

UDC 624.074.4:  
536.4

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-577

円筒シェルの熱変形基礎式について

遠藤修司

1979年6月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 円筒シェルの熱変形基礎式について\*

遠藤修司\*\*

## Thermo-Elastic Equations for Thin Elastic Circular Cylindrical Shells

by Shuji ENDO

A system of two-dimensional heat conduction equations for thin elastic circular cylindrical shells is derived as a first approximation, consistent to Kirchhoff-Love's hypothesis. Both the heat conduction equations and the mechanical equations of the shells are deduced from three-dimensional equations of thermo-elasticity, by way of the Legendre polynomials expansion. It is shown that the temperature, as well as the stress distributions through the shell thickness, can be assumed linear, as a consistent approximation under Kirchhoff-Love's hypothesis. The accuracies of the solutions of the classical linear shell theories are compared for thermo-elastic boundary value problems of edgewise-loaded, circular cylindrical shells. It will be shown that the solutions are obtained accurately within the errors inherent to the Kirchhoff-Love hypothesis for any of those well-known classical theories including the Flügge, the Koiter-Sanders, the Novozhilov, and the Love-Reissner theories. The resulting heat conduction equations are found to be identical to those developed by Bolotin.

### 1. 緒 言

薄肉シェル理論は、シェルという本質的に三次元性を有する立体構造の数式的取り扱いを容易にし、三次元空間における巨視的挙動を理解するために、三次元弾性論から得られる基礎方程式を二次元化した近似理論である。したがって、薄肉シェル理論は三次元弾性論に対して常にある程度の誤差を含む。いわゆる古典シェル理論と呼ばれる線形シェル理論は Kirchhoff-Love の仮定に基づいて定式化されており、三次元弾性論に対するその誤差と適用限界は、Kirchhoff-Love の仮定そのものの持つ誤差と適用限界とに依存する。これまでに多くの研究者によって数多くの線形シェル理論が提案されているが、今日では、いかなる理論も Kirchhoff-Love の仮定に基づくかぎり、その仮定に含まれる基本誤差範囲で同等の精度を持つ一次近似理論であることが知られている。したがって、シェル理論に改善を加えて精度を向上させる

試みは、Kirchhoff-Love の仮定をより合理的な仮定で置き換えるか、あるいは一般的に三次元弾性論に基づく系統的な定式化と合理的な近似とによって誤差精度を改善する方向で進められなければならない。

シェルが熱的負荷を受ける時、シェルに生じる変形および応力には、温度変化によるものと、機械的荷重あるいは拘束によるものがある。この場合、変形・応力状態の解析は、まず熱伝導方程式の初期値・境界値問題を解いて温度分布を決定し、次いでその温度分布に対応した熱応力を考慮して力学的支配方程式の境界値問題を解くという二段階を踏む。熱弾性カップリングが無視できる程度にゆるやかな温度変化を伴う通常の熱負荷問題では、温度分布は変形・応力状態とは独立に決定される。熱伝導方程式は、力学的基礎方程式と同様に、薄肉シェルの幾何学的特徴を生かして二次元化近似するのが数式的取り扱い上好ましい。すでに、シェルの熱伝導方程式に対する近似式を導く試みがいくつかなされている。例えば、Bolotin<sup>1)</sup> は温度分布を肉厚方向に線形と仮定して、三次元熱伝導方程式を、肉厚方向の平均温度と温度勾配と

\* 昭和 54 年 2 月 8 日受付

\*\* 機体第一部

に関する独立な二つの二次元の方程式で与えている。また、Steele と Yang<sup>2)</sup> は、三次元熱伝導方程式における温度関数をルジャンドル多項式の無限級数に展開し、その展開係数に対する相互にカップリングした無限個の二次元方程式に二次元化している。この方程式は、Bolotin の結果を包含し、さらに未知数の数を増すことによって近似精度を任意に向上できる特長を持っている。しかし、解析の目的が温度分布の決定のみに止まらず変形・応力状態の決定にまでおよぶ構造解析においては、三次元熱伝導方程式の二次元化近似は、三次元弾性論からシェル理論の力学的基礎方程式を導く二次元化近似と同等の近似精度を備えていなければ意味がない。この点、Bolotin や Steele と Yang の解析は、熱伝導方程式のみを議論の対象としているので、シェル理論の力学的基礎方程式との精度の関連において疑問を残している。すなわち、Bolotin の一次近似熱伝導方程式により決定される温度分布を用いてシェルの熱弾性解析を行なう場合、数多くのシェル理論の中から、どの理論を適用すればよいかという選択の問題が生じる。また Steele と Yang によって導かれた高次オーダーの熱伝導方程式と同等の精度を持つ高次シェル理論とは何かということが問われる。

本報告の目的は、円筒シェルに関して、Kirchhoff-Love の仮定に基づく一次近似シェル理論と同等の精度を持つ熱伝導方程式の一次近似式を導くことである。解析は、基本的には温度関数をルジャンドル多項式の級数に展開する Steele と Yang の方法にしたがうが、本解析では、さらに、この方法を熱伝導方程式を二次元化するためだけでなく、三次元弾性論からシェル理論の力学的基礎方程式を導く過程にも適用し、Kirchhoff-Love の仮定という同一の基礎の上にシェル理論の力学的基礎方程式と熱伝導方程式の合理的な一次近似式を導く。本報告では、具体的問題への応用を念頭に置いて円筒シェルのみを取り扱ったが、一様肉厚の一般シェルの熱弾性基礎方程式へ拡張することは比較的容易である。

### 主 な 記 号

$h, R, L$	それぞれ円筒シェルの肉厚、半径および半長
$x, \theta, z$	円柱座標
$E, \nu$	それぞれシェル材料のヤング率およびポアソン比
$G$	シェル材料の横弾性係数； $G = E/2(1+\nu)$
$\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z$ $\tau_{x\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zx}$	応力成分
$\varepsilon_x, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z$ $\gamma_{x\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zx}$	
	ひずみ成分

$\alpha$	シェル材料の線膨張率	
$T$	温度	
$u_x, u_\theta, w_z$	それぞれ $x, \theta$ および $z$ 方向の変位成分	
$N_x, N_\theta, N_{x\theta}, N_{\theta x}$	合応力	
$Q_x, Q_\theta$	横せん断力	
$M_x, M_\theta, M_{x\theta}, M_{\theta x}$	断面モーメント	
$\zeta$	$z$ の無次元変数； $\zeta = 2z/h$	
$P_n(\zeta)$	ルジャンドルの多項式、 $n$ は 0 または正の整数	
$\sigma_x^{(n)}, \sigma_\theta^{(n)}, \sigma_z^{(n)}$ $\tau_{x\theta}^{(n)}, \tau_{\theta z}^{(n)}, \tau_{zx}^{(n)}$ $u_x^{(n)}, u_\theta^{(n)}, w_z^{(n)}$	応力成分のルジャンドル展開における展開係数で、式(7)で定義される 変位成分のルジャンドル展開における展開係数で、式(7)で定義される	
$T^{(n)}$		温度関数のルジャンドル展開における展開係数で、式(7)あるいは式(54)で定義される
$K, D$		それぞれシェル材料の延び剛性および曲げ剛性； $K = Eh/(1-\nu^2)$ , $D = Eh^3/12(1-\nu^2)$
$\varepsilon_x^{(n)}, \varepsilon_\theta^{(n)}, \gamma_{x\theta}^{(n)}$	ひずみ成分のルジャンドル展開における展開係数で、式(21)で定義される	
$q_x, q_\theta, q_z$	それぞれシェルの中央面に作用する単位面積当たりの外力の $x, \theta$ および $z$ 方向の分力	
$m_x, m_\theta$	それぞれシェルの中央面に作用する単位面積当たりの外力による $x$ -面および $\theta$ -面に関するモーメント	
$\varepsilon_x^0, \varepsilon_\theta^0, \gamma_{x\theta}^0$ $\kappa_x^0, \kappa_\theta^0$ $\tau^0$	それぞれシェルの中央面のひずみ成分 それぞれ中央面の曲率変化 中央面の捩れ率変化	
$\delta$	形状パラメータ； $\delta = h^2/12R^2$	
$E_i (i=1,2,\dots,6)$ $D_j (j=1,2,3,4)$	それぞれ各シェル理論によって異なる値をとる単位オーダーの定数	
$\omega_n^0$		中央面に立てた法線まわりの回転
$S_x, T_{x\theta}$	それぞれ等価横せん断力および等価面内せん断力	
$u, v, w$	それぞれ無次元変位成分で、式(34)で定義される	
$\beta$	回転変位； $\beta = \partial w_z^{(0)}/\partial x$	
$N, Q, M, S$	それぞれ $N_x, T_{x\theta}, M_x$ および $S_x$ の無次元量で、式(34)で定義される	
$\Phi, \Psi$	それぞれ $z$ 方向の平均温度および温度勾配の無次元量； $\Phi = \alpha T^{(0)}$ , $\Psi = \alpha T^{(1)}$	
$y$	$x$ の無次元変数； $y = x/R$	
$l$	$L$ の無次元量； $l = L/R$	

