

UDC 519.28:  
624.04.8:  
629.015.4

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-559

非定常入力を受ける線型多自由度系の応答の  
スペクトル解析と航空機の突風応答への応用

藤森義典

1979年1月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 非定常入力を受ける線型多自由度系の応答の スペクトル解析と航空機の突風応答への応用

藤森義典

Spectrum Analysis of the Response of Multi-Degree-of-Freedom Linear Systems under Nonstationary Input and its Application to Airplane Response in Atmospheric Turbulence

by Yoshinori Fujimori

## ABSTRACT

An exploratory study was conducted to establish the spectrum representation of the response of the multi-degree-of-freedom linear system, under the nonstationary input which is characterized by a product of a deterministic function and a stationary random process. New spectrum expressions are derived to describe the cross spectrums of the output within an arbitrary order. The present result includes the definition by Priestley, as a special case, and has been reduced to the stationary spectrum when a deterministic function is set constant.

In order to demonstrate feasibility of the nonstationary spectrum analysis the second order statistics, of the response of the model airplane under nonstationary atmospheric turbulence, are obtained in terms of the evolutionary cross spectrums of the generalized coordinates (displacement), their first derivatives (velocity) and their second derivatives (acceleration). It is shown that the total responses of these quantities, superposition of the various modes, can be computed at any positions of interest on the airplane wing.

Some numerical examples are given to evaluate the relative contributions of rigid and flexible modes to the total responses. One main conclusion from this study is the fact that the present method is very useful in estimating the maximum mean square at the transient stage of the acceleration response, which has been overlooked by the conventional stationary analysis.

## 概要

線型多自由度系への非定常入力を決定的包絡線関数と定常過程との積で表わし、系の応答のスペクトル解析を行った。結果を任意階数の変調スペクトルで表示した。これらは Priestley による定義、並びに定常解析を特別な場合として含むものである。

応用例として航空機の突風応答解析をとり上げ、一般座標についての変位、速度、加速度応答と、それらを重ね合せた全応答を求める式を導いた。

数値計算結果より得られた主な結論は、加速度応答が立上りで定常値より高い極大値をとるので従来の定常解析だけでは不十分であることである。

## 1章 非定常入力を受ける線型多自由度系の応答のスペクトル解析

### 1.1 非定常過程におけるスペクトル

定常過程のスペクトル表示、その他関連のある内容については基礎的な理論から広い応用に到るまで多くの研究がなされていて、その分野の基礎は Wiener に負うところが大きい。しかし定常解析ですべてを説明することはできない。たとえば、航空機の突風応答、地上構造物の地震応答、回転機械や往復運動をする機械にみられる振動振巾の始動時における増大等、非定常としなければならないものも多い。それらを定常過程として解析することは一つの近似であって、現象に即したものではない。しかしながら非定常過程においては定常過程において確立されている理論というものが全く役に立たず、解析は

\* 機体第2部 昭和53年8月26日受付

困難であるとされていて工学的にみて有効な方法が確立されていなかった。非定常過程の統計的性質も基本的には集合平均をとって表示される。しかし同一現象について多くのデータを集めることは实际上不可能なことが多い。そのためなんとかして定常過程において組立てられている概念を拡張して近似的な意味で非定常過程を取扱うという努力が少なからずなされて来た。この節では非定常過程を説明するために提案されている主なスペクトルを概観する。そしてその中の一つである変調スペクトル( Evolutionary Spectrum, or Spectra )を線型多自由度系の応答解析に応用した筆者の成果を説明する。

(イ) 一般化スペクトル( Generalized Spectrum )<sup>36), 52)</sup>

ある確率過程を { X } とする、この性質を最も一般的に論じるには集合平均を考えなければならない。しかしこの議論でも一つの要素の時系列について考察する。これは一つの近似であって当然非定常過程全体の性質について論じることにはならない。相関々数は

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X(t_1)X(t_2)] \quad (1-1)$$

で定義され、一般化スペクトルと相関々数は

$$S_{XX}(\omega_1, \omega_2) = \frac{1}{4\pi^2} \iint_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(t_1, t_2) e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} dt_1 dt_2 \quad (1-2)$$

$$R_{XX}(t_1, t_2) = \iint_{-\infty}^{\infty} S_{XX}(\omega_1, \omega_2) e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} d\omega_1 d\omega_2 \quad (1-3)$$

で結ばれている。この場合  $R_{XX}(t_1, t_2) = R_{XX}(t_1 - t_2)$  と書ければ定常過程における定義となる。定常過程においては上式 (1-2), (1-3) において

$$S_{XX}(\omega_1, \omega_2) = S_{XX}(\omega_1) \delta(\omega_1 + \omega_2)$$

のときに  $S_{XX}(\omega_1, \omega_2)$  が意味を持つことになるが、これは定常過程におけるスペクトルは無限に存在する周波数 { ω } から一つの  $\omega_1$  をとり出せば決まるが、非定常過程における一般化スペクトルを決めるには { ω } の中から  $\omega_1, \omega_2$  の二つの周波数をとり出さなければならぬ。このとき  $\omega_1$  と  $\omega_2$  は独立変数である。

(ロ) 瞬時スペクトル( Instantaneous Power Spectrum; I.P.S.)

これは Page<sup>31)</sup> により導入されたもので、ある確率過程  $X(t)$  について [ 0, t ] の間の I.P.S.  $\rho(t, \omega)$  が時刻  $t$ , 周波数  $\omega$  の関数として定義された。まず

$$\tilde{X}(t, \omega) = \int_{-\infty}^t X(s) e^{-i\omega s} ds \quad (1-4)$$

が存在するとする。この Fourier 変換の絶対値の自乗が Energy Spectrum  $f_I(\omega)$  となる、即ち

$$f_I(\omega) = \lim_{t \rightarrow \infty} E[|\tilde{X}(t, \omega)|^2] \quad (1-5)$$

ここで I.P.S.  $\rho(t, \omega)$  を次のように定義する。

$$E[|\tilde{X}(t, \omega)|^2] = \int_0^t \rho(s, \omega) ds \quad (1-6)$$

今  $\rho(t, \omega)$  は

$$\rho(t, \omega) = \frac{\partial}{\partial t} |\tilde{X}(t, \omega)|^2 \quad (1-7)$$

$$f_I(\omega) = \int_0^\infty \rho(t, \omega) dt \quad (1-8)$$

を満足しているものとする。ここで  $\rho(t, \omega) dt$  は確率過程  $X(t)$  の [ 0, t ] の間と [ 0, t + dt ] の間の Energy 分布の差を表わしているわけである。

また別に Mark<sup>35)</sup> は一般相関々数を

$$R_{XX}(\tau, t) = E[X(t - \tau/2)X(t + \tau/2)], -\infty < \tau < \infty \quad (1-9)$$

としこの Fourier 変換をとり

$$\Phi_{XX}(t, \omega) = \int_{-\infty}^{\infty} R_{XX}(\tau, t) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1-10)$$

なる  $\Phi_{XX}(t, \omega)$  を Instantaneous Power Spectrum または Intensity ( Mean Square ) Power Spectral Density と呼んだ。

(ハ) 変調スペクトル( Evolutionary Spectrum or Spectra )

これは Priestley<sup>32), 33), 34)</sup> によって定義されたものである、もし { X } が定常過程であればスペクトル分解定理から

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dZ(\omega) \quad (1-11)$$

と書ける。但し  $Z(\omega)$  は直交過程で  $E[|dZ(\omega)|^2] = dF(\omega)$  を満足する  $dZ(\omega)$ ,  $dF$  が存在することは証明されている。次に多くの確率過程は、定常、非定常を問わず、

$$X(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t, \omega) dZ(\omega) \quad (1-12)$$

で表わすことができ、 $\phi(t, \omega) = e^{i\omega t}$  のとき (1-12) 式は (1-11) 式と同じとなり定常過程の表示となる。もしも

$$\phi(t, \omega) = A(t, \omega) e^{i\omega t} \quad (1-13)$$

と書ける場合には確率過程  $X(t)$  の自乗平均は

$$E[X^2(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} |A(t, \omega)|^2 dF(\omega) \quad (1-14)$$

となる。この積分の中味を変調スペクトルと定義する。

$$dF_t(\omega) = |A(t, \omega)|^2 dF(\omega) \quad (1-15)$$

$F(\omega)$  が微分可能であれば  $dF(\omega)/d\omega = g(\omega)$  と置け

$$f_E(t, \omega) = |A(t, \omega)|^2 g(\omega) \quad (1-16)$$

なる  $f_E(t, \omega)$  を変調パワースペクトル密度 ( Evolutionary Power Spectral Density ) と定義する。

この  $f_E(t, \omega)$  は { X(t) } の [ t, t + dt ] の間の Local

Energy Distributionを表わしている。

## 1.2 非定常多入力下の多自由度系の応答のスペクトル解析

非定常過程におけるスペクトルの主な定義式をみたが、いずれの表示も特別な場合として定常過程におけるスペクトルと一致するような表現となっている。そこで一般化スペクトルだけは二つの周波数の関数で他の二つのスペクトルは時刻と周波数の関数となっているなど若干の相違がある。式の上からだけみれば一般化スペクトルが名称のように最も一般的なものであると思われる。しかしこれを求めるにはまず相関々数をデータの集合平均から得なければならないという困難さがある。またもし集合平均が一つの Sample の時間平均として置き換えられるとしてもこれを二つの時刻を変数とした二重 Fourier 変換が容易に行えるとは想像し難い。その点実用的でないと云えよう。次に瞬時スペクトルであるがこれは現象  $X(t)$  について  $[0, t]$  の間の記録が分っていれば求められるので、一般化スペクトルよりはるかに容易に計算できるであろう。最後の変調スペクトルは瞬時スペクトルを発展させたものと考えてよく  $[t, t+dt]$  の間のスペクトルを直接計算しようとするものであり、特に工学的な振動現象を解析するのに適していると筆者は判断した。ここではこの変調スペクトルの概念を使って、線型多自由度系の入出力関係を記述する。筆者と同様の試みは Hammond<sup>37)</sup> によってなされているが、以下の議論が明確であり簡潔である。

多自由度系への入力 Vector を

$$\vec{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$$

出力 Vector を

$$\vec{Y} = (Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$$

とする。この両者の関係は次のように書ける。

$$\vec{Y}(t) = \int_0^t [h(t-\tau)] \vec{X}(\tau) d\tau \quad (1-17)$$

ここで  $[h(t)]$  はインパルス応答関数の行列で振動系の特性を示すものである。一つの成分をとり出して書けば

$$Y_j(t) = \sum_m \int_0^t h_{jm}(t-\tau) X_m(\tau) d\tau \quad (1-18)$$

系の応答の1階の統計的性質 (1st Order Statistics, 普通平均値と呼ばれるもの) は上式より

$$E[Y_j(t)] = \sum_m \int_0^t h_{jm}(t-\tau) E[X_m(\tau)] d\tau \quad (1-19)$$

もし  $E[X_m(\tau)]$  がすべての  $m$  について 0 であれば、 $E[Y_j(t)]$  もすべての  $j$  について 0 になる。もし入力の中の一つでも 0 でなければ出てくる応答の平均は 0 とならない。ここでは入力の平均はすべて 0 として取扱う。

2階の統計的性質 (2nd Order Statistics, 自己相関、相互相関等を含む) は

$$E[Y_j(t_1)Y_k(t_2)] = \sum_m \sum_o \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} E[X_m(\tau_1)X_m(\tau_2)] \\ \times h_{jm}(t_1-\tau_1) h_{km}(t_2-\tau_2) d\tau_1 d\tau_2 \quad (1-20)$$

で与えられる。これは  $Y_j(t_1)$  と  $Y_k(t_2)$  の相互相関々数 (Cross Correlation Function) とも呼ばれるものである。以下に述べる主な内容は (1-20) 式に定義されている量を入力  $\vec{X}$  が非定常である場合にいかにして求めらるかということである。変調スペクトルの考え方を用いるので入力  $\vec{X}$  が決定的な包絡線関数 (Deterministic Envelope Function) と定常確率過程の積で表わされるような非定常過程とする。即ち,

$$X_m(t) = A_m(t, \omega) X_{s,m}(t) \quad (1-21)$$

このような非定常過程を Priestley は "Uniformly Modulated Process" と呼んだが、数学的には振巾変調 (Amplitude Modulation) と云うべきであろう。定常過程  $X_{s,m}(t)$  については (1-11) 式と同じく

$$X_{s,m}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\chi_m(\omega) \quad (1-22)$$

なる表現が可能であるので、非定常過程  $\vec{X}$  についても (1-12) 式にならい各々の成分について

$$X_m(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A_m(t, \omega) e^{i\omega t} d\chi_m(\omega) \quad (1-23)$$

と表わされるとする。但し  $d\chi_m$  は定常直交過程である。上の (1-22), (1-23) 式から

$$E[X_{s,m}(t_1)X_{s,\ell}(t_2)] = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} E[d\chi_m(\omega_1) d\chi_{\ell}^*(\omega_2)] \quad (1-24a)$$

$$E[X_m(t_1)X_{\ell}(t_2)] = \iint_{-\infty}^{\infty} e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} A_m(t_1, \omega_1) \\ \times A_{\ell}^*(t_2, \omega_2) E[d\chi_m(\omega_1) d\chi_{\ell}^*(\omega_2)] \quad (1-24b)$$

但し \* は共役複素数を示す。

ここでまず  $E[d\chi_m(\omega_1) d\chi_{\ell}^*(\omega_2)]$  の型式を決めなければならない。 $\chi_m(\omega)$  が微分可能であるとすると,

$$\frac{d\chi_m(\omega)}{d\omega} = \frac{d\chi_m(\omega)}{d\omega} d\omega \quad (1-25)$$

と書け (1-22) 式から

$$\frac{d\chi_m(\omega)}{d\omega} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega\tau} X_{s,m}(\tau) d\tau \quad (1-26)$$

となり

$$E[d\chi_m(\omega_1) d\chi_{\ell}^*(\omega_2)] = \left( \frac{1}{2\pi} \right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 \tau_1 - \omega_2 \tau_2)} \\ \times E[X_{s,m}(\tau_1) X_{s,\ell}^*(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 d\omega_1 d\omega_2 \quad (1-27)$$

が得られる。この(1-27)式をもう少し分りやすい表示するために定常過程 $\vec{X}_s$ の相関々数やスペクトルの定義が必要となる。即ち

$$\begin{aligned} R_{m\ell}(t_1, t_2) &= E[X_{s,m}(t_1)X_{s,\ell}(t_2)] \\ \Gamma_{X_{s,m\ell}}(\omega_1, \omega_2) & \end{aligned} \quad (\text{A})$$

$$= \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2 \iint_{-\infty}^{\infty} e^{-i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} R_{m\ell}(t_1, t_2) dt_1 dt_2 \quad (\text{B})$$

$$\begin{aligned} R_{m\ell}(t_1, t_2) &= \iint_{-\infty}^{\infty} \Gamma_{X_{s,m\ell}}(\omega_1, \omega_2) e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} \\ &\times d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (\text{C})$$

$\vec{X}_s$ は定常過程であるので

$$R_{m\ell}(t_1, t_2) = R_{m\ell}(t_1 - t_2) \quad (\text{D})$$

また(C)と(D)が両立するためには

$$\Gamma_{X_{s,m\ell}}(\omega_1, \omega_2) = \Phi_{X_{s,m\ell}}(\omega_1) \delta(\omega_1 - \omega_2) \quad (\text{E})$$

なる表現となるような $\Gamma_{X_{s,m\ell}}(\omega_1, \omega_2)$ しか存在し得ない。この $\Phi_{X_{s,m\ell}}(\omega_1)$ は $X_{s,m}(t_1)$ と $X_{s,\ell}(t_2)$ の Cross Spectrum であり $\Gamma_{X_{s,m\ell}}(\omega_1, \omega_2)$ の特別な場合である。

即ち

$$\Phi_{X_{s,m\ell}}(\omega_1) = \Gamma_{X_{s,m\ell}}(\omega_1, \omega_2)|_{\omega_1=\omega_2} \quad (\text{F})$$

(A)から(F)までの定義式を用いれば(1-27)式は

$$E[d\chi_m(\omega_1)d\chi_{\ell}^*(\omega_2)] = \Gamma_{X_{s,m\ell}}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \quad (1-28)$$

となる。このように非定常過程 $\vec{X}$ をParameter Process  $\vec{\chi}(\omega)$ により表示することができる。またこの $\vec{\chi}(\omega)$ の性質は定常過程 $\vec{X}_s$ から決めることができるわけである。便宜のため

$$M_{jm}(t, \omega) = \int_0^t A_m(t-\tau, \omega) h_{jm}(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1-29)$$

なる記号を導入すれば出力の2階の統計的性質は最終的に次のようにになる。

$$\begin{aligned} E[Y_j(t_1)Y_k(t_2)] &= \sum_m \sum_{\ell} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - t_2)} M_{jm}(t_1, \omega) \\ &\times M_{k\ell}^*(t_2, \omega) \Phi_{X_{s,m\ell}}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (1-30)$$

この(1-30)式の右辺の積分の中味をここで変調相互スペクトル(Evolutionary Cross Spectrum or Spectra)と定義する。即ち

$$\Psi_{jk}(t_1, t_2, \omega) = \sum_m \sum_{\ell} M_{jm}(t_1, \omega) M_{k\ell}^*(t_2, \omega) \Phi_{X_{s,m\ell}}(\omega) \quad (1-31)$$

次にこの(1-31)式で定義されるスペクトルが Priestley の定義を特別な場合として含むことを示す。ま

ず $A_m(t-\tau, \omega)$ の Taylor 展開を $\tau=0$ の回りで行う。

$$A_m(t-\tau, \omega) = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(-\tau)^r}{r!} A_m^{(r)}(t, \omega) \quad (1-32)$$

但し  $A_m^{(r)} = \partial^r A_m / \partial t^r$  また

$$\hat{H}(t, \omega) = \int_0^t h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (1-33)$$

と置いて(1-30)式を書きなおすと次のようにになる。

$$\begin{aligned} E[Y_j(t_1)Y_k(t_2)] &= \sum_m \sum_{\ell} \sum_{s=-\infty}^{\infty} e^{i\omega(t_1 - t_2)} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \\ &\times \frac{A_m^{(r)}(t_1, \omega) A_{\ell}^{(s)*}(t_2, \omega)}{r! s!} \hat{H}_{jm}^{(r)}(t_1, \omega) \hat{H}_{k\ell}^{(s)*}(t_2, \omega) \\ &\times \Phi_{X_{s,m\ell}}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (1-34)$$

但し  $(-1)^r \partial^r H / \partial \omega^r = (-1)^r \hat{H}^{(r)}(t, \omega)$

$$= \int_0^t \tau^r h(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau$$

1自由度系の入出力関係であると,  $j=k=1$ ,  $m=\ell=1$  である。また $t_1=t_2=t$ のとき(1-34)式は

$$\begin{aligned} E[Y^2(t)] &= \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{r=0}^{\infty} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{A(t, \omega) A(t, \omega)}{r! s!} \hat{H}^{(r)}(t, \omega) \\ &\times \hat{H}^{(r)*}(t, \omega) \Phi_{X_s}(\omega) d\omega \end{aligned} \quad (1-35)$$

となる。故に $Y(t)$ の変調スペクトル $\Psi_Y(t, \omega)$ は

$$\begin{aligned} \Psi_Y(t, \omega) &= [A(t, \omega) A^*(t, \omega) \hat{H}(t, \omega) \hat{H}^*(t, \omega) \\ &+ \dot{A}(t, \omega) A^*(t, \omega) \hat{H}'(t, \omega) \hat{H}^*(t, \omega) \\ &+ A(t, \omega) \dot{A}^*(t, \omega) \hat{H}(t, \omega) \hat{H}^{**}(t, \omega) \\ &+ O(|\dot{A}(t, \omega)|^2)] \Phi_{X_s}(\omega) \end{aligned} \quad (1-36)$$

この(1-36)式で第一項だけとる, 即ち $\dot{A}(t, \omega) \approx 0$ と仮定すると

$$\Psi_Y(t, \omega) \approx |A(t, \omega)|^2 |\hat{H}(t, \omega)|^2 \Phi_{X_s}(\omega) \quad (1-37)$$

入力についての変調スペクトルは

$$\Psi_X(t, \omega) \approx |A(t, \omega)|^2 \Phi_{X_s}(\omega) \quad (1-38)$$

となりこの(1-38)式がPriestleyの定義である。この(1-37), (1-38)式が物理的に意味あるためには包絡線関数の時間微分が0に等しいかそれに近くなければならない, 即ち確率過程が時間とともにゆっくり変化するものでなければならぬ。しかし(1-31)式を使うかぎりそのような条件は必要としない。この(1-31)式の応用は次の2章で示す。

次に3階の統計的性質(3rd Order Statistics)の導出を考える。これはEvolutionary Cross Bispectrumとして定義する。定義式を導く前に一言すると, 定常過

程の解析においても、2階の統計的性質、即ち通常スペクトルと云われるものの解析をすることが統計的取扱いのすべてであることが多い、高階のものについては二、三の応用例<sup>26), 29)</sup>しかない。もし定常過程が正規性であれば、高階の統計的性質は1階と2階のそれから導かれすぐ計算できるので、高階のものを論ずる必要はなかった。しかし一般的な確率過程であれば、高階のものも必要とされるので、それらを求めることができるようにしておかなければならない。ここでは変調スペクトルの概念を高階の統計的性質の記述にまで拡張しそれらを導いておく。まず非定常入力の三つの成分を書き出すと

$$\left. \begin{aligned} X_{j_1}(t_1) &= \int A_{j_1}(t_1, \omega_1) e^{i\omega_1 t_1} d\chi_{j_1}(\omega_1) \\ X_{k_1}(t_2) &= \int A_{k_1}(t_2, \omega_2) e^{i\omega_2 t_2} d\chi_{k_1}(\omega_2) \\ X_{\ell_1}(t_3) &= \int A_{\ell_1}(t_3, \omega_3) e^{i\omega_3 t_3} d\chi_{\ell_1}(\omega_3) \end{aligned} \right\} \quad (1-39)$$

定常部分についても

$$\left. \begin{aligned} X_{s, j_1}(t_1) &= \int e^{i\omega_1 t_1} d\chi_{j_1}(\omega_1) \\ X_{s, j_1}(t_2) &= \int e^{i\omega_2 t_2} d\chi_{k_1}(\omega_2) \\ X_{s, \ell_1}(t_3) &= \int e^{i\omega_3 t_3} d\chi_{\ell_1}(\omega_3) \end{aligned} \right\} \quad (1-40)$$

出力の三つの成分の積の期待値をとると

$$\begin{aligned} E[Y_j(t_1)Y_k(t_2)Y_{\ell}(t_3)] &= \sum_{j_1 k_1 \ell_1} \sum_{t_1 t_2 t_3} \int_0^t_1 \int_0^{t_2} \int_0^{t_3} \\ &\times E[X_{j_1}(\tau_1)X_{k_1}(\tau_2)X_{\ell_1}(\tau_3)] h_{jj_1}(t_1 - \tau_1) h_{kk_1}(t_2 - \tau_2) \\ &\times h_{\ell\ell_1}(t_3 - \tau_3) d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \end{aligned} \quad (1-41)$$

(1-39), (1-40)式から

$$\begin{aligned} E[X_{j_1}(t_1)X_{k_1}(t_2)X_{\ell_1}(t_3)] &= \int \int \int e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \omega_3 t_3)} \\ &\times A_{j_1}(t_1, \omega_1) A_{k_1}(t_2, \omega_2) A_{\ell_1}(t_3, \omega_3) \\ &\times E[d\chi_{j_1}(\omega_1) d\chi_{k_1}(\omega_2) d\chi_{\ell_1}(\omega_3)] \end{aligned} \quad (1-42)$$

$$\begin{aligned} E[X_{s, j_1}(\tau_1)X_{s, k_1}(\tau_2)X_{s, \ell_1}(\tau_3)] &= \int \int \int e^{i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} \\ &\times E[d\chi_{j_1}(\omega_1) d\chi_{k_1}(\omega_2) d\chi_{\ell_1}(\omega_3)] \end{aligned} \quad (1-43)$$

