

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-560

円形開口を持つ円筒シェルの軸圧縮座屈強度

戸田 勸

1979 年 1 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

円形開口を持つ円筒シエルの軸圧縮座屈強度*

戸田 勸**

BUCKLING OF CYLINDRICAL SHELLS WITH CIRCULAR CUTOUTS UNDER AXIAL COMPRESSION

by
Susumu TODA

ABSTRACT

An experimental and analytical study was proceeded to examine the effects of circular cutouts on the buckling behavior of cylindrical shells under axial compression. The experimental results were obtained from tests performed on polyester, brass, and aluminum shells with two diametrically opposed circular holes and were compared with available experimental data for shells with a single circular cutout.

A Rayleigh-Ritz approximation was used to derive a close-form solution which shows the governing parameter of the problem explicitly.

1. 結 論

作業孔、引出孔または重量軽減孔などの理由で薄肉円筒シエルに開口を設けると、開口近傍での応力集中の問題が考えられるほか、シエルの座屈強度が低下することも直感的に容易に予想される。従来、開口を設ける場合は、取り除かれるシエル壁の重量を補強にまわすことが初期設計における経験的な設計方針のようであり、⁽¹⁾⁽²⁾ 実際の設計例は、例えば、Thor-Delta ロケットのインタステージやペイロードフェアリングの設計研究に見ることができる。⁽³⁾ しかし合理的な初期設計を行なうためには、開口が応力分布や座屈強度に及ぼす影響を解明することが必要となる。

開口を持つ円筒シエルの応力解析は、1942年のLur'eの研究⁽⁴⁾以来数多くの研究者によって取り扱われており、系統的な結果が集積されつつある。

一方、座屈解析に関する研究も、その必要性がしばしば指摘されて⁽⁵⁾⁽⁶⁾、近年、かなり行なわれるようになった。すなわち、Tennyson(1968年)は、半径Rと肉厚tの比としてR/t=162, 292, 331を持つエポキシ樹脂円筒を遠心注型(spin cast)によって製作し、これに種々の半径aを持つ円孔を設けてa/R≤0.189

の範囲で座屈実験を行ない、開口があると座屈荷重が大きく低下することを示した。⁽⁷⁾ AlmrothとBrogan, Holmes(1970, 1972年)は、エネルギー差分法に基づく任意形状シエルの非線形構造解析汎用プログラム(STAGS)を用いて、R/t≈400の円筒シエルが2個の正方形または長方形開口を持つ場合を解析してアルミニウム試験片による実験結果を説明し、開口を持つ円筒シエルの座屈解析は本質的には非線形極限荷重解析になることを示した。⁽²⁾⁽⁸⁾ Starnes(1970年)はMylar円筒(R/t=400, 530, 800)および電気鍍金法(electroforming)で製作した銅製円筒(R/t≈960)が中央部に1個の円形開口を持つ場合の座屈挙動をa/R≤0.5の範囲で実験とエネルギー法による数値計算によって系統的に調べ、座屈挙動はパラメータ $\alpha=a/\sqrt{Rt}$ に支配され、 α が1以上になると座屈荷重は急激に低下することを示した⁽⁹⁾。その後WilliamsとStarnes(1972年)はNASTRAN有限要素プログラムを利用して数値計算を行ない、 $\alpha\leq 2$ の範囲で実験結果を説明した。⁽¹⁰⁾⁽¹¹⁾ さらにAlmrothとBrogan, Marlowe(1973年)は2個の円形開口を持つ場合について、STAGSプログラムを用いて求めた二三の数値計算値はStarnesの実験値と良く一致することを示した。⁽¹²⁾ 後藤と康井、粕谷(1974年)はルミナーフィルム円筒シエルを用いて1個、2個または4個の円孔がある場合の実験を行ない、開口数の影響は小さいことを示した。⁽¹³⁾

* 昭和53年11月17日受付

** 機体第2部

また, Toda (1975年)は2個の楕円, 円, 長方形または正方形開口を持つMylar円筒シエル ($R/t=400$, $a/R \leq 0.6$) の座屈荷重を実験的に調べて開口形状と開口数が座屈荷重に及ぼす影響は小さいことを示し, これまでの実験データの下限値を与える一つの経験式を与えた。¹⁴

本研究ではまずポリエステル円筒 ($R/t=400$), 7-3黄銅円筒 ($R/t=500$) およびアルミニウム円筒 ($R/t=24.5$) の中央部に各種寸法の円形開口 ($a/R \leq 1.0$) を直径上に対峙して2個設けて圧縮試験を行ない, 荷重-変位曲線を記録して座屈挙動を観察し, 主として1個の円形開口を持つ場合について得られている在来の実験資料を補足する。次に, 円形開口を持つ円筒シエルの座屈荷重はパラメータ $\alpha = a/\sqrt{Rt}$ に支配されることを閉じた式で示し, 実験と数値計算に基づく結論に解析的裏付けを与えることを試みる。

2. 座屈実験

2.1 試験片および実験方法

試験片寸法を表1に示す。グループMの試験片は公称

表1 試験片寸法

試験片	半径, R	肉厚, t	長さ, L	R/t
M	100 mm	0.25 mm	250 mm	400
B	100	0.20	215	500
A	24.5	1.0	75	24.5

板厚0.25mmのポリエステルフィルムから糊代を10mmにあって所定の長方形を切出してアルミニウム製マンドレルに巻きつけ, その後Mylar専用接着材 (Essex Proseal 501/501A Mylar Adhesive) で加圧接着して製作したものである。電子光学式非接触変位計 (Zimmer 100A, Optron 680A) を使用し, インストロン万能試験機で行なった5回の引張試験の結果から縦弾性係数としてロール方向に5.10 GPa (520 kgf/cm²), ロールに直角方向に5.55 GPa (566 kgf/cm²) を得たので材料の縦弾性係数は $E=5.30$ GPa (540 kgf/cm²) とした。なお, 応力-ひずみ曲線の代表例を図1に示す。