$(\cdot)', (\cdot)^\circ$	それぞれ $y$ および $\theta$ に関する偏微分を表わす演算子; $(\cdot)' = \partial(\cdot)/\partial y, (\cdot)^\circ = \partial(\cdot)/\partial \theta$
$\nabla^2(\cdot)$	微分演算子; $\nabla^2(\cdot) = (\cdot)'' + (\cdot)^\circ\circ$
$4k^4$	$4k^4 = (1-\nu^2)/\delta$
$\bar{a}_{ij}$	各シェル理論によって異なる値をとる単位オーダーの定数
$f_i^0, g_i^0, n_i^0$ $q_i^0, m_i^0, s_i^0$	各シェル理論によって異なる値をとる単位オーダーの定数
$\Phi_{mn}, \Psi_{mn}$	それぞれ $\phi$ および $\psi$ のフーリエ級数展開における展開係数
$n$	第5節以外ではルジャンドルの多項式 $P_n(\zeta)$ の次数, 第5節ではシェルの周方向変形波形の波数
$s$	$s = m\pi/2l, m$ は0または正の整数
$w_{mn}$	$w$ のフーリエ級数展開における展開係数
$\beta_{mn}, u_{mn}, v_{mn}$ $N_{mn}, Q_{mn}, M_{mn}$ $S_{mn}$	それぞれ $\beta, u, v, N, Q, M$ および $S$ のフーリエ級数展開における展開係数
$\lambda_\theta, \lambda_x$	それぞれ周および軸方向変形波長
$\Delta$	式(47)あるいは式(50)で定義される量
$t$	時間
$\gamma$	温度伝播率の逆数
$\kappa$	シェル表面と境界層間との熱伝達率
$\lambda$	シェル材料の熱伝導率
$B$	ビオ数 (Biot number); $B = h\kappa/2\lambda$
$T_0$	シェル表面に接する媒質の温度
肩符号 +, -	それぞれシェル外表面および内表面での値をとることを表わす

2. 三次元熱弾性論の基礎方程式

図1に示すような肉厚  $h$ , 肉厚中央面の半径  $R$ , 長さ  $2L$  の円筒を考える。円筒の中央断面上に原点をとり,

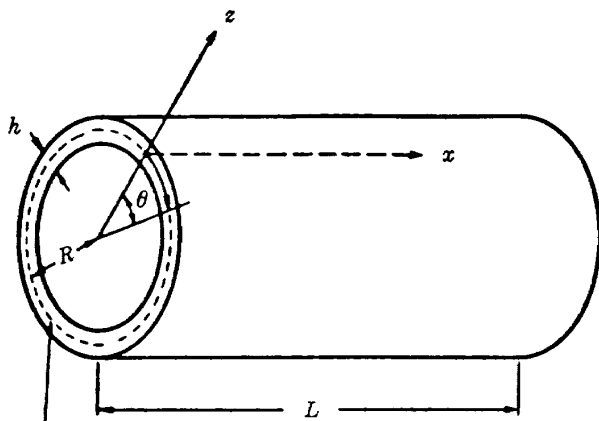


図1 円筒シェルの形状と座標系

肉厚中央面上に座標  $(x, \theta)$  を定める。ここに,  $x$  は軸方向距離,  $\theta$  は周方向角を表わす。また法線座標  $z$  を中央面からの外向き垂直距離として定義する。三次元熱弾性論の基礎方程式を円柱座標系  $(x, \theta, z)$  で表わすと次の通りである。

フックの法則:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \{\sigma_x - \nu(\sigma_\theta + \sigma_z)\} / E + \alpha T \\ \epsilon_\theta &= \{\sigma_\theta - \nu(\sigma_x + \sigma_z)\} / E + \alpha T \\ \epsilon_z &= \{\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_\theta)\} / E + \alpha T \\ \gamma_{x\theta} &= \tau_{x\theta} / G, \gamma_{\theta z} = \tau_{\theta z} / G, \gamma_{zx} = \tau_{zx} / G \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

ひずみ-変位関係式:

$$\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \partial u_x / \partial x \\ \epsilon_\theta &= (\partial u_\theta / \partial \theta + w_z) / (R+z) \\ \epsilon_z &= \partial w_z / \partial z \\ \gamma_{x\theta} &= \partial u_\theta / \partial x + (\partial u_x / \partial \theta) / (R+z) \\ \gamma_{\theta z} &= (\partial w_z / \partial \theta - u_\theta) / (R+z) + \partial u_\theta / \partial z \\ \gamma_{zx} &= \partial u_x / \partial z + \partial w_z / \partial x \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

平衡方程式:

$$(1 + \frac{z}{R}) \frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1 + \frac{z}{R}) \tau_{zx} \right\} = 0 \quad (3a)$$

$$(1 + \frac{z}{R}) \frac{\partial \tau_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\tau_{\theta z}}{R} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1 + \frac{z}{R}) \tau_{\theta z} \right\} = 0 \quad (3b)$$

$$(1 + \frac{z}{R}) \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} - \frac{\sigma_\theta}{R} + \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (1 + \frac{z}{R}) \sigma_z \right\} = 0 \quad (3c)$$

ここで,  $E$  および  $\nu$  はそれぞれ材料のヤング率およびポアソン比で,  $G$  は次式で与えられる弾性定数である。

$$G = E/2(1+\nu) \quad (4)$$

また,  $\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{x\theta}, \tau_{\theta z}$  および  $\tau_{zx}$  は応力成分,  $\epsilon_x, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{x\theta}, \gamma_{\theta z}$  および  $\gamma_{zx}$  はひずみ成分,  $\alpha$  および  $T$  はそれぞれ材料の線膨張率および温度変化,  $u_x, u_\theta$  および  $w_z$  は変位成分である。

3. 円筒シェルの基礎方程式

三次元弾性論の基礎方程式, 式(1)~(3), を二次元化して円筒シェルの基礎方程式を導く。そのために, 肉厚断面に分布して作用する三次元応力を中央面に働く静的に等価な合応力およびモーメントで置き換える。すなわち, 合応力およびモーメントを次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} (N_x, N_{x\theta}, Q_x) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \tau_{x\theta}, \tau_{zx}) (1 + \frac{z}{R}) dz \\ (N_\theta, N_{\theta x}, Q_\theta) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_\theta, \tau_{x\theta}, \tau_{\theta z}) dz \\ (M_x, M_{x\theta}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_x, \tau_{x\theta}) (1 + \frac{z}{R}) z dz \\ (M_\theta, M_{\theta x}) &= \int_{-h/2}^{h/2} (\sigma_\theta, \tau_{x\theta}) z dz \end{aligned} \right\} \quad \dots (5)$$

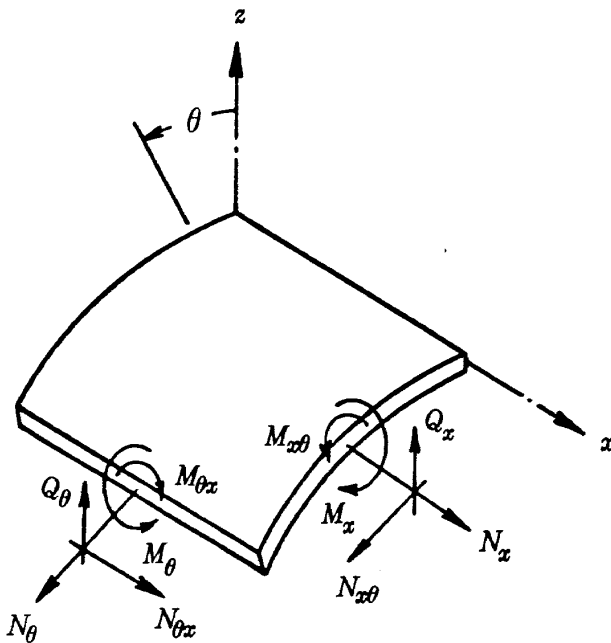


図2 円筒シェルの面素に作用する  
合応力およびモーメント

合応力によって表わされる力のつり合い方程式は、式(3a)、(3b)および(3c)を  $z$  に関して  $-h/2$  から  $h/2$  まで積分することにより、また、モーメントのつり合い方程式は、式(3a)および(3b)の両辺に  $z$  を乗じ、同じ積分範囲で  $z$  に関して積分することにより得られる。その結果、円筒シェルの平衡方程式として次式を得る。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} = -\left\{ \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \tau_{zx}^+ - \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \tau_{zx}^- \right\} \quad (6a)$$

$$\frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} = -\left\{ \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \tau_{z\theta}^+ - \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \tau_{z\theta}^- \right\} \quad (6b)$$

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} = -\left\{ \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \sigma_z^+ - \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \sigma_z^- \right\} \quad (6c)$$

$$\frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_x = -\frac{h}{2} \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \tau_{zx}^+ + \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \tau_{zx}^- \right\} \quad (6d)$$

$$\frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta = -\frac{h}{2} \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \tau_{z\theta}^+ + \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \tau_{z\theta}^- \right\} \quad (6e)$$

ここで、肩符号+および-は、それぞれシェルの外表面および内表面での値を表わす。すなわち、 $\tau_{zx}^+$ 、 $\tau_{z\theta}^+$ 、 $\sigma_z^+$  および  $\tau_{zx}^-$ 、 $\tau_{z\theta}^-$ 、 $\sigma_z^-$  は、それぞれ外表面および内表面に作用する表面力の軸、周、垂直方向成分である。右辺の  $h/2R$  なる項は、中央面と外・内表面との面積差による