$\chi(\omega)$ は微分可能としているので

$$\begin{aligned} E[d\chi_{j_1}(\omega_1) d\chi_{k_1}(\omega_2) d\chi_{\ell_1}(\omega_3)] &= \left( \frac{1}{2\pi} \right)^3 \left\{ \int \int \int \right. \\ &\times e^{-i(\omega_1 \tau_1 + \omega_2 \tau_2 + \omega_3 \tau_3)} E[X_{s, j_1}(\tau_1)X_{s, k_1}(\tau_2)X_{s, \ell_1}(\tau_3)] \\ &\left. \times d\tau_1 d\tau_2 d\tau_3 \right\} d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \end{aligned} \quad (1-44)$$

定常過程における3階の相関々数、スペクトルの定義を書くと

$$\begin{aligned} R_{j_1 k_1 \ell_1}(t_1, t_2, t_3) &= E[X_{s, j_1}(t_1)X_{s, k_1}(t_2)X_{s, \ell_1}(t_3)] \\ &= \int \int \int \Gamma_{X_{s, j_1} k_1 \ell_1}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \omega_3 t_3)} \\ &\times d\omega_1 d\omega_2 d\omega_3 \end{aligned} \quad (G)$$

$$\begin{aligned} R_{j_1 k_1 \ell_1}(t_1, t_2, t_3) &= R_{j_1 k_1 \ell_1}(t_1 - t_3, t_2 - t_3) \\ &= " (t_2 - t_1, t_3 - t_1) \\ &= " (t_1 - t_2, t_3 - t_2) \end{aligned} \quad (H)$$

(G), (H)の両方が満足されるためには

$$\Gamma_{X_{s, j_1} k_1 \ell_1}(\omega_1, \omega_2, \omega_3) = \Phi_{X_{s, j_1} k_1 \ell_1}(\omega_1, \omega_2) \delta(\omega_1 + \omega_2 + \omega_3) \quad (I)$$

$$\Phi_{X_{s, j_1} k_1 \ell_1}(\omega_1, \omega_2) = \Gamma_{X_{s, j_1} k_1 \ell_1}(\omega_1, \omega_2, \omega_3)|_{\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 = 0} \quad (J)$$

でなければならない。故に(1-42)式は

$$\begin{aligned} E[X_{j_1}(t_1)X_{k_1}(t_2)X_{\ell_1}(t_3)] &= \int \int \int e^{i(\omega_1(t_1 - t_3) + \omega_2(t_2 - t_3))} \\ &\times A_{j_1}(t_1, \omega_1) A_{k_1}(t_2, \omega_2) A_{\ell_1}(t_3, -\omega_1 - \omega_2) \\ &\times \Phi_{X_{s, j_1} k_1 \ell_1}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (1-45)$$

となる。(1-29)式の表示を使えば出力の3階の統計的性質を示す期待値は次のようになる。

$$\begin{aligned} E[Y_j(t_1)Y_k(t_2)Y_{\ell}(t_3)] &= \int \int \sum_{j_1 k_1 \ell_1} \sum_{t_1 t_2 t_3} \\ &\times e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 - (\omega_1 + \omega_2) t_3)} M_{jj_1}(t_1, \omega_1) M_{kk_1}(t_2, \omega_2) \\ &\times M_{\ell\ell_1}(t_3, -\omega_1 - \omega_2) \Phi_{X_{s, j_1} k_1 \ell_1}(\omega_1, \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (1-46)$$

上式の中の積分の中味を新たに Evolutionary Cross Bispectrum と定義する。即ち

$$\begin{aligned} \Psi_{jk\ell}(t_1, \omega_1; t_2, \omega_2; t_3) &= \sum_{j_1 k_1 \ell_1} \sum_{t_1 t_2 t_3} M_{jj_1}(t_1, \omega_1) \\ &\times M_{kk_1}(t_2, \omega_2) M_{\ell\ell_1}(t_3, -\omega_1 - \omega_2) \Phi_{X_{s, j_1} k_1 \ell_1}(\omega_1, \omega_2) \end{aligned} \quad (1-47)$$

このように出力の Evolutionary Cross Bispectrum を求めるには入力の包絡線関数と、定常部分の Bispectrum が分っていればよい。4階の統計的性質(4th Order Statistics, 即ち Evolutionary Cross Trispectrum) も同様に求めることができる。最後に任意の K階の統計的性質を表わす一般式を示しておく。

出力の K-th Order の期待値は

$$\begin{aligned} E[Y_{n_1}(t_1)Y_{n_2}(t_2) \dots Y_{n_K}(t_K)] &= \underbrace{\int \int \dots}_{K-1 \text{ fold}} \int \\ &\times e^{i(\omega_1 t_1 + \omega_2 t_2 + \dots + \omega_{K-1} t_{K-1} - (\omega_1 + \omega_2 + \dots + \omega_{K-1}) t_K)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \Psi_{n_1 n_2 \dots n_K}(t_1, \omega_1; t_2, \omega_2; \dots; t_{K-1}, \omega_{K-1}; t_K) \\ & \times d\omega_1 d\omega_2 \dots d\omega_{K-1} \end{aligned} \quad (1-48)$$

Evolutionary Cross K-th Spectrum は

$$\begin{aligned} & \Psi_{n_1 n_2 \dots n_K}(t_1, \omega_1; t_2, \omega_2; \dots; t_{K-1}, \omega_{K-1}; t_K) \\ & = \sum_{m_1 m_2} \dots \sum_{m_K} M_{n_1 m_2}(t_1, \omega_1) M_{n_2 m_2}(t_2, \omega_2) \dots \\ & \times \dots M_{n_{K-1} m_{K-1}}(t_{K-1}, \omega_{K-1}) M_{n_K m_K}(t_K, -\omega_1 - \omega_2 - \dots - \omega_{K-1}) \\ & \times \Phi_{X_s, m_1 m_2 \dots m_K}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{K-1}) \end{aligned} \quad (1-49)$$

で定義される。但し  $1 \leq n_1, n_2 \dots n_K \leq n, 1 \leq m_1, m_2, \dots, m_K \leq n$ ,  $n$  は系の次元数。

$\Phi_{X_s, m_1 m_2 \dots m_K}(\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_{K-1})$  の説明や存在するための条件等については文献 27, 28 をみられたい。

2 階の統計的性質につき変調スペクトルが (1-31) 式で与えられたが、この中に共役複素数表示が入っている。しかし 3 階、K-階の場合の (1-47) 式や (1-49) 式にはその表示が入っていない。このことは実数値をとる確率過程については同じことなので問題ない。ただ (1-31) 式を応用で使うとき共役複素数表示をしておいた方が便利であるのでこのようにしておく、理由はその時説明する。

以上のように系の性質がインパルス応答関数ではっきり分っていて、外力の統計的性質を変調スペクトルとして取扱うことができるならば、応答を計算することが可能であることが示された。

## 2 章 上下突風を受ける航空機の応答解析への応用

### 2.1 航空機の突風応答の概要

この章では前章で導かれた変調相互スペクトルの概念を使って航空機の突風応答を解析する方法を記述する。それに先立ち、突風応答問題の歴史的背景や現状について概説する。

航空機の突風応答は航空機の強度、疲労のみならず操縦性、安定性、乗心地と様々な観点から重要であるので古くから研究されていることは周知のことであろう。そのため研究論文の数も多い。突風応答研究の内容を分類してみると

- (1) 突風、大気乱流の性質を調べる。
- (2) 航空機に働く空気力を計算する。
- (3) 航空機の弾性的性質を調べる。
- (4) 統計的解析を行う。

のようになり、これらはどれ一つとっても複雑で大きな

問題であるので、今なお多くの研究者がとり組んでいるものである。現在これら的内容をすべて完全に考慮して応答解析を行うことは不可能であるので、なにを調べたいかによりある項目を強調し、他の項目をモデル化して簡単化することは普通行われていることである。本章では前章で導かれた式の応用と、それらの有効性の例示という観点から(1)～(3)の項目については最小限のものとしたが、解析法の一般性を損うものではない。

今日の大型で可撓性の大きい航空機の場合には突風荷重は他の荷重、たとえば操舵、着陸荷重に比較して無視できるものではなく、むしろより重大な荷重であることは多言を要しない。ついでながら、今まで筆者の知る限りでは実機についての解析例はあまり見かけないようである。また発表されている例というのも詳しいことが分らないことが多い。それ故筆者は今まで発表されている論文でもほとんど基本的、理論的な内容のものを参照したに止まっている。

歴史的にみると航空機の突風応答は Küssner<sup>54), 55), 56)</sup> により初めて取り上げられた。彼はその名を冠する空気力学的変換関数(Aerodynamic Transfer Function)である Küssner Function (K.F.) を求めたので有名である。この K.F. は 2 次元剛翼が Step 状の突風に遭遇したときの Lift 变化を示すものである。また Wagner<sup>53)</sup> は翼の迎角が Step 状に変化したときの Lift 变化を与える式を導いた。これは Wagner Function (W.F.) と云われている。K.F. と W.F. はいずれもスパン方向に無限である 2 次元的な剛翼について有効であるが、スパンの有限な場合についての表示については Joneses<sup>59)</sup> が検討している。K.F. と W.F. は時間領域で定義された関数であるが、これらの周波数領域における関数は Sears 関数<sup>60), 61)</sup>, Theodorsen 関数<sup>57)</sup> である。対応の細かな点については Garick<sup>63)</sup> のものをみられたい。これら比較的簡単な式で与えられている空気力学的変換関数を用いて剛翼や弾性翼の突風応答、フロッターフラッターが解析されるようになったわけである。空気力解析について云えば 1950 年以降 Flutter 解析に必要なため長足の進歩をとげている。1960 年代の解説として Ashley, Landahl et al.<sup>66), 67), 68)</sup> によるものを見るとよい。また 3 次元的な表面のある構造の空気力については新しい計算法も開発されている。  
 70) 初期の頃の突風応答研究の趨勢については Doneley<sup>82)</sup> のものを参考するとよい。1950 年代に入って統計的解析法というものが工学の分野でも広く利用されるようになったので、突風応答の解析も定常過程の統計的解析という意味でなされるようになった。この分野で最も代表的な研究者は Houbolt<sup>76), 77), 78)</sup> と Diederich<sup>85)</sup> で

ある。特に文献77には多数の参考文献の一覧表がのっており、突風応答のみならず、不規則振動全般に興味のある人による参考となろう。我が国においては航技研で実機の飛行試験により突風の性質を調べることが行われており<sup>124)～130)</sup>、日本の上空における大気乱流についての情報もかなり積み上げられている。また片持ち翼についての一連の解析と実験が、前田、小早川<sup>122)</sup>により行われているが、これは翼の剛性、弾性、考慮する空気力の内容などが応答へどのような影響を及ぼすかを調べているものである。統計的に非定常な突風による応答は Howell と Lin<sup>115)</sup> により取り扱われたのが初めであるが、筆者と Lin<sup>116), 117), 118)</sup> とで完全なものとした。また関連した問題として、大型ロケットの打ち上げ時の Wind Shear の問題<sup>100)</sup>、Helicopter の突風応答の問題<sup>109), 110)</sup> 等があり、今後とも取りくむ分野は広い。

## 2.2 変位、速度、加速度の解析法

ここでは非定常入力下の多自由度系の応答解析例として航空機の突風応答の問題をとり上げる。入力として上下方向の突風という1入力を考え、航空機の運動を上下方向に限定して、それを多自由度系と考える。

まず航空機の運動方程式を

$$M_j \ddot{\xi}_j + \beta_j \dot{\xi}_j + M_j \omega_j^2 \xi_j = Q_j, \quad j = 1, 2 \dots n \quad (2-1)$$

但し

$$M_j = \iint_s \phi_j(x, y) \rho(x, y) dx dy$$

=  $j$  次の一般質量

$$Q_j = \iint_s \{F_M(x, y, t) + F_G(x, y, t)\} \phi_j(x, y) dx dy$$

=  $j$  次の一般力

$F_M$  = 航空機の運動による単位面積当たりの揚力変化

$F_G$  = 上下方向突風による単位面積当たりの揚力変化

$S = \phi_j(x, y)$  が定義されている領域

$\beta_j$  =  $j$  次の減衰係数

$\xi_j$  =  $j$  次の一般座標

$\rho$  = 単位面積当たり航空機質量

$\phi_j$  =  $j$  次の固有関数

$\omega_j$  =  $j$  次の固有値

航空機モデルの座標を図2-1のようにとる。

空力面は主翼に限り、かつアスペクト比の大きい矩形とみなし、上下動による空気力だけを考える。

$$F_M(x, y, t) = -\pi \rho_0 b \ddot{Z}(x, y, t) / 2$$

$$-\pi \rho_0 U \int_0^t \ddot{Z}(x, y, t) \phi(t-t_1) dt_1 \quad (2-2)$$

$$F_G(x, y, t) = \pi \rho_0 U \int_0^t W(x-Ut_1, y) \dot{\phi}(t-t_1) dt_1 \quad (2-3)$$

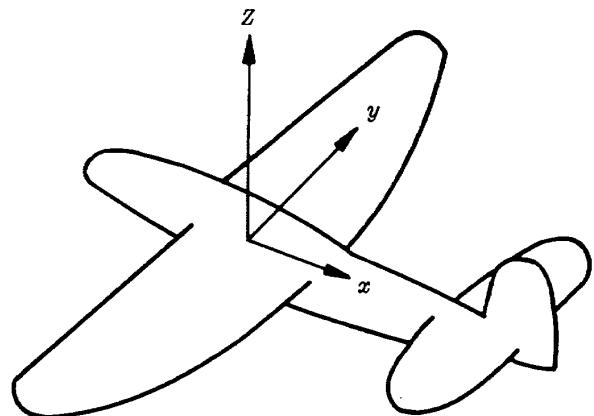


図2-1 航空機の座標系

但し  $Z(x, y, t) = \sum \phi_j(x, y) \xi_j(t) = \text{全応答}$

$\phi(t)$  = Wagner 関数

$\psi(t)$  = Küssner 関数

$b$  = 基準翼弦長の半分

$U$  = 飛行速度

$W(x-Ut, y)$  = 上下方向突風速度

$\rho_0$  = 空気密度

航空機は  $X$  軸の負の方向に一定の速度  $U$  で飛行しているものとする。大気乱流は凍結模様 (Frozen Pattern) となっているとする。 $(x, y, z)$  は航空機に付いている座標であるから上下突風は  $x-Ut$  の関数となる。

本解析では非圧縮性、亜音速の場合にかぎるので、Wagner 関数、Küssner 関数については次のものを使用する。

$$\phi(s) = 1 - 0.165 e^{-0.0455s} - 0.355 e^{-0.3s}$$

$$\psi(s) = 1 - 0.5 e^{-0.13s} - 0.5 e^{-s}, \text{ 但し } s = Ut/b$$

$$\dot{Z}(x, y, t) = \sum \phi_j(x, y) \dot{\xi}_j(t), \quad \ddot{Z}(x, y, t) = \sum \phi_j(x, y) \ddot{\xi}_j(t)$$

であることを考えて(2-2), (2-3)式に  $\dot{Z}$ ,  $\ddot{Z}$  を代入し一般力  $Q_j$  を求める。 $Q_j = Q_{M,j} + Q_{G,j}$  と分解できるので

$$Q_{M,j}(t) = -\pi \rho_0 U \sum_m \left\{ \int_0^t \ddot{\xi}_m(t_1) \phi(t-t_1) dt_1 + \frac{b}{2U} \ddot{\xi}_m(t) \right\} \quad (2-4)$$

$$Q_{G,j}(t) = \pi \rho_0 U \int_0^t \phi(t-t_1) dt_1 \iint_s W(x-Ut_1, y) \phi_j(x, y) dx dy$$

$$(2-5)$$

$$\text{但し } A_{jm} = \iint_m \phi_j(x, y) \phi_m(x, y) dx dy$$

運動方程式(2-1)式の Laplace 変換を求める

$$M_j p^2 \ddot{\xi}_j(p) + \beta_j p \dot{\xi}_j(p) + M_j \omega_j^2 \xi_j(p)$$

$$+\pi\rho_0U\sum_m A_{jm}\left\{p^2\bar{\phi}(p)\bar{\xi}_m(p)+\frac{b}{2U}p^2\bar{\xi}_m(p)\right\}=\bar{Q}_{G,j}(p) \quad (2-6)$$

上式で  $\bar{Q}_{M,j}(p)$  に相当するものは左辺に移してある。この式から  $j$  次のモードは他のモードと連成しているので行列方程式を解かなければならぬ。固有関数の性質から質量分布をも乗じて領域内で積分すればその値は 0 となる。しかし上式中の  $A_{jm}$  はモード形状関数のみの積なのでそれを領域内で積分しても一般に 0 にはならない。物理的にはこの  $A_{jm}$  を含んだ項は空気力による減衰効果を表わしている。 $(2-6)$  式は

$$\{C_{jm}\}\{\bar{\xi}_j\}=\{\bar{Q}_{G,j}\} \quad (2-7)$$

のように書けるので、この解を

$$\bar{\xi}_j=\sum_m \frac{a_{jm}}{|C_{jm}|} \bar{Q}_{G,m} \quad (2-8)$$

但し

$$|C_{jm}| = [C_{jm}] の行列式$$

$$a_{jm} = 要素 C_{jm} の余因子$$

のように書くことができる。 $(2-8)$  式の Laplace 逆変換をとると

$$\xi_j(t)=\sum_m \int_0^t L^{-1}\left(\frac{a_{jm}}{|C_{jm}|}\right) Q_{G,m}(t-\tau) d\tau \quad (2-9)$$

$$\begin{aligned} \text{ここで } L^{-1}\left(\frac{a_{jm}}{|C_{jm}|}\right) &= h_{jm}(\tau) \\ &= \text{インパルス応答関数} \\ &\quad (\text{I.R.F.}) \end{aligned}$$

であることは明白であるから  $(2-9)$  式を

$$\begin{aligned} \xi_j(t) &= \sum_m \int_0^t h_{jm}(\tau) Q_{G,m}(t-\tau) d\tau \\ &= \sum_m \int_0^t h_{jm}(t-\tau) Q_{G,m}(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (2-10)$$

と書く。今前節で議論した入出力関係を当てはめてみると  $Q_{G,m}(t)$  は入力  $X_m(t)$ ,  $\xi_j(t)$  は出力  $Y_j(t)$  の役割りをしていることに気が付くであろう。故に  $(1-20)$  式に相当するものは

$$\begin{aligned} E[\xi_j(t_1)\xi_k(t_2)] &= \sum_m \sum_l \int_0^{t_1} \int_0^{t_2} h_{jm}(t_1-\tau_1) \\ &\times h_{kl}^*(t_2-\tau_2) E[Q_{G,m}(\tau_1) Q_{G,l}(\tau_2)] d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (2-11)$$

となる。この式の中の共役複素数表示について説明しておく。インパルス応答関数  $h_{jm}(t)$  を求めるとき, Laplace 変換された Dummy Parameter  $p$  の多項式である  $a_{jm}$  /  $|C_{jm}|$  の分母の根は一般に複素数である。複素数は共役複素根で表われるので、それに対応する I.R.F. ;  $h_{jm}(t)$  の係数も共役となり  $h_{jm}(t)$  の値そのものは実数とな

る。しかしこの根が共役か実数であるかを調べず、計算の便宜上すべて複素数表示にしておいた方がプログラム上めんどうがない。そのため上式の中には共役複素数表示が必要となる。このことは  $h_{jm}(\tau)$  を具体的に求めるところでよりはっきりするであろう。 $(2-5)$  式を用いて  $(2-11)$  式を書きかえると

$$\begin{aligned} E[\xi_j(t_1)\xi_k(t_2)] &= (\pi\rho_0 U)^2 \sum_m \sum_l \int_0^{t_1} h_{jm}(t_1-\tau_1) d\tau_1 \\ &\times \int_0^{t_2} h_{kl}^*(t_2-\tau_2) d\tau_2 \int_0^{\tau_1} \dot{\phi}(\tau_1-\sigma_1) d\sigma_1 \int_0^{\tau_2} \dot{\phi}(\tau_2-\sigma_2) d\sigma_2 \\ &\times \iiint_s^s E[W(x_1-U\sigma_1, y_1) W(x_2-U\sigma_2, y_2)] \\ &\times \phi_m(x_1, y_1) \phi_l(x_2, y_2) dx_2 dy_2 dx_1 dy_1 \end{aligned} \quad (2-12)$$

上下方向の突風速度  $W$  は 1 つの非定常過程であるとしているので、次のような 2 つの積になっているとする。

$$W(x-Ut, y) = C(x-Ut, y) G(x-Ut, y) \quad (2-13)$$

但し  $C(x-Ut, y) =$  包絡線関数

$G(x-Ut, y) =$  定常確率過程

上の表示は前章で得られた結果を応用しているわけである。以下前章の表示に従い  $W$  は次のような Stieltjes 積分表示ができるとする。

$$W(x-Ut, y) = \int_{-\infty}^{\infty} C(x-Ut, y) e^{i\omega t} d\chi(\omega, x, y) \quad (2-14)$$

$G$  についても

$$G(x-Ut, y) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} d\chi(\omega, x, y) \quad (2-15)$$

$(2-13)$  式と前章の結果を用いれば

$$\begin{aligned} E[d\chi(\omega_1, x_1, y_1) d\chi^*(\omega_2, x_2, y_2)] \\ = \Phi(\omega_1, \xi, \eta) \delta(\omega_1 - \omega_2) d\omega_1 d\omega_2 \end{aligned} \quad (2-16)$$

但し  $\xi = x_1 - x_2$ ,  $\eta = y_1 - y_2$

上記の  $C(x-Ut, y)$  は前章における  $A(t, \omega)$ ,  $\Phi(\omega, \xi, \eta)$  は  $\Phi_{X_s, m\ell}(\omega)$  と同じ役割りをしていることが理解されよう。ここではこの包絡線関数  $C(x-Ut, y)$  はどの振動モードについても同じものを用いる。また  $\Phi(\omega, \xi, \eta)$  は定常過程  $G$  のスペクトルでありその相関々数とは次のような式で結ばれている。

$$\begin{aligned} E[G(x_1-Ut_1, y_1) G(x_2-Ut_2, y_2)] \\ = \iint \Phi(\omega_1, \xi_1, \eta) \delta(\omega_1 - \omega_2) e^{i(\omega_1 t_1 - \omega_2 t_2)} d\omega_1 d\omega_2 \\ = \int \Phi(\omega, \xi, \eta) e^{i\omega(t_1 - t_2)} d\omega \end{aligned} \quad (2-17)$$

定常突風  $G$  は均一で等質の場合には次式で与えられるスペクトルを持っている。<sup>52)</sup>

$$\begin{aligned}\Phi(\omega, \xi, \eta) = & \frac{2\sigma_G^2 L_G}{\pi U} e^{-i\omega\xi/U} \left[ \left( \frac{\omega}{U} \right)^2 \frac{\eta^2}{4a^2} K_2 \left( \frac{a\eta}{L_G} \right) \right. \\ & \left. + \frac{1}{4a^2} \frac{a\eta}{L_G} \left\{ 3K_1 \left( \frac{a\eta}{L_G} \right) - \frac{a\eta}{L_G} K_2 \left( \frac{a\eta}{L_G} \right) \right\} \right] \quad (2-18)\end{aligned}$$

但し  $\sigma_G$  = R.M.S. of G

$L_G$  = Turbulence Scale of G

$$a = \sqrt{1 + (L_G \omega/U)^2}$$

$K_1, K_2$  = Modified Bessel Function of the Second Kind

応用のときは C についての具体的な関数の型式を与える必要があるのでここでは次のようなものとした。

$$C(x-Ut, y) = C_0 \{ e^{\alpha(x-Ut)} - e^{\beta(x-Ut)} \} H(Ut-x) \quad (2-19)$$

但し

$C_0$  = 正規化係数 ; (2-19) 式の最大値を 1 とす るようにこれを決める。

$$\alpha, \beta = \text{任意定数}, \quad 0 \leq \alpha < \beta$$

$$H(Ut-x) = 0, \text{ for } Ut-x < 0$$

$$= 1, \text{ for } Ut-x > 0$$

この型式は非定常突風による上下方向の応答解析や地震波の非定常性の表示にも使われているので、本章の例題においても採用する。この中で y- 方向についての非定常性は一様と考えているが、これは航空機のスパン方向への突風の不規則性はあまり変わらないと思われるからである。