グループBの試験片は公称板厚0.20mmの7-3黄銅板から長方形板を切出し, あらかじめ所定の円孔を設け

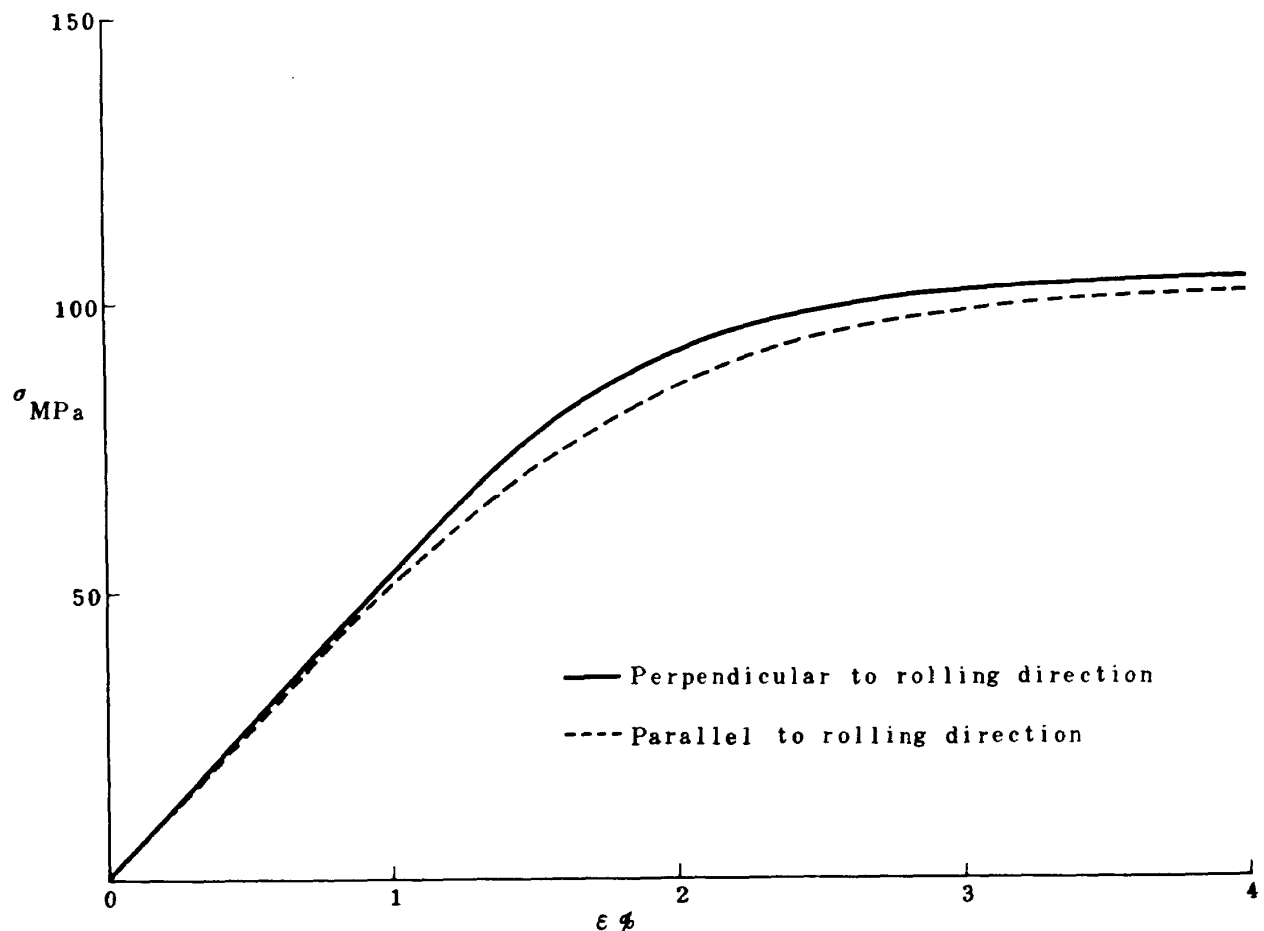


図1 ポリエステルフィルムの応力-ひずみ曲線

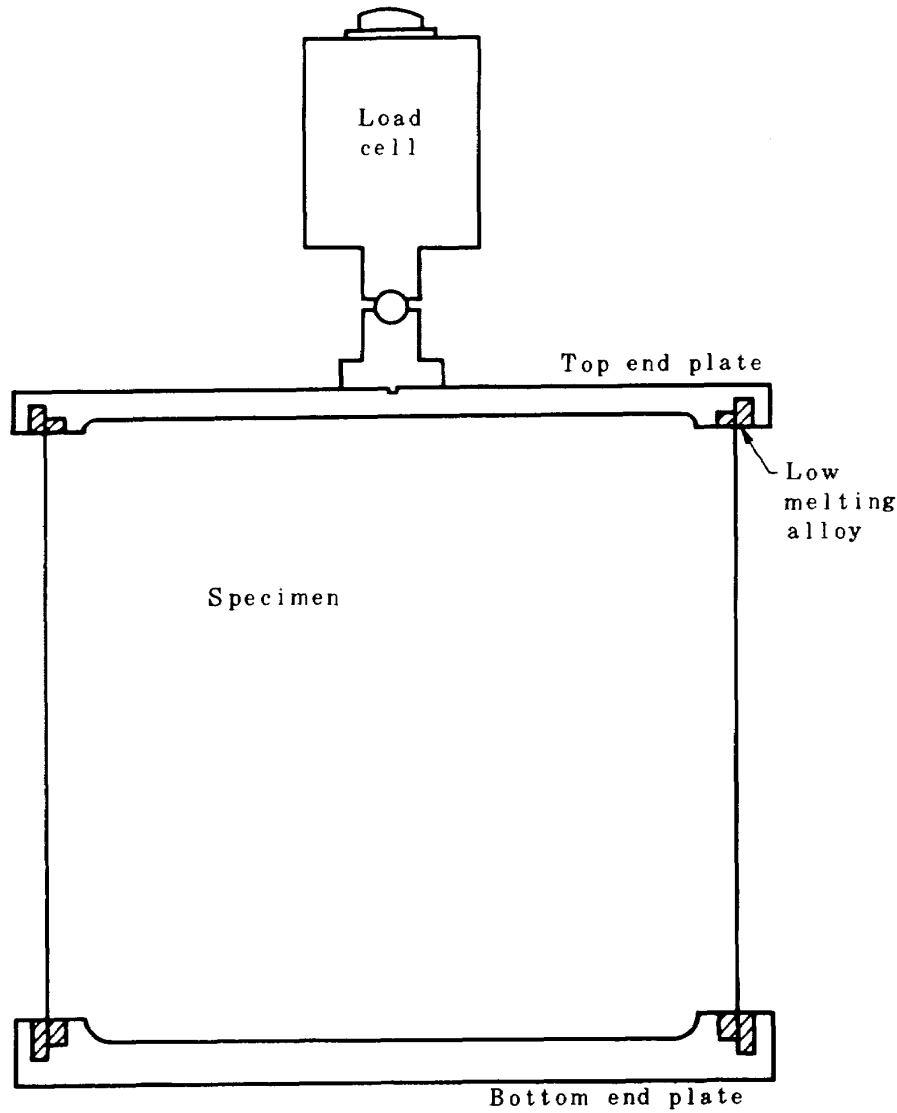


図2 試験片と上下固定板

てから突合せハンダ溶接で製作したものであり、材料の縦弾性係数は 110 GPa (11350 kgf/mm^2) である。

グループAの試験片はJIS-H4141に基づく硬質アルミニウム引抜円管から長さ 85 mm の円筒をとり出し所定の開口を設けたものである。引張試験で得た縦弾性係数は 72.5 GPa (7400 kgf/mm^2)、 0.2% 耐力は $\sigma_Y = 155 \text{ MPa}$ (15.8 kgf/mm^2) である。

試験片グループMでの実験手順は、まず図2に示すように円筒の両端末をアルミニウム製上下固定板の円形溝に挿入し、低融合金(融点 47°C) で固定する。

次に、試験片をギヤ駆動万能試験機(島津RES10)の下部テーブルの中央部に正しく配置し、上固定板の表面に設けた案内孔(1 mm ϕ , 深さ 2 mm) を利用しボールベアリングを介してロードセルをセットする。

次に、試験片上端の軸方向変位(縮み量)を測定するための渦電流型非接触変位計(Kaman)を試験機下部テーブル上に配置し、測定器調整を行なった後に静かに

試験機手動クランクを回してクロスヘッドを下げて圧縮負荷し、ロードセルおよび変位計の出力をXYレコーダに記録する。実験では、まず開口がない場合の座屈荷重を求め、同一試験片で開口寸法を順次に大きくしながら対応する座屈荷重を求める。なお、開口は円筒中央部に継ぎ目と円筒軸を含む面に対称に2個設け、作業には高速ハンドドリル(Freedom GG-30)を使用した。試験片グループBおよびAでの実験手順も同様であるが、軸方向変位の測定にはダイヤルゲージを使用した。

2.2 実験結果と考察

2.2.1 試験片グループM, B

荷重-変位曲線の代表例を図3に示す。開口が小さい場合($\alpha = 0, 0.6$)は、荷重 P は端末の縮み量 δ と共に直線的に増大し、 P_{cr} に達すると飛移座屈を生じて荷重は急激に減少する。その後、直ちに除荷すると大きなループを描いて除荷径路をたどる。開口が大きくなり