ものである。

シェルの外・内表面の間の応力、変位および温度変化がなめらかで連続であることを仮定し、それらを次に示すようにルジャンドル多項式  $P_n(\zeta)$  の級数に展開する。

$$\left. \begin{aligned} (\sigma_x, \sigma_\theta, \sigma_z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_x^{(n)}, \sigma_\theta^{(n)}, \sigma_z^{(n)}) P_n(\zeta) \\ (\tau_{x\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zx}) &= \sum_{n=0}^{\infty} (\tau_{x\theta}^{(n)}, \tau_{\theta z}^{(n)}, \tau_{zx}^{(n)}) P_n(\zeta) \\ (u_x, u_\theta, w_z) &= \sum_{n=0}^{\infty} (u_x^{(n)}, u_\theta^{(n)}, w_z^{(n)}) P_n(\zeta) \\ T &= \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)} P_n(\zeta) \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

ここで、 $\zeta$  は次式で定義される独立変数である。

$$\zeta = \frac{2z}{h} ; \quad -1 \leq \zeta \leq 1 \quad (8)$$

また、展開係数  $\sigma_x^{(n)}$ 、 $\sigma_\theta^{(n)}$ 、 $\sigma_z^{(n)}$ 、 $\tau_{x\theta}^{(n)}$ 、 $\tau_{\theta z}^{(n)}$ 、 $\tau_{zx}^{(n)}$ 、 $u_x^{(n)}$ 、 $u_\theta^{(n)}$ 、 $w_z^{(n)}$  および  $T^{(n)}$  は、 $x$  および  $\theta$  の関数である。

式(5)の右辺の各応力成分を式(7)にしたがってルジャンドル多項式の級数に展開すると、式(5)は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} (N_x, N_{x\theta}, Q_x) &= \frac{h}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_x^{(n)}, \tau_{x\theta}^{(n)}, \tau_{zx}^{(n)}) \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) P_n(\zeta) d\zeta \\ (N_\theta, N_{\theta x}, Q_\theta) &= \frac{h}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_\theta^{(n)}, \tau_{x\theta}^{(n)}, \tau_{\theta z}^{(n)}) \int_{-1}^1 P_n(\zeta) d\zeta \\ (M_x, M_{x\theta}) &= \left(\frac{h}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_x^{(n)}, \tau_{x\theta}^{(n)}) \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \zeta P_n(\zeta) d\zeta \\ (M_\theta, M_{\theta x}) &= \left(\frac{h}{2}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} (\sigma_\theta^{(n)}, \tau_{x\theta}^{(n)}) \int_{-1}^1 \zeta P_n(\zeta) d\zeta \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

式(9)の右辺の  $P_n(\zeta)$  を含む積分項は、付録に示す積分公式を用いて容易に計算できて、結局、合応力およびモーメントは次式で与えられる。

$$\left. \begin{aligned} (N_x, N_{x\theta}, Q_x) &= h \left\{ (\sigma_x^{(0)}, \tau_{x\theta}^{(0)}, \tau_{zx}^{(0)}) + \frac{h}{6R} (\sigma_x^{(1)}, \tau_{x\theta}^{(1)}, \tau_{zx}^{(1)}) \right\} \\ (N_\theta, N_{\theta x}, Q_\theta) &= h (\sigma_\theta^{(0)}, \tau_{x\theta}^{(0)}, \tau_{\theta z}^{(0)}) \\ (M_x, M_{x\theta}) &= \frac{h^2}{6} \left\{ (\sigma_x^{(1)}, \tau_{x\theta}^{(1)}) + \frac{h}{2R} \left\{ (\sigma_x^{(0)}, \tau_{x\theta}^{(0)}) + \frac{2}{5} (\sigma_x^{(2)}, \tau_{x\theta}^{(2)}) \right\} \right\} \\ (M_\theta, M_{\theta x}) &= \frac{h^2}{6} (\sigma_\theta^{(1)}, \tau_{x\theta}^{(1)}) \end{aligned} \right\} \quad \dots (10)$$

式(10)は、その導出過程において、なんら近似あるいは省略をすることなしに応力成分の完全級数表示から導かれた表示式である。したがって、合応力およびモーメント

トが式(5)の積分形で定義されるかぎり、合応力およびモーメントを決定する応力分布は、シェルの肉厚方向に関して、 $\zeta$ の2次の項まで考慮すればよいことが判る。

次に、合応力およびモーメントと変位とを関係づける構成方程式を導く。応力成分  $\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{x\theta}, \tau_{\theta z}$  および  $\tau_{zx}$  は、フックの法則、式(1)、および、ひずみ-変位関係式、式(2)、を用いて次のように表わすことができる。

$$\left. \begin{aligned} \sigma_x &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\nu}{R+z} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + w_z \right) - (1+\nu)\alpha T \right\} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \sigma_\theta &= \frac{E}{1-\nu^2} \left\{ \nu \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{1}{R+z} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + w_z \right) - (1+\nu)\alpha T \right\} + \frac{\nu}{1-\nu} \sigma_z \\ \tau_{x\theta} &= G \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial x} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial u_x}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{\theta z} &= G \left\{ \frac{1}{R+z} \left( \frac{\partial w_z}{\partial \theta} - u_\theta \right) + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right\} \\ \tau_{zx} &= G \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial w_z}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \dots\dots (11)$$

式(5)の右辺の被積分関数に、式(11)で与えられる応力成分  $\sigma_x, \sigma_\theta, \tau_{x\theta}, \tau_{\theta z}$  および  $\tau_{zx}$  を代入し、変位成分  $u_x, u_\theta$  および  $w_z$ 、温度変化  $T$  ならびに応力成分  $\sigma_z$  を式(7)にしたがってルジャンドル多項式  $P_n(\zeta)$  の級数に展開すると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\{ \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial x} - (1+\nu)\alpha T^{(n)} \right\} \right. \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right) P_n(\zeta) d\zeta + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta} + w_z^{(n)} \right) \int_{-1}^1 P_n(\zeta) d\zeta \\ &\quad \left. + \frac{\nu h}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_z^{(n)} \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right) P_n(\zeta) d\zeta \right\} \\ N_\theta &= \frac{Eh}{2(1-\nu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\{ \nu \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial x} - (1+\nu)\alpha T^{(n)} \right\} \int_{-1}^1 P_n(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta} + w_z^{(n)} \right) \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right)^{-1} P_n(\zeta) d\zeta \right\} \\ &\quad + \frac{\nu h}{2(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_z^{(n)} \int_{-1}^1 P_n(\zeta) d\zeta \\ N_{x\theta} &= \frac{Gh}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial x} \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right) P_n(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial \theta} \int_{-1}^1 P_n(\zeta) d\zeta \right\} \\ N_{\theta x} &= \frac{Gh}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial x} \int_{-1}^1 P_n(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial \theta} \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right)^{-1} P_n(\zeta) d\zeta \right\} \\ M_x &= \frac{Eh^2}{4(1-\nu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\{ \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial x} - (1+\nu)\alpha T^{(n)} \right\} \right. \\ &\quad \times \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right) \zeta P_n(\zeta) d\zeta \\ &\quad \left. + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta} + w_z^{(n)} \right) \int_{-1}^1 \zeta P_n(\zeta) d\zeta \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} &+ \frac{\nu h^2}{4(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_z^{(n)} \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right) \zeta P_n(\zeta) d\zeta \\ M_\theta &= \frac{Eh^2}{4(1-\nu^2)} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \left\{ \nu \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial x} - (1+\nu)\alpha T^{(n)} \right\} \int_{-1}^1 \zeta P_n(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta} + w_z^{(n)} \right) \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right)^{-1} \zeta P_n(\zeta) d\zeta \right\} \\ &\quad + \frac{\nu h^2}{4(1-\nu)} \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_z^{(n)} \int_{-1}^1 \zeta P_n(\zeta) d\zeta \\ M_{x\theta} &= \frac{Gh^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial x} \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right) \zeta P_n(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial \theta} \int_{-1}^1 \zeta P_n(\zeta) d\zeta \right\} \\ M_{\theta x} &= \frac{Gh^2}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial x} \int_{-1}^1 \zeta P_n(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial \theta} \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right)^{-1} \zeta P_n(\zeta) d\zeta \right\} \\ Q_x &= \frac{Gh}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{2u_x^{(n)}}{h} \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right) \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta} d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial w_z^{(n)}}{\partial x} \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right) P_n(\zeta) d\zeta \right\} \\ Q_\theta &= \frac{Gh}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{R} \left( \frac{\partial w_z^{(n)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(n)} \right) \int_{-1}^1 \left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right)^{-1} P_n(\zeta) d\zeta \right. \\ &\quad \left. + \frac{2u_\theta^{(n)}}{h} \int_{-1}^1 \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta} d\zeta \right\} \end{aligned} \right\} \dots\dots (12)$$

$N_\theta, N_{\theta x}, M_\theta, M_{\theta x}$  および  $Q_\theta$  の表示式の右辺の被積分関数に現われる  $(1+(h/2R)\zeta)^{-1}$  なる因子は、 $-1 < (h/2R)\zeta < 1$  を収束域として、次のようにべき級数に展開できる。

$$\left( 1 + \frac{h}{2R}\zeta \right)^{-1} = \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m \left( \frac{h}{2R} \right)^m \zeta^m; \quad -1 < \frac{h}{2R}\zeta < 1 \quad (13)$$