次に便宜のため新しい記号を導入する。

$$\begin{aligned}\Theta_{m\ell, \alpha\beta}(\omega) = & \iiint_s s \phi_m(x_1, y_1) \phi_\ell(x_2, y_2) dx_2 dy_2 dx_1 dy_1 \\ & \times \phi_m(x_1, y_1) \phi_\ell(x_2, y_2) dx_2 dy_2 dx_1 dy_1 \quad (2-20)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}M_{jm, \alpha}(t, \omega) = & e^{-\alpha Ut} \int_0^t e^{-(i\omega - \alpha U)\tau} \\ & \times h_{jm}(\tau) d\tau \int_0^{t-\tau} \dot{\phi}(\sigma) e^{-(i\omega - \alpha U)\sigma} d\sigma \quad (2-21)\end{aligned}$$

これらの記号を用いれば (2-12) 式を次のように書くことができる。

$$E[\xi_j(t_1) \xi_k(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi_{jk}(t_1, t_2, \omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \quad (2-12a)$$

但し

$$\begin{aligned}\Psi_{jk}(t_1, t_2, \omega) = & (\pi \rho_0 U)^2 C_0^2 \sum_m \sum_\ell \{ \\ & \Theta_{m\ell, \alpha\alpha}(\omega) M_{jm, \alpha}(t_1, \omega) M_{k\ell, \alpha}^*(t_2, \omega) \\ & - \Theta_{m\ell, \alpha\beta}(\omega) M_{jm, \alpha}(t_1, \omega) M_{k\ell, \beta}^*(t_2, \omega) \\ & - \Theta_{m\ell, \beta\alpha}(\omega) M_{jm, \beta}(t_1, \omega) M_{k\ell, \alpha}^*(t_2, \omega) \\ & + \Theta_{m\ell, \beta\beta}(\omega) M_{jm, \beta}(t_1, \omega) M_{k\ell, \beta}^*(t_2, \omega) \}\end{aligned}$$

$$+ \Theta_{m\ell, \beta\beta}(\omega) M_{jm, \beta}(t_1, \omega) M_{k\ell, \beta}^*(t_2, \omega) \} \quad (2-22)$$

この (2-22) 式で与えられる量は一般変位  $\xi_j$  と  $\xi_k$  の  $t_1$  &  $t_2$  における変調相互スペクトルである。変調 (自己) スペクトルについては  $j = k$  と置くことにより計算される。また自乗平均はさらに  $t_1 = t_2 = t$  として (2-12a) 式の右辺を積分することにより求められる。全応答の  $(x_1, y_1)$  と  $(x_2, y_2)$  における相関々数は

$$\begin{aligned}E[Z(x_1, y_1, t_1) Z(x_2, y_2, t_2)] \\ = \sum_j \sum_k \phi_j(x_1, y_1) \phi_k(x_2, y_2) E[\xi_j(t_1) \xi_k(t_2)] \quad (2-23)\end{aligned}$$

一般変位の微分量についての相関々数は

$$E[\xi_j^{(J)}(t_1) \xi_k^{(K)}(t_2)] = \frac{\partial^{J+K}}{\partial t_1^J \partial t_2^K} E[\xi_j(t_1) \xi_k(t_2)] \quad (2-24)$$

$$\text{但し } \xi_j^{(J)}(t) = \partial^J \xi_j(t) / \partial t^J; J = \text{整数}; J \geq 0$$

により求められる。しかし (2-24) 式の右辺が常に求められるとはかぎらないので、右辺が存在し、かつ有界であればという条件がいる。もし  $\xi_j$  と  $\xi_k$  が結合正規性 (Jointly Gaussian) で  $J=K$  のときは完全に成立つ。(2-12a) 式を (2-24) 式に代入すると

$$E[\xi_j^{(J)}(t_1) \xi_k^{(K)}(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{(J)(K)}(t_1, t_2, \omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \quad (2-25)$$

を得る。但し

$$\begin{aligned}\Psi^{(J)(K)}(t_1, t_2, \omega) = & (\pi \rho_0 U)^2 C_0^2 \sum_m \sum_\ell \{ \\ & \Theta_{m\ell, \alpha\alpha}(\omega) M_{jm, \alpha}(t_1, \omega) M_{k\ell, \alpha}^*(t_2, \omega) \\ & - \Theta_{m\ell, \alpha\beta}(\omega) M_{jm, \alpha}(t_1, \omega) M_{k\ell, \beta}^*(t_2, \omega) \\ & - \Theta_{m\ell, \beta\alpha}(\omega) M_{jm, \beta}(t_1, \omega) M_{k\ell, \alpha}^*(t_2, \omega) \\ & + \Theta_{m\ell, \beta\beta}(\omega) M_{jm, \beta}(t_1, \omega) M_{k\ell, \beta}^*(t_2, \omega) \} \quad (2-26)\end{aligned}$$

$$_J M_{jm, \alpha}(t, \omega) = \sum_{I=0}^J \binom{J}{I} (i\omega)^I \frac{\partial^{J-I}}{\partial t^{J-I}} M_{jm, \alpha}(t, \omega) \quad (2-27)$$

$\Psi^{(J)(K)}(t_1, t_2, \omega)$  の実数部は  $\omega$  についての偶関数で、虚部は奇関数である。全応答はこれらを重ね合せて

$$\begin{aligned}E[Z(\vec{r}_1, t_1) Z(\vec{r}_2, t_2)] \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^{(J)(K)}(\vec{r}_1, t_1; \vec{r}_2, t_2; \omega) e^{i\omega(t_1-t_2)} d\omega \quad (2-28)\end{aligned}$$

但し

$$\begin{aligned} & \Psi_{ZZ}^{(J)(K)}(\vec{r}_1, t_1, \vec{r}_2, t_2; \omega) \\ &= \sum_j \sum_k \phi_j(x_1, y_1) \phi_k(x_2, y_2) \Psi_{\xi_j \xi_k}^{(J)(K)}(t_1, t_2, \omega) \end{aligned} \quad (2-29)$$

この(2-29)式が全応答の変調相互スペクトルである。1点における応答は  $x_1 = x_2, y_1 = y_2$  と置いて計算する。さらに  $t_1 = t_2$  として(2-28)式を積分すれば自乗平均を得ることができる。これは普通数値積分によらなければならない。

ここで(2-20)式の  $\Theta_{m\ell, \alpha\beta}(\omega)$  の表示について考えるが、この中には(2-18)式で与えられている空風スペクトル  $\Phi(\omega, \xi, \eta)$  が含まれていて、非常に複雑な形をしていて解析が困難である。このため(2-18)式を次のように近似的に表わす。

$$\Phi(\omega, \xi, \eta) \approx \Phi_d(\omega) e^{-i\omega\xi/U} \quad (2-30)$$

但し

$$\Phi_d(\omega) = \frac{\sigma_G^2 L_G}{2\pi U} \frac{1+3(\omega L_G/U)^2}{(1+(\omega L_G/U)^2)^2} \quad (2-31)$$

この  $\Phi_d(\omega)$  は Dryden スペクトルと云われるものである。この(2-30)式を(2-20)式に代入して

$$\Theta_{m\ell, \alpha\beta}(\omega) = \Phi_d(\omega) R_{m, \alpha}(\omega) R_{\ell, \beta}^*(\omega) \quad (2-32)$$

$$R_{m, \alpha}(\omega) = e^{-\alpha b} \iint \phi_m(x-b, y) e^{(\alpha - i\omega/U)x} dx dy \quad (2-33)$$

### 2.3 解析モデル

数値計算に用いるモデルを図2-2に示す。このモデルは胴体重量を自由-自由梁の中心における付加重量とみなし、それは  $2b$  の長さに均等に分布していて、翼の剛性には寄与しないとする。翼は曲げ剛性  $EI$ 、単位当たり  $m_w$  の質量を持っていてスパン方向に一定とする。図2-2のモデルについての固有値、固有関数は文献87に与えられている。

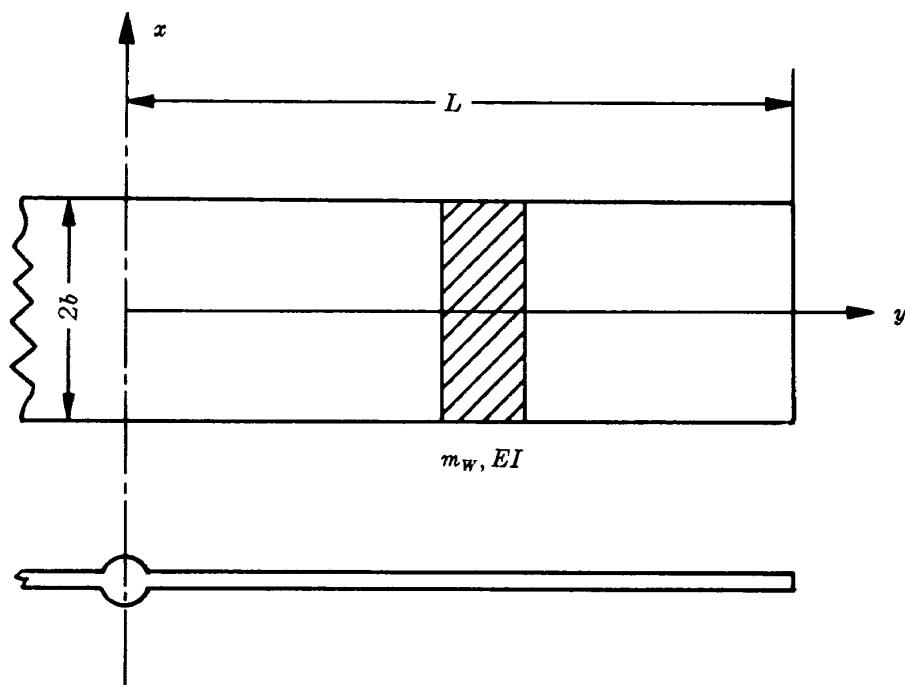


図2-2 直線梁モデル

ここでは簡単な2つのモードを考える。即ち

上下動  $\tilde{\phi}_1(x, y) = 1$

$$\begin{aligned} \text{曲げ1次 } \tilde{\phi}_2(x, y) &= S_1 e^{-Qy} + S_2 \cos Qy + S_3 \sin Qy \\ &+ S_4 \sinh Qy \end{aligned} \quad (2-34)$$

但し  $Qy = Q_2 y/L$

翼の曲げ1次の振動数は

$$\omega_2 = \left(\frac{Q_2}{L}\right)^2 \sqrt{\frac{EI}{m_w}} \quad (2-35)$$

であり、剛体モードの  $\omega_1$  は0である。一般力、一般質量の計算に必要な固有関数  $\phi_i(x, y)$  は上記のモード  $\tilde{\phi}_i(x, y)$  を正規化したものである。即ち

$$\phi_i(x, y) = N_i \tilde{\phi}_i(x, y) \quad (2-36)$$

正規化係数  $N_i$  は

$$\iint \rho(x, y) \phi_i^2(x, y) dx dy = M_T \quad (2-37)$$

から求まる。形状係数や  $N_i$  は (2-37) と

$$\square_{ij} = \iint \tilde{\phi}_i(x, y) \tilde{\phi}_j(x, y) dx dy \quad (2-38)$$

$$\triangle_{ij} = N_i N_j \square_{ij} \quad (2-39)$$

から計算する。結果を列記すると

$$\square_{11} = 4b L \quad (2-40)$$

$$\begin{aligned} \square_{12} &= \frac{4bL}{\Omega_2} \left\{ -S_1(e^{-\Omega_2} - 1) + S_2 \sin \Omega_2 + S_3(\cos h\Omega_2 - 1) \right. \\ &\quad \left. - S_4(\cos \Omega_2 - 1) \right\} \end{aligned} \quad (2-41)$$

$$\square_{22} = \frac{2bL}{\Omega_2} \left[ 2\Omega_2 \left\{ \frac{1}{2} S_2^2 - S_3^2 + \frac{1}{2} S_4^2 + S_1 S_3 \right\} \right.$$

$$+ (1 - e^{-2\Omega_2}) \left\{ S_1^2 + \frac{1}{4} S_3^2 - S_1 S_3 \right\} + (e^{2\Omega_2} - 1) \frac{1}{4} S_3^2$$

$$+ \sin 2\Omega_2 \left( \frac{1}{2} S_2^2 - \frac{1}{2} S_4^2 \right) + (1 - \cos 2\Omega_2) S_2 S_4$$

$$+ \left\{ 1 - e^{-\Omega_2} (\sin \Omega_2 + \cos \Omega_2) \right\} (2S_1 S_4 - S_3 S_4)$$

$$+ \left\{ 1 + e^{\Omega_2} (\sin \Omega_2 - \cos \Omega_2) \right\} S_3 S_4$$

$$+ \left\{ 1 + e^{-\Omega_2} (\sin \Omega_2 - \cos \Omega_2) \right\} (2S_1 S_2 - S_2 S_3)$$

$$+ \left\{ e^{\Omega_2} (\cos \Omega_2 + \sin \Omega_2) - 1 \right\} S_2 S_3 \quad (2-42)$$

$$\left. \begin{aligned} N_1 &= 1 \\ N_2 &= \left[ M_T / (\rho_w \square_{22} + m_F \tilde{\square}_{22}) \right]^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2-43)$$

$$\text{但し } \tilde{\square}_{22} = 2b (S_1 + S_2)^2 \quad (2-44)$$

この例題のインパルス応答関数の Fourier 変換は

$$\left. \begin{aligned} \tilde{h}_{11}(P) &= \sum_{k=1}^7 E_{11,k} P^{7-k} / P \sum_{\ell=1}^9 H_{\ell} P^{8-\ell} \\ \tilde{h}_{12}(P) &= \sum_{k=1}^6 E_{12,k} P^{7-k} / \sum_{\ell=1}^8 H_{\ell} P^{8-\ell} \\ \tilde{h}_{22}(P) &= \sum_{k=1}^6 E_{22,k} P^{6-k} / \sum_{\ell=1}^8 H_{\ell} P^{8-\ell} \end{aligned} \right\} \quad (2-45)$$

$|C_{jm}| = 0$  の根を  $\gamma_i$ ,  $i = 1 \sim 7$ ;  $\gamma_8 = 0$  とする。インパルス応答関数は

$$h_{ij}(t) = \sum_{m=1}^{M(i,j)} A_{ij,m} e^{\gamma_m t} \quad (2-46)$$

但し

$$A_{11,m} = \sum_{k=1}^7 E_{11,k} \gamma_m^{7-k} / \left[ \frac{d}{dP} \left\{ P \sum_{\ell=1}^8 H_{\ell} P^{8-\ell} \right\} \right]_{P=\gamma_m} \quad m = 1 \sim 8 \quad (2-47)$$

$$A_{\{12,22\},m} = \sum_{k=1}^6 E_{\{12,22\},k} \gamma_m^{6-k} / \left[ \frac{d}{dP} \left\{ \sum_{\ell=1}^8 H_{\ell} P^{8-\ell} \right\} \right]_{P=\gamma_m} \quad m = 1 \sim 7 \quad (2-48)$$

係数は

$$H_1 = M_1 M_2 + (M_1 \triangle_{22} + M_2 \triangle_{11}) B_3 + (\triangle_{11} \triangle_{22} - \triangle_{12} \triangle_{21}) B_3^2$$

$$\begin{aligned} H_2 &= 2M_1 M_2 (B_1 + B_2) + (M_1 \triangle_{22} + M_2 \triangle_{11}) (B_4 + (B_1 + B_2) B_3) \\ &\quad + 2(\triangle_{11} \triangle_{22} - \triangle_{12} \triangle_{21}) B_3 B_4 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_3 &= M_1 M_2 ((B_1 + B_2)^2 + 2B_1 B_2) + M_1 M_2 \omega_2^2 + (\triangle_{11} \triangle_{22} - \triangle_{12} \triangle_{21}) \\ &\quad \times (B_4^2 + 2B_3 B_5) + (M_1 \triangle_{22} + M_2 \triangle_{11}) (B_6 + B_4 (B_1 + B_2) \\ &\quad + B_1 B_2 B_3) + \triangle_{11} M_2 \omega_2^2 B_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_4 &= 2M_1 M_2 (B_1 + B_2) B_1 B_2 + 2M_1 M_2 \omega_2^2 (B_1 + B_2) \\ &\quad + (M_1 \triangle_{22} + M_2 \triangle_{11}) (B_6 + B_5 (B_1 + B_2) + B_1 B_2 B_4) \\ &\quad + \triangle_{11} M_2 \omega_2^2 (B_4 + B_3 (B_1 + B_2)) + 2(\triangle_{11} \triangle_{22} - \triangle_{12} \triangle_{21}) \\ &\quad \times (B_3 B_6 + 2B_4 B_5) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_5 &= M_1 M_2 (B_1 B_2)^2 + M_1 M_2 \omega_2^2 ((B_1 + B_2)^2 + 2B_1 B_2) \\ &\quad + (M_1 \triangle_{22} + M_1 \triangle_{11}) (B_6 (B_1 + B_2) + B_1 B_2 B_5) \\ &\quad + \triangle_{11} M_2 \omega_2^2 (B_5 + B_4 (B_1 + B_2) + B_1 B_2 B_3) \\ &\quad + (\triangle_{11} \triangle_{22} - \triangle_{12} \triangle_{21}) (B_5^2 + 2B_4 B_6) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_6 &= 2M_1 M_2 \omega_2^2 (B_1 + B_2) B_1 B_2 + (M_1 \triangle_{22} + M_2 \triangle_{11}) B_1 B_2 B_6 \\ &\quad + \triangle_{11} M_2 \omega_2^2 (B_6 + B_5 (B_1 + B_2) + B_1 B_2 B_4) \\ &\quad + 2(\triangle_{11} \triangle_{22} - \triangle_{12} \triangle_{21}) B_5 B_6 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} H_7 &= M_1 M_2 \omega_2^2 (B_1 B_2)^2 + \triangle_{11} M_2 \omega_2^2 (B_6 (B_1 + B_2) + B_1 B_2 B_5) \\ &\quad + (\triangle_{11} \triangle_{22} - \triangle_{12} \triangle_{21}) B_6^2 \end{aligned}$$

$$H_8 = \triangle_{11} M_2 \omega_2^2 B_1 B_2 B_6$$

$$E_{11,1} = M_2 + \triangle_{22} B_3$$

$$E_{11,2} = 2(B_1 + B_2) M_2 + \triangle_{22} (B_4 + B_3 (B_1 + B_2))$$

$$\begin{aligned} E_{11,3} &= M_2 ((B_1 + B_2)^2 + 2B_1 B_2) + M_2 \omega_2^2 \\ &\quad + \triangle_{22} (B_5 + B_4 (B_1 + B_2) + B_1 B_2 B_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{11,4} &= 2(B_1 + B_2) B_1 B_2 M_2 + 2(B_1 + B_2) M_2 \omega_2^2 \\ &\quad + \triangle_{22} (B_6 + (B_1 + B_2) B_5 + B_1 B_2 B_4) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} E_{11,5} &= M_2 (B_1 B_2)^2 + ((B_1 + B_2)^2 + 2B_1 B_2) M_2 \omega_2^2 \\ &\quad + \triangle_{22} ((B_1 + B_2) B_6 + B_1 B_2 B_5) \end{aligned}$$

$$E_{11,6} = 2(B_1+B_2)B_1B_2M_2\omega_2^2 + \Delta_{22}B_1B_2B_6$$

$$E_{11,7} = (B_1B_2)^2M_2\omega_2^2$$

$$E_{12,1} = -\Delta_{12}B_3$$

$$E_{12,2} = -\Delta_{12}\{B_4+(B_1+B_2)B_3\}$$

$$E_{12,3} = -\Delta_{12}\{B_5+(B_1+B_2)B_4+B_1B_2B_3\}$$

$$E_{12,4} = -\Delta_{12}\{B_6+(B_1+B_2)B_5+B_1B_2B_4\}$$

$$E_{12,5} = -\Delta_{12}\{(B_1+B_2)B_6+B_1B_2B_5\}$$

$$E_{12,6} = -\Delta_{12}B_1B_2B_6$$

$$E_{22,1} = M_1 + \Delta_{11}B_3$$

$$E_{22,2} = 2M_1(B_1+B_2) + \Delta_{11}\{B_4+B_3(B_1+B_2)\}$$

$$E_{22,3} = M_1\{(B_1+B_2)^2 + 2B_1B_2\} + \Delta_{11}\{B_5+B_4(B_1+B_2) + B_1B_2B_3\}$$

$$E_{22,4} = 2M_1(B_1+B_2)B_1B_2 + \Delta_{11}\{B_6+B_5(B_1+B_2)+B_1B_2B_4\}$$

$$E_{22,5} = M_1(B_1B_2)^2 + \Delta_{11}\{B_6(B_1+B_2)+B_1B_2B_5\}$$

$$E_{22,6} = \Delta_{11}B_1B_2B_6$$

$$A_1 = 0.5$$

$$A_2 = 0.2807575U/b$$

$$A_3 = 0.01365(U/b)^2$$

$$B_1 = 0.0455U/b$$

$$B_2 = 0.3U/b$$

$$B_3 = \pi\rho_0 b/2$$

$$B_4 = \pi\rho_0 U\{A_1+(B_1+B_2)b/(2U)\}$$

$$B_5 = \pi\rho_0 U\{A_2+B_1B_2b/(2U)\}$$

$$B_6 = \pi\rho_0 UA_3$$

行例  $[C_{jm}]$  は対称であるから  $h_{ij} = h_{ji}$  である。プログ

ラムの都合上  $r_i$ ,  $i=1,8$  はすべて複素根として取扱う。

この計算モデルについての  $R_{\ell,\alpha}(\omega)$  は次の通り。

$$R_{1,\alpha}(\omega) = e^{-\alpha b} 2L T_0(2b, \alpha - i\omega/U) \quad (2-49)$$

$$R_{2,\alpha}(\omega) = e^{-\alpha b} (2LN_2/\Omega_2)(S_1 \sinh \Omega_2 + S_2 \sin \Omega_2) \\ \times T_0(2b, \alpha - i\omega/U) \quad (2-50)$$

但し  $T_n(t, c) = \int_0^t x^n e^{cx} dx$ ;  $n = \text{整数} > 0$

#### 2.4 数値計算例

$$L = 7.9 \text{ (M)} \quad b = 1.4 \text{ (M)}$$

$$EI = 3.02 \times 10^7 \text{ (Kgf-M}^2\text{)}$$

$$\rho_w = 24.6 \text{ (Kg/M}^2\text{)}$$

$$R = 2.611 \quad \Omega_2 = 1.974$$

$$\rho_0 = 0.12765 \text{ (Kg/M}^3\text{)}$$

$$U = 66.2 \text{ (M/sec)} \quad L_G = 455 \text{ (M)}$$

$$\sigma_G = 1 \text{ (M/sec)}$$

#### CASE A

$$\alpha = 0.00151$$

$$\beta = 0.00529$$

#### CASE B

$$\alpha = 0$$

$$\beta = 0.07$$

表 2-1 計算に用いた定数

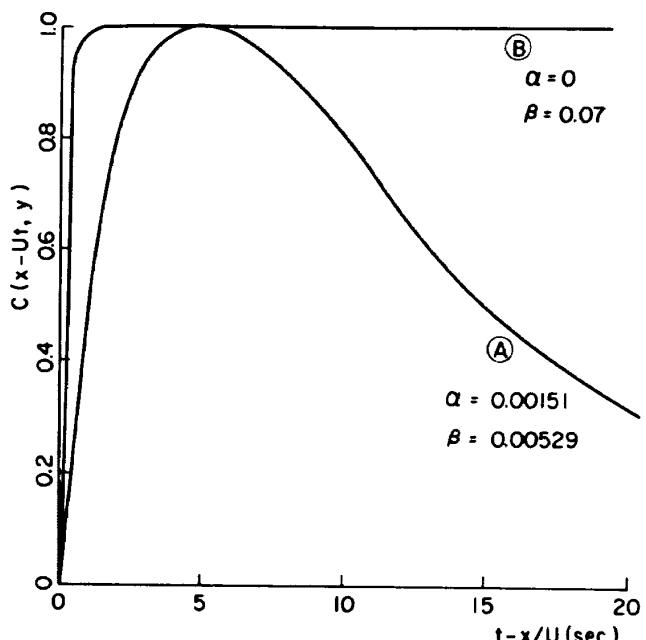


図 2-3 包絡線関数

用いた物理定数と、 $\alpha, \beta$ による包絡線の形状

表 2-1 に示す具体的な数値を先の解析モデルに入れ計算を行った。運動方程式に入っている構造減衰はすべて 0 とした。非定常性を示すパラメーターとしての  $\alpha, \beta$  は表 2-1 の中で (A), (B) となっている組合せとした。(A) はある時刻でピークを持つ関数で、現象的には除々に振幅が増大し、ある時刻からは減衰してゆくものである。(B) はステップ状の関数で、比較的短時間の内に立ち上り、あとは定常になるもので、この場合の  $t \rightarrow \infty$  の時の解がいわゆる定常応答となる。以下の説明と図の中で (A) とあるのは曲線 (A) を、(B) とあるのは曲線 (B) を使って計算した結果であることを示す。包絡線の形状を図 2-3 に示す。