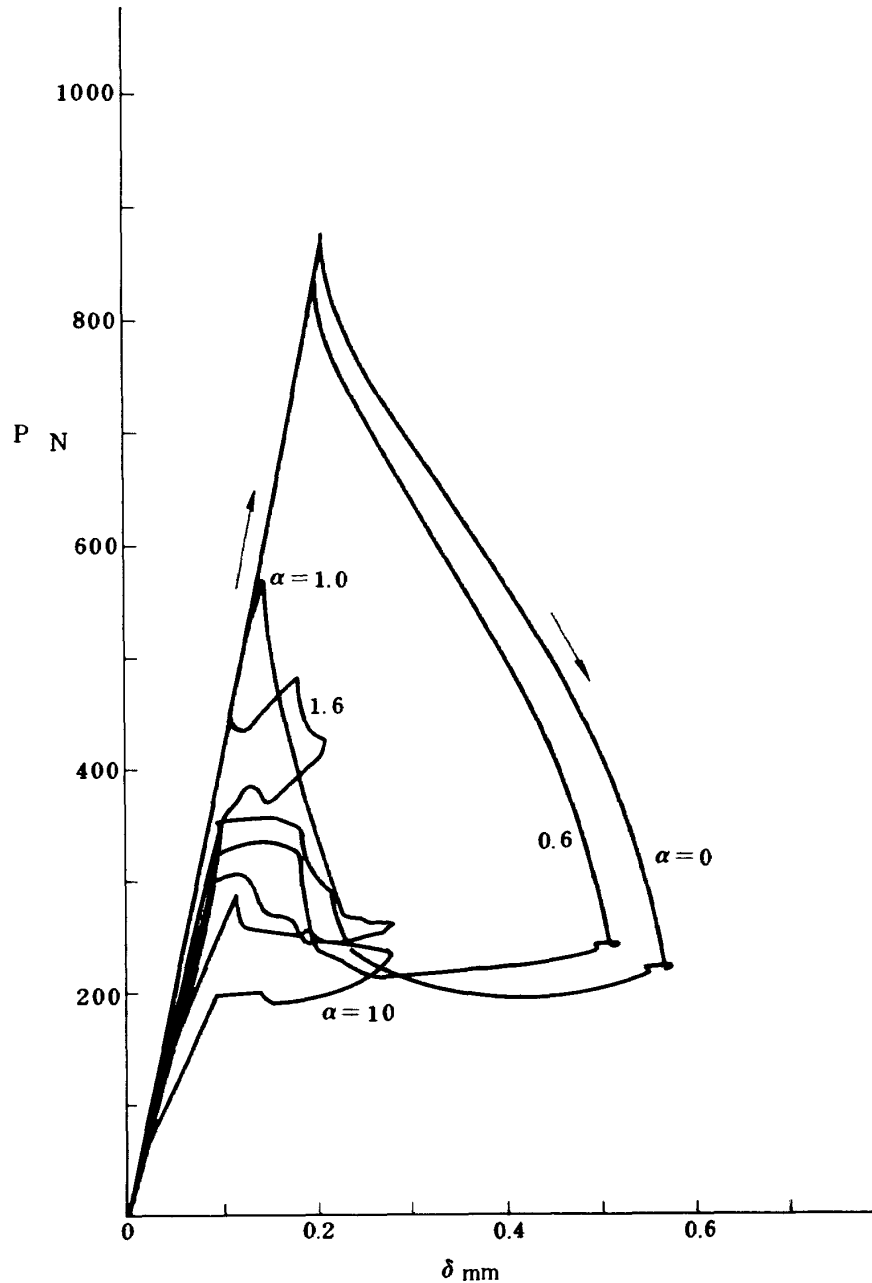


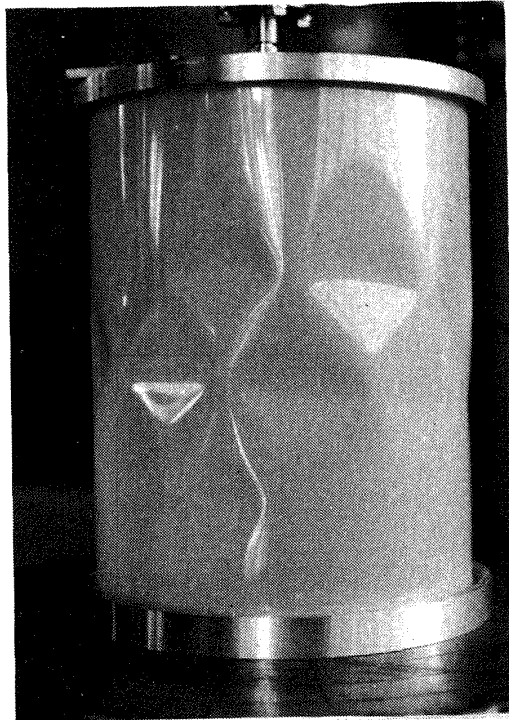
図3 荷重—変位曲線，ポリエステル円筒 ($R/t=400$)

$a=8\text{mm}$ ($\alpha=1.6$) となると、 $P=450\text{N}$ (46kgf) で開口部自由端近傍で円筒の内側に窪む局所的な座屈変形を生じて荷重が僅かに減少し、その後荷重は再び増加して $P_{cr}=488\text{N}$ (49.8kgf) で全体的な座屈を生じる。これらの荷重を各々局部座屈荷重および全体座屈荷重と呼ぶことにする。開口がさらに大きくなり $a=50\text{mm}$ ($\alpha=10$) の場合は $P_{cr}=292\text{N}$ (29.8kgf) で開口自由端に窪みを生じて荷重が減少し、その後の荷重増加は観察されず除荷した例である。図4および図5には代表的な座屈後モードを示した。

図6はポリエステル円筒シエルによる実験結果の一例で

ある。縦軸は実験値を古典座屈荷重 P_{GL} で無次元化した値であり、横軸はパラメータ $\alpha=a/\sqrt{Rt}$ である。点線で示した2本の曲線は1個の円形開口を持つ場合の Starnes の実験値の上下限⁽⁹⁾を意味する。このようにして求めた全体座屈荷重の実験値を図7にまとめて示す。

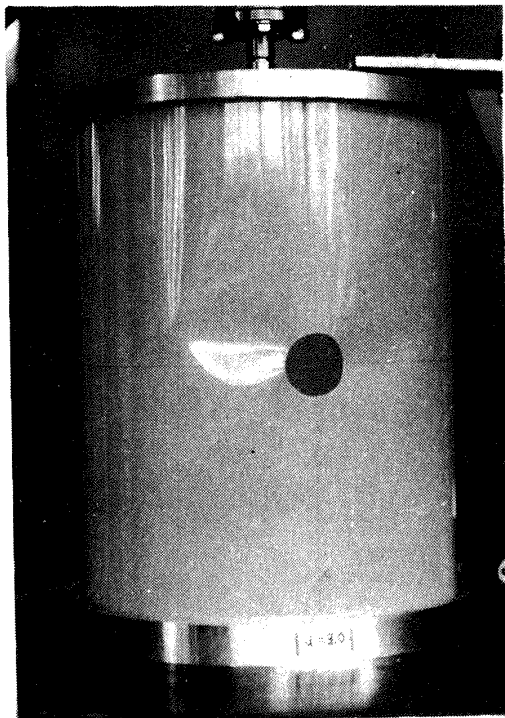
なお、1個の円形開口を持つ場合の Tennyson の実験結果もあわせて示した。本実験結果は Starnes の実験値の上下限内におさまリ、1個の円形開口を持つ場合と同様の座屈挙動を示している。すなわち、開口個数が1個から2個になっても座屈荷重に大きな変化はなく、 $\alpha < 1$ では開口の影響は小さく座屈荷重はほぼ一定であ



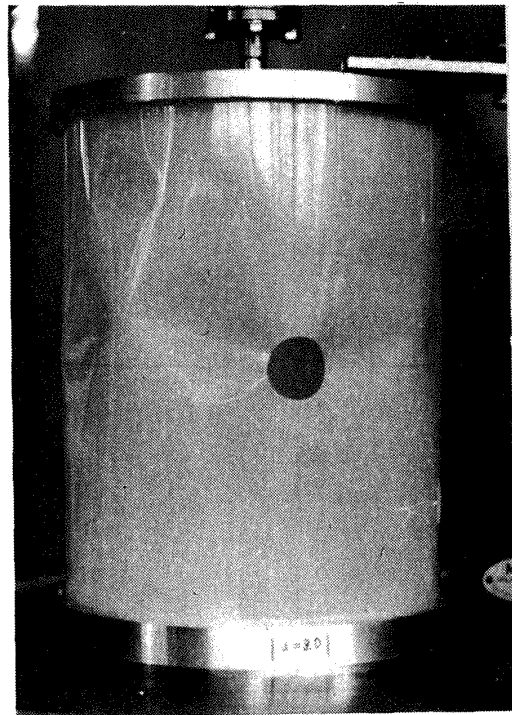
(a) $\alpha=0$, $P=890\text{N}$ (90.8kgf)



(b) $\alpha=0.4$, $P=880\text{N}$ (89.8kgf)



(c) $\alpha=3.0$, $P=437\text{N}$ (44.6kgf) 局部座屈

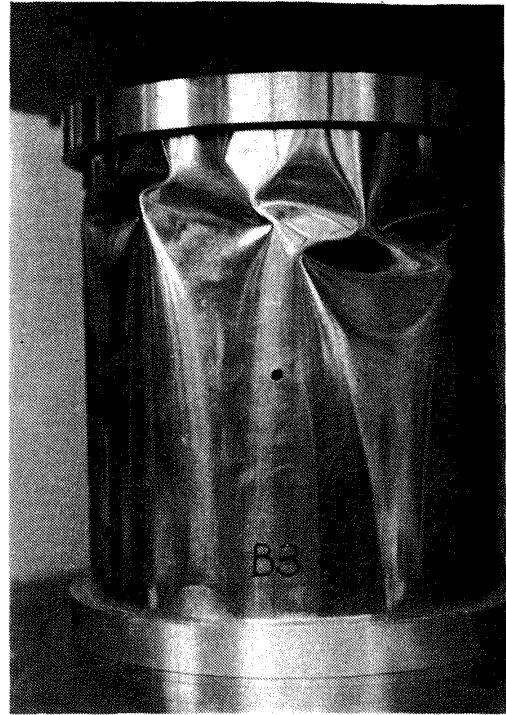


(d) $\alpha=3.0$, $P=453\text{N}$ (46.2kgf) 全体座屈

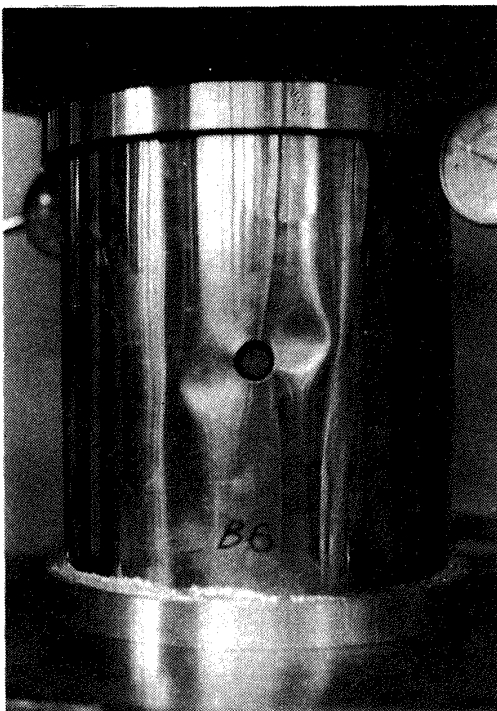
図4 ポリエステル円筒の座屈後モード



(a) $\alpha=0$, $P=6295\text{N}$ (642 kgf)



(b) $\alpha=0.5$, $P=6315\text{N}$ (644 kgf)



