_k &= E[(x_k - \hat{x}_k)(x_k - \hat{x}_k)^T] \\ &= E[(x_k - M \mathbf{y})(x_k - M \mathbf{y})^T] \\ &= E[\{x_k - M(Hx_k + \boldsymbol{\epsilon})\} \\ &\quad \times \{x_k - M(Hx_k + \boldsymbol{\epsilon})\}^T] \\ &= E[M \boldsymbol{\epsilon} \boldsymbol{\epsilon}^T M^T] \quad (\because MH = I) \\ &= M R M^T \quad (*) \end{aligned}$$

従って問題は拘束条件(\*)の下で  $P_k$  を最小化すること

である。厳密には  $\text{trace } P_k$  を行列微分法により最小化するが、形式的な以下の展開により同一の結果が得られる。 $P_k$  の対称性を考慮し、ラグランジュ乗数  $\Lambda$  ( $n \times n$  未知行列)を導入すると一般化評価規準として、

$$P_k = M R M^T + \Lambda^T (I - MH)^T + (I - MH) \Lambda$$

を得る。 $P_k$  が最小となるためには上式の第1変分が任意の  $\delta M, \delta \Lambda$  に対して零となる必要がある。即ち、

$$\begin{aligned} \delta P_k &= \delta M (R M^T - H \Lambda) + (M R - \Lambda^T H^T) \delta M^T \\ &\quad + \delta \Lambda^T (I - MH)^T + (I - MH) \delta \Lambda \end{aligned}$$

から、

$$I - MH = 0, \quad M R - \Lambda^T H^T = 0$$

が成立しなければならない。上式の第2式から、

$$M = \Lambda^T H^T R^{-1}$$

が従い、さらに第1式に代入して

$$\Lambda^T = (H^T R^{-1} H)^{-1}$$

を得る。以上から次の線型最小分散不偏推定アルゴリズム

$$\begin{aligned} P_k &= (H^T R^{-1} H)^{-1} \\ \hat{x}_k &= (H^T R^{-1} H)^{-1} H^T R^{-1} \mathbf{y} \end{aligned}$$

を得る。

## 附録4 式(3-74)の誘導

式(3-73)により

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_c(t) &= E[\tilde{\mathbf{u}}_c(t)\tilde{\mathbf{u}}_c^T(t)] \\
&= E\left[\int_{t_{k-1}}^t d\tau \int_{t_{k-1}}^t ds \phi_c(t,\tau) \right. \\
&\quad \left. \times \mathbf{u}_c(\tau)\mathbf{u}_c^T(s)\phi_c^T(t,s)\right] \\
&= \int_{t_{k-1}}^t d\tau \int_{t_{k-1}}^t ds \phi_c(t,\tau) \\
&\quad \times \underbrace{E[\mathbf{u}_c(\tau)\mathbf{u}_c^T(s)]}_{Q_c \delta(\tau-s)} \phi_c^T(t,s) \quad [\because \text{式(3-63)}] \\
&= \int_{t_{k-1}}^t d\tau \phi_c(t,\tau) Q_c \phi_c^T(t,\tau)
\end{aligned}$$

しかるに  $\phi_c$ ,  $Q_c$  とも対角行列であるから  $\tilde{Q}_c(t)$  も対角行列となり, その  $i$  要素は式(3-71), (3-72)より

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_{c_{ii}}(t) &= \int_{t_{k-1}}^t Q_{c_{ii}} e^{-2\beta_i(t-\tau)} d\tau \\
&= Q_{c_{ii}} \left[ \frac{e^{-2\beta_i(t-\tau)}}{2\beta_i} \right]_{t_{k-1}}^t \\
&= Q_{c_{ii}} \left[ \frac{1 - e^{-2\beta_i(t-t_{k-1})}}{2\beta_i} \right] \\
&= \sigma_i^2 [1 - \alpha_i^2(t)]
\end{aligned}$$

となる。

附録 5 KOSMOS の観測データによる更新アルゴリズム

簡単のため線型の観測系

$$\mathbf{y} \triangleq \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \mathbf{h}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_p^T \end{bmatrix} \mathbf{x} + \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \vdots \\ \varepsilon_p \end{bmatrix} \triangleq H\mathbf{x} + \boldsymbol{\varepsilon}$$

を考える。まずスカラーな観測データ  $y_1 = \mathbf{h}_1^T \mathbf{x} + \varepsilon_1$ ,  
 $\varepsilon_1 \sim N(0, r_1)$  に対して式 (3-40), (3-41) を適用して

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^{(1)} &= \bar{\mathbf{x}} + \Delta \bar{\mathbf{x}} \\ \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(1)} &= K^{(1)} (y_1 - \mathbf{h}_1^T \bar{\mathbf{x}}) \\ K^{(1)} &= \bar{P} \mathbf{h}_1 / (\mathbf{h}_1^T \bar{P} \mathbf{h}_1 + r_1) \\ \bar{P}^{(1)} &= \bar{P} - K^{(1)} \mathbf{h}_1^T \bar{P} \end{aligned}$$

を得る。次に  $\{\bar{\mathbf{x}}^{(1)}, \bar{P}^{(1)}\}$  を観測データ  $y_2$  で更新して、

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}^{(2)} &= \bar{\mathbf{x}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(2)} \\ \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(2)} &= K^{(2)} (y_2 - \mathbf{h}_2^T \bar{\mathbf{x}}^{(1)}) \end{aligned}$$

$$= K^{(2)} \{ y_2 - \mathbf{h}_2^T (\bar{\mathbf{x}} + \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(1)}) \}$$

$$= K^{(2)} \{ (y_2 - \mathbf{h}_2^T \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{h}_2^T \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(1)} \}$$

$$K^{(2)} = \bar{P}^{(1)} \mathbf{h}_2 / (\mathbf{h}_2^T \bar{P}^{(1)} \mathbf{h}_2 + r_2)$$

$$\bar{P}^{(2)} = \bar{P}^{(1)} - K^{(2)} \mathbf{h}_2^T \bar{P}^{(1)}$$

を得る。同様  $\{\bar{\mathbf{x}}^{(2)}, \bar{P}^{(2)}\}$  を観測データ  $y_3$  で更新して

$$\bar{\mathbf{x}}^{(3)} = \bar{\mathbf{x}}^{(2)} + \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(3)}$$

$$\Delta \bar{\mathbf{x}}^{(3)} = K^{(3)} (y_3 - \mathbf{h}_3^T \bar{\mathbf{x}}^{(2)})$$

$$= K^{(3)} \{ y_3 - \mathbf{h}_3^T (\bar{\mathbf{x}} + \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(2)}) \}$$

$$= K^{(3)} \{ (y_3 - \mathbf{h}_3^T \bar{\mathbf{x}}) - \mathbf{h}_3^T \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(1)} - \mathbf{h}_3^T \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(2)} - \mathbf{h}_3^T \bar{\mathbf{x}} \}$$

$$K^{(3)} = \bar{P}^{(2)} \mathbf{h}_3 / (\mathbf{h}_3^T \bar{P}^{(2)} \mathbf{h}_3 + r_3)$$

$$\bar{P}^{(3)} = \bar{P}^{(2)} - K^{(3)} \mathbf{h}_3^T \bar{P}^{(2)}$$

となる。以上の操作を  $p$  回繰り返した後最終的に

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} + \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(1)} + \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(2)} + \cdots + \Delta \bar{\mathbf{x}}^{(p)} \\ P = \bar{P}^{(p)} \end{cases}$$

を計算する。

---

## 航空宇宙技術研究所報告555号

昭和53年12月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)千182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)

---

**Printed in Japan**