Dryden スペクトル

定常突風のスペクトルとして用いた Dryden スペクト

ルの形状を図 2-4 に示す。 $\omega = 0$  から 0.1 ぐらいでは大体平らで、それからはレベルが減衰する。細かく見るとこのスペクトルは  $\omega_p = U/(L_G \sqrt{3})$  でピークを持つ。計算に用いた定数を入れると  $\omega_p = 0.084$  である。

計算は  $t_1 = t_2 = t$ ,  $\vec{r}_1 = \vec{r}_2$ , 即ち  $y_1 = y_2 = y$  のとき行う、そのため記号を次のように簡略化する。

$$\Psi_{\xi_j \xi_k}(t, \omega) = \Psi_{\xi_j \xi_k}^{(0)(0)}(t, t, \omega) \quad \text{一般座標の変位}$$

$$\Psi_{\dot{\xi}_j \dot{\xi}_k}(t, \omega) = \Psi_{\dot{\xi}_j \dot{\xi}_k}^{(1)(1)}(t, t, \omega) \quad \text{一般座標の速度}$$

$$\Psi_{\ddot{\xi}_j \ddot{\xi}_k}(t, \omega) = \Psi_{\ddot{\xi}_j \ddot{\xi}_k}^{(2)(2)}(t, t, \omega) \quad \text{一般座標の加速度}$$

$$\Psi_Z(y, t, \omega) = \Psi_{ZZ}(\vec{r}_1, t, \vec{r}_2, t, \omega) \quad \text{全 变 位}$$

$$\Psi_Z'(y, t, \omega) = \Psi_{ZZ}'(\vec{r}_1, t, \vec{r}_2, t, \omega) \quad \text{全 速 度}$$

$$\Psi_Z''(y, t, \omega) = \Psi_{ZZ}'''(\vec{r}_1, t, \vec{r}_2, t, \omega) \quad \text{全 加 速 度}$$

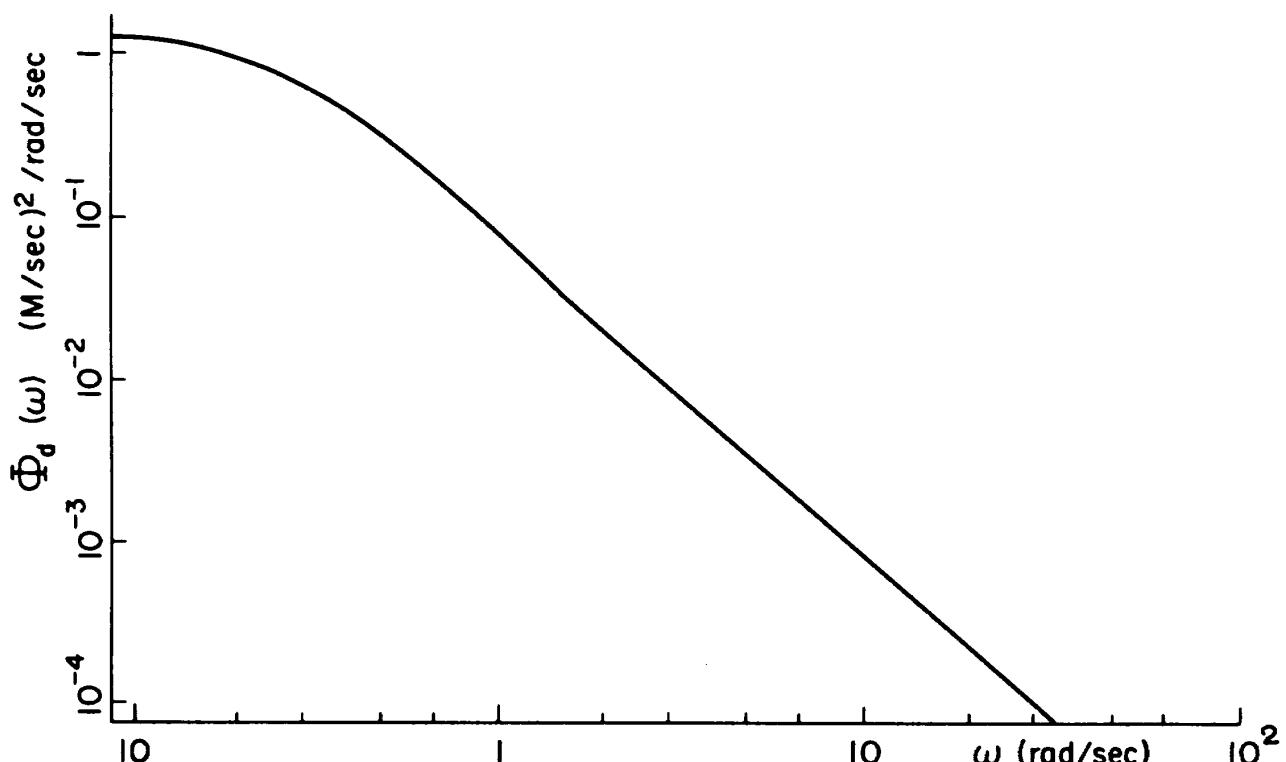


図 2-4 Dryden's Spectrum

以下計算結果について説明する。

一般座標についての変調スペクトル

一般座標  $\xi_1, \xi_2$  についての変調スペクトルを図 2-5 (a)(b), 図 2-6 (a)(b) に示す。 $\Psi_{\xi_1 \xi_1}$  は剛体モードによるものでエネルギーは  $\omega = 0$  の回りに集中している。(A) (B) いずれの場合も変調スペクトルの形状は本質的に変わらない。図 2-5 (b)において分るように時刻  $t$  が大きくな

なると、変調スペクトルが  $\omega$  とともに滑らかに減衰するとはかぎらないが、これは計算誤差のためである。

$\Psi_{\xi_2 \xi_2}$  は曲げ一次の弾性モードによるものであるから  $\omega = \omega_2$  のところにももう一つのピークを持った変調スペクトルとなる。 $\omega = 0.3$  の回りのピークは入力である Dryden スペクトルの影響によるものである。この曲げモードの変調スペクトルも (A)(B) いずれの場合も同じ

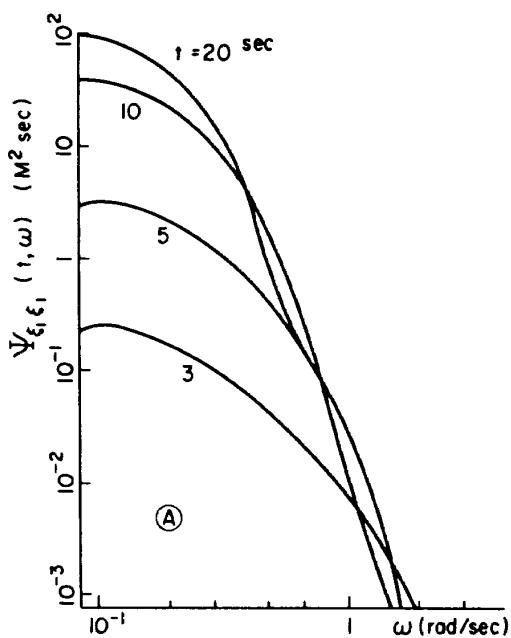


図 2 - 5 (a) 一般座標上下剛体モードの変位に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_1 \xi_1} (t, \omega)$

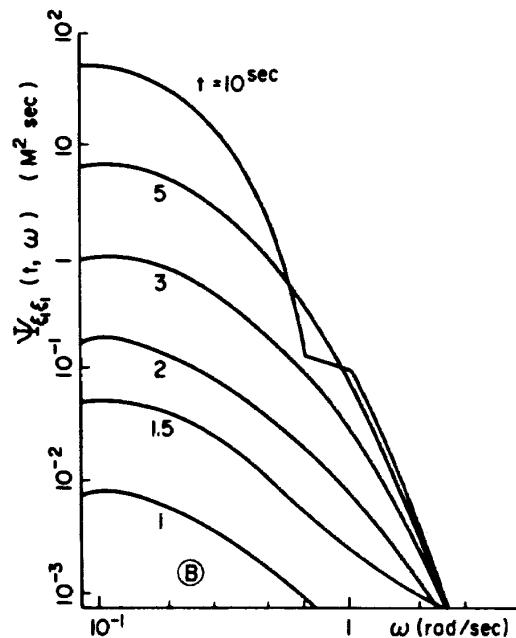


図 2 - 5 (b) 一般座標上下剛体モードの変位に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_1 \xi_1} (t, \omega)$

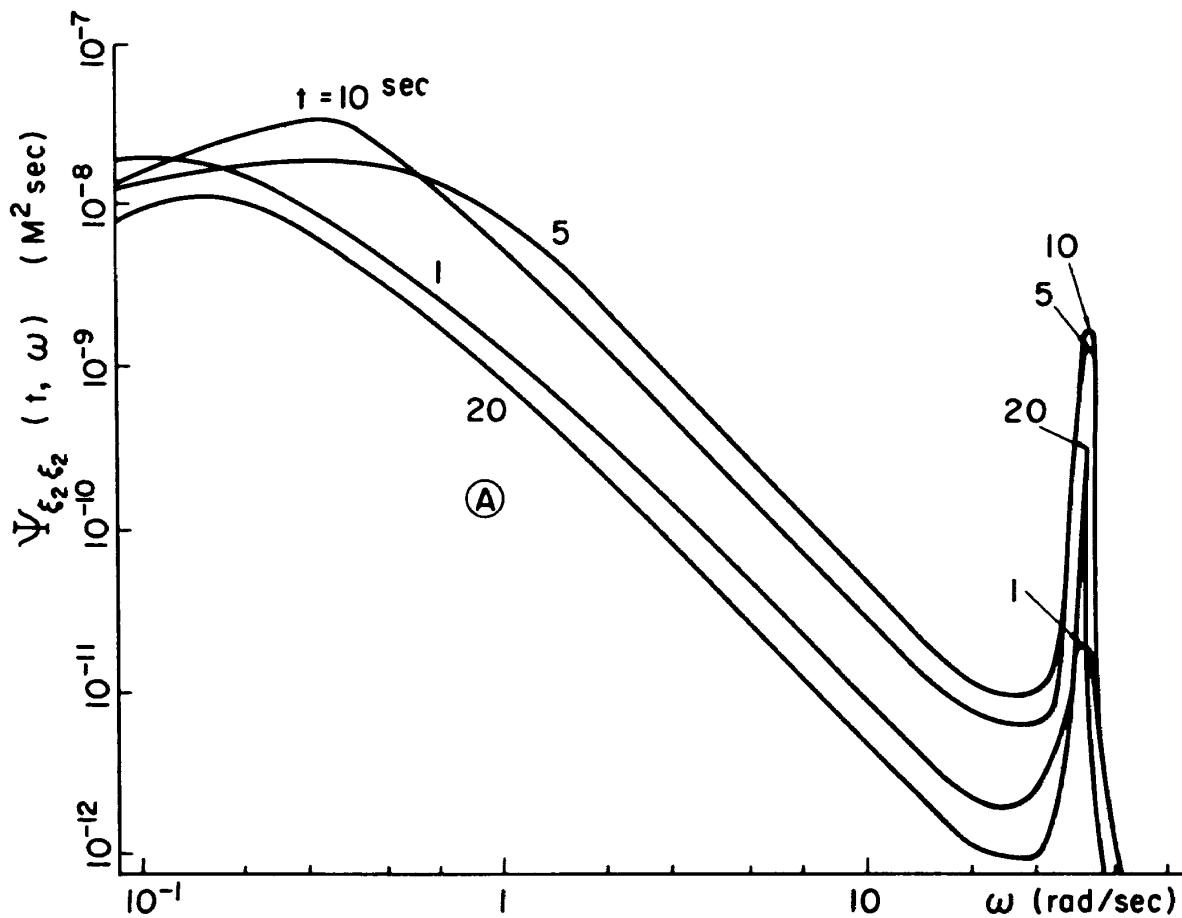
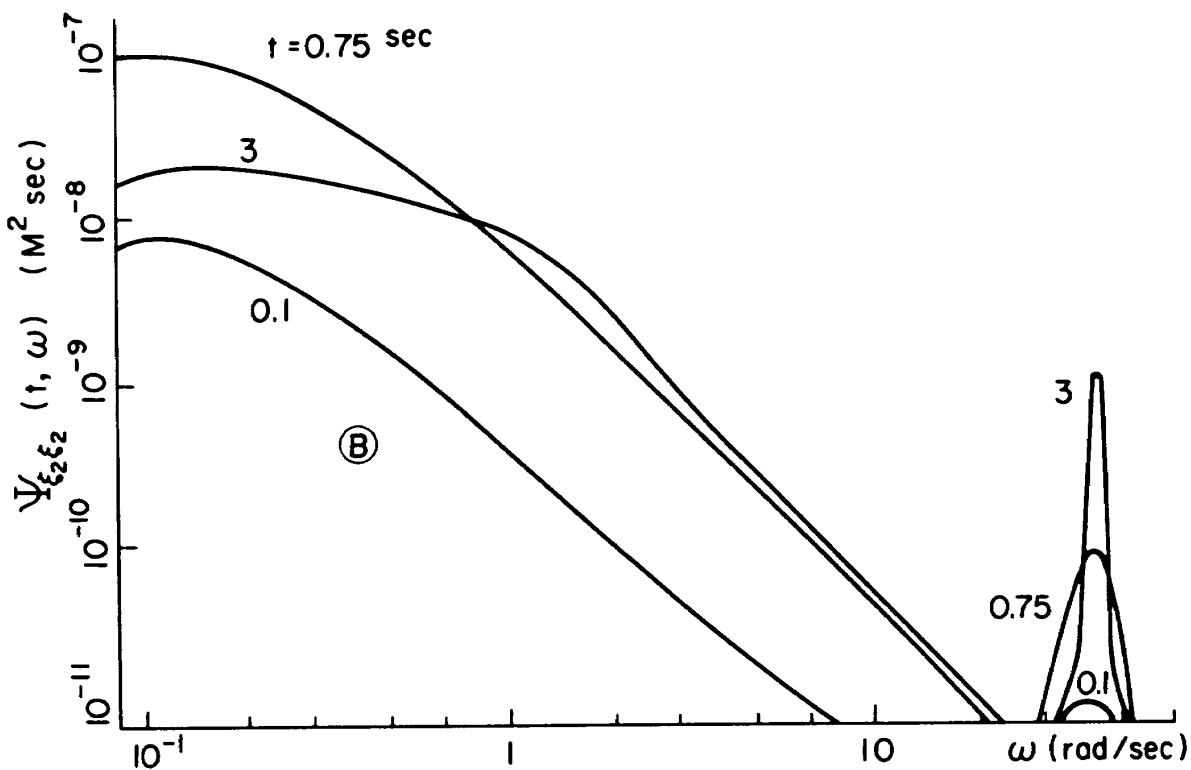
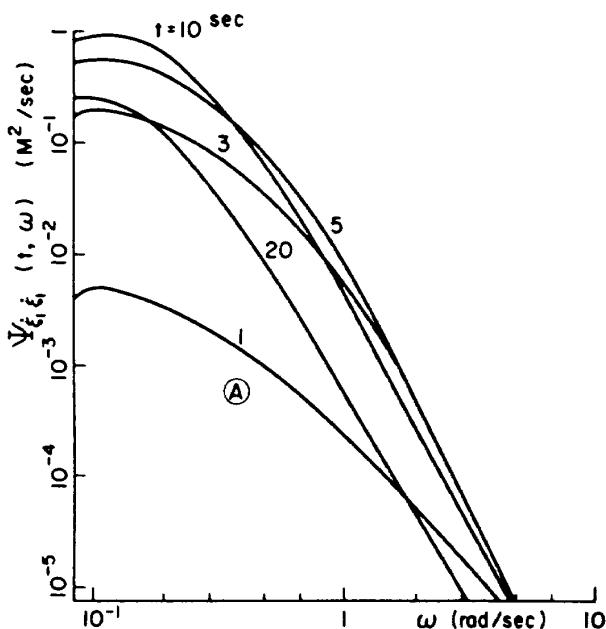
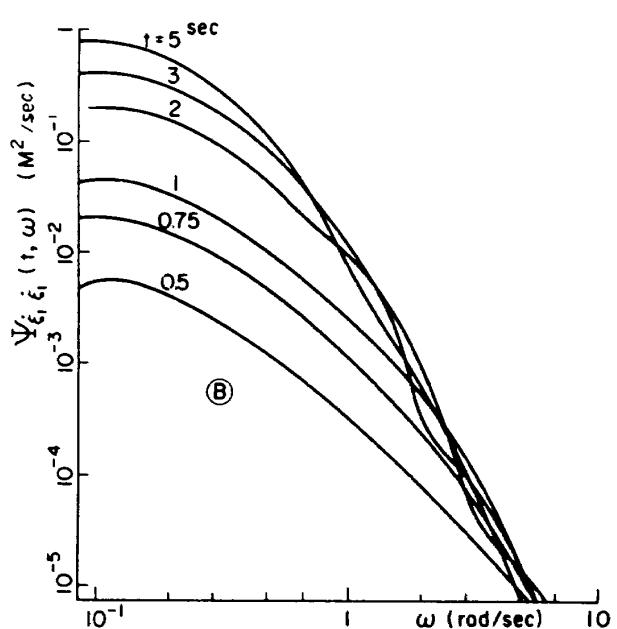


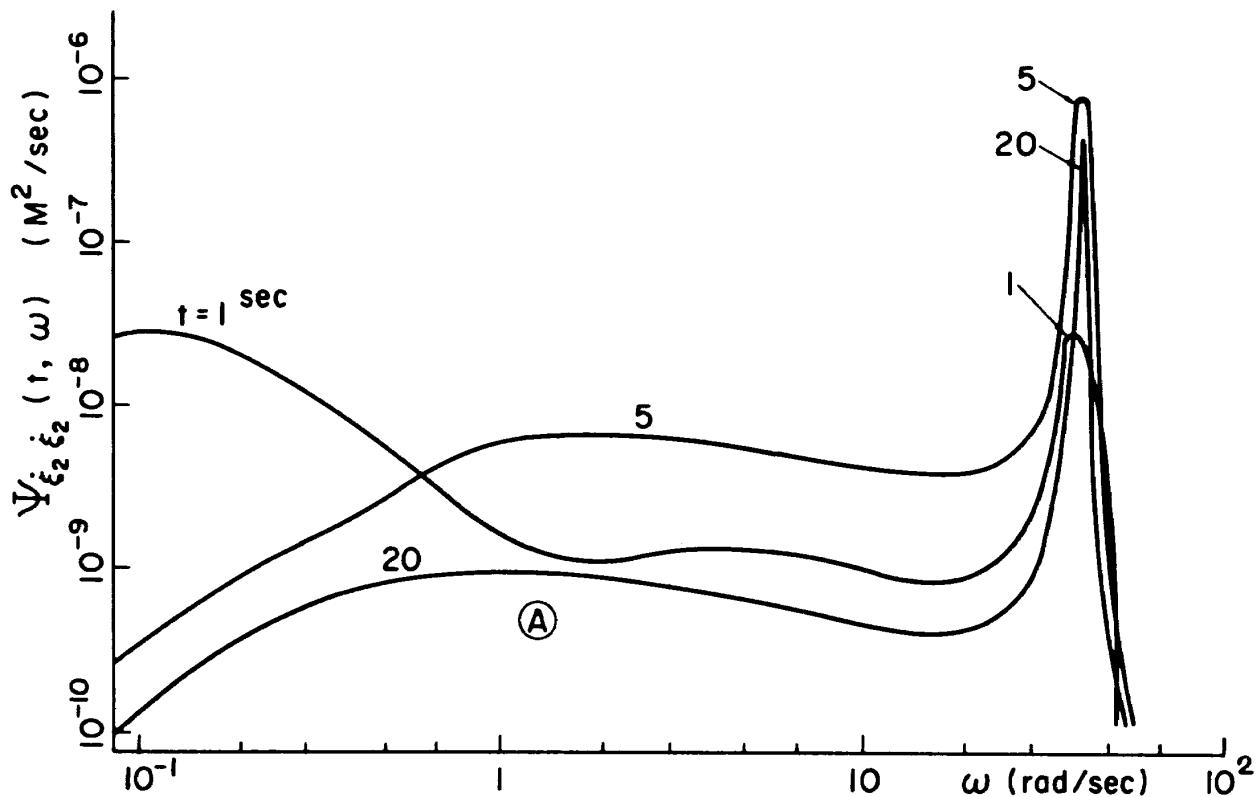
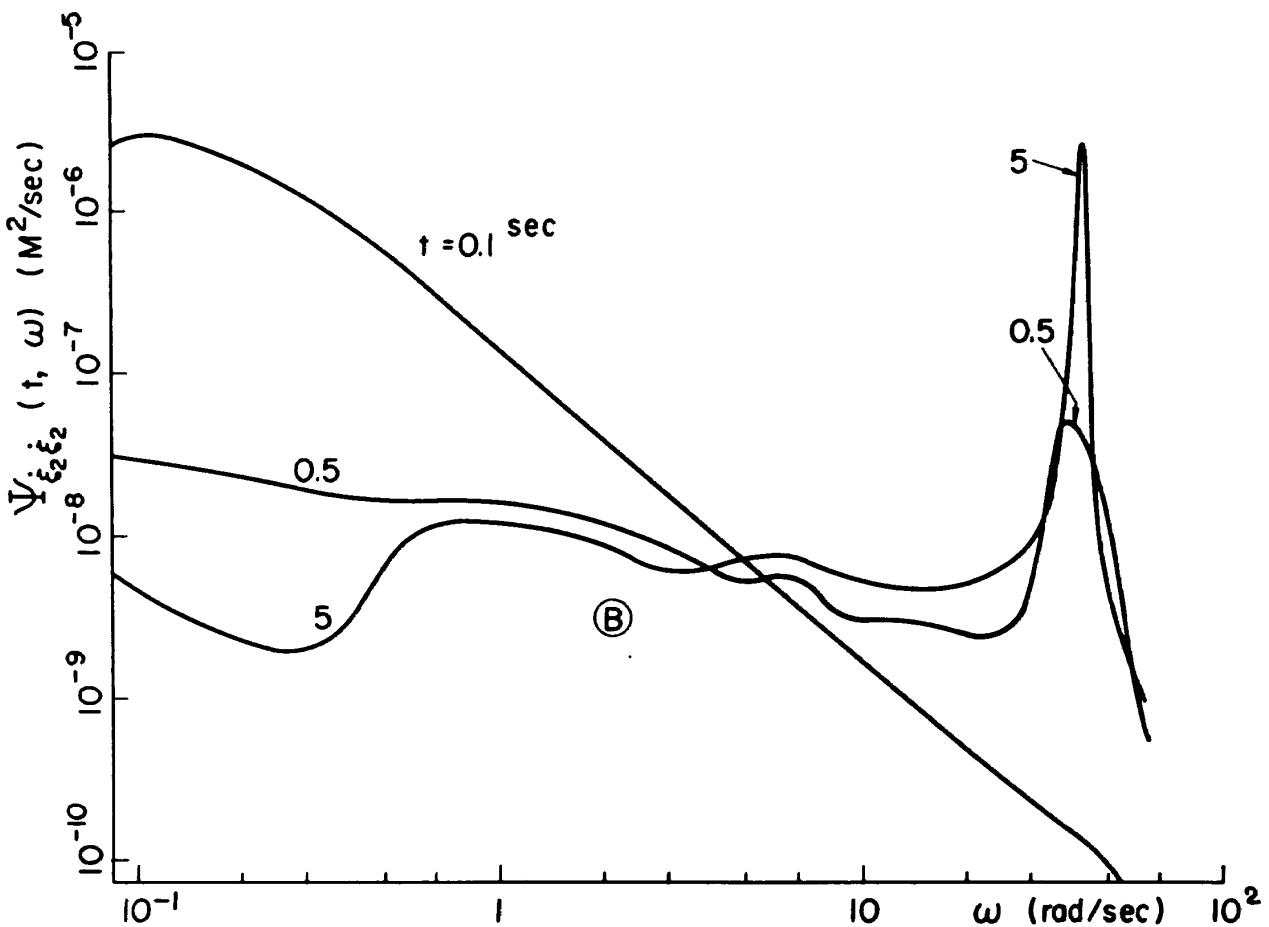
図 2 - 6 (a) 一般座標曲げ一次の変位に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_2 \xi_2} (t, \omega)$