(c) $\alpha=2.0$, $P=4720\text{N}$ (481 kgf) 局部座屈



(d) $\alpha=2.0$, $P=5275\text{N}$ (538 kgf) 全体座屈

図5 黄銅円筒の座屈後モード

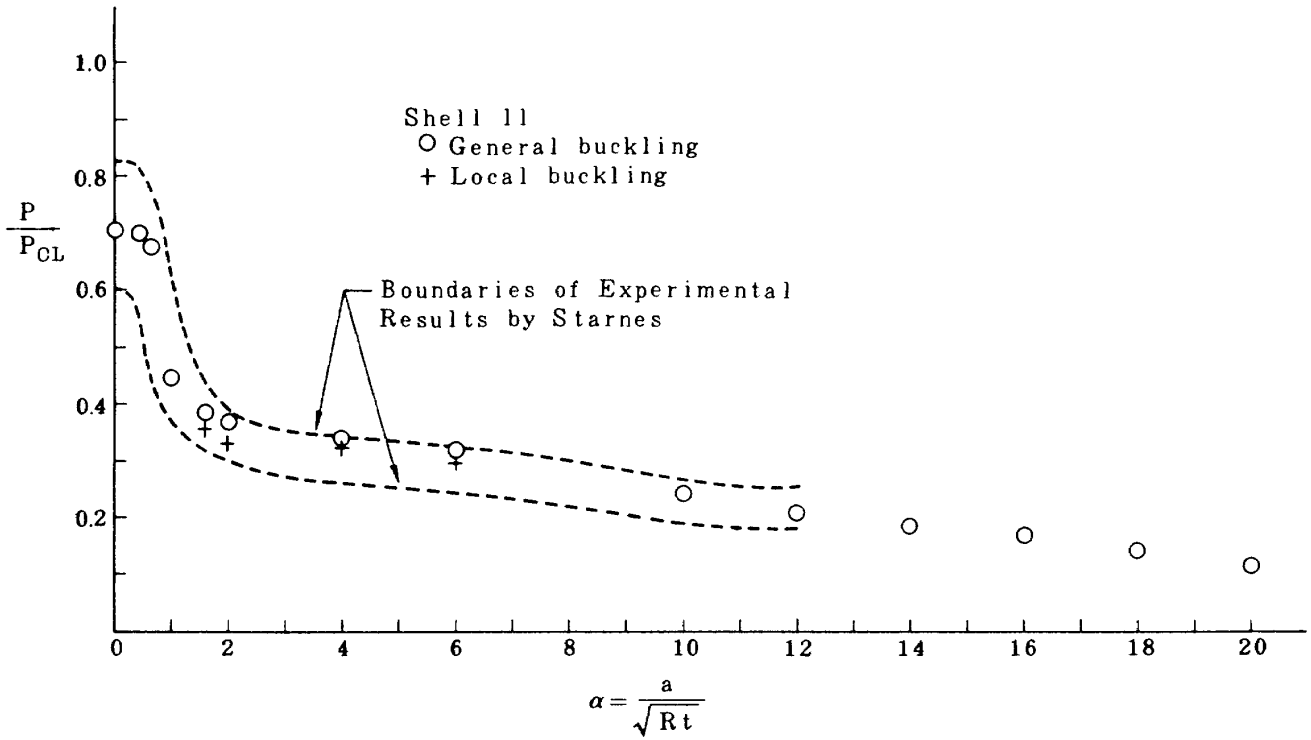


図6 ポリエステル円筒の代表的な実験結果

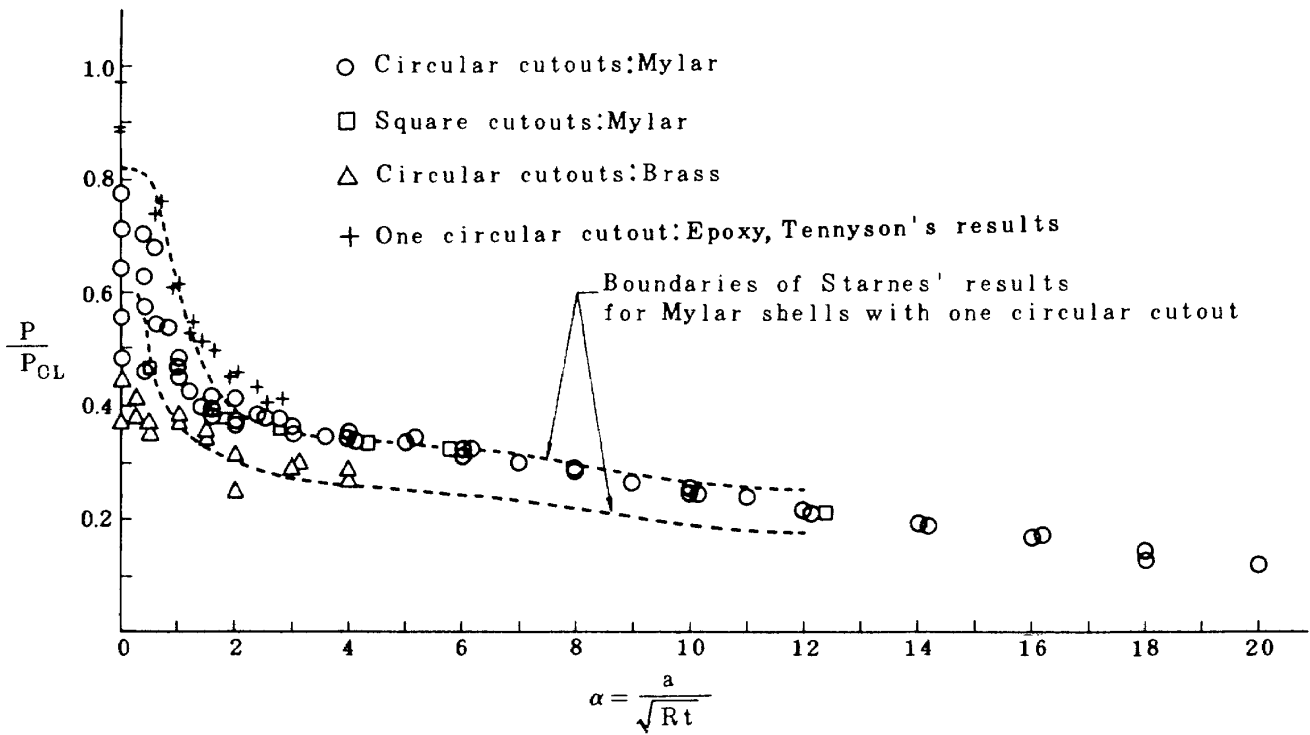


図7 実験結果のまとめ

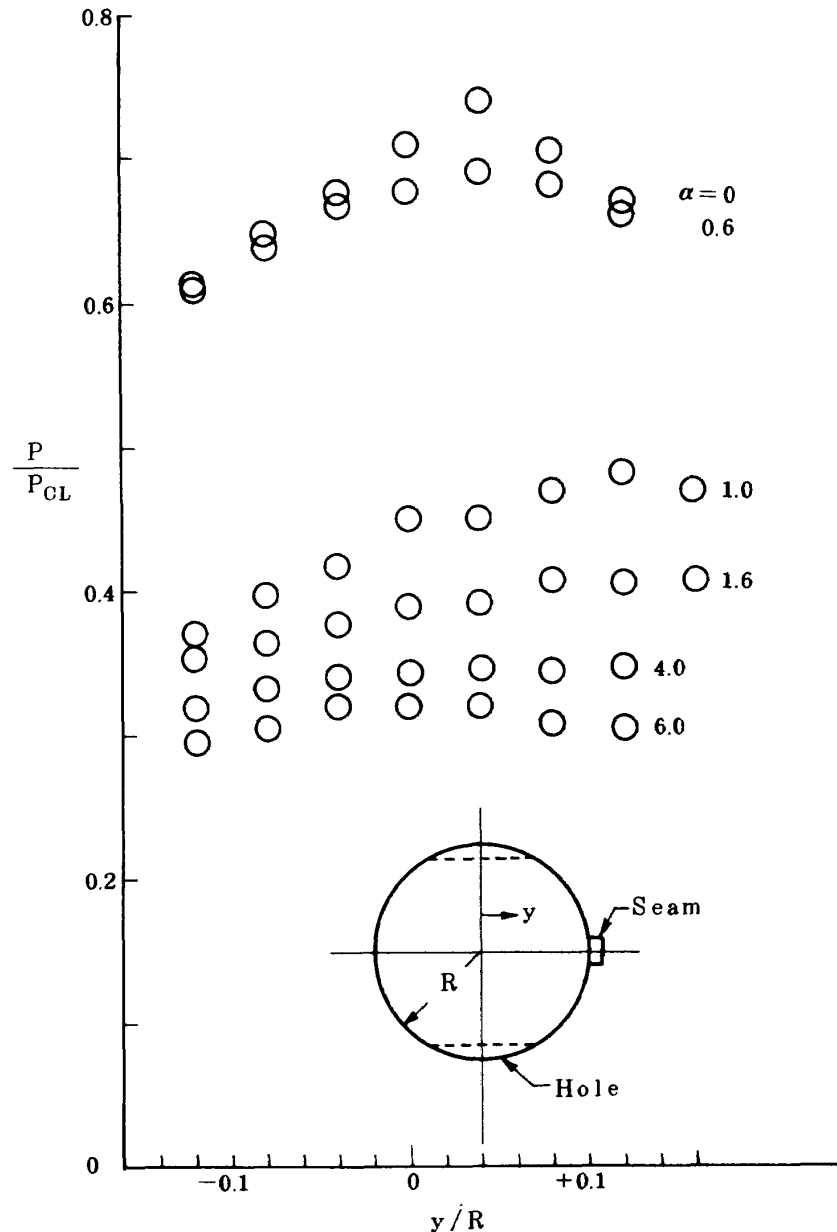


図8 偏心圧縮試験結果

るが、一般的な初期不整の影響で各試験片ごとの実験値のばらつきが大きい。 $1 < \alpha < 2$ の領域では座屈荷重は急激に低下し、 α がさらに増加するに従い緩かに減少するが、実験値のばらつきは小さい。また、黄銅試験片の実験結果は、初期不整が大きく開口のない完全円筒シエルの座屈荷重が小さい試験片では、開口の影響が顕著にあらわれないことを示している。