円筒を三次元固体として取り扱わずに、中央面で代表される巨視的挙動に注目するかぎり、 $h/2R < 1$  が成り立つと考えて差し支えないので、式(13)の収束域は満足される。式(13)の關係に留意すれば、式(12)の右辺の積分項は、付録に示す積分公式を用いてすべて計算できる。結局、構成方程式として次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K \left\{ \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + w_z^{(0)} \right) + \frac{h}{6R} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu)\alpha \left( T^{(0)} + \frac{h}{6R} T^{(1)} \right) \right\} + \frac{\nu h}{1-\nu} \left( \sigma_z^{(0)} + \frac{h}{6R} \sigma_z^{(1)} \right) \\ N_\theta &= K \left\{ \nu \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n (n+2i)! (n+i)!}{(2n+2i+1)! i!} \right. \\ &\quad \left. \times \left( -\frac{h}{2R} \right)^{n+2i} \left( \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta} + w_z^{(n)} \right) - (1+\nu)\alpha T^{(0)} \right\} + \frac{\nu h}{1-\nu} \sigma_z^{(0)} \\ N_{x\theta} &= Gh \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{h}{6R} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial x} \right) \\ N_{\theta x} &= Gh \left\{ \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n (n+2i)! (n+i)!}{(2n+2i+1)! i!} \right. \\ &\quad \left. \times \left( -\frac{h}{2R} \right)^{n+2i} \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial \theta} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
M_x &= \frac{2D}{h} \left\{ \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + w_z^{(1)} \right) + \frac{h}{2R} \left( \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{2}{5} \frac{\partial u_x^{(2)}}{\partial x} \right) \right. \\
&\quad \left. - (1+\nu) \alpha \left\{ T^{(1)} + \frac{h}{2R} \left( T^{(0)} + \frac{2}{5} T^{(2)} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. + \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} \left\{ \sigma_z^{(1)} + \frac{h}{2R} \left( \sigma_z^{(0)} + \frac{2}{5} \sigma_z^{(2)} \right) \right\} \right\} \\
M_\theta &= \frac{2D}{h} \left\{ \nu \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{3}{R} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left( -\frac{h}{2R} \right)^{2i-1} \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + w_z^{(0)} \right) \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n (n+2i)! (n+i)!}{(2n+2i+1)! i!} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. \times \left( -\frac{h}{2R} \right)^{n+2i-1} \left( \frac{\partial u_\theta^{(n)}}{\partial \theta} + w_z^{(n)} \right) \right\} \right. \\
&\quad \left. - (1+\nu) \alpha T^{(1)} + \frac{\nu h^2}{6(1-\nu)} \sigma_z^{(1)} \right\} \\
M_{x\theta} &= \frac{Gh^2}{6} \left\{ \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{h}{2R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} + \frac{2}{5} \frac{\partial u_\theta^{(2)}}{\partial x} \right) \right\} \\
M_{\theta x} &= \frac{Gh^2}{6} \left\{ \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial x} + \frac{3}{R} \left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2i+1} \left( -\frac{h}{2R} \right)^{2i-1} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial \theta} \right. \right. \\
&\quad \left. \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n (n+2i)! (n+i)!}{(2n+2i+1)! i!} \left( -\frac{h}{2R} \right)^{n+2i-1} \frac{\partial u_x^{(n)}}{\partial \theta} \right\} \right\} \\
Q_x &= Gh \left\{ \frac{2}{h} \left( \sum_{i=0}^{\infty} u_x^{(2i+1)} \right) + \frac{h}{2R} \sum_{i=1}^{\infty} u_x^{(2i)} \right\} \\
&\quad + \frac{\partial w_z^{(0)}}{\partial x} + \frac{h}{6R} \frac{\partial w_z^{(1)}}{\partial x} \\
Q_\theta &= Gh \left\{ \frac{1}{R} \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{2^n (n+2i)! (n+i)!}{(2n+2i+1)! i!} \right. \\
&\quad \left. \times \left( -\frac{h}{2R} \right)^{n+2i} \left( \frac{\partial w_z^{(n)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(n)} \right) + \frac{2}{h} \sum_{i=0}^{\infty} u_\theta^{(2i+1)} \right\} \\
&\quad \dots \dots (14)
\end{aligned}$$

ここで、 $K$ および $D$ は次式で与えられる弾性定数である。

$$K = \frac{Eh}{1-\nu^2}, \quad D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (15)$$

式(14)は、その導出過程において、なんら近似あるいは省略をすることなく変位成分 $u_x$ ,  $u_\theta$ , および $w_z$ , 温度変化 $T$ ならびに応力成分 $\sigma_z$ の完全級数表示から得られた表示式で、 $n \geq 3$ の $T^{(n)}$ を含んでいないことに注目すべきである。したがって、熱応力を決定するのは $T^{(0)}$ ,  $T^{(1)}$ および $T^{(2)}$ のみで、 $T^{(n)}$  ( $n \geq 3$ )は熱応力の評価に関与しない。すなわち、熱応力を決定する温度分布は、シェル肉厚方向に関して、 $\zeta$ の2次の項まで考慮すればよいことが判る。

本節で導かれた円筒シェルの基礎方程式は、漸近級数の形で三次元弾性論とシェル理論との関連を明らかにしている。これらの式は、ここまでの解析段階では薄肉シェルの仮定を設けていないので、厚肉シェルへの適用が可能であり、特に肉厚せん断の影響を考慮した高次理論、あるいは層間接触応力を重視する積層シェル理論への発展が期待できる。

#### 4. Kirchhoff-Love の仮定に基づく一次近似

Kirchhoff-Love の仮定は、次のように要点をまとめることができる。

- (i) 肉厚 $h$ と半径 $R$ との比は1に比較して微小である。  
 $h/R \ll 1$  (16)
- (ii) 中央面に垂直な直線素は、変形後も直線性を保ち、中央面に垂直で、長さに変化が生じない。
- (iii) 中央面に垂直な応力成分は無視できる程度に微小である。

上記の仮定(ii)は、変位成分 $u_x$ ,  $u_\theta$ および $w_z$ をルジャンドル多項式の級数展開式で表わすとき、次のように書くことと同等である。

$$\begin{aligned}
(ii) \quad & \left. \begin{aligned} u_x &= u_x^{(0)} + \zeta u_x^{(1)}; \quad n \geq 2 \text{ に対し } u_x^{(n)} \equiv 0 \\ u_\theta &= u_\theta^{(0)} + \zeta u_\theta^{(1)}; \quad n \geq 2 \text{ に対し } u_\theta^{(n)} \equiv 0 \\ w_z &= w_z^{(0)}; \quad n \geq 1 \text{ に対し } w_z^{(n)} \equiv 0 \end{aligned} \right\} (17) \\
& \left. \begin{aligned} \text{ここに,} \\ u_x^{(1)} &= -\frac{h}{2} \frac{\partial w_z^{(0)}}{\partial x} \\ u_\theta^{(1)} &= -\frac{h}{2R} \left( \frac{\partial w_z^{(0)}}{\partial \theta} - u_\theta^{(0)} \right) \end{aligned} \right\}
\end{aligned}$$

同様に、仮定(iii)は次のように書ける。

$$(iii) \quad \left. \begin{aligned} \sigma_z &= 0; \quad n \text{ のとるすべての値に} \\ \text{対し } \sigma_z^{(n)} &\equiv 0 \end{aligned} \right\} (18)$$

式(17)より明らかなように、仮定(ii)によって中央面から $z$ の点での変位 $u_x$ ,  $u_\theta$ および $w_z$ は中央面の変位 $u_x^{(0)}$ ,  $u_\theta^{(0)}$ および $w_z^{(0)}$ で表わされることが判る。

Kirchhoff-Love の仮定の下では、ひずみ成分 $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_\theta$ および $\gamma_{x\theta}$ についても変位関数と同様に、それぞれ、 $\zeta$ の線形式で表わされることが容易に示される。すなわち、式(17)で与えられる $u_x$ ,  $u_\theta$ および $w_z$ を、ひずみ-変位関係式、式(2)の右辺に代入すれば、仮定(iii)の当然の結果として次式

$$\epsilon_z = 0, \quad \gamma_{\theta z} = 0, \quad \gamma_{xz} = 0 \quad (19)$$

を得るとともに次の関係式を得る。

$$\begin{aligned}
\left. \begin{aligned} \epsilon_x &= \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \zeta \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} \\ \epsilon_\theta &= \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + w_z^{(0)} + \zeta \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} \right) / R \left( 1 + \frac{h}{2R} \zeta \right) \\ \gamma_{x\theta} &= \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} + \zeta \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial x} + \left( \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial \theta} + \zeta \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial \theta} \right) / R \left( 1 + \frac{h}{2R} \zeta \right) \end{aligned} \right\} \\
& \dots \dots (20)
\end{aligned}$$

式(20)において、 $-1 \leq \zeta \leq 1$ の関係に留意して、仮定(i), 式(16), に基づく近似を行ない、左辺の $\epsilon_x$ ,  $\epsilon_\theta$ および $\gamma_{x\theta}$ を式(7)にならぬルジャンドル多項式の級数に展開して