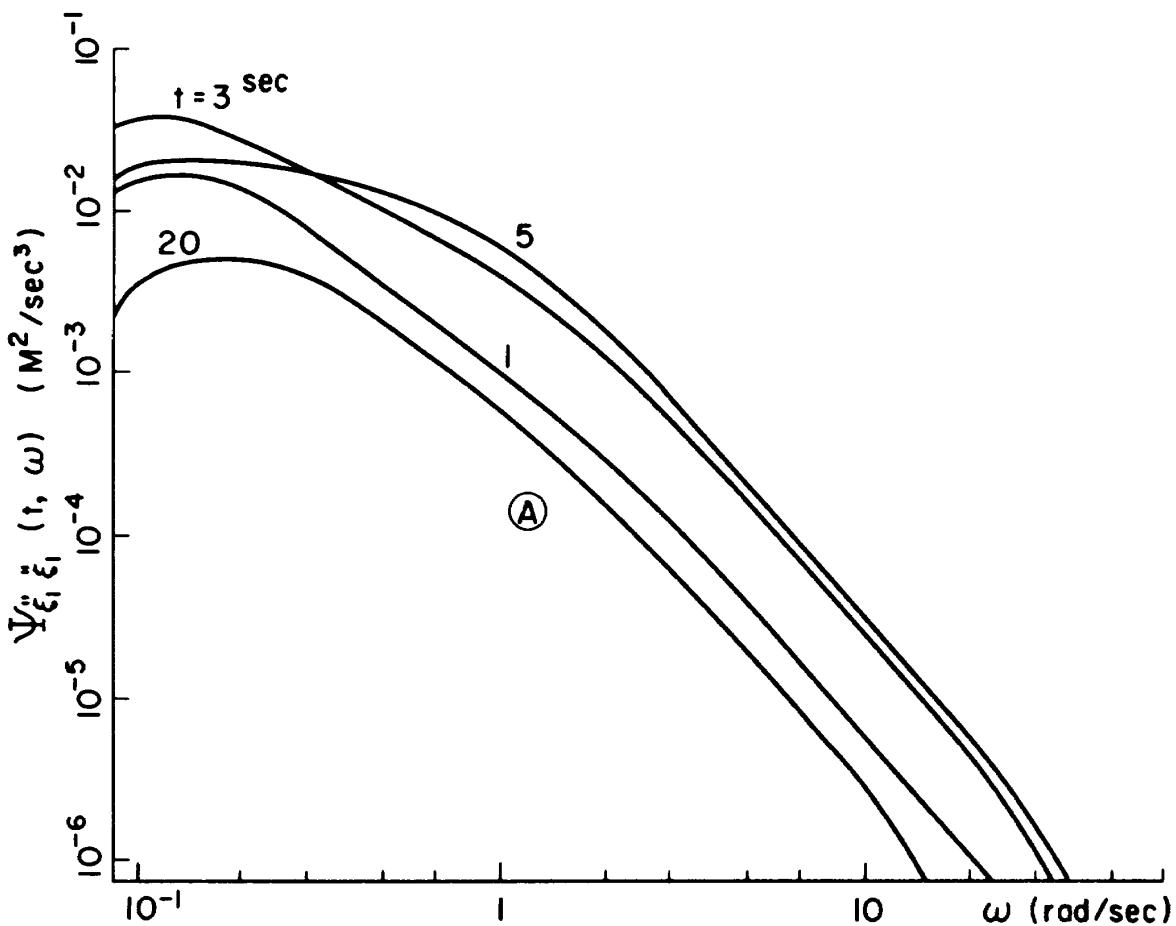
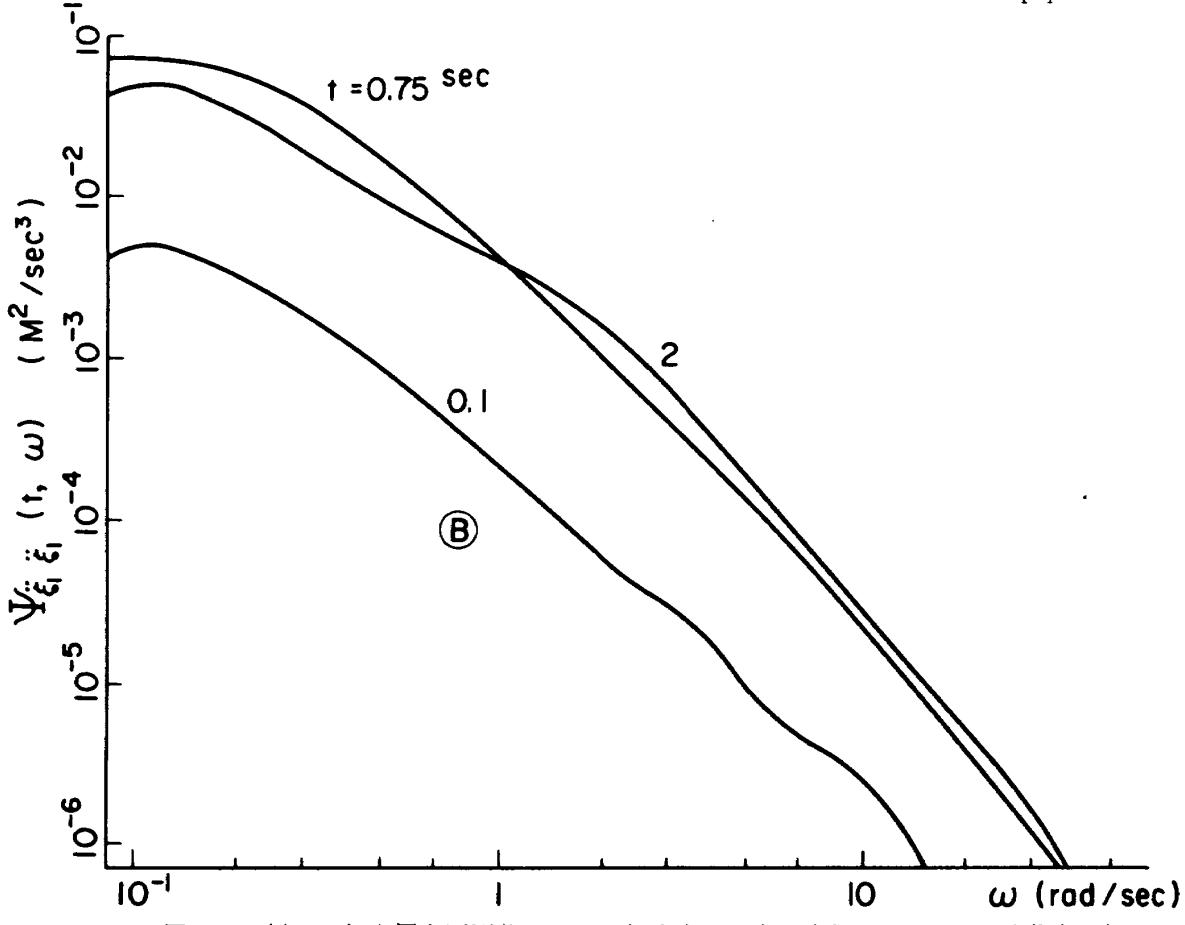
図 2-6(b) 一般座標曲げ一次の変位に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_2 \xi_2}(t, \omega)$ 

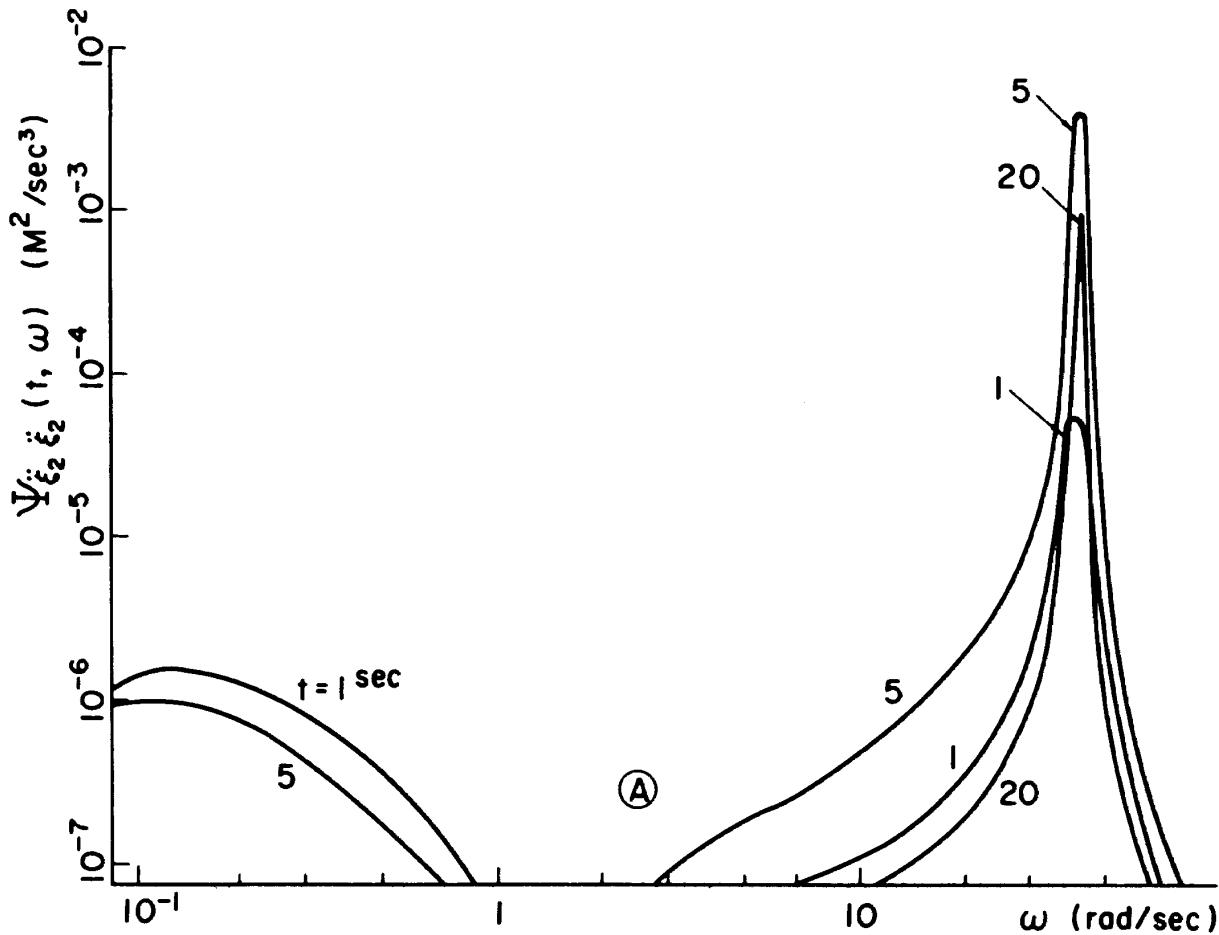
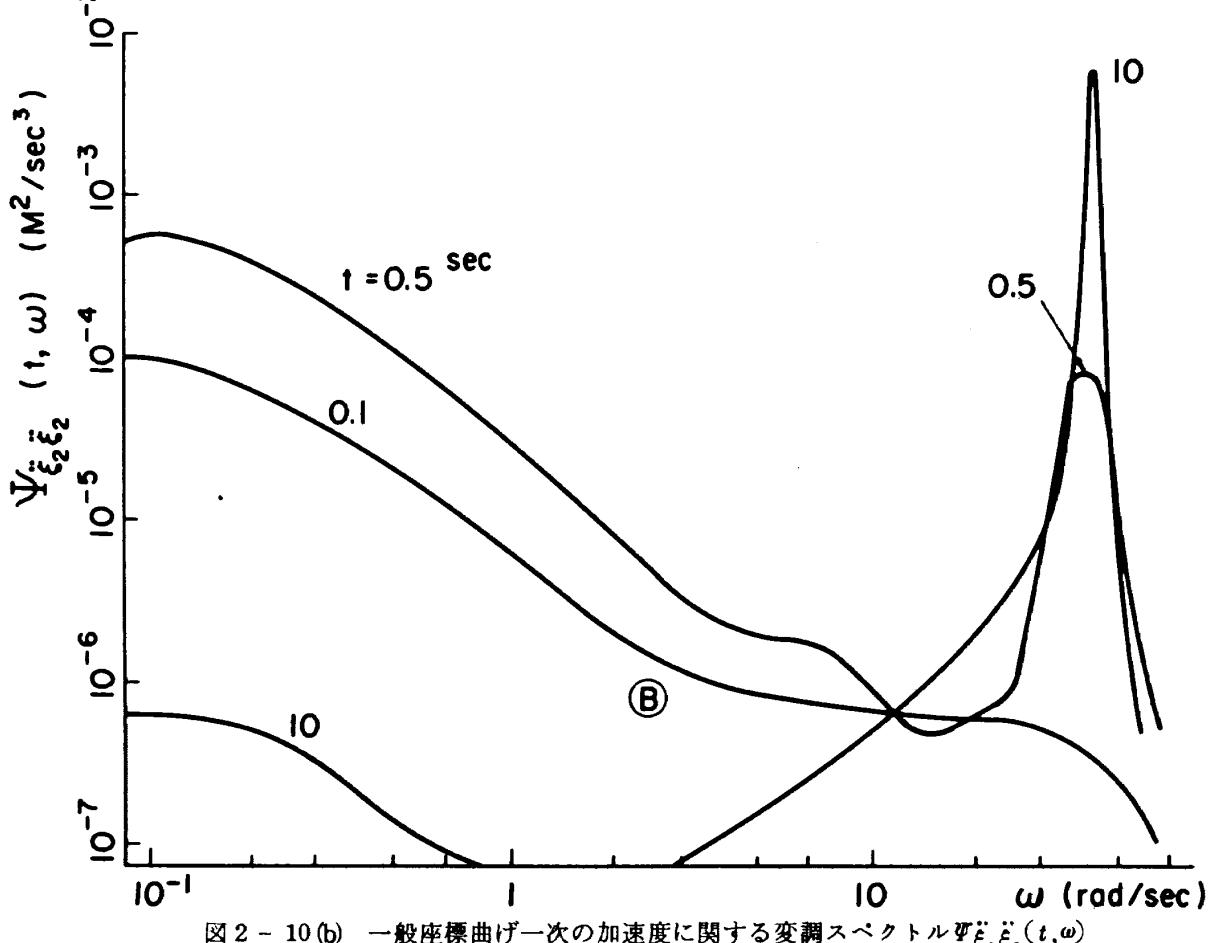
のような形状となる。しかし曲げによるピークは始め低く、時間とともに高くなる。(A) の場合はある高さになってから全体がまた低くなっていくが(B) の場合はある一定

の型となる。 $t = 0.5$  sec 以前では曲げによるピークは現れないから、曲げによるピークは多少の立上り時間 (Build Up Time) がいることが分る。

図 2-7(a) 一般座標上下剛体モードの速度に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_1 \dot{\xi}_1}(t, \omega)$ 図 2-7(b) 一般座標上下剛体モードの速度に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_1 \dot{\xi}_1}(t, \omega)$

図 2-8(a) 一般座標曲げ一次の速度に関する変調スペクトル  $\Psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2}(t, \omega)$ 図 2-8(b) 一般座標曲げ一次の速度に関する変調スペクトル  $\Psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2}(t, \omega)$

図 2-9(a) 一般座標上下剛体モードの加速度に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_1 \ddot{\xi}_1}^{(1)}(t, \omega)$ 図 2-9(b) 一般座標上下剛体モードの加速度に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_1 \ddot{\xi}_1}^{(1)}(t, \omega)$

図 2-10(a) 一般座標曲げ一次の加速度に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_2 \ddot{\xi}_2}(t, \omega)$ 図 2-10(b) 一般座標曲げ一次の加速度に関する変調スペクトル  $\Psi_{\xi_2 \ddot{\xi}_2}(t, \omega)$

一般座標  $\xi_1, \xi_2$  を一度微分した  $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$  についての変調スペクトルを図 2-7(a), (b), 図 2-8(a), (b) にそれぞれ示す。 $\Psi_{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_1}$  は基本的に  $\Psi_{\xi_1 \xi_1}$  とよく似ており多少  $\omega$  に対する減衰が緩やかとなる。 $\Psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2}$  は立上りの僅かな時間内を除いたらほとんど  $\omega = \omega_2$  に一つのピークを持つ形状となる。これらも (A) (B) いずれの場合もほぼ同じような変調スペクトルとなる。剛体モードと弾性モードによる変調スペクトルのレベルを比較してみると剛体モード

のそれが圧倒的に大きい。即ち

$$\Psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2} \ll \Psi_{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_1}, \quad \Psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2} \ll \Psi_{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_1}$$

次に一般座標  $\xi_1, \xi_2$  を 2 度微分した  $\ddot{\xi}_1, \ddot{\xi}_2$  についての変調スペクトルを図 2-9(a)(b), 図 2-10(a)(b) にそれぞれ示す。 $\Psi_{\ddot{\xi}_1 \ddot{\xi}_1}$  は基本的に  $\Psi_{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_1}$  と類似しており  $\omega$  に対する広がりが大きく、減衰が一番緩やかである。 $\Psi_{\ddot{\xi}_2 \ddot{\xi}_2}$  も基本的に  $\Psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2}$  と類似しており立上りの僅かな時間内

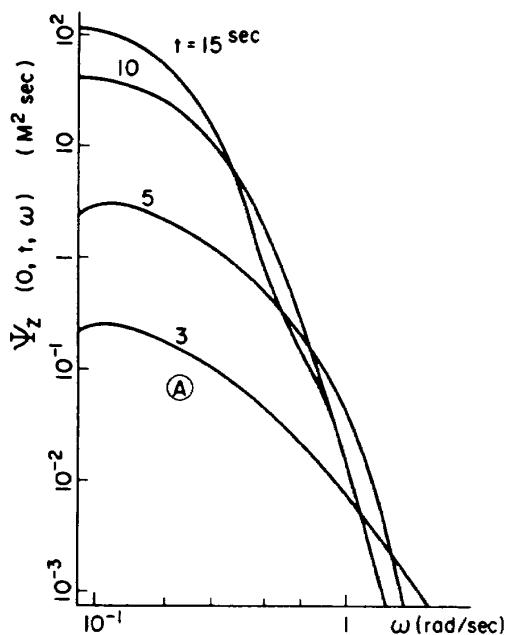


図 2-11(a) 重心位置における全変位の変調スペクトル  $\Psi_z(0, t, \omega)$

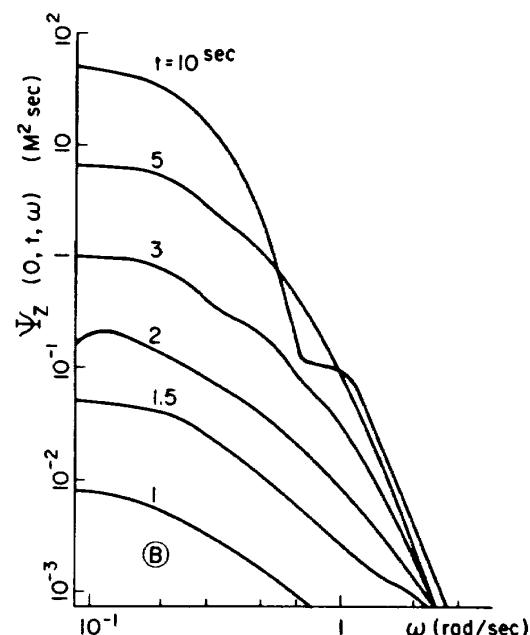


図 2-11(b) 重心位置における全変位の変調スペクトル  $\Psi_z(0, t, \omega)$

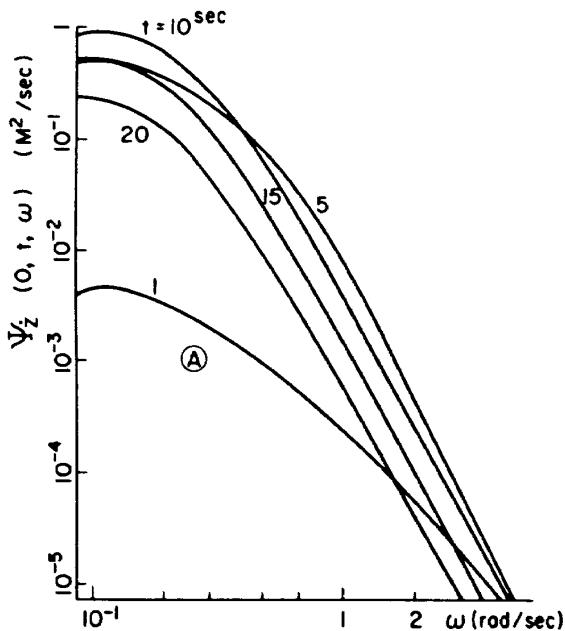


図 2-12(a) 重心位置における全速度の変調スペクトル  $\Psi_z(0, t, \omega)$

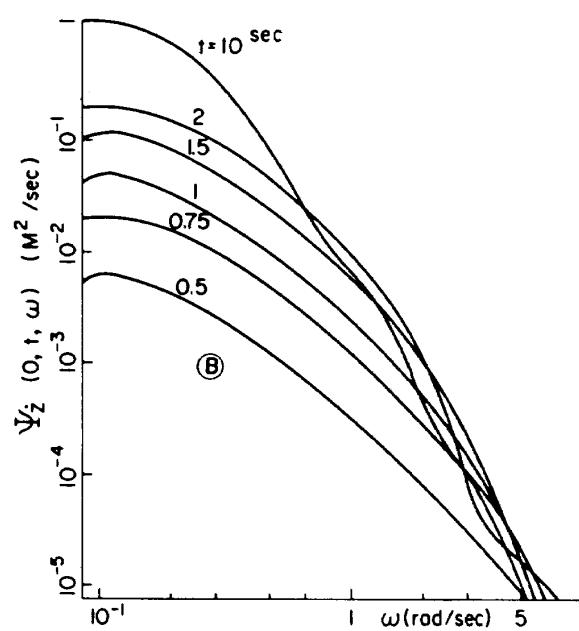


図 2-12(b) 重心位置における全速度の変調スペクトル  $\Psi_z(0, t, \omega)$

を除いたら  $\omega = \omega_2$  に一つのピークを持つ曲線となる。細かく見れば、図 2-10(b)において分るように始めは  $\omega = 0$  の回りにエネルギーが集り、除々に曲げモードのピー

クが現れ、少しの時間内は二つのピークが共存し、そのうちに  $\omega = 0$  の回りのピークはレベルが低くなり、 $\omega = \omega_2$  のところにピークが残る。曲げモードには立上り時