次に、継ぎ目の影響を調べる目的で行なった偏心圧縮試験の結果を図8に示す。開口が小さい場合は、継ぎ目と偏心量の影響は大きく、座屈荷重は継ぎ目の方向に4mm偏心して圧縮負荷した場合に最大となり、偏心量が増すに従って減少する。一方、開口が大きくなると座屈荷重は継ぎ目と偏心量に敏感でなくなる。

2.2.2 試験片グループA

荷重-変位曲線の代表例を図9に示す。荷重 P は縮み量 δ と共に増大して極限荷重 P_{cr} に達し、その後徐々に減少する。この時の座屈モードを図10に示す。開口がない場合は一方の端末近くに軸対称のバルジ型変形を生じ、開口がある場合は開口部につばが生じる。

実験結果を図11に示す。縦軸は実験値を開口のない完全円筒シエルの座屈実験値 P_{NH} で無次元化した値である。各開口寸法につき2本の試験片で実験を行なったが、実験値のばらつきは小さく図には平均値で示した。なお、1円形開口の実験値は文献(9)から引用したものである。試験片グループMおよびBの薄肉円筒シエルの場合とは座屈挙動が異なり、座屈荷重は開口個数によって明らかに相違し、開口が大きくなるに従いほぼ直線的に

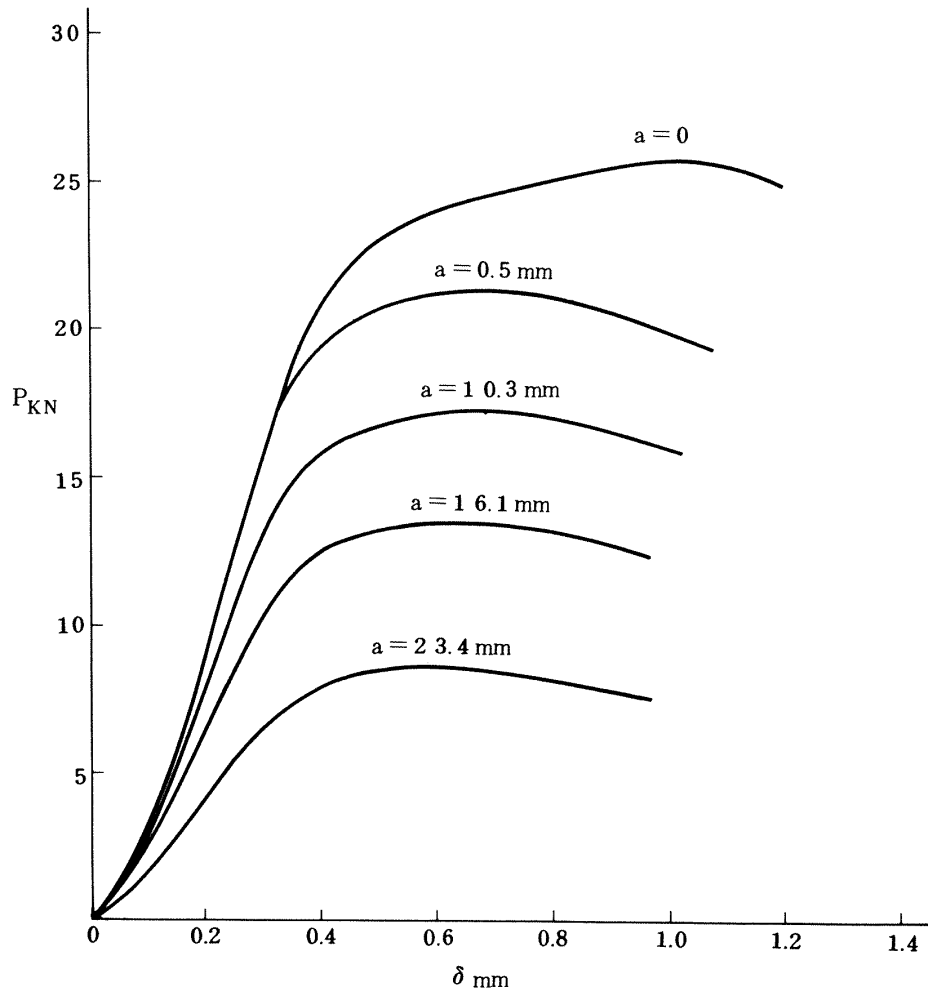
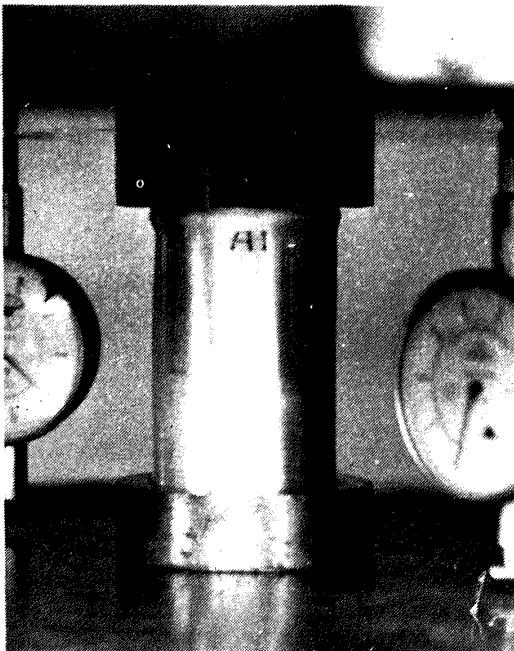
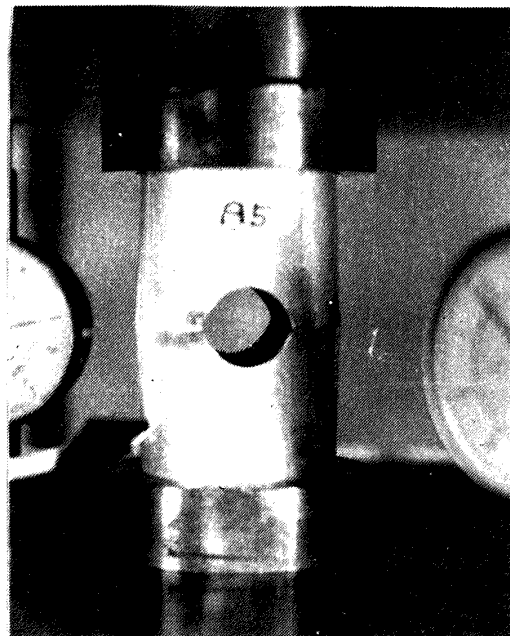


図9 荷重-変位曲線。アルミニウム円筒 ($R/t=24.5$)



(a) $\alpha=0$, $P=26.2\text{KN}$ (2675 kgf)



(b) $\alpha=2.1$, $P=17.2\text{KN}$ (1755 kgf)