両辺の $\zeta$ に関する次数を比較すると、 $\varepsilon_x, \varepsilon_\theta$  および  $\gamma_{x\theta}$  は次に示すように $\zeta$ の線形式でなければならないことが明らかになる。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \varepsilon_x^{(0)} + \zeta \varepsilon_x^{(1)} ; n \geq 2 \text{ に対し } \varepsilon_x^{(n)} \equiv 0 \\ \varepsilon_\theta &= \varepsilon_\theta^{(0)} + \zeta \varepsilon_\theta^{(1)} ; n \geq 2 \text{ に対し } \varepsilon_\theta^{(n)} \equiv 0 \\ \gamma_{x\theta} &= \gamma_{x\theta}^{(0)} + \zeta \gamma_{x\theta}^{(1)} ; n \geq 2 \text{ に対し } \gamma_{x\theta}^{(n)} \equiv 0 \end{aligned} \right\} \quad (21)$$

したがって、フックの法則、式(1)、を参照すれば、応力成分および温度関数  $T$  も、また $\zeta$ の線形式で表わされることが判る。すなわち、Kirchhoff-Love の仮定に基づく温度関数  $T$  の合理的な近似式として次式を得る。

$$T = T^{(0)} + \zeta T^{(1)} ; n \geq 2 \text{ に対し } T^{(n)} \equiv 0 \quad (22)$$

このとき、 $T^{(0)}$  は $\zeta$ 方向の平均温度を、 $T^{(1)}$  は温度勾配を表わし、それぞれ次式で与えられる。

$$T^{(0)} = \frac{T^+ + T^-}{2}, \quad T^{(1)} = \frac{T^+ - T^-}{2} \quad (23)$$

ここに、 $T^+$  および  $T^-$  は、それぞれシェルの外表面および内表面における温度である。結局、Kirchhoff-Love の仮定の下では、肉厚方向の変位、ひずみ、応力および温度分布は、 $\zeta$ の線形式で表わされる。

前節において、三次元弾性論より導かれた円筒シェルに対する基礎方程式の表示は、Kirchhoff-Love の仮定を設けることにより次のように簡単化される。

平衡方程式、式(6)：

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_{\theta x}}{\partial \theta} &= -q_x \\ \frac{\partial N_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial N_\theta}{\partial \theta} + \frac{Q_\theta}{R} &= -q_\theta \\ \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial Q_\theta}{\partial \theta} - \frac{N_\theta}{R} &= -q_z \\ \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_{\theta x}}{\partial \theta} - Q_x &= -m_x \\ \frac{\partial M_{x\theta}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} - Q_\theta &= -m_\theta \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} q_x &= \tau_{zx}^+ - \tau_{zx}^- \\ q_\theta &= \tau_{z\theta}^+ - \tau_{z\theta}^- \\ q_z &= \sigma_z^+ - \sigma_z^- \\ m_x &= \frac{h}{2} (\tau_{zx}^+ + \tau_{zx}^-) \\ m_\theta &= \frac{h}{2} (\tau_{z\theta}^+ + \tau_{z\theta}^-) \end{aligned} \right\} \quad (25)$$

構成方程式、式(14)：

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K \left\{ \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + w_z^{(0)} \right) + \frac{h}{6R} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu) \alpha T^{(0)} \right\} \end{aligned} \right\}$$

$$\left. \begin{aligned} N_\theta &= K \left\{ \nu \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + w_z^{(0)} \right) - \frac{h}{6R^2} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu) \alpha T^{(0)} \right\} \\ N_{x\theta} &= Gh \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{h}{6R} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial x} \right) \\ N_{\theta x} &= Gh \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial \theta} - \frac{h}{6R^2} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial \theta} \right) \\ M_x &= \frac{2D}{h} \left\{ \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} + \frac{\nu}{R} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{h}{2R} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x} \right. \\ &\quad \left. - (1+\nu) \alpha T^{(1)} \right\} \\ M_\theta &= \frac{2D}{h} \left\{ \nu \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial x} - \frac{h}{2R^2} \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + w_z^{(0)} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{R} \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial \theta} - (1+\nu) \alpha T^{(1)} \right\} \\ M_{x\theta} &= \frac{Gh^2}{6} \left( \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial \theta} + \frac{h}{2R} \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} \right) \\ M_{\theta x} &= \frac{Gh^2}{6} \left( \frac{\partial u_\theta^{(1)}}{\partial x} - \frac{h}{2R^2} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial \theta} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(1)}}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots (26)$$

ここで、シェルの中央面上のひずみ成分  $\varepsilon_x^0, \varepsilon_\theta^0$  および  $\gamma_{x\theta}^0$ 、曲率変化  $\kappa_x^0$  および  $\kappa_\theta^0$ 、および振り  $\tau^0$  を次式で定義する。

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x^0 &= \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial x}, \quad \varepsilon_\theta^0 = \frac{1}{R} \left( \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} + w_z^{(0)} \right) \\ \gamma_{x\theta}^0 &= \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} + \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial \theta} \\ \kappa_x^0 &= -\frac{\partial^2 w_z^{(0)}}{\partial x^2}, \quad \kappa_\theta^0 = -\frac{1}{R^2} \left( \frac{\partial^2 u_\theta^{(0)}}{\partial \theta^2} - \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial \theta} \right) \\ \tau^0 &= \frac{1}{2R} \left( 3 \frac{\partial u_\theta^{(0)}}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^{(0)}}{\partial \theta} - 4 \frac{\partial^2 w_z^{(0)}}{\partial x \partial \theta} \right) \end{aligned} \right\} \quad \dots (27)$$

式(27)で定義される諸量を用いて式(26)の右辺を書き換えると、次式を得る。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K \left\{ \varepsilon_x^0 + \nu \varepsilon_\theta^0 + \delta R \kappa_x^0 - (1+\nu) \alpha T^{(0)} \right\} \\ N_\theta &= K \left\{ \nu \varepsilon_x^0 + \varepsilon_\theta^0 - \delta R \kappa_\theta^0 - (1+\nu) \alpha T^{(0)} \right\} \\ N_{x\theta} &= Gh \left( \gamma_{x\theta}^0 + \frac{\delta R}{2} \tau^0 \right) \\ N_{\theta x} &= Gh \left( \gamma_{x\theta}^0 - \frac{\delta R}{2} \tau^0 \right) \\ M_x &= D \left\{ \kappa_x^0 + \nu \kappa_\theta^0 + \frac{\varepsilon_x^0}{R} - \frac{2(1+\nu)}{h} \alpha T^{(1)} \right\} \\ M_\theta &= D \left\{ \nu \kappa_x^0 + \kappa_\theta^0 - \frac{\varepsilon_\theta^0}{R} - \frac{2(1+\nu)}{h} \alpha T^{(1)} \right\} \\ M_{x\theta} &= \frac{Gh^3}{12} \left( \tau^0 + \frac{\gamma_{x\theta}^0}{2R} \right) \\ M_{\theta x} &= \frac{Gh^3}{12} \left( \tau^0 - \frac{\gamma_{x\theta}^0}{2R} \right) \end{aligned} \right\} \quad (28)$$

ここで、 $\delta$  は1に比較して微小な量で次式で定義される。

$$\delta = h^2/12R^2 \quad (29)$$



構成方程式、式(28)は、 $T^{(0)}=T^{(1)}=0$ と置けば、通常の等温変化におけるシェル理論のFlüggeの構成方程式<sup>3)</sup>と本近似の精度範囲で同等のものである。三次元弾性論から出発してKirchhoff-Loveの仮定に基づいたオーダ評価による合理的な近似の結果としてFlügge理論に到達したが、もちろん、このことによってFlügge理論が唯一の最も合理的な一次近似理論であると結論するわけにはいかない。ここで得た結果は、Kirchhoff-Loveの仮定を、変位、ひずみ、応力および温度などの力学量を漸近級数表示するときの展開係数のオーダで評価し、それに基づいて基礎方程式の近似を行なう場合にかぎって最も合理的と言える理論を与えているにすぎない。さらに一般性のある合理的なシェル理論の精度評価は、Kirchhoff-Loveの仮定の下では、ひずみエネルギー表示式が面内ひずみと面外曲げによるひずみエネルギーの和として与えられるという規準に基づいて行なうことができる。Koiter<sup>4)</sup>は、このエネルギー精度規準による評価から、現存する線形シェル理論の多く — 例えば、Love<sup>5)</sup>、Flügge<sup>3)</sup>、Naghdi<sup>6)</sup>、Koiter<sup>4)</sup>-Sanders<sup>7)</sup>、Novozhilov<sup>8)</sup>およびReissner<sup>9)</sup>らの一次近似理論 — がKirchhoff-Loveの仮定の精度内ですべて合理的な一次近似理論であることを明らかにしている。Koiterの解析の結論は、式(28)において、各理論間の相違によって取捨選択される右辺の $\delta$ および $1/R$ を有する項は無視して差し支えないことを示している。このことを、変位成分のルジャンドル多項式の級数展開における展開係数について言えば、これらの係数がすべての $n$ に対して同一オーダ量であるとみなすことと同等である。式(28)と式(10)を比較すると応力成分のルジャンドル多項式の級数展開における展開係数についても同様のことが言えて、式(10)の右辺の $h/R$ を有する項は省略できる。

### 5. 熱変形・応力の境界値問題

筆者ら<sup>10), 11)</sup>は、先に、温度変化を考慮しないで、静的末端荷重が作用する円筒シェルの境界値問題の理論の相違によって生じる解の間の相対的な誤差を検討し、周方向変形波形の波数を $n$ とすると、 $n \geq 2$ の場合、解の間に生じる相対的な誤差はKirchhoff-Loveの仮定に含まれる基本誤差の範囲の微小量であることを明らかにした。