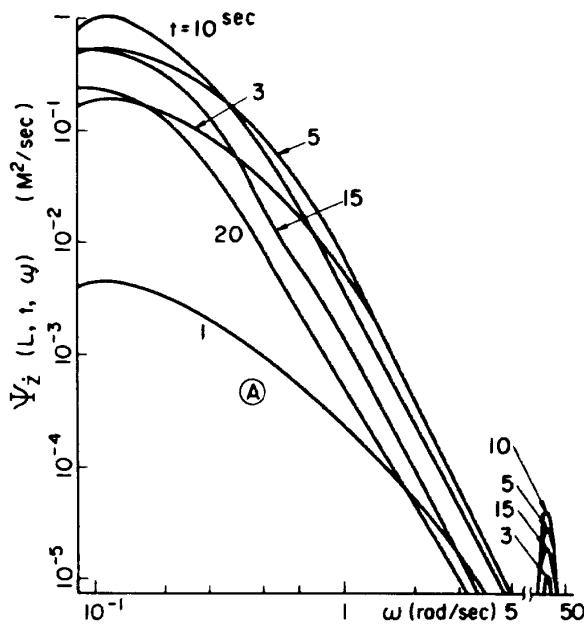


図 2-13(a) 翼端における全速度の  
変調スペクトル  $\Psi_z(L, t, \omega)$

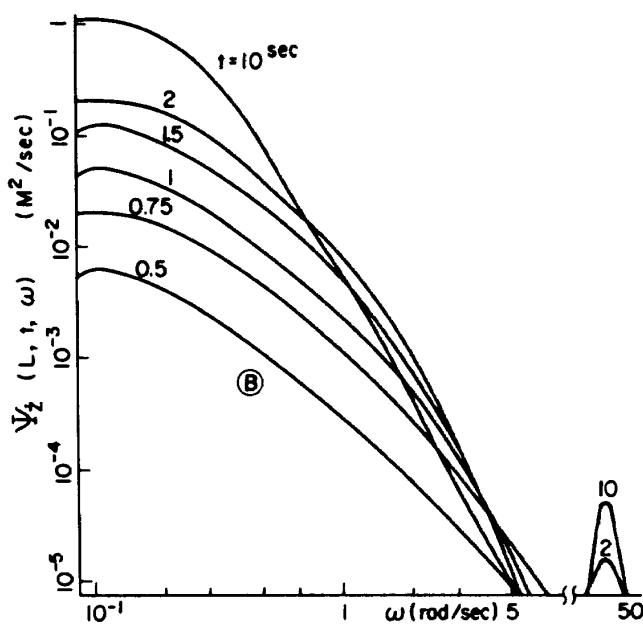


図 2-13(b) 翼端における全速度の  
変調スペクトル  $\Psi_z(L, t, \omega)$

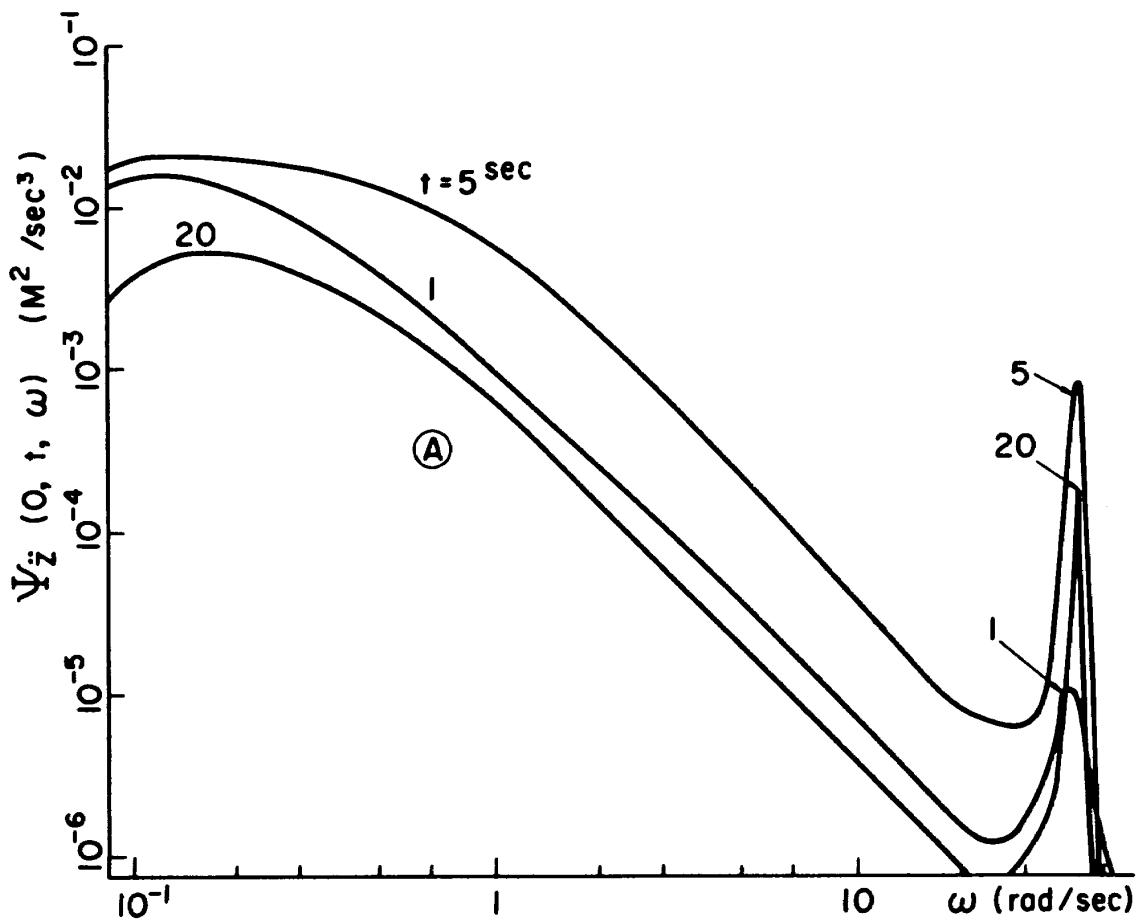


図 2-14(a) 重心位置における全加速度の変調スペクトル  $\Psi_z(0, t, \omega)$

間がいるのは先の  $\xi_1, \xi_2$  の変調スペクトルと同じである。これらの変調スペクトルも (A) (B) いずれの場合も本質的に変わらない。

以上図示したのは自己変調スペクトルであり、この他に連成による相互変調スペクトル、たとえば  $\Psi_{\xi_1 \xi_2}$ ,  $\Psi_{\xi_1 \ddot{\xi}_2}$ ,  $\Psi_{\dot{\xi}_1 \xi_2}$  等が存在する。それらは実数部、虚数部を持ち、その値も正負をとるなど図示しにくい。また絶対値は先の自己変調スペクトルに比較して小さいので、全応答に寄与する割合は小さいと考え図示していない。また  $\Psi_{\xi_1 \dot{\xi}_2}$ ,  $\Psi_{\xi_1 \ddot{\xi}_2}$ ,  $\Psi_{\dot{\xi}_1 \ddot{\xi}_2}$  のように異なる物理量についての相互変調スペクトルも同様に求められる。しかしこれらは応答量としてあまり重要でないので計算していない。

#### 全変位の変調スペクトル

上下動と曲げ 1 次を重ね合せた全変位  $Z$  の変調スペクトルを図 2-11(a)(b) に示す。これは航空機モデルの重心位置における変調スペクトルである。この  $\Psi_Z$  は  $\Psi_{\xi_1 \xi_1}$ ,  $\Psi_{\xi_2 \xi_2}$ ,  $\Psi_{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_2}$  を重ね合せたものであるが、 $\Psi_{\xi_2 \xi_2}$  はレベルが低いため  $\Psi_Z$  のグラフの中にピークとして現われない。これはエネルギーが  $\omega=0$  の回りに集中している  $\Psi_{\xi_1 \xi_1}$  とよく似ている。この  $\Psi_Z$  はモデルの他の点で計

算しても重心位置のそれとほとんど変わらない。これについても (A) (B) いずれの場合もほとんど同じ曲線となる。

#### 全速度の変調スペクトル

重心位置における  $\dot{Z}$  の変調スペクトルを図 2-12(a)(b) に示す。 $\Psi_{\dot{Z}}$  は  $\Psi_Z$  と同じく  $\omega=0$  の回りにエネルギーが集中しているが  $\omega$  に対して多少広がりを持ち、減衰が緩やかとなる。翼端における  $\dot{Z}$  の変調スペクトルを図 2-13(a)(b) に示す。重心位置におけるものと大体同じであるけれど、 $\omega=\omega_2$  のところに低いながらも曲げモードによるピークが現れる。これらも (A) (B) いずれの場合もほぼ同じような曲線となる。

#### 全加速度の変調スペクトル

重心位置における  $\ddot{Z}$  の変調スペクトルを図 2-14(a)(b) に、翼端におけるそれを図 2-15(a)(b) にそれぞれ示す。これらは  $\omega=0$  の回りと  $\omega=\omega_2$  のところに二つのピークを持つ曲線である。 $\omega=0$  のところのピークは入力 Dryden スペクトルによるもので、 $\omega=\omega_2$  のところのピークは曲げモードによるものである。(B) の場合の結果を見ればよく分るように、立上りの僅かの時間内は曲げモードは現れず、上下動のみで応答している。曲げモードのピークがある一定の型になるまでは多少の時間がかかる。上下動と曲げモードによるピークの高さを見てみ

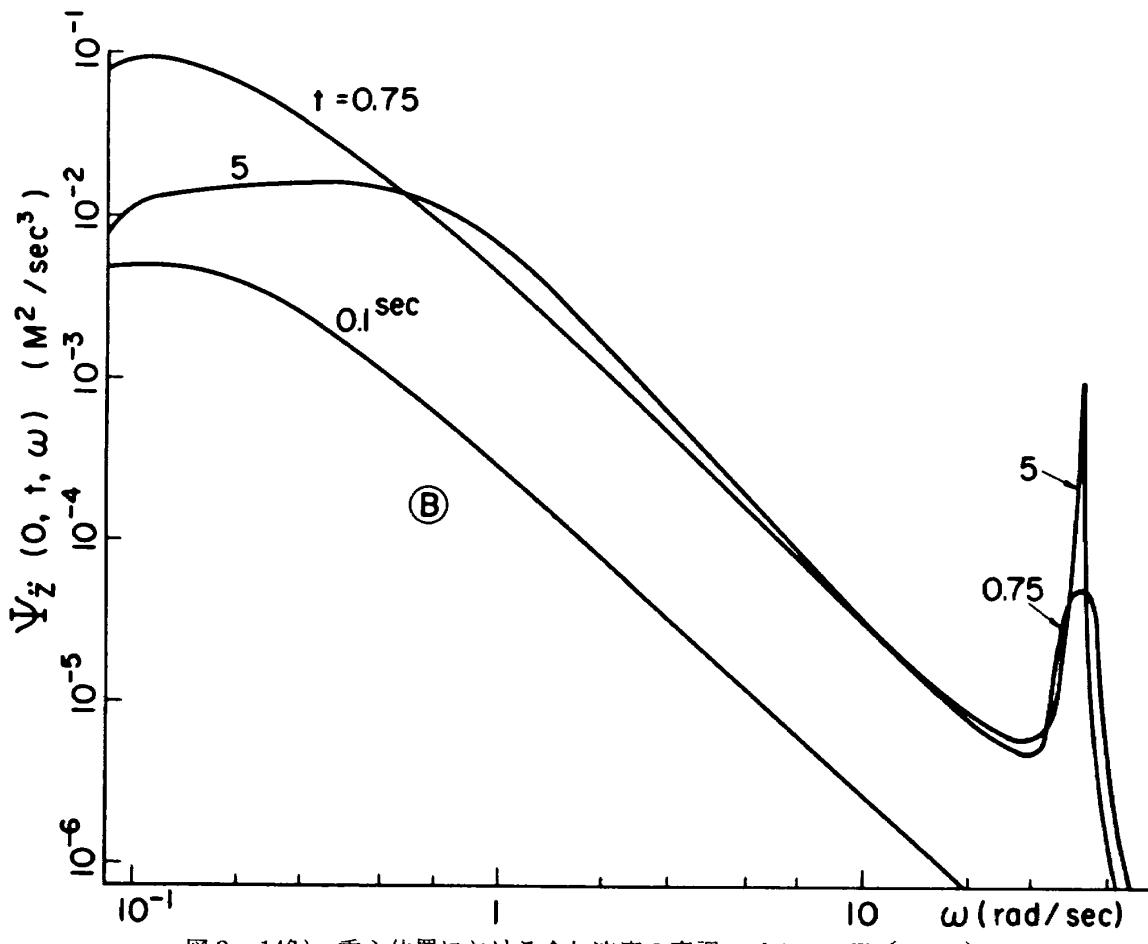
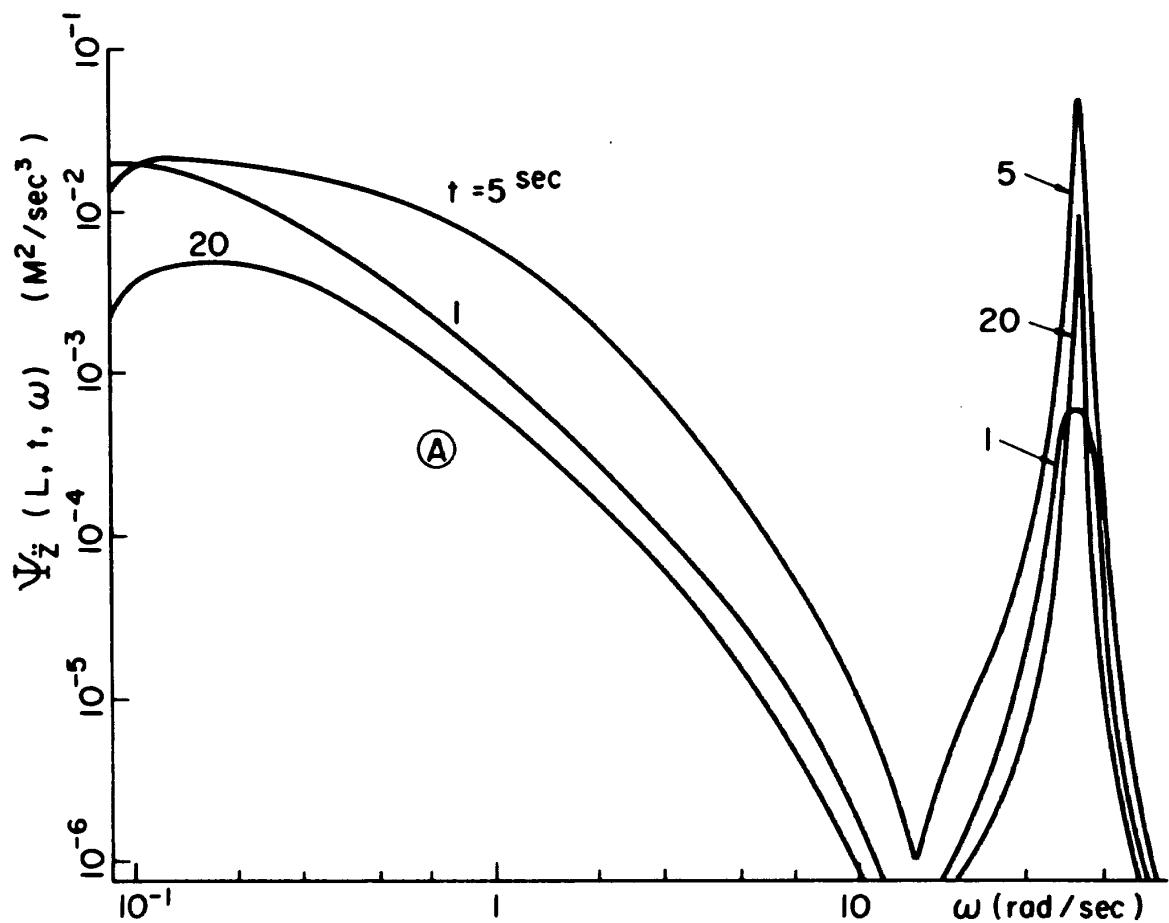
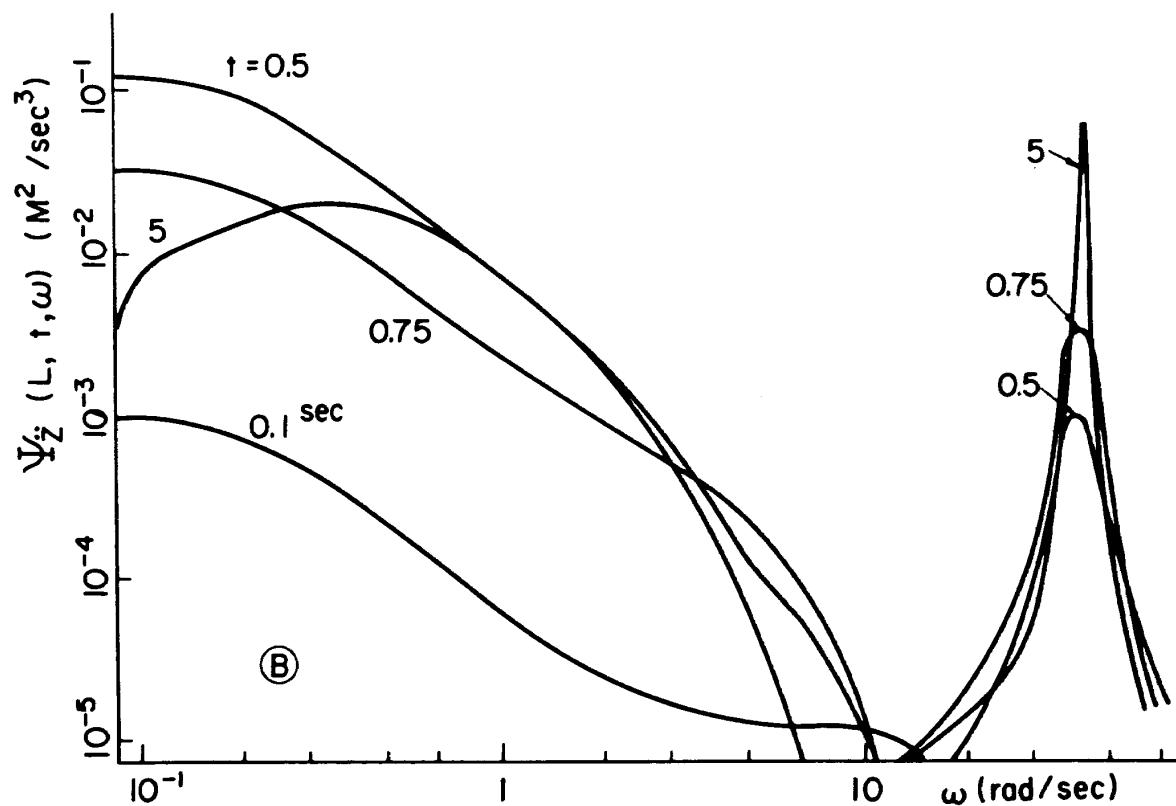


図 2-14(b) 重心位置における全加速度の変調スペクトル  $\Psi_{\ddot{Z}}(0, t, \omega)$

図 2-15(a) 翼端における全加速度の変調スペクトル  $\Psi_z(L, t, \omega)$ 図 2-15(b) 翼端における全加速度の変調スペクトル  $\Psi_z(L, t, \omega)$

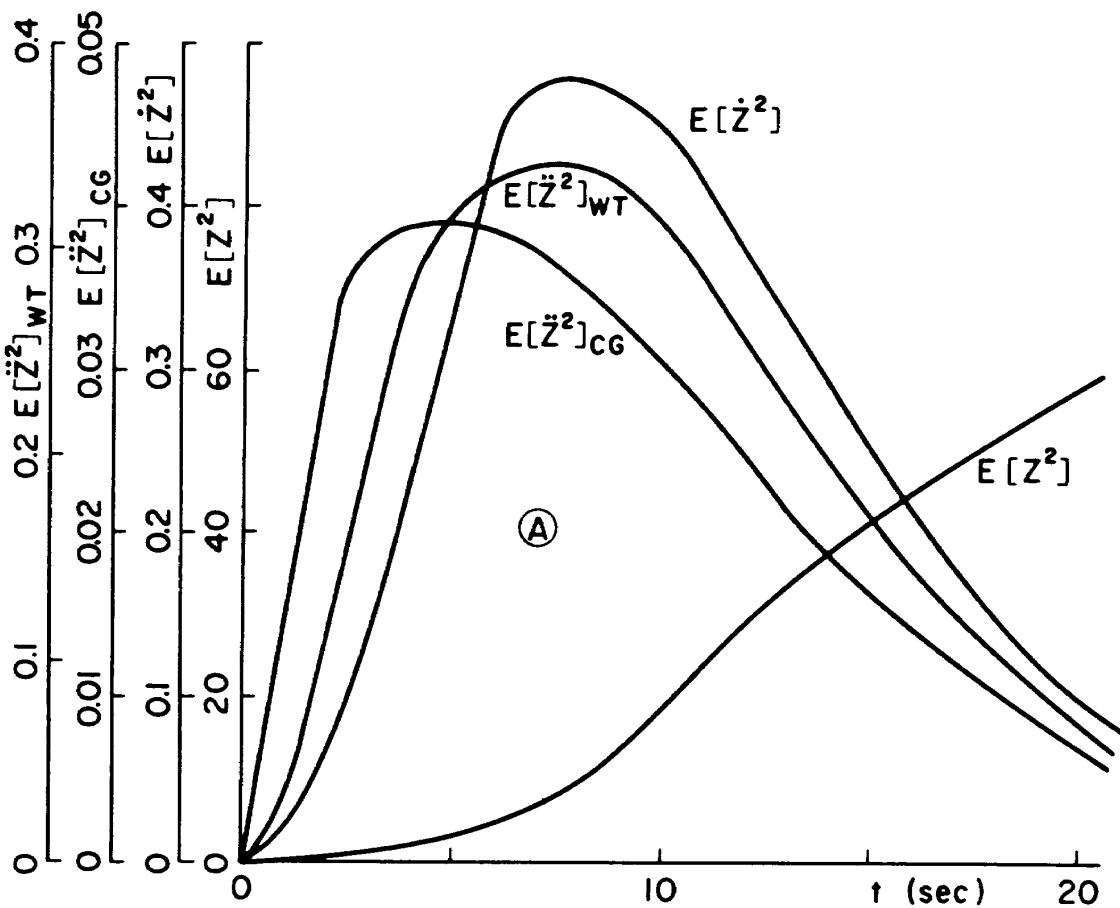


図 2-16(a) 全変位、全速度、全加速度に関する自乗平均の時間的変化

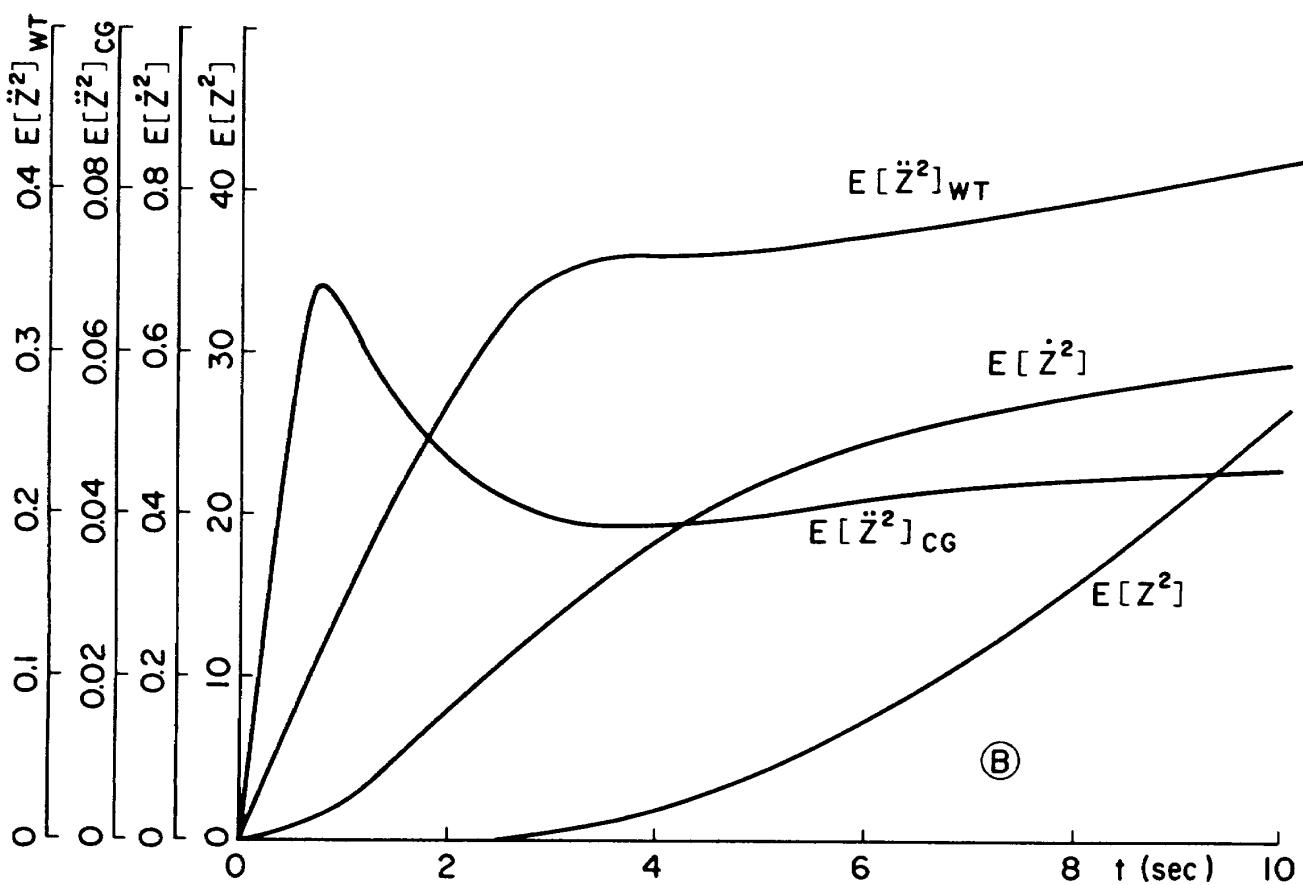


図 2-16(b) 全変位、全速度、全加速度に関する自乗平均の時間的変化

ると、重心位置においては、上下動によるピークの方が高く、翼端においては両者の高さがほぼ同じである。変調スペクトルのレベル全体を見比べてみると、重心位置のそれよりも翼端のそれの方が高い。これらについても(A) (B)いずれの場合も同じような曲線となる。