図10 アルミニウム円筒の座屈後モード

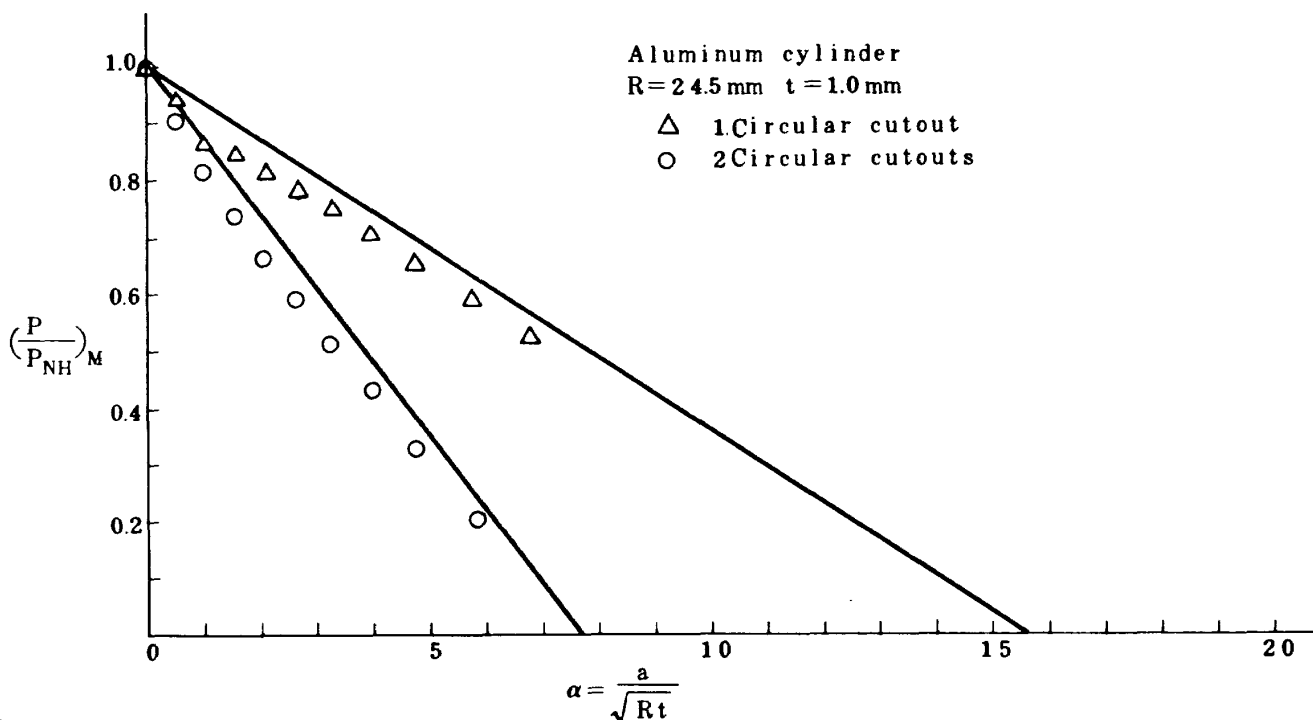


図 1 1 アルミニウム円筒の実験結果

減少することがわかる。なお、実線は開口のない完全円筒シエルに対応する点と、開口が全円周にわたり円筒シエルの軸圧縮耐荷能力が零となる点を直線で結んだものである。

3. 理論解析

開口を持つ円筒シエルの軸圧縮座屈応力は NASTRAN や STAGS 等の汎用プログラムを利用して数値解析的に求められているが、かなりの計算時間を必要とすることから、系統的な資料を得るまでにはいたっていない。⁽²⁾⁽³⁾ また Starnes は 4 項からなる試験函数を用いてエネルギー直接法によって解析したが、最終的には $R/t=100$,

200, 400, 530, および 800 の円筒シエルに各々 12 種類の寸法の円形開口がある場合を数値計算し、座屈応力はパラメータ $\alpha = a/\sqrt{Rt}$ で整理されることを示した。⁽⁹⁾ 本章での解析の目的は、定量的に実験値と比較することではなく、座屈応力がパラメータ α の函数となることを閉じた式で示すことである。

解析を単純化するため、開口半径 a が円筒の半径 R と長さ L に比較して十分に小さく座屈前に膜応力状態が存在すると仮定し、図 1 2 に示す仮想的な無限長スパイラル円筒シエル⁽⁴⁾の開口近傍における局部座屈として取り扱うことにする。

シエルの曲げひずみエネルギー U_b は図 1 2 の $r-\phi$ 座

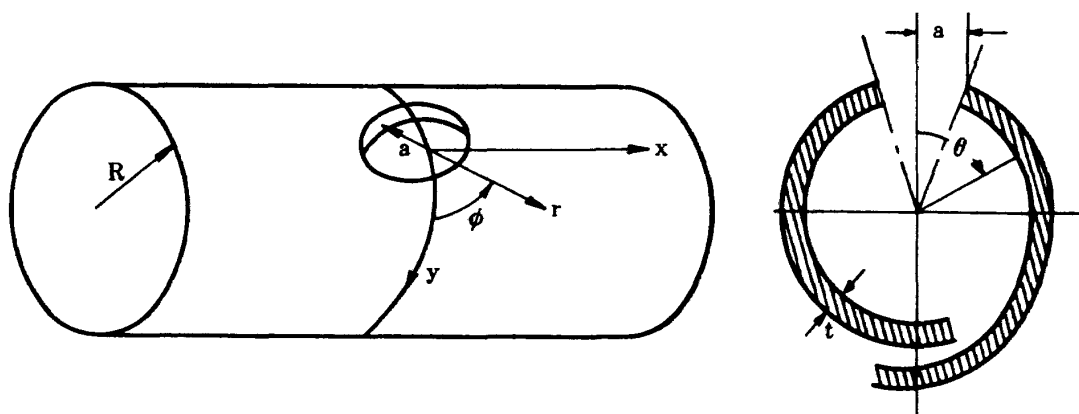


図 1 2 スパイラル円筒シエル

標系で表わすと次式となる。

$$U_b = \frac{D}{2} \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \right)^2 + \frac{2}{r^3} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right)^2 \right\} + 2(1-\nu) \left\{ \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \phi} \right)^2 - \frac{2}{r^3} \frac{\partial^2 w}{\partial r \partial \phi} \frac{\partial w}{\partial \phi} + \frac{1}{r^4} \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 \right\} + 2\nu \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \phi^2} \right\} r dr d\phi \quad (1)$$

ここに、 w は中央面法線方向の変位成分であり、 D は

$$D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$$

で定義される板の曲げ剛性、 E はヤング率、 ν はポアソン比である。

一方、面内ひずみエネルギー U_m は

$$U_m = \frac{1}{2Et} \iint \left\{ (N_r + N_\phi)^2 + 2(1+\nu)(N_r N_\phi - N_{r\phi}^2) \right\} r dr d\phi \quad (2)$$

となる。ここで、面内合応力は

$$N_r = \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$$

$$N_\phi = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} \quad (3)$$

$$N_{r\phi} = -\frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial \phi} \right)$$

であり、応力関数 F は次の適合方程式を満足しなければならない。

$$\nabla^4 F = -\frac{Et}{R} \left(\sin \phi \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \left(\sin \phi \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{\cos \phi}{r} \frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \quad (4)$$

ただし

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

次に、座屈前の基準平衡状態における合応力 $N_r^0, N_\phi^0, N_{r\phi}^0$ としてStarnesと同様に有孔無限平板の解⁽¹⁰⁾を用いると、座屈変形によるひずみエネルギーの増加は

$$U_w = -\frac{1}{4} \sigma t \iint \left\{ \left[2 \sin^2 \phi - 3 \frac{a^4}{r^4} \cos 2\phi + \frac{a^2}{r^2} (4 \cos 2\phi - 1) \right] \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right)^2 \right.$$

$$\left. + \left(\frac{2}{r^2} \cos^2 \phi + 3 \frac{a^4}{r^6} \cos 2\phi + \frac{a^4}{r^4} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right)^2 + \left(\frac{2}{r} - 6 \frac{a^4}{r^5} + 4 \frac{a^2}{r^3} \right) \sin 2\phi \left(\frac{\partial w}{\partial r} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial \phi} \right) \right\} r dr d\phi \quad (5)$$

と表わされる。ここで σ は円筒両端での一様圧縮応力である。

次に、実験で開口近傍に観察される座屈波形を

$$w = A e^{-Br} \cos 2\phi \quad (6)$$

と仮定する。ここに A と B は任意定数である。式(6)を式(1)および(5)に代入すると次式を得る。

$$U_b = \frac{\pi D}{4a^2} \left[e^{-2q} \left(q^3 + \frac{1}{2} q^2 + 24 \right) + 18 q^2 E_i(2q) - 2\nu e^{-2q} (q^2 + 8q + 4) \right] A^2 \quad \dots\dots(7)$$

$$U_w = -\frac{1}{4} \sigma t \pi \left[e^{-2q} \left(\frac{9}{4} - \frac{7}{2} q \right) + (4 + 7q^2) E_i(2q) \right] A^2 \quad (8)$$

ただし $q = Ba$ であり、 $E_i(z)$ は次式で定義される積分指数関数である。

$$E_i(z) = \int_z^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \quad (9)$$

次に式(6)の w に対応する応力関数 F は式(4)から

$$F = a_0 \ln r + h_0(r) + \left[\frac{a'_2}{r^2} + b'_2 + h_2(r) \right] \cos 2\phi + \left[\frac{a'_4}{r^4} + \frac{b'_4}{r^2} + h_4(r) \right] \cos 4\phi \quad (10)$$

と表わされる。ここに

$$h_0(r) = \frac{Et}{8R} A \left[e^{-Br} \left(\frac{r}{B} + \frac{1}{B^2} \right) - r^2 E_i(Br) \right]$$

$$h_2(r) = -\frac{Et}{8R} A \left[e^{-Br} \left(\frac{r}{B} + \frac{3}{B^2} + \frac{6}{B^3 r} + \frac{6}{B^4 r^2} \right) - r^2 E_i(Br) \right]$$

$$h_4(r) = \frac{Et}{4R} A e^{-Br} \left[\frac{1}{B^2} + \frac{7}{B^3 r} + \frac{27}{B^4 r^2} + \frac{60}{B^5 r^3} + \frac{60}{B^6 r^4} \right] \quad \dots\dots(11)$$