本節では、いくつかの代表的なシェル理論を例にとり、静的末端荷重が作用する円筒シェルの熱変形・応力問題の線形解におよぼす境界条件の影響を調べ、理論の相違によって解の間に生じる相対的な誤差を検討する。本節の基本的展開は文献[10]にしたがうので必要な部分を

除いて記述の重複は避ける。

温度変化 $T$ は前節の結論にしたがって次式で与えられるものとする。

$$T(x, \theta, \zeta) = T^{(0)}(x, \theta) + \zeta T^{(1)}(x, \theta) \quad (30)$$

この温度変化 $T$ を考慮し、構成方程式を、理論によって異なる値をとるパラメタを介して包括的に次に示すように一組の式で表示する。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= K \{ \epsilon_x^0 + \nu \epsilon_\theta^0 + \delta E_1 R \kappa_x^0 - (1+\nu) \alpha T^{(0)} \} \\ N_\theta &= K \{ \nu \epsilon_x^0 + (1+\delta E_2) \epsilon_\theta^0 - \delta E_1 R \kappa_\theta^0 - (1+\nu) \alpha T^{(0)} \} \\ N_{x\theta} &= Gh \left\{ \left(1 + \frac{\delta E_3}{4}\right) \gamma_{x\theta}^0 + \frac{\delta E_4 R}{2} \tau^0 \right\} \\ N_{\theta x} &= Gh \left\{ \left(1 + \frac{3\delta E_5}{4}\right) \gamma_{x\theta}^0 - \frac{\delta E_6 R}{2} \tau^0 \right\} \\ M_x &= D \left\{ \kappa_x^0 + \nu \kappa_\theta^0 + \frac{D_1 \epsilon_x^0}{R} - \frac{2(1+\nu)}{h} \alpha T^{(1)} \right\} \\ M_\theta &= D \left\{ \nu \kappa_x^0 + \kappa_\theta^0 - \frac{D_1 \epsilon_\theta^0}{R} - \frac{2(1+\nu)}{h} \alpha T^{(1)} \right\} \\ M_{x\theta} &= \frac{Gh^3}{12} \left( \tau^0 + \frac{D_2 \gamma_{x\theta}^0}{2R} - \frac{D_4 \omega_n^0}{R} \right) \\ M_{\theta x} &= \frac{Gh^3}{12} \left( \tau^0 - \frac{D_3 \gamma_{x\theta}^0}{2R} - \frac{D_4 \omega_n^0}{R} \right) \end{aligned} \right\} \dots (31)$$

ここに、 $\omega_n^0$ は中央面に立てた法線まわりの回転で次式で定義される。

$$\omega_n^0 = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta^0}{\partial x} - \frac{1}{R} \frac{\partial u_x^0}{\partial \theta} \right) \quad (32)$$

パラメタ $E_i$  ( $i=1, 2, \dots, 6$ ) および $D_j$  ( $j=1, 2, 3, 4$ )は0または単位オーダの定数で、Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders, Novozhilov, Love-Reissner理論など各理論によって異なる値をとる。 $E_i$  および $D_j$ の値の詳細は文献[10]を参照されたい。

境界条件は、次の4組の対を適当に組み合わせて各端末で指定し、合計8個の境界条件を与える。

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad w_z^{(0)} \text{ または } S_x & \quad \text{(ii)} \quad \partial w_z^{(0)} / \partial x \text{ または } M_x \\ \text{(iii)} \quad u_x^{(0)} \text{ または } N_x & \quad \text{(iv)} \quad u_\theta^{(0)} \text{ または } T_{x\theta} \end{aligned}$$

ここに、 $S_x$  および $T_{x\theta}$ は、次式で定義される端末等価せん断力である。

$$\left. \begin{aligned} S_x &= Q_x + (\partial M_{x\theta} / \partial \theta) / R \\ T_{x\theta} &= N_{x\theta} + M_{x\theta} / R \end{aligned} \right\} (33)$$

以下の議論は、次に示す無次元量および演算子を用いて展開する。

$$\left. \begin{aligned} u &= u_x^{(0)} / R, \quad v = u_\theta^{(0)} / R, \quad w = w_z^{(0)} / R \\ \beta &= \partial w_z^{(0)} / \partial x, \quad N = N_x / K, \quad Q = T_{x\theta} / K \\ M &= R M_x / D, \quad S = S_x / \delta K, \quad \Phi = \alpha T^{(0)} \end{aligned} \right\} (34)$$

$$\Psi = \alpha T^{(1)}, \quad y = x/R, \quad l = L/R$$

$$\left. \begin{aligned} (\cdot)' &= \partial(\cdot)/\partial y, \quad (\cdot)'' = \partial(\cdot)/\partial \theta, \quad \nabla^2(\cdot) = (\cdot)'' + (\cdot)'' \end{aligned} \right\}$$

外力が円筒の端末境界線上にのみ作用する場合を考えるから平衡方程式、式(24), の右辺は0となる。式(24)から、 $Q_x$  および  $Q_\theta$  を消去して得られる式に、式(31)の関係を代入し、式(27)および(32)を用いて変位成分のみで表わすと、 $u, v$  および  $w$  についての連立微分方程式が得られる。これらの平衡方程式から  $u, v$  を消去すると、最終的に  $w$  のみで表わされる支配方程式を得る。この方程式は一次近似精度で次式の形をとる。

$$\nabla^4(\nabla^2 + 1)^2 w + 4k^4 w''''$$

$$+ \bar{a}_{61} w'''' + \bar{a}_{62} w'''' + \bar{a}_{63} w'''' + \bar{a}_{42} w''''$$

$$= 4k^4 \nabla^2 \Phi'' - \{2(1+\nu)R/h\} (\nabla^6 \Psi + \Psi'') \quad \dots\dots (35)$$

ここに、

$$4k^4 = (1-\nu^2)/\delta \quad (36)$$

式(35)に含まれる係数  $\bar{a}_{ij}$  は各理論によって異なる単位オーダーの定数で、その値の詳細は文献[10]を参照されたい。

境界条件を与える諸量は、同じく一次近似精度で、次のように  $w$  のみの関係式として与えられる。

$$\beta = w'$$

$$\nabla^4 u = -\nu w'''' + w''''$$

$$+ \delta(f_1^0 w'''' + f_2^0 w'''' + f_3^0 w''')$$

$$+ (1+\nu) \nabla^2 \Phi'$$

$$\nabla^4 v = -(2+\nu) w'''' - w''''$$

$$+ \delta(g_1^0 w'''' + g_2^0 w'''' + g_3^0 w''')$$

$$+ (1+\nu) \nabla^2 \Phi'$$

$$\nabla^4 N = (1-\nu^2) w''''$$

$$+ \delta(n_1^0 w'''' + n_2^0 w'''' + n_3^0 w'''' + n_6^0 w''')$$

$$- (1-\nu^2) \nabla^2 \Phi''$$

$$\nabla^4 Q = -(1-\nu^2) w''''$$

$$+ \delta(q_1^0 w'''' + q_2^0 w'''' + q_3^0 w'''' + q_5^0 w''')$$

$$+ (1-\nu^2) \nabla^2 \Phi'$$

$$\nabla^4 M = -\nabla^4 (w'' + \nu w'')$$

$$+ m_6^0 w'''' + m_6^0 w'''' - \nu w''$$

$$- \{2(1+\nu)R/h\} \nabla^4 \Psi$$

$$\nabla^4 S = -\nabla^4 \{w'''' + (2-\nu)w''''\}$$

$$+ s_6^0 w'''' + s_6^0 w'''' + s_7^0 w''''$$

$$- \{2(1+\nu)R/h\} \nabla^4 \Psi'$$

$$\dots\dots (37)$$

ここに、係数  $f_i^0, g_i^0, n_i^0, q_i^0, m_i^0$  および  $s_i^0$  は、各理論によって異なる単位オーダーの定数で、その値の具体的な表示は文献[10]を参照されたい。

式(35)および(37)の一般解は齊次解と特解との重ね合わせとして得られるが、齊次解に関しては、先に述べたように、筆者らの報告[10]があるので、ここでは割愛し、特解についてのみ検討する。

温度分布がフーリエ級数に展開できて各項が次式で表わせる場合を考える。ただし、文献[10]と同様、 $n \geq 2$  の場合のみを取り扱う。

$$\left. \begin{aligned} (\Phi, \Psi) &= (\Phi_{mn}, \Psi_{mn}) \cos sy \cos n\theta \\ &; m = 0, 1, 2, \dots \quad n = 2, 3, 4, \dots \end{aligned} \right\} (38)$$

ここに、

$$s = \frac{m\pi R}{2L} = \frac{m\pi}{2l} \quad (39)$$

式(38)の  $\Phi$  および  $\Psi$  を微分方程式、式(35), の右辺に代入すると、式(35)の特解は次の形に書けることが判る。

$$w = w_{mn} \cos sy \cos n\theta \quad (40)$$

同様に、式(38)の  $\Phi$  および  $\Psi$ , ならびに式(40)の  $w$  を微分方程式、式(37), の各右辺に代入すると、式(37)の特解はそれぞれ次の形に書ける。

$$\left. \begin{aligned} \beta &= \beta_{mn} \sin sy \cos n\theta \\ u &= u_{mn} \sin sy \cos n\theta \\ v &= v_{mn} \cos sy \sin n\theta \\ N &= N_{mn} \cos sy \cos n\theta \\ Q &= Q_{mn} \sin sy \sin n\theta \\ M &= M_{mn} \cos sy \cos n\theta \\ S &= S_{mn} \sin sy \cos n\theta \end{aligned} \right\} (41)$$