#### 全変位、全速度、全加速度の自乗平均

全変位、全速度、全加速度の変調スペクトルを積分して得られる自乗平均の時間的変化をみてみる。変調スペクトルの積分は  $\omega = 0, 0.1, 0.2, 0.3, 0.5, 0.7, 1, 2, 3, 5, 7, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 37, 40, 41, 42, 45, 50$  の23点で単純な台形公式を用いた。ピークの回りで点数を細かく取っても結果に与える影響は少い。重心位置における全変位、全速度、全加速度、翼端における全加速度を図2-16(a)(b)に示す。

(A)の場合：加速度の傾向は包絡線の傾向とほぼ一致する。速度は加速度と比べやや位相差があるような傾向となる。変位は立上りが遅く、かなり時間が経過しないとピークとならず、そのピークもしばらくは平坦でなかなか減衰しない。しかし式の型式から  $t \rightarrow \infty$  で  $E[Z^2] \rightarrow 0$  となる。応答量としてはあまり重要でないので  $E[Z^2]$  の時間的変化の全容を図2-16(a)に図示していない。翼端における  $E[Z^2], E[\dot{Z}^2]$  は重心位置のものと変わらない。これは  $\Psi_z$  や  $\Psi_{\dot{z}}$  が場所によりほとんど変わらないからである。翼端における  $E[\ddot{Z}^2]$  は重心位置のそれとほとんど同じような時間的経過を辿る。しかし最大値となる時刻が重心位置のそれより僅かながら遅れる。

(B)の場合：このときもすべての量が本質的には包絡線関数の傾向に従うものであるが、重心位置の  $E[\ddot{Z}^2]$  は立上りで極大値をとりその後は多少変動しながら一定値に近づく。この計算モデルでは  $t = 0.75 \text{ sec}$  で極大値となることが分る。この値は以後の定常値より高目であるが、このときの変調スペクトルを見てみると、応答としては曲げモードのピークが高くなりつつある過渡期で、どちらかと云えば剛体モードだけで応答している時である。翼端における  $E[\ddot{Z}^2]$  は  $t = 2 \text{ sec}$  でほぼ定常となり以後は緩やかに多少変動する。これは過渡期に定常値より大きい極大値を持つことはない。 $E[Z^2]$  や  $E[\dot{Z}^2]$  は緩やかに立上り、包絡線の傾向よりはるかに遅れて定常値となる。また重心位置や翼端でもほとんど変わらない。

### 3章 結論

本研究における目的は非定常過程におけるスペクトルの一つである変調スペクトルの考え方を使い線型多自由度系の応答をスペクトル解析し、その有効性を例示することであった。得られた結果をまとめると

定常過程におけるスペクトルの分解定理を基礎とし、任意の関数を選ぶことにより非定常入力を受ける線型多自由度系の応答を変調スペクトルとして表示することを確立した。新しく導き出された表現は2階の場合(1-31)式、任意の階数の場合(1-49)式である。この2階の場合の表示は従来 Priestley により定義されている変調スペクトルを特別な場合として含むので、厳密には拡張された「変調スペクトル」と呼ぶべきものである。本研究の目的の大半はこれらの定式化により達せられている。この変調スペクトルで表現できる非定常過程は任意に選ぶ決定的な包絡線関数により大きく左右される。また系のインパルス応答関数は先の包絡線関数とともに時刻  $t$ 、周波数  $\omega$  とに依存した重み関数のような形でスペクトル表示の中に入ってくる。このため形式的には定常スペクトルが振巾変調を受けた型となっている。これは元々変調スペクトルの考え方が定常スペクトルとある任意の関数で非定常過程のスペクトルを表現しようとしているのであるから極めて当然と云わなければならない。ここで求められた表示は広く一般の工学的问题に適用可能である。

応用例として航空機モデルが上下方向の非定常突風を受ける場合の解析を行い、一般座標、その1回微分、2回微分についての変調スペクトルを導いた。またそれらを重ね合せた全変位、全速度、全加速度等の応答量についても変調スペクトルの表示を導いた。計算例としては剛体モードとしての上下動、曲げ1次の弾性振動との2自由度系として上記の応答量について変調スペクトルを求めた。これは2次元空気力を使える範囲内で、即ち空力面のアスペクト比が大きいような時、厳密な解析となっている。解析例により各種応答量に関する変調スペクトルの時間的変化を追跡することの意義を明らかにすることことができた。

数値計算結果から次のようなことが分った。剛体モードによる変調スペクトル  $\Psi_{\xi_1 \xi_1}$  は  $\omega = 0$  の回りにのみエネルギーが集中している。周波数が  $\omega = 0.1$  以上ではレベルが減衰する。曲げモードによる  $\Psi_{\xi_2 \xi_2}$  は  $\omega = 0$  と  $\omega = \omega_2$  の回りにエネルギーが集中していて二つのピークを持った曲線となる。 $\omega = \omega_2$  のところのピークは始め低く時間とともに高くなるので、弾性モードは多少の立上り時間がいることが分る。(A)の場合；変調スペクトルのレベルが時間とともに高くなり、ある時刻後はまた段々と低くなる。(B)の場合；レベルが上昇してある時刻後は変動しながらもほぼ一定のレベルを保つ。一口で云えば変調スペクトルのレベルは大体包絡線の傾向に従う。

速度量である  $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$  の変調スペクトルについて；上下

動による $\Psi_{\xi_1 \dot{\xi}_1}$ は $\Psi_{\xi_1 \xi_1}$ と同じく  $\omega=0$  の回りにエネルギーが集中している、しかし  $\omega$ についての減衰が少し緩やかになる。曲げモードによる $\Psi_{\xi_2 \dot{\xi}_2}$ は立上りの僅かの時間内を除いたら  $\omega=\omega_2$  のところにピークを一つ持った型となる。

加速度量である  $\ddot{\xi}_1, \ddot{\xi}_2$  の変調スペクトルについて；上下動による $\Psi_{\xi_1 \ddot{\xi}_1}$ は  $\omega=0$  の回りにエネルギーが集中していて $\Psi_{\xi_1 \xi_1}, \Psi_{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_1}$ とよく似ているがそれらに比べ  $\omega$ に対する減衰が一番ゆるやかとなっている。曲げモードによる $\Psi_{\xi_2 \ddot{\xi}_2}$ は $\Psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2}$ とよく似ており、立上りの僅かの時間内を除いたら  $\omega=\omega_2$  のところにピークを一つだけ持つ型である。

変位量、速度量においては剛体モードの上下動による変調スペクトルレベルが曲げモードによるものより圧倒的に大きい。即ち

$$\Psi_{\xi_2 \ddot{\xi}_2} \ll \Psi_{\xi_1 \xi_1}, \quad \Psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2} \ll \Psi_{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_1}$$

加速度量においても大小関係 $\Psi_{\xi_2 \ddot{\xi}_2} < \Psi_{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_1}$ は変わらないが、曲げモードによる変調スペクトルレベルが無視できる程小さくはない。どの量についても包絡線 (A) (B) の相違は変調スペクトルに本質的な影響を与えない。

全変位の変調スペクトル $\Psi_z$ は一般変位  $\xi_1$  の変調スペクトル $\Psi_{\xi_1 \xi_1}$ と同じく、 $\omega=0$  の回りにエネルギーが集中している。場所による差はほとんどない。全速度の変調スペクトル $\Psi_z$ も $\Psi_z$ と同じくほとんど  $\omega=0$  の回りにエネルギーが集中している。しかし  $\omega$ に対する減衰が多少緩やかとなる。場所による差はほとんどないが、図上では、重心位置の変調スペクトルには現れない曲げモードによる  $\omega=\omega_2$  のところのピークが翼端のそれでは僅かに現れる。全加速度の変調スペクトル $\Psi_z$ は  $\omega=0$  と  $\omega=\omega_2$  の回りに二つのピークを持った型となる。それぞれ入力 Dryden スペクトルに応答している剛体モードと、曲げモードによるピークである。曲げモードのピークはこの変調スペクトルにおいても立上り時間が必要ですぐには応答しない。計算モデル上の場所により二つのピークの相対的高さに差があり、各々のモードの寄与率に差があることが分る。全応答のいずれの量についても包絡線 (A) (B) により変調スペクトルは本質的に変わらない。

全変位、全速度、全加速度等の自乗平均の時間的变化については次のようなことが分った。(A)の場合：加速度の自乗平均は大体包絡線の傾向と一致する。全速度のそれは最大となる時刻が多少遅れる。全変位については立上りも非常に緩やかで時間がかなり経過しないと減衰しない。全変位、全速度は場所によりほとんど変らない。

全加速度は場所によりかなりレベルが異なり、加速度は重心位置より翼端へ向う方が高くなる。(B)の場合：全変位、全速度は緩やかに立上り包絡線よりかなり遅れて定常となる。重心位置の加速度は立上りで極値をとり、その後緩やかに変動しながら定常値となる。翼端における加速度は包絡線の傾向より少し遅れて定常値となり立上りで極値をとらない。重心位置の加速度が極大値をとるときの変調スペクトルをみてみると、曲げモードが立上りつつあるときで主として剛体モードで応答していることが分る。

以上の主な点を要約すると、変位、速度に関するかぎり曲げモードの寄与率は少いこと、加速度においては曲げモードの影響もかなり大きいこと、重心位置の全加速度の自乗平均のように立上りで定常値より大きい極大値をとることがあり得るので、従来のように定常解だけを求める解析だけでは十分でないことなどがはっきりした。

#### 4章 考 察

本研究の内容は従来からある変調スペクトルの概念を少し拡張して線型多自由度系の入出力関係の表示に適用し非定常応答解析を簡単に行えるようにしたことである。この時解析する系のインパルス応答関数は既知でないと応答を計算できないから、得られた結果を応用するに当っては振動系のインパルス応答関数を前もって解析しておくこと、近似的表現を用意しておかなければならない。2次元、3次元的広がりを持つ構造の場合には、インパルス応答関数と云っても時間一空間についての関数となり、必ずしも簡単に解析できるとはかぎらないので構造モデルの性質を損なわない程度の簡単化理想化をして理論を応用すべきであろう。具体的な問題でたとえば、地震波、大気乱流のように振巾が少しづつ増大してまた減少するような現象に応用するとき、示した解析のように適当な包絡線関数を仮定して振巾変調でスペクトル解析を行うのは合理的であるしかつ計算し易い。

変位、速度、加速度等各種応答量の変調スペクトルはある時刻における相関々数の周波数分布を示すもので内容的には定常過程のスペクトルを拡張したものである。包絡線関数が恒等的に 1 になるときの変調スペクトルが定常スペクトルとなり従来の定義と一致する。それ故ここで得られた表示がより一般的な結果であることが理解されよう。非定常性が緩やかに変化しても急激に変化しても解析上は同じであるが、実験結果と比較したいときは、統計的性質が急激に変化するデータからスペクトルを求ることは实际上困難なので、ある程度の時間内は定常性を保持している現象である方が望ましい。

次にインパルス応答関数を計算するときに用いた空気力の表示(2-2)式について説明を追加すると;  $F_M$ は2次元空気力によるもので、文献87の285頁にある(5-370)式、即ち

$$L = \pi \rho_0 b^2 [\ddot{h} + U \dot{\alpha} - b a \ddot{\alpha}]$$

$$- 2\pi \rho_0 U b [W_{3/4C}(0) \phi(S) + \int_0^S \frac{dW_{3/4C}(\sigma)}{d\sigma} \phi(S-\sigma) d\sigma]$$

で与えられている。“Lift Change”;  $L$ を $2b$ で除し $\dot{\alpha}$ ,  $\ddot{\alpha}$ を無視したものである。 $\alpha$ の変化分を無視したこととはピッチング運動による空気力を除いてしまったことになるが、この解析ではピッチング応答は考えていないのでこれらは“0”となる。ピッチング運動が他の運動、即ち上下動や曲げ振動と連成するときは全く別の問題として取り扱う。

2次元翼についてのWagner関数 $\phi$ を任意のスパン位置で使うとしても、たとえば翼に後退角があるときや、翼弦長が変化するときは $\phi(t)$ の原点が $y$ の変化により違って来て、そのため(2-2)式の中の $(x, y)$ と $t$ とは分離できず、 $t$ は $(x, y)$ の関数となる。そのため運動方程式をLaplace変換して系のインパルス応答関数を閉じた式で与えられなくなり解析は困難となる。

純粹な外力である上下突風に関する表示(2-3)式についてみてみると、 $F_G$ は文献87の288頁にある(5-382)式、即ち

$$L = 2\pi \rho_0 U b [W_G(0) \phi(S) + \int_0^S \frac{dW_G(\sigma)}{d\sigma} \phi(S-\sigma) d\sigma]$$

で与えられている“Lift Change” $L$ を $2b$ で除したものである。

解析に用いた航空機モデルをアスペクト比の大きい矩形とし、剛体モードと曲げモードによる上下運動だけを取り扱うのは空力的にも構造的にも厳密に解き得る数少ない場合である。曲げモードの影響についてはすでに文献87に例題としてステップ関数によって表わされる突風を受ける場合の解析が行われている。本解析はそれを任意の不規則入力が加わる場合に発展させたものに外ならない。

計算例に示された各種応答量の変調スペクトルをみてみると、従来の定常スペクトルの延長上にあり決してそれらと矛盾するものでないことが分る。 $\dot{\xi}_1, \dot{\xi}_2$ ;  $\ddot{\xi}_1, \ddot{\xi}_2$ に関する変調スペクトルは $\xi_1, \xi_2$ のスペクトルに“ $\omega^2$ ”, “ $\omega^4$ ”をそれぞれ乗じた型式と考えてよい。そのため $\psi_{\xi_1 \xi_1}, \psi_{\dot{\xi}_1 \dot{\xi}_1}, \psi_{\ddot{\xi}_1 \ddot{\xi}_1}$ はいずれも $\omega=0$ の回りにエネルギーが集中しているが、後者程 $\omega$ についての減衰が緩やかとなり、また $\psi_{\xi_2 \xi_2}$ は $\omega=0$ のまわりにもレベルを持っているのに $\psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2}, \psi_{\ddot{\xi}_2 \ddot{\xi}_2}$ ではそれが低くなってしま

うのは“ $\omega^2$ ”, “ $\omega^4$ ”の乗数を考えればよく理解できる。全応答についても同様なことが云える。しかしこの場合は $\psi_{\xi_1 \xi_1}, \psi_{\dot{\xi}_2 \dot{\xi}_2}, \psi_{\ddot{\xi}_1 \dot{\xi}_1}, \psi_{\ddot{\xi}_2 \dot{\xi}_2}, \psi_{\ddot{\xi}_1 \ddot{\xi}_1}, \psi_{\ddot{\xi}_2 \ddot{\xi}_2}$ と座標位置の組合せで場所により値が変化する。定量的に見てみると、変位、速度の変調スペクトルは場所によりほとんど変わらないが、加速度のそれは大きく変化する。包絡線の型式は変調スペクトルの型を本質的に変えるものでないことも当然であろう。(B)の場合、即ち包絡線がかなり早く立上って定常値にあるとき、重心位置の全加速度の自乗平均が立上り時に極大値をとるのはいわゆるGibbsの現象のようなもので、回転機関の始動時の振巾の増大のように比較的規則性のある現象ではめずらしくないことである。そういう意味で本解析においては不規則な現象のときでも“Over Shoot”が生じることが示されたわけである。重心位置の全加速度の自乗平均は立上りで極値をとるが、翼端では極値をとらないのは刻々と変化する両者の変調スペクトルを見れば明らかとなる。重心位置においてはどちらかと云うと剛体モードが優勢であり、曲げのピークの寄与率が低い。しかし翼端では曲げモードの寄与率もかなり高くなり、立上りのある時刻で剛体モードの寄与率が最大となり、そして少し低下して来ても、その時は曲げモードのピークが高くなるので全体の自乗平均としては増大するためと考えられる。

本解析ではDrydenスペクトルを用いたが、このスペクトルは式の型式を見れば分る通り $0(\omega^{-2})$ で減衰する。他の理論によれば $0(\omega^{-5/3}), 0(\omega^{-11/6})$ 等色々な減衰特性が提案されていることは周知のことであろう。他の記号の $\omega$ についての減衰の程度をみてみると

$$R_{m,\alpha} = 0 (\omega^{-1})$$

$$M_{jm,\alpha} = 0 (\omega^{-1})$$

$${}_1 M_{jm,\alpha} = 0 (\omega^0)$$

$${}_2 M_{jm,\alpha} = 0 (\omega)$$

このため(2-26)式で $\psi_{\xi_j \xi_k}^{(J)(K)}$ が求まるのは $J=K=3$ ,

即ち $\dot{\xi}_j$ まででそれ以上高階の微分量については

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \psi_{\xi_j \xi_k}^{(J)(K)} \rightarrow \infty$$

と発散してしまう。故に4回以上の高階の微分量についての変調スペクトルを求めるためには解析法を別に考えるか、別のスペクトルを使わなければならない。

解析に用いた(2-30)式の物理的意味を説明する。(2-18)式においても $L_G$ が非常に大きいと $\Phi(\omega, \xi, \eta)$

は  $1/L_G$  の割合で減衰し

$$\lim_{L_G \rightarrow \infty} \Phi(\omega, \xi, \eta) = 0$$

となる。これは無限に大きい突風スケール、即ち相関長さ (Correlation Length) を持つ外力場は航空機に取って起振力とはならないということである。また一方もし  $L_G$  が小さくなれば

$$\lim_{L_G \rightarrow 0} \Phi(\omega, \xi, \eta) = 0$$

となる。これは

$$\lim_{Z \rightarrow \infty} ZIK_1(Z) = 0, \quad \lim_{Z \rightarrow \infty} Z^2 IK_2(Z) = 0$$

となるからである。このように非常に小さい相関長さの外乱も航空機に対して相殺し合い、起振力となり得ない。これと同じ結論は Fung<sup>7)</sup> によってもすでに明らかにされている。実際に応答 0 というのは入力スペクトルが 0 だからである。この解析においては  $L_G$  は有限であるが、 $|\eta/L_G|$  は小さいとし、

$$\lim_{Z \rightarrow 0} ZIK_1(Z) = 1, \quad \lim_{Z \rightarrow 0} Z^2 IK_2(Z) = 2$$

となる極限の結果を使い (2-18) 式を (2-30) 式で近似した。 $|\omega\xi/U|$  が非常に小さければ  $\Phi(\omega, \xi, \eta)$  は

$\phi_d(\omega)$  となる。即ち  $\omega=0$  の近傍の応答解析のときは Dryden スペクトルそのものだけでよいことになる。しかし曲げモードのように高い周波数を解析するときには計算誤差を大きくする。

計算結果全般から得られた結論は用いたパラメーターの値にも依存するので断定的なことは云えないであろうが、解析に用いたモデルは簡単であるが厳密であるのでより一般的な解析の参考となろう。

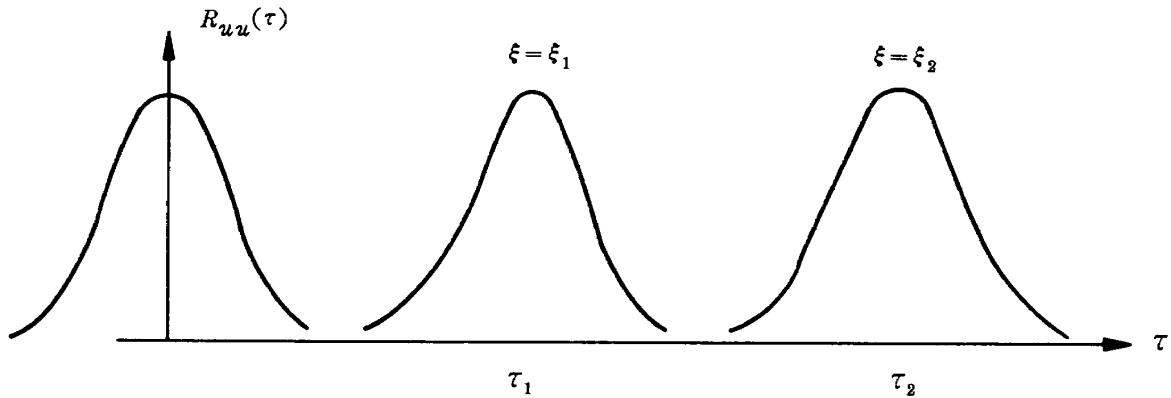
## 付 錄

### 凍結模様 (Frozen Pattern)

Taylor により提案された乱流モデルの一つで二点相関々数が時間差の増大とともに減衰しないものである。一次元で示すと、速度変動  $u(\tilde{x}, t)$  の期待値、 $E[u(\tilde{x}_1, t_1) u(\tilde{x}_2, t_2)]$  が移動座標  $x = \tilde{x} + vt$  で書き表わせて

$$\begin{aligned} E[u(\tilde{x}_1, t_1) u(\tilde{x}_2, t_2)] &= R_{uu}(x_1 - x_2 - v(t_1 - t_2)) \\ &= R_{uu}(\xi - v\tau) \end{aligned}$$