は式(4)の特解に対応する項であり、式(10)のその他の項は同次方程式 $\nabla^4 F = 0$ の一般解⁽¹¹⁾の一部である。

面内合応力は式(3)と(10)から

$$N_r = K_1(r) + K_2(r) \cos 2\phi + K_3(r) \cos 4\phi$$

$$N_\phi = K_4(r) + K_5(r) \cos 2\phi + K_6(r) \cos 4\phi \quad (12)$$

$$N_{r\phi} = K_7(r) \sin 2\phi + K_8(r) \sin 4\phi$$

となる。ここに、

$$K_1(r) = \frac{a_0}{r^2} - \frac{Et}{4R} A E_i(Br)$$

$$K_2(r) = -6 \frac{a'_2}{r^4} - 4 \frac{b'_2}{r^2} + \frac{Et}{4R} A \left[e^{-Br} \left(\frac{3}{Br} + \frac{9}{B^2 r^2} + \frac{18}{B^3 r^3} + \frac{18}{B^4 r^4} \right) - E_i(Br) \right]$$

$$K_3(r) = -20 \frac{a'_4}{r^6} - 18 \frac{b'_4}{r^4} - \frac{Et}{4R} A e^{-Br} \left[\frac{1}{Br} + \frac{23}{B^2 r^2} + \frac{146}{B^3 r^3} + \frac{546}{B^4 r^4} + \frac{1200}{B^5 r^5} + \frac{1200}{B^6 r^6} \right]$$

$$K_4(r) = -\frac{a_0}{r^2} + \frac{Et}{4R} A \left[e^{-Br} - E_i(Br) \right]$$

$$K_5(r) = 6 \frac{a'_2}{r^4} + \frac{Et}{4R} A \left[e^{-Br} \left(-2 - \frac{3}{Br} - \frac{9}{B^2 r^2} - \frac{18}{B^3 r^3} - \frac{18}{B^4 r^4} \right) + E_i(Br) \right]$$

$$K_6(r) = 20 \frac{a'_4}{r^6} + 6 \frac{b'_4}{r^4} + \frac{Et}{4R} A e^{-Br} \left[1 + \frac{7}{Br} + \frac{41}{B^2 r^2} + \frac{182}{B^3 r^3} + \frac{582}{B^4 r^4} + \frac{1200}{B^5 r^5} + \frac{1200}{B^6 r^6} \right]$$

$$K_7(r) = -6 \frac{a'_2}{r^4} - 2 \frac{b'_2}{r^2} + \frac{Et}{4R} A \left[e^{-Br} \left(\frac{3}{Br} + \frac{9}{B^2 r^2} + \frac{18}{B^3 r^3} + \frac{18}{B^4 r^4} \right) + E_i(Br) \right]$$

$$K_8(r) = -20 \frac{a'_4}{r^6} - 12 \frac{b'_4}{r^4} - \frac{Et}{4R} A e^{-Br} \left[\frac{4}{Br} + \frac{32}{B^2 r^2} + \frac{164}{B^3 r^3} + \frac{564}{B^4 r^4} + \frac{1200}{B^5 r^5} + \frac{1200}{B^6 r^6} \right] \quad \dots\dots\dots(13)$$

次に、円孔周縁での境界条件として

$$N_r(a) = N_{r\phi}(a) = 0 \quad (14)$$

を考えると、積分定数 a_0, a'_2, b'_2, a'_4 および b'_4 は次のように定まる。

$$a_0 = \frac{Et}{4R} A a^2 E_i(q)$$

$$a'_2 = \frac{Et}{8R} A a^4 \left[e^{-q} \left(\frac{1}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{6}{q^3} + \frac{6}{q^4} \right) + E_i(q) \right]$$

$$b'_2 = -\frac{Et}{4R} A a^2 E_i(q)$$

$$a'_4 = -\frac{Et}{8R} A a^6 e^{-q} \left(\frac{1}{q} + \frac{5}{q^2} + \frac{20}{q^3} + \frac{60}{q^4} + \frac{120}{q^5} + \frac{120}{q^6} \right)$$

$$b'_4 = \frac{Et}{8R} A a^4 e^{-q} \left(\frac{1}{q} + \frac{3}{q^2} + \frac{6}{q^3} + \frac{6}{q^4} \right) \quad \dots\dots\dots(15)$$

式(12)を式(2)に代入し、積分指数関数の積分公式¹⁸⁾を利用して積分を実行すると、結局

$$U_m = \frac{\pi Et a^2}{2R^2 q^2} A^2 \left[e^{-2q} \left(\frac{7q}{32} + \frac{7}{64} \right) - \frac{3}{4} q^2 E_i(q)^2 \right] \quad \dots\dots\dots(16)$$

を得る。

平衡条件は全ポテンシャルエネルギー

$$II = U_b + U_m + U_w \quad (17)$$

の停留条件より次式のように求められる。

$$\sigma = \sigma_{CL} \left[\frac{1}{\alpha^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{C_2(q)}{C_1(q)} + \frac{\alpha^2 \sqrt{3(1-\nu^2)}}{8} \frac{C_3(q)}{C_1(q)} \right] \quad \dots\dots\dots(18)$$

ここに

$$\sigma_{CL} = \frac{E}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \frac{t}{R}$$

$$\alpha = a / \sqrt{Rt}$$

$$C_1(q) = e^{-2q} (9 - 14q) + (16 + 28q^2) E_i(2q)$$

$$C_2(q) = e^{-2q} \left[q^3 + \left(\frac{1}{2} - 2\nu \right) q^2 - 16\nu q + (24 - 8\nu) \right] + 18q^2 E_i(2q)$$

$$C_3(q) = e^{-2q} \left(\frac{14}{q} + \frac{7}{q^2} \right) - 48 E_i(q)^2 \quad (19)$$

である。

座屈応力は q を変化させた時の式(18)の最小値であり、結局、パラメータ $\alpha = a / \sqrt{Rt}$ の函数となることがわかる。

式(18)の値は函数表、例えば文献¹⁹⁾、を利用して容易に求めることができる。計算結果と実験値を比較すると図13のようになる。式(18)を実線で、Starnesの数值計算結果を二点鎖線で示した。点線はポリエステル円筒シエルでこれまでに得られた実験値の上下限である。 $\alpha < 1$ では式(18)の値は古典座屈応力 σ_{CL} よりも高くなる。従って、この領域では σ_{CL} で座屈し開口の影響は小さいことを示している。 $1 < \alpha < 2$ では、式(18)の値は σ_{CL} から急激に減少し定性的に実験結果を良く説明している。 $\alpha \geq 2$ になると、 α が増加するに従い実験値は緩かに減少するが式(18)の値は増大する。この理由として、開口がある程度大きくなると座屈前面内応力として無限平板の解を用いること、および座屈変形を一項試験函数で表わすことに無理が生じること等が考えられる。なお、図13の一

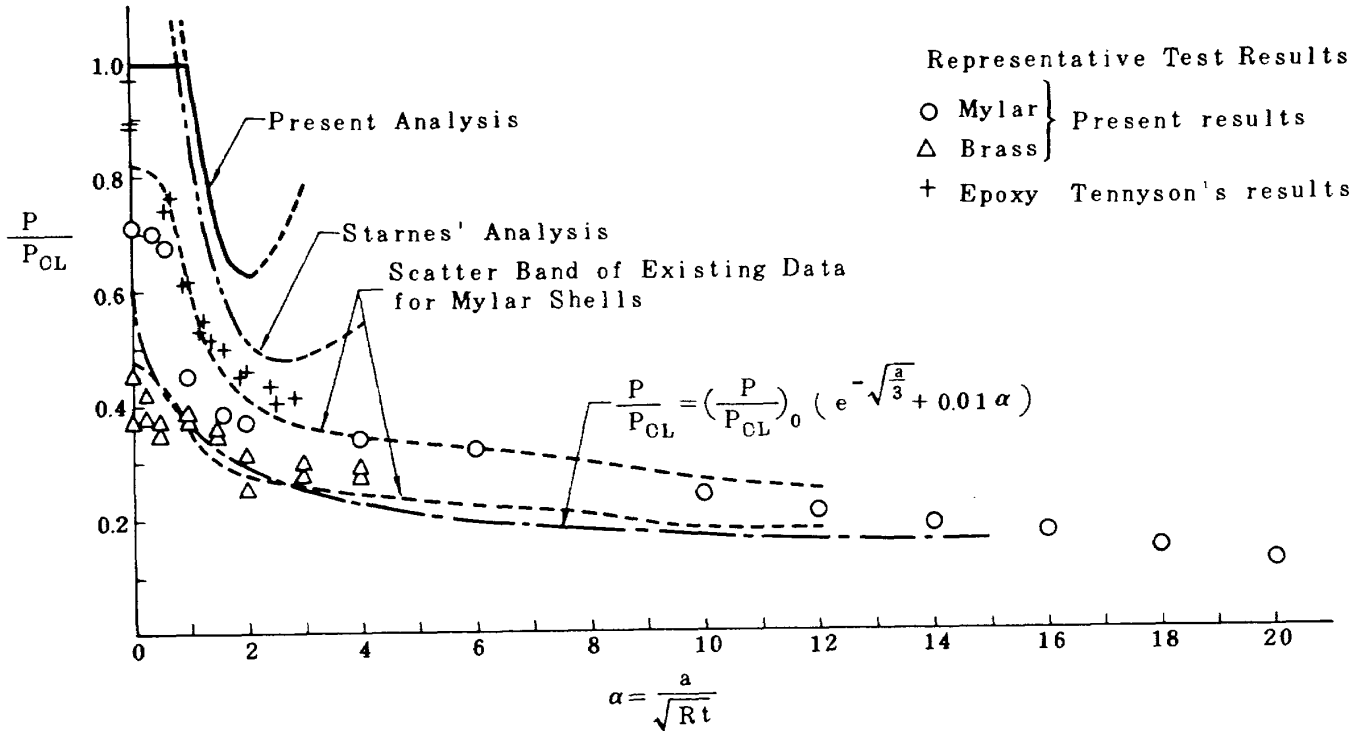


図13 解析解と実験値

点鎖線は先に著者が提案した経験式¹⁴⁾

$$\frac{P}{P_{CL}} = \left(\frac{P}{P_{CL}}\right)_0 (e^{-\sqrt{a/3}} + 0.01\alpha) \quad (20)$$