式(40)および(41)の右辺の係数  $w_{mn}$  および  $\beta_{mn}, u_{mn}, v_{mn}, N_{mn}, Q_{mn}, M_{mn}, S_{mn}$  を定めるためには、式(40)および(41)の  $w$  および  $\beta, u, v, N, Q, M, S$  を、それぞれ式(35)および(37)に代入すればよい。結果は、それぞれ次の通りである。

$$w_{mn} \left[ s^4 \{ (1-\nu^2) - \delta \bar{a}_{61} s^2 - \delta \bar{a}_{62} n^2 - \delta \bar{a}_{63} \frac{n^4}{s^2} + \delta \bar{a}_{42} \frac{n^2}{s^2} \} \right.$$

$$\left. + \delta (s^2 + n^2)^2 (s^2 + n^2 - 1)^2 \right]$$

$$= (1-\nu^2) s^2 (s^2 + n^2) \Phi_{mn}$$

$$+ \frac{(1+\nu)h}{6R} \{ (s^2 + n^2)^3 - n^4 \} \Psi_{mn} \quad (42)$$

$$\begin{aligned}
 \beta_{mn} &= -w_{mn} s \\
 u_{mn} (s^2 + n^2)^2 &= -w_{mn} s \{ s^2 (\nu + \delta f_1^0 s^2 + \delta f_2^0 n^2) - n^2 (1 - \delta f_3^0 n^2) \} \\
 &\quad + (1 + \nu) s (s^2 + n^2) \Phi_{mn} \\
 v_{mn} (s^2 + n^2)^2 &= -w_{mn} n \{ s^2 (2 + \nu + \delta g_1^0 s^2 + \delta g_2^0 n^2) + n^2 (1 + \delta g_3^0 n^2) \} \\
 &\quad + (1 + \nu) n (s^2 + n^2) \Phi_{mn} \\
 N_{mn} (s^2 + n^2)^2 &= -w_{mn} s^2 n^2 \{ -(1 - \nu^2) + \delta n_1^0 s^2 + \delta n_2^0 n^2 \\
 &\quad + \delta n_3^0 \frac{n^4}{s^2} - \delta n_6^0 \frac{n^2}{s^2} \} - (1 - \nu^2) n^2 (s^2 + n^2) \Phi_{mn} \\
 Q_{mn} (s^2 + n^2)^2 &= w_{mn} s^3 n \{ (1 - \nu^2) + \delta q_1^0 s^2 + \delta q_2^0 n^2 \\
 &\quad + \delta q_3^0 \frac{n^4}{s^2} - \delta q_5^0 \frac{n^2}{s^2} \} - (1 - \nu^2) s n (s^2 + n^2) \Phi_{mn} \\
 M_{mn} (s^2 + n^2)^2 &= w_{mn} \{ (s^2 + n^2)^2 (s^2 + \nu n^2) \\
 &\quad + m_5^0 s^4 + m_6^0 s^2 n^2 - \nu n^4 \} \\
 &\quad - \frac{2(1 + \nu)R}{h} (s^2 + n^2)^2 \Psi_{mn} \\
 S_{mn} (s^2 + n^2)^2 &= -w_{mn} s \{ (s^2 + n^2)^2 \{ s^2 + (2 - \nu) n^2 \} \\
 &\quad + s_5^0 s^4 + s_6^0 s^2 n^2 + s_7^0 n^4 \} \\
 &\quad + \frac{2(1 + \nu)R}{h} s (s^2 + n^2)^2 \Psi_{mn}
 \end{aligned}$$

..... (43)

Kirchhoff-Love の仮定の下では、変形波長が肉厚に比較して十分に長くなければならないという条件から次式が成り立つ。

$$\delta n^2 \ll 1, \quad \delta s^2 \ll 1 \tag{44}$$

このことは、周および軸方向変形波長をそれぞれ  $\lambda_\theta$  および  $\lambda_x$  と記せば、次の演算から明らかである。

$$\begin{aligned}
 \delta n^2 &= \frac{h^2 n^2}{12R^2} = \frac{h^2}{12R^2} \left( \frac{2\pi R}{2\pi R/n} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda_\theta} \right)^2 \\
 \delta s^2 &= \frac{h^2}{12R^2} \left( \frac{m\pi R}{2L} \right)^2 = \frac{h^2}{12R^2} \left( \frac{2\pi R}{4L/m} \right)^2 = \frac{\pi^2}{3} \left( \frac{h}{\lambda_x} \right)^2
 \end{aligned}$$

..... (45)

式(42)および(43)に対して、式(44)に基づく近似を行なうと、理論の相違に影響される係数を持つ項の多くが省略できる。さらに、 $n^2$  が  $s^2$  に比較して大きい場合と、そうでない場合とに分けて考えると次のような結果を得

る。

まず、 $n^2$  が  $s^2$  に比較して極端には大きくなく、その比 ( $n^2/s^2$ ) が単位オーダー以下である場合、すなわち

$$n^2/s^2 = 0(1) \text{ 以下}$$

のときは、式(42)から次式を得る。

$$\begin{aligned}
 w_{mn} &= \frac{1}{A} \{ (1 - \nu^2) s^2 (s^2 + n^2) \Phi_{mn} \\
 &\quad + \frac{(1 + \nu)h}{6R} \{ (s^2 + n^2)^3 - n^4 \} \Psi_{mn} \} \tag{46}
 \end{aligned}$$

ここに、

$$A = (1 - \nu^2) s^4 + \delta (s^2 + n^2)^2 (s^2 + n^2 - 1)^2 \tag{47}$$

また、式(46)の関係を用いてオーダー評価を行なうと、式(43)から次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \beta_{mn} &= -s w_{mn} \\
 u_{mn} &= -\frac{s}{(s^2 + n^2)^2} \{ (\nu s^2 - n^2) w_{mn} \\
 &\quad - (1 + \nu) (s^2 + n^2) \Phi_{mn} \} \\
 v_{mn} &= -\frac{n}{(s^2 + n^2)^2} \{ [(2 + \nu) s^2 + n^2] w_{mn} \\
 &\quad - (1 + \nu) (s^2 + n^2) \Phi_{mn} \} \\
 N_{mn} &= \frac{(1 - \nu^2) n^2}{(s^2 + n^2)^2} \{ s^2 w_{mn} - (s^2 + n^2) \Phi_{mn} \} \\
 Q_{mn} &= \frac{(1 - \nu^2) s n}{(s^2 + n^2)^2} \{ s^2 w_{mn} - (s^2 + n^2) \Phi_{mn} \} \\
 M_{mn} &= (s^2 + \nu n^2) w_{mn} - \frac{2(1 + \nu)R}{h} \Psi_{mn} \\
 S_{mn} &= -s \{ \{ s^2 + (2 - \nu) n^2 \} w_{mn} - \frac{2(1 + \nu)R}{h} \Psi_{mn} \}
 \end{aligned}$$

..... (48)

式(46)~(48)から明らかなように、この場合、理論の相違によって異なる係数がまったく含まれない。

次に、 $n^2$  が  $s^2$  に比較して大きい場合、すなわち

$$n^2/s^2 \gg 1$$

のとき、式(42)から次式を得る。

$$w_{mn} = \frac{n^2}{A} \{ (1 - \nu^2) s^2 \Phi_{mn} + \frac{(1 + \nu)h}{6R} n^2 (n^2 - 1) \Psi_{mn} \}$$

..... (49)

ここに、

$$A = (1 - \nu^2) s^4 + \delta n^4 (n^2 - 1)^2 \tag{50}$$

式(48)を求めたと同様の方法で、式(43)の近似を行なうと次式を得る。

$$\begin{aligned}
 \beta_{mn} &= -s w_{mn} \\
 u_{mn} &= \frac{s}{n^2} \{ w_{mn} + (1 + \nu) \Phi_{mn} \}
 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{aligned} v_{mn} &= -\frac{1}{n} \{w_{mn} - (1+\nu)\phi_{mn}\} \\ N_{mn} &= \frac{1-\nu^2}{n^2} (s^2 w_{mn} - n^2 \phi_{mn}) \\ Q_{mn} &= \frac{(1-\nu^2)s}{n^3} (s^2 w_{mn} - n^2 \phi_{mn}) \\ M_{mn} &= \nu(n^2-1)w_{mn} - \frac{2(1+\nu)R}{h} \psi_{mn} \\ S_{mn} &= -S[\{(2-\nu)n^2 + s_7^0\}w_{mn} - \frac{2(1+\nu)R}{h} \psi_{mn}] \end{aligned} \right\} \quad (51)$$

この場合、式(51)の  $S_{mn}$  の関係式の中に  $s_7^0$  が含まれる。しかし、 $n$  が大きく

$$n^2 \gg 1$$

の場合には、 $s_7^0$  の項は直ちに省略できる。また、 $n$  が比較的小さくて

$$n^2 = 0 \quad (1)$$

の場合には、仮定から

$$s^2 \ll 1$$

であり、 $S_{mn}$  自体が微小量となり、重要な意味を持たなくなる。このことは、定性的には、軸方向にほぼ一様な温度分布に対して等価せん断力  $S_x$  が生じないという明らかな事実を意味している。いずれにしても、 $s_7^0$  は常に省略が可能である。