となる。このとき何らかの意味で  $v = \text{const}$  なる速度が存在することが前提である。このモデルにおいては下図に示すように



付図 1 凍結模様の二点相関々数

観測者が  $v$  という移動速度で動いていれば  $\xi = 0$  のときと全く同じ相関々数を得ることになる。大気乱流のよう

に  $L_G$  が航空機にくらべ大きいときは凍結模様の仮定也可能である。

## 参考文献

- ( 1) Bogdanoff, J.L. and Kozin, F., Proceedings of the First Symposium on Engineering Applications of Random Function Theory and Probability, Wiley 1963.
- ( 2) Parzen, E., Stochastic Processes, Holden Day 1962.
- ( 3) Rosenblatt, M., Random Processes, Oxford University Press 1962.
- ( 4) Stratonovich, R.L., Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1, 2, Gordon and Breach 1963.
- ( 5) Wiener, N., The Fourier Integral and Certain of its Application, Dover 1958.
- ( 6) Wiener, N., Extrapolation, Interpolation and Smoothing of Stationary Time Series ... with Engineering Applications, The M.I.T. Press, 1949.
- ( 7) Rice, S.O., Mathematical Analysis of Random Noise, Selected Papers on Noise and Stochastic Processes, Dover Publications Inc., 1954, 133-294.
- ( 8) Papoulis, A., Probability, Random Variables and Stochastic Processes, McGraw-Hill, 1965.
- ( 9) Korn, G.A., Random Process Simulation and Measurements, McGraw-Hill, 1966.
- ( 10) Bartlett, M.S., An Introduction to Stochastic Processes, Cambridge University Press, 1966.
- ( 11) Hannan, E.J., Multiple Time Series, John Wiley and Sons, Inc., 1970.
- ( 12) 伊藤清, 確率論, 岩波1953
- ( 13) Morrow, C.T., Averaging Time and Data-Reduction Time for Random Vibration Spectra I, J.A.S.A. Vol. 30, No. 5, 1958, 456-461.
- ( 14) Morrow, C.T., Averaging Time and Data-Reduction Time for Random Vibration Spectra II, J.A.S.A. Vol. 30, No. 6, 1958, 572-578.
- ( 15) Bendat, J.S., Principles and Applications of Random Noise Theory, Wiley, 1958.
- ( 16) Bendat, J.S., The Application of Statistics to the Flight Vehicle Vibration Problem, ASD TR 61-123, 1961, AD-271913.
- ( 17) Bendat, J.S. and Piersol, A.G., Measurement and Analysis of Random Data, John Wiley and Sons, 1966.
- ( 18) Bendat, J.S. and Piersol, A.G., Random Data: Analysis and Measurement Procedures, Wiley-Interscience, 1971.
- ( 19) 赤池弘次, 不規則振動の統計的処理, 機械学会第198回講習会テキスト, 振動工学における最近の進歩1963, 17-29
- ( 20) Leybold, H.A., Techniques for Examining Statistical Power Spectral Properties of Random Time Histories, NASA TN D-2714 March 1965.
- ( 21) Harris, B., Spectral Analysis of Time Series; Proceedings of the Advanced Seminar Conducted by the Mathematics Research Center, Wiley, 1967.
- ( 22) 磯部孝編, 相関関数及びスペクトル, 東大出版1968
- ( 23) 五十嵐寿一, 石井泰, 杉山清春, デイジタル型相関器の試作, 東京大学航空研究所集報 4卷 1号 March 1964, 7-31
- ( 24) 宮脇一男, 雜音解析, 朝倉書店1961
- ( 25) 堀川明, ランダム変動の解析, 共立出版1965
- ( 26) 山川新二, バイスペクトルによる波形のくせの把握, 機械学講演論文集730-7, 第5回シンポジウム, 確率過程論の機械工学への応用, May 1973, 115-122
- ( 27) Brillinger, D.R. and Rosenblatt, M., Asymtotic Theory of Estimates of K-th Order Spectra, Spectral Analysis of Time Series, Wiley 1967, 153-188.
- ( 28) Brillinger, D.R. and Rosenblatt, M., Computation and Interpretation of K-th Order Spectra, Spectral Analysis of Time Series, Wiley 1967, 189-232.
- ( 29) 山内保文, 大津皓平, 船の応答の非線型性と高次元スペクトラム: バイスペクトラムの応用, 造船学会論文集Vol.13I, June 1972, 115-135
- ( 30) Hsian, G.C., Tayfun, M.A. and Yang, C.Y., Some Mathematical Concepts Related to Stochastic Spectrum Analysis, Meeting Reprint No. 1688, ASCE National Structural Engineering Meeting, April 22-28, 1972 at Cleveland, Ohio.
- ( 31) Page, C.H., Instantaneous Power Spectra, J. of Applied Physics, Vol. 23, No. 1, January 1952, 103-106.
- ( 32) Priestley, M.B., Evolutionary Spectra and Non-stationary Processes, J. of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 27, No. 1-3, 1965, 204-237.
- ( 33) Priestley, M.B., Design Relations for Nonstationary Processes, J. of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 28, No. 1-3, 1966, 228-240.
- ( 34) Priestley, M.B., Power Spectral Analysis of Non-stationary Processes, J. Sound Vib. (1967) 6 (1), 86-97.

- ( 35) Mark, W.D., Spectral Analysis of the Convolution and Filtering of Nonstationary Stochastic Processes, J. Sound Vib. (1970) 11 (1), 19-63.
- ( 36) Roberts, J.B., On the Harmonic Analysis of Evolutionary Random Vibration, J. Sound Vib. (1965) 2 (3), 336-352.
- ( 37) Hammond, J.K., On the Response of Single and Multidegree of Freedom Systems to Nonstationary Random Excitations, J. Sound Vib. (1968) 7 (3), 393-416.
- ( 38) Loynes, R.M., On the Concept of the Spectrum for Nonstationary Processes, J. of the Royal Statistical Society, Series B, Vol. 30, No. 1, 1968, 1-30.
- ( 39) Mazelsky, B., Extension of Power Spectral Methods of Generalized Harmonic Analysis to Determine Non-Gaussian Probability Functions of Random Input Disturbances and Output Responses of Linear Systems, J. of Aeronautical Sciences, Vol. 21, No. 3, March 1954, 145-153.
- ( 40) Kendall, M.G. and Stuart, A., The Advanced Theory of Statistics, Vol. 1-3, Charles Griffin Co. LTD., 1969.
- ( 41) Holman, R.E. and Hart, G.C., Structural Response to Segmented Nonstationary Random Excitation, AIAA J. Vol. 10, No. 11, November 1972, 1473-1478.
- ( 42) Barnoski, R.L. and Maurer, J.R., Mean-Square Response of Simple Mechanical Systems to Nonstationary Random Excitation, J. of Applied Mechanics, June 1969, 221-227.
- ( 43) Bucciarelli, L.L.Jr. and Kuo, C., Mean-Square Response of a Second-Order System to Nonstationary Random Excitation, J. of Applied Mechanics, September 1970, 612-616.
- ( 44) Ohta, M. and Koizumi, T., Digital Simulation of a White Noise Model Formed of Uniformly Almost Periodic Function, Information and Control Vol. 17, No. 4, November 1970, 340-358.
- ( 45) Shinozuka, M. and Sato, Y., Simulation of Nonstationary Random Process, J. of the Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, EM 1, February 1967, 11-40.
- ( 46) Shinozuka, M., Random Processes with Evolutionary Power, J. of Engineering Mechanics Division, Proceedings of the American Society of Civil Engineers, EM 4, August 1970, 543-545.
- ( 47) Shinozuka, M., Simulation of Multivariate and Multidimensional Random Processes, J.A.S.A. Vol. 49, No. 1 (Part 2) 1971, 357-368.
- ( 48) Shinozuka, M. and Jan, C.-M., Digital Simulation of Random Processes and its Applications, J. Sound Vib. (1972) 25 (1), 111-128.
- ( 49) Fujimori, Y., Spectrum Analysis of the Response of Multimodal Linear Systems to Nonstationary Input, Theoretical and Applied Mechanics, Vol. 23 (Proceedings of the 23rd Japan National Congress for Applied Mechanics, 1973), University of Tokyo Press, 1975.
- ( 50) Crandall, S.H., Random Vibration Vol. 1, Wiley 1958, Vol. 2, MIT Press, 1963.
- ( 51) Bolotin, V.V., Statistical Methods in Structural Mechanics, Lockheed Missiles & Space Company, Sunnyvale California, Distributed by Clearinghouse, TT66-62505, 1965.
- ( 52) Lin, Y.K., Probabilistic Theory of Structural Dynamics, McGraw-Hill 1967.
- ( 53) Wagner, H., Über die Entstehung des Dynamischen Auftriebes von Tragflügeln, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Band 5, Heft 1, February 1925, 17-35.
- ( 54) Küssner, H.G., Stress Produced in Airplane Wings by Gusts, NACA TM 654, January 1932.
- ( 55) Küssner, H.G., Zusammenfassender Bericht über den instationären Auftrieb von Flugeln, Luftfahrtforschung, Band 13, Nr. 12, Dezember 1936, 410-424.
- ( 56) Küssner, H.G., General Airfoil Theory, NACA TM-976, June 1941.
- ( 57) Theodorsen, T., General Theory of Aerodynamic Instability and Mechanism of Flutter, NACA Report 496, 1934.
- ( 58) Jones, R.T., Calculation of the Motion of an Airplane under the Influence of Irregular Disturbances, J. of Aeronautical Science, Vol. 3, No. 12, October 1936, 419-425.
- ( 59) Jones, R.T., Unsteady Lift of a Wing of Finite Aspect Ratio, NACA Report 681, 1940.
- ( 60) Kármán, Th. Von, and Sears, W.R., Airfoil Theory for Non-Uniform Motion, J. of Aeronautical Science, Vol. 5, No. 10, August 1938, 379-390.

- ( 61) Sears, W.R., Some Aspects of Nonstationary Theory and its Practical Application, *J. of Aeronautical Science*, Vol. 8, No. 3, January 1941, 104-108.
- ( 62) Sears, W.R. and Sparks, B.O., On the Reaction of an Elastic Wing to Vertical Gusts, *J. of Aeronautical Science*, Vol. 9, No. 2, December 1941, 64-67.
- ( 63) Garick, I.E., On Some Reciprocal Relations in the Theory of Nonstationary Flows, NACA Report 629, 1938.
- ( 64) Watkins, C.E., Runyan, H.L. and Woolston, D.E., On the Kernel Function of the Integral Equation Relating the Lift and Downwash Distributions of Oscillating Finite Wing in Subsonic Flow, NACA TN 3131, January 1954, and NACA Report 1234, 1955.
- ( 65) Miles, J.W., The Aerodynamic Force on an Airfoil in a Moving Gust, *J. of the Aeronautical Sciences*, November 1956, 1044-1050.
- ( 66) Ashley, H. and Zartarian, G., Piston Theory—A New Aerodynamic Tool for the Aeroelastician, *J. of the Aeronautical Sciences*, December 1956, 1109-1118.
- ( 67) Landahl, M.T., Numerical Lifting-Surface Theory—Problems and Progress, *AIAA J.*, Vol. 6, No. 11, November 1968, 2049-2060.
- ( 68) Ashley, H., Widnall, S. and Landahl, M.T., New Directions in Lifting Surface Theory, *AIAA J.*, Vol. 3, No. 1, January 1965, 3-16.
- ( 69) Giesing, J.P., Rodden, W.P. and Stahl, B., Sears Function and Lifting Surface Theory for Harmonic Gust Fields, *J. of Aircraft*, Vol. 7, No. 3, May-June 1970, 252-255.
- ( 70) Kalman, T.P., Rodden, W.P. and Giesing, J.P., Application of the Doublet-Lattice Method to Non-planar Configurations in Subsonic Flow, *J. of Aircraft*, Vol. 8, No. 6, June 1971, 406-413.
- ( 71) Fung, Y.C., Statistical Aspects of Dynamic Loads, *J. of the Aeronautical Sciences*, May 1952, 317-330.
- ( 72) Putnam, A.A., An Improved Method for Calculating the Dynamic Response of Flexible Airplanes to Gusts, NACA TN-1321, May 1947.
- ( 73) Pierce, H.B., Investigation of the Dynamic Response of Airplane Wing to Gust, NACA TN-1320, June 1947.
- ( 74) Houbolt, J.C. and Anderson, R.A., Calculation of Uncoupled Modes and Frequencies in Bending or Torsion of Nonuniform Beams, NACA TN-1552, February 1948.
- ( 75) Houbolt, J.C., A Recurrence Matrix Solution for the Dynamic Response of Elastic Aircraft, *J. of the Aeronautical Sciences*, Vol. 17, No. 9, September 1950, 540-550, supersedes NACA TN-2060, March 1950.
- ( 76) Houbolt, J.C. and Kordes, E.E., Structural Response to Discrete and Continuous Gusts of an Airplane Having Wing-Bending Flexibility and Correlation of Calculated and Flight Results, NACA Report 1181, 1954, supersedes NACA TN-3006 August 1953, NACA TN-2897 February 1953 and NACA TN-2763 August 1952.
- ( 77) Houbolt, J.C., Steiner, R. and Pratt, K.G., Dynamic Response of Airplanes to Atmospheric Turbulence Including Flight Data on Input and Response, NASA CR-R-199, June 1964.
- ( 78) Houbolt, J.C., Design Manual for Vertical Gusts based on Power Spectral Techniques, AFFDL TR-70-106, December 1970.
- ( 79) Eggleston, J.M. and Mathews, C.W., Application of Several Methods for Determining Transfer Functions and Frequency Response of Aircraft from Flight Data, NACA Report 1204, June 1953.
- ( 80) Seamans, R.C.Jr., Bromberg, B.G. and Payne, L.E., Application of the Performance Operator to Aircraft Automatic Control, *J. of the Aeronautical Sciences*, Vol. 15, No. 9, September 1948, 535-555.
- ( 81) Jenkins, E.S. and Pancu, C.D.P., Dynamic Loads on Airplane Structures, *SAE Quarterly Transactions*, Vol. 3, No. 3, July 1949, 391-409.
- ( 82) Donely, P., Summary of Information Relating to Gust Loads on Airplanes, NACA Report 997, 1950 supersedes NACA TN 1976, November 1949.
- ( 83) Mazelsky, B. and Diederich, F.W., A Method of Determining the Effect of Airplane Stability on the Gust Load Factor, NACA TN-2035, February 1950.
- ( 84) Diederich, F.W., Calculation of the Aerodynamic Loading on Sept and Unswept Flexible Wings of Arbitrary Stiffness, NACA Report 1000, 1950.
- ( 85) Diederich, F.W., The Dynamic Response of a Large Airplane to Continuous Random Atmospheric

- Disturbances, J. of the Aeronautical Sciences, Vol. 23, No. 10, October 1956, 917-930, supersedes NACA Report 1345, 1958 and NACA TN 3910, 1957.
- ( 86) Bisplinghoff, R.L., Isakson, I. and O'Brien, T.F., Gust Loads on Rigid Airplanes with Pitching Neglected, J. of the Aeronautical Sciences, Vol. 18, No. 1, January 1951, 33-42.
- ( 87) Bisplinghoff, Ashley, Halfman, Aeroelasticity, Addison Wesley 1955.
- ( 88) Phillips, W.H. and Kraft, C.C.Jr., Theoretical Study of Some Methods for Increasing the Smoothness of Flight through Rough Air, NACA TN 2416, July 1951.
- ( 89) Pratt, K.G. and Walker, W.G., A Revised Gust-Load Formula and a Reevaluation of V-G Data taken on Civil Transport Airlines from 1933 to 1950, NACA Report 1206, 1954, supersedes NACA TN 2964, June 1953 and NACA TN 3041, November 1953.
- ( 90) Pratt, K.G. and Bennet, F.V., Charts for Estimating the Effects of Short-Period Stability Characteristics on Airplane Vertical-Acceleration and Pitch-Angle Response in Continuous Atmospheric Turbulence, NACA TN 3992, June 1957.
- ( 91) Jackson, X.E. and Wherry, J.E., A Comparison of Theoretical and Experimental Loads on the B-47 Resulting from Discrete Vertical Gusts, J. of the Aerospace Sciences, January 1959, 33-45.
- ( 92) Bennett, F.V. and Pratt, K.G., Calculated Responses of a Large Sweptwing Airplane to Continuous Turbulence with Flight-Test Comparisons, NASA TR R-69, 1960.
- ( 93) Kuethe, A.M., Schetzer, J.D., Garby, L.C. and Roensch, R.L., Preliminary Experiments on the Simulation of Gusts in a Wind Tunnel, WADC TN-55-64.
- ( 94) Press, H. and Mazelsky, B., A Study of the Application of Power Spectral Methods of Generalized Harmonic Analysis to Gust Loads on Airplanes, NASA TN 2853, January 1953.
- ( 95) Press, H., Meadows, M.T. and Hadlock, I., A Reevaluation of Data on Atmospheric Turbulence and Airplane Gust Loads for Application in Spectral Calculations, NACA Report 1272, 1956, supersedes NACA TN 3362, March 1955 and NACA TN 3540, August 1955.
- ( 96) Crane, H.L. and Chilton, R.G., Measurements of Atmospheric Turbulence over a Wide Range of Wavelength for one Meteorological Condition, NACA TN 3702, June 1956.
- ( 97) Huston, W.B. and Skopinski, T.H., Probability and Frequency Characteristics of Some Flight Buffet Loads, NACA TN 3733, August 1956.
- ( 98) Drishler, J.A., Calculation and Compilation of the Unsteady Lift Functions for a Rigid Wing Subjected to Sinusoidal Gusts and to Sinusoidal Sinking Oscillations, NACA TN 3748, October 1956.
- ( 99) Ribner, H.S., Spectral Theory of Buffeting and Gust Response: Unification and Extension, J. of the Aeronautical Sciences, December 1956, 1075-1077.
- (100) Ryan, R.S. and Scoggins, J.R., The Use of Wind Shears in the Design of Aerospace Vehicle, AGARD Report 546, October 1966.
- (101) Peckham, C.G., Flight-Measured Turbulence in NATO Nations, AGARD Report 555, February 1967.
- (102) A'Harrah, R.C., Maneuverability and Gust Response Problems associated with Low-Altitude High-Speed Flight, AGARD Report 556, October 1967.
- (103) Austin, W.H.Jr., Development of Improved Gust Load Criteria for U.S. Airforce Aircraft, Annals of Reliability and Maintainability Vol. 6, 1967, 6-th Conference at Cocoa Beach Flo., July 17-19, 1967.
- (104) Mitchell, C.G.B., Calculation of the Response of a Flexible Aircraft of Harmonic and Discrete Gusts by a Transform Method, R. & M. No. 3498, November 1965.
- (105) Mitchell, C.G.B., Calculation of the Response of a Fighter Aircraft to Turbulent Air and a Comparison with Flight Measurements, The Aeronautical J. of the Royal Aeronautical Society Vol. 72, April 1968, 303-309.
- (106) Filotas, L.T., Theory of Airfoil Response in a Gusty Atmosphere, Part I, Aerodynamic Transfer Function, UTIAS Report No. 139, October 1969, Part II, Response to Discrete Gust or Continuous Turbulence UTIAS Report No. 141, November 1969.
- (107) Porter, R.F. and Brown, J.H.Jr., Evaluation of the Gust-Alleviation Characteristics and Handling Qualities of a Free-Wing Aircraft, NASA CR 1523, April 1970.

- (108) Stenton, T.E., Theoretical Frequency Response Functions and Power Spectra of the XB-70 Response to Atmospheric Turbulence, NASA CR 1621, August 1970.
- (109) Dress, J.M. and Harvey, K.W., Helicopter Gust Response at High Forward Speed, J. of Aircraft Vol. 7, No. 3, May-June 1970, 225-230.
- (110) Gaonkar, G.H., A Study of Lifting Rotor Flapping Response Peak Distribution in Atmospheric Turbulence, J. of Aircraft, Vol. 11, No. 2, February 1974, 104-111.
- (111) Devers, A.D., A General Method for Calculating Three Dimensional Nonstationary Aeroelastic Response in Subsonic Flows, AEDC TR 72-59, May 1972.
- (112) Chen, W.Y., Application of Rice's Exceedance Statistics to Atmospheric Turbulence, AIAA J. Vol. 10, No. 8, August 1972, 1103-1105.
- (113) Houbolt, J.C., Atmospheric Turbulence, AIAA J. Vol. 11, No. 4, April 1973, 421-437.
- (114) Verdon, J.M. and Steinver, R., Response of a Rigid Aircraft to Nonstationary Atmospheric Turbulence, AIAA J. Vol. 11, No. 8, August 1973, 1086-1092.
- (115) Howell, L.J. and Lin, Y.K., Response of Flight Vehicles to Nonstationary Atmospheric Turbulence, AIAA J. Vol. 9, No. 11, November 1971, 2201-2207.
- (116) Fujimori, Y. and Lin, Y.K., Analysis of Airplane Response to Nonstationary Turbulence Including Wing Bending Flexibility, AIAA J. Vol. 11, No. 3, March 1973, 334-339.
- (117) " " Part II, AIAA J. Vol. 11, No. 9, September 1973, 1343-1345.
- (118) Fujimori, Y., Shear and Moment Response of the Airplane Wing to Nonstationary Turbulence, AIAA J. Vol. 12, No. 11, November 1974, and see CAS研究会報告 17号 1974年3月  
also see NAL TR-404T, January 1975.
- (119) Stauffer, W.A. and Hoblit, F.M., Dynamic Gust, Landing, Taxi Loads Determination in the Design of the L-1011, J. of Aircraft, Vol. 10, No. 8, August 1973, 459-467.
- (120) 鶴津久一郎, 空力弹性学, 共立出版1960年
- (121) 鶴津久一郎, 市川輝雄, 加藤寛一郎, 航空機の動的問題における非定常空気力学の役割, 航空宇宙学会誌 19卷 215号 1971年12月, 540-556
- (122) 前田弘, 小早川命, 翼の突風応答に関する研究, 航空宇宙学会誌 第1報 2次元剛体翼の応答 19卷, 210号, 1971年7月 273-286
- 第2報 翼厚の影響に対する数値計算 19卷, 211号, 1971年8月 336-346
- 第3報 2次元弾性翼の応答 20卷, 216号, 1972年1月 1-15
- 第4報 3次元剛体翼の応答 20卷, 220号, 1972年5月 229-242
- 第5報 3次元弾性翼の応答 21卷, 228号, 1973年1月 1-13
- (123) 小野幸一, ヘリコプター振動のパワースペクトル解析 NAL TM-18, 1963年6月
- (124) 竹内和之, 山根皓三郎, 航空機に関する突風について, 航空宇宙学会誌 16卷 173号, 1968年6月, 191-196
- (125) 竹内和之, 山根皓三郎, P S D法の大気乱れに対する航空機強度設計への応用とその問題点, 航空宇宙学会誌, 18卷, 200号 1970年9月 355-363, & NAL TR-233 1971年1月
- (126) 竹内和夫, 小野幸一, 山根皓三郎, 高度500ftないし1000ftにおける上下突風の測定および解析, NAL TR-58, 1964年1月
- (127) 小野幸一, 山根皓三郎, 垂直突風および航空機の突風応答に関する実験的研究, NAL TR-89, 1965年6月
- (128) 竹内和之, 小野幸一, 山根皓三郎, 岡遠一, 外崎得雄, 鈴鹿山脈付近における乱気流の観測, NAL TR-180, 1969年8月
- (129) 竹内和之, 小野幸一, 山根皓三郎, 矢沢健司, 外崎得雄, 東北地方太平洋沿岸航空路上における乱気流観測, NAL TR-222, 1970年10月
- (130) 小野幸一, 外崎得雄, 竹内和之, 山根皓三郎, 亂気流上下速度成分の翼幅方向分布の観測, NAL TR-346, 1973年10月
- (131) Etkin, B., Dynamics of Flight: Stability and Control, John Wiley & Sons, Inc. 1958.
- (132) 長島知有, 滝沢英一, 突風を受ける航空機の縦振動について, 航空宇宙学会誌 13卷, 137号, 1967年6月, 167-173
- (133) 中川憲治, 室津義定, 津村俊弘, 藤原直史, 突風軽減装置の最適構成について, 航空宇宙学会誌 18卷, 197号, 1970年6月, 214-222

- (134) Johannes, R.P. et al., LAMS ... A Technology to Control Aircraft Structural Modes; Presented at 1970 Case Studies in System Control Sponsored by the IEE Professional Group on Automatic Control at Georgia Institute of Technology Atlanta Georgia, June 23, 1970.
- (135) Houbolt, J.C. and Sen, A., Cross-Spectral Functions Based on Von Karman's Spectral Equation, NASA CR 2111, March 1972.

## 追記

この報告は内容からみて已に発表している *NAL TR-404 T* の前編となるべきものであり、順序としてこれを先に発表すべきであったが、整理の都合で遅れてしまった。記号などの一部は *TR-404 T* と同じであるからそれと合せて見ていただきたい。

また計算例としてはピッキングを除き、上下剛体モード、曲げ一次の 2 ケにしほり解析の正確さを期した。

---

## 航空宇宙技術研究所報告559号

昭和 54 年 1 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町 1880

電話武藏野三鷹(0422)47-5911(大代表) 182

印刷所 株式会社 三興印刷  
東京都新宿区信濃町 12

---

Printed in Japan