である。上式で $(P/P_{CL})_0$ は開口のない完全円筒シエルの軸圧縮座屈荷重と古典座屈荷重の比であり、ここでは $(P/P_{CL})_0 = 0.65$ とした。

開口が極限まで大きくなる場合を考えると、2円形開口の場合

$$\frac{a}{R} = \frac{\pi}{2}$$

のとき円筒の耐荷能力が零となる。このとき

$$\alpha = \frac{a}{\sqrt{Rt}} = \frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{R}{t}}$$

となり、 $R/t = 400$ の円筒では $\alpha = 10\pi$ のとき、 $R/t = 100$ の円筒では $\alpha = 5\pi$ のとき、 $R/t = 25$ の円筒では $\alpha = 5\pi/2$ のとき座屈荷重は零となる。従って開口が十分に大きくなると座屈荷重はパラメータ α のみならず、円筒の半径と肉厚の比 R/t および開口数 n に支配されるようになることが容易に推論される。

4. 結 言

2個の円形開口を持つ円筒シエルの軸圧縮座屈現象を観察して従来の実験データを補足し、さらに実験および数値計算結果に基づく推論に解析的裏付けを与えること

を試みた。

円形開口を持つ円筒シエルの軸圧縮座屈挙動は従来パラメータ α に支配されると言われているが、一般には α のみならず R/t および開口数 n に依存する。

R/t の大きい薄肉円筒シエルの座屈荷重は本実験で取扱った開口寸法範囲でパラメータ $\alpha = a/\sqrt{Rt}$ に支配される。すなわち $\alpha < 1$ では開口の影響は小さいが、一般的な初期不整のため座屈荷重のばらつきが大きい。 $1 < \alpha < 2$ で開口の影響が大きくなり、座屈荷重は急激に低下する。実験値のばらつきは依然として観察される。 $\alpha > 2$ では、開口が大きくなるに従い座屈荷重は緩かに減少するが実験値のばらつきは小さい。

R/t が小さい厚肉円筒シエルは塑性座屈を生じて軸対称のバルジ型座屈モードを示し、座屈荷重はパラメータ α のみならず開口数 n にも支配され、開口が大きくなるに従い直線的に減少する。

薄肉円筒シエルの座屈応力は、開口が十分小さい範囲で、 α の函数となることを閉じた式で示したが、 $\alpha > 2$ の領域では実験結果と定性的に異なる挙動を示しており、今後さらに検討を必要とする。

本研究はカリフォルニア工科大学の E.E. Sechler 教授の御指導のもとに始めたものであり、研究を継続する上で書簡による御助言をいただいた。また、実験を行なうにあたっては航空宇宙技術研究所機体第二部の塙武

敏構造研究室長の助言をいただいた。さらに材料試験では同所機体第二部の青木由雄，機体第一部の松嶋正道両技官の協力をいただいた。ここに感謝の意を表します。

文 献

- (1) 鬼頭史城，「薄肉圧力容器の弾性解析と座屈」，第193回講習会，「圧力容器の強さと設計に関する講習会」教材，日本機械学会，昭和38年5月，pp.19-34
- (2) Brogan, F.A. and Almroth, B.O., "Buckling of Cylinders with Cutouts," *AIAA J.*, Vol.8, No.2, Feb.1970, pp.236-240
- (3) Babel, H.W., Christensen, R.H. and Dixon, H.H., "Design, Fracture Control, Fabrication, and Testing of Pressurized Space-Vehicle Structures," *Thin-Shell Structures*, edited by Fung, Y.C. and Sechler, E.E., Prentice Hall, 1974, pp.549-600
- (4) Lur'e, A.I., *Statics of Thin-Walled Elastic Shells*, State Publishing House of Technical and Theoretical Literature, Moscow, 1947; (Translation, AEC-tr-3798, 1959, U.S. Atomic Energy Commission.)
- (5) Brush, D.O., "Some Shell Stability Problems in Missile and Space Vehicle Analysis," *Collected Papers on Instability of Shell Structures*, NASA TN D-1510, Dec.1962, pp.35-44
- (6) Forsberg, K.J., "General Summary," *Proceedings of a Conference on Computer Oriented Analysis of Shell Structures*, edited by Hartung, R.F., Aug. 1971, pp.1250-1284
- (7) Tennyson, R.C., "The Effects of Unreinforced Circular Cutouts on the Buckling of Circular Cylindrical Shells under Axial Compression," *J. of Engng. for Industry*, Trans. of ASME, Vol.90, No.4, Nov.1968, pp.541-546
- (8) Almroth, B.O. and Holmes, A.M.C., "Buckling of Shells with Cutouts, Experiment and Analysis," *Int. J. Solids and Structures*, Vol.8, No.8, Aug.1972, pp.1057-1071
- (9) Starnes, J.H., Jr., "The Effect of a Circular Hole on the Buckling of Cylindrical Shells," Ph.D. Thesis, Calif. Inst. Technology, 1970
- (10) Williams, J.G. and Starnes, J.H., Jr., "Some Applications of NASTRAN to the Buckling of Thin Cylindrical Shells with Cutouts," *"NASTRAN:Users' Experience*, NASA TMX-2637, Sep. 1970, pp.73-97
- (11) Starnes, J.H., Jr., "The Effects of Cutouts on the Buckling of Thin Shells," *Thin-Shell Structures*, edited by Fung, Y.C. and Sechler, E.E., Prentice-Hall, 1974, pp.289-304
- (12) Almroth, B.O., Brogan, F.A. and Marlowe, M.B., "Stability Analysis of Cylinders with Circular Cutouts," *AIAA J.*, Vol.11, No.11, Nov.1973, pp.1582-1584
- (13) 後藤武一，康井義明，粕谷平和，「開口を有する薄肉円筒殻の軸圧縮座屈に関する研究」，日本航空宇宙学会誌，Vol.22, No.247, Aug.1974, pp.377-382
- (14) Toda, S., "The Effects of Elliptic and Rectangular Cutouts on the Buckling of Cylindrical Shells Loaded by Axial Compression," *Aeron. Engng. Thesis* Calif. Inst. Technology, Aug.1974
- (15) 戸田 勳，日下和夫，「円筒殻の座屈実験」，航空宇宙技術研究所報告 TR-270, 1972年2月
- (16) Sechler, E.E., *Elasticity in Engineering*, John Wiley and Sons, Inc., 1952, pp.153-157
- (17) Timoshenko, S. and Goodier, J.N., *Theory of Elasticity*, 2nd. ed., McGraw-Hill, 1951, p.116
- (18) 森口繁一，宇田川銈久，一松 信，*数学公式Ⅲ*，岩波，1960年，pp.21-30
- (19) 林桂一，森口繁一，*高等函数表*，第2版，岩波，1967, p.255

既 刊 報 告

- | | | | |
|---------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------|------------------------------|
| TR-551 | デイフューザ・フラップによる抽気を用いた 2 m × 2 m 遷音速風洞マッハ数制御

On the Control of Mach Number of 2m × 2m Transonic Wind Tunnel by use of Diffuser Flap | 1978年11月 | 三堀 進, 井上政一, 白井正孝, 鈴木正光, 藤田敏美 |
| TR-552T | Comparison of Accuracies of Solutions of Linear Shell Theories for Closed Circular Cylinders under Edgewise Loading | Nov, 1978 | Tatsuzo KOGA and Shuji ENDO |
| TR-553 | 航空宇宙技術研究所汎用飛行シミュレータ用複合計算機 (FSK-II)

The Computer Complex (FSK-II for General Purpose Flight Simulator at National Aerospace Laboratory | 1978年12月 | 原田公一 |
| TR-554 | 予測を必要とする手動制御実験

An Experiment of Predictive Manual Control. | 1978年12月 | 田中敬司 |
| TR-555 | 軌道決定のためのフィルタリング理論
- 航技研における軌道決定プログラム KOSMOS -

Filtering Theory Applied to Orbit Determination NAL Statistical Multi-Mode Orbit Proceeding System KOSMOS | 1978年12月 | 村田正秋 |
| TR-556 | 航技研ガン・タンネルの構造と特性およびその応用

The Structure, Characteristics and Applications of the NAL Hypersonic Gun Tunnel | 1978年12月 | 和田 勇, 曾我国男, 井上安敏 |
| TR-557 | 分子線装置とその性能試験

Supersonic Free Jet Type Molecular Beam-Apparatus | 1979年1月 | 恩地 英, 津田尚一 |
| TR-558 | 二軸荷重下における疲れき裂成長特性

Fatigue Crack Propagation under Biaxial Loads | 1979年1月 | 角田義秋, 北川英夫, 結城良治, 幸田博之, 大平寿昭 |
| TR-559 | 非定常入力を受ける線型多自由度系の応答のスペクトル解析と航空機の突風応答への応用

Spectrum Analysis of the Response of Multi-Degree-of-Freedom Linear Systems under Nonstationary Input and its Application to Airplane Response in Atmospheric Turbulence | 1976年1月 | 藤森義典 |

航空宇宙技術研究所報告560号

昭和54年1月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
 東京都調布市深大寺町1880
 電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182
 印刷所 株式会社実業公報社
 東京都千代田区九段南4-2-12

Printed in Japan