結局、文献[10]の結果と合わせて結論すれば、円筒シェルに端末荷重が作用する熱変形・応力問題を本報告で取り扱った線形シェル理論で解く場合、 $n \geq 2$  の変形については、境界条件の影響をも含めて理論の相違によって解の間に生じる相対的な誤差は Kirchhoff-Love の仮定に含まれる基本誤差の範囲の微小量であることが判る。

### 6. 熱伝導方程式

第3節において、応力および変位成分をルジャンドル多項式の級数に展開する方法を用いて、三次元弾性論から円筒シェルに対する力学的基礎方程式を導いた。これらの基礎方程式の一次近似はルジャンドル多項式の級数展開における展開係数に Kirchhoff-Love の仮定を適用することにより求めた。本節では、同じ方法を用いて、これらの一次近似基礎方程式と同等の精度を備えた熱伝導方程式の近似式を導く。

時間を  $t$ 、シェルの温度分布を  $T(x, \theta, z; t)$  として、図1の円柱座標で表わすと、三次元熱伝導方程式は次式で与えられる。

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{1}{(R+z)^2} \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + \frac{1}{R+z} \frac{\partial}{\partial z} \left\{ (R+z) \frac{\partial T}{\partial z} \right\} = \gamma \frac{\partial T}{\partial t} \quad \dots\dots (52)$$

ここで、 $\gamma$  は材料の温度伝播率の逆数である。式(52)は、 $\zeta$  を用いて次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2 T}{\partial \theta^2} + R^2 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right)^2 \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T}{\partial t}\right) \\ &= -\left(\frac{2R}{h}\right)^2 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{\partial}{\partial \zeta} \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right\} \end{aligned} \quad (53)$$

第3節にならって、温度関数  $T$  を次のようにルジャンドル多項式  $P_n(\zeta)$  の級数に展開する。

$$T(x, \theta, \zeta; t) = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)}(x, \theta; t) P_n(\zeta) \quad (54)$$

式(54)を用いると、式(53)の級数表示は次のようになる。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \left\{ \frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial \theta^2} + R^2 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right)^2 \left(\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t}\right) \right\} P_n(\zeta) \\ &= -\left(\frac{2R}{h}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)} \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{d}{d\zeta} \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{dP_n(\zeta)}{d\zeta} \right\} \end{aligned} \quad \dots\dots (55)$$

式(55)の両辺に  $P_m(\zeta)$  を乗じ、 $\zeta = -1$  から  $\zeta = 1$  まで積分する。すなわち

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial \theta^2} \right. \\ & \quad \left. + R^2 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right)^2 \left(\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t}\right) \right\} P_n P_m d\zeta \\ &= -\left(\frac{2R}{h}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)} \\ & \quad \times \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{d}{d\zeta} \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{dP_n}{d\zeta} \right\} \cdot P_m d\zeta \end{aligned} \quad \dots\dots (56)$$

上式の右辺の積分は部分積分することにより次のようになる。

$$\begin{aligned} & \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{d}{d\zeta} \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{dP_n}{d\zeta} \right\} \cdot P_m d\zeta \\ &= \left[ \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right)^2 \frac{dP_n}{d\zeta} P_m \right]_{-1}^1 \\ & \quad - \left[ \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) P_n \left\{ \frac{h}{2R} P_m + \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{dP_m}{d\zeta} \right\} \right]_{-1}^1 \\ & \quad + \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) P_n \left\{ 2 \left(\frac{h}{2R}\right) \frac{dP_m}{d\zeta} + \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{d^2 P_m}{d\zeta^2} \right\} d\zeta \\ & \quad + \frac{h}{2R} \int_{-1}^1 P_n \left\{ \frac{h}{2R} P_m + \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{dP_m}{d\zeta} \right\} d\zeta \end{aligned} \quad (57)$$

したがって、式(56)は次のように書ける。

$$\begin{aligned} & \sum_{n=0}^{\infty} \int_{-1}^1 \left\{ \frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial \theta^2} \right. \\ & \quad \left. + R^2 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right)^2 \left(\frac{\partial^2 T^{(n)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(n)}}{\partial t}\right) \right\} P_n P_m d\zeta \\ & \quad + \frac{2R}{h} \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)} \int_{-1}^1 P_n \left\{ \frac{h}{2R} P_m + \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{dP_m}{d\zeta} \right\} d\zeta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)} \int_{-1}^1 \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) P_n \\
& \times \left\{ 2 \left(\frac{h}{2R}\right) \frac{dP_m}{d\zeta} + \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{d^2 P_m}{d\zeta^2} \right\} d\zeta \\
& - \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) T \left\{ \frac{h}{2R} P_m + \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{dP_m}{d\zeta} \right\} \right\}_{-1}^1 \\
& = - \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R} \zeta\right) \frac{\partial T}{\partial \zeta} P_m \right\}_{-1}^1 \quad (58)
\end{aligned}$$

$P_n(\zeta)$  および  $P_m(\zeta)$  は直交多項式であるから式(58)の左辺に現われる積分は、 $n$  と  $m$  とのある特別な組み合わせの場合を除いて、その値は 0 となる。付録に示すルジャンドル多項式の積分公式ならびに  $P_m(\zeta)$  および  $dP_m(\zeta)/d\zeta$  の  $\zeta = \pm 1$  での値を用いれば、式(58)は次のようになる。

$$\begin{aligned}
& \frac{2}{2m+1} \left\{ \frac{\partial^2 T^{(m)}}{\partial \theta^2} \right. \\
& + R^2 \left\{ 1 + \frac{2m(m+1)-1}{(2m-1)(2m+3)} \left(\frac{h}{2R}\right)^2 \right\} \left( \frac{\partial^2 T^{(m)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(m)}}{\partial t} \right) \\
& + \left(\frac{h}{2R}\right) R^2 \left\{ \frac{2m}{2m-1} \left( \frac{\partial^2 T^{(m-1)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(m-1)}}{\partial t} \right) \right. \\
& + \left. \frac{2(m+1)}{2m+3} \left( \frac{\partial^2 T^{(m+1)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(m+1)}}{\partial t} \right) \right\} \\
& + \left(\frac{h}{2R}\right)^2 R^2 \left\{ \frac{(m-1)m}{(2m-3)(2m-1)} \left( \frac{\partial^2 T^{(m-2)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(m-2)}}{\partial t} \right) \right. \\
& + \left. \frac{(m+1)(m+2)}{(2m+3)(2m+5)} \left( \frac{\partial^2 T^{(m+2)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(m+2)}}{\partial t} \right) \right\} \left. \right\} \\
& + \frac{2(m+1)^2}{2m+1} T^{(m)} + 2 \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \sum_{i=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \{ 2(2i+1)(m-i) \\
& + 1 \} T^{(m-2i-1)} + 2 \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} \left\{ \left(\frac{h}{2R}\right)^2 \right. \\
& + i(2m-2i+1) \left\{ 1 + \left(\frac{h}{2R}\right)^2 \right\} \right\} T^{(m-2i)} \\
& - \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \left\{ \frac{h}{2R} + \frac{m(m+1)}{2} \left(1 + \frac{h}{2R}\right) \right\} T^+ \right. \\
& + \left. (-1)^m \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \left\{ -\frac{h}{2R} + \frac{m(m+1)}{2} \left(1 - \frac{h}{2R}\right) \right\} T^- \right\} \\
& = - \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \left\{ \left(1 + \frac{h}{2R}\right)^2 \frac{\partial T^+}{\partial \zeta} - (-1)^m \left(1 - \frac{h}{2R}\right)^2 \frac{\partial T^-}{\partial \zeta} \right\} \\
& ; m = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (59)
\end{aligned}$$

ここで、 $\sum_{i=0}^{\lfloor (m-1)/2 \rfloor}$  および  $\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor}$  は、前者については、 $i=0$  から、 $m$  が奇数ならば  $(m-1)/2$  まで、 $m$  が偶数ならばその 1 つ前の整数  $(m-2)/2$  までの和をとることであり、後者についても同様に、 $i=1$  から、 $m$  が偶数ならば  $m/2$  まで、 $m$  が奇数ならば  $(m-1)/2$  までの和をとることである。ただし、 $\sum_{i=1}^{\lfloor m/2 \rfloor}$  における  $m=0$  および

1 のときのように助変数の値によって、和の範囲が空になるときは、その級数の項は 0 とする。 $T^+$  および  $T^-$  は、それぞれシェルの外表面および内表面での温度で、式(54)から次式で与えられる。

$$T^+ = \sum_{n=0}^{\infty} T^{(n)}, \quad T^- = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n T^{(n)} \quad (60)$$

また、 $\partial T^+/\partial \zeta$  および  $\partial T^-/\partial \zeta$  は、それぞれシェルの外表面および内表面における温度勾配を表わす。いま、シェルの表面に接する媒質の温度が、シェルとの接触面において、外表面で  $T_e^+$ 、内表面で  $T_e^-$  であるとする、接触部境界層の熱伝達の法則から、 $\partial T^+/\partial \zeta$  および  $\partial T^-/\partial \zeta$  に関して次の関係式を得る。

$$\left. \begin{aligned}
\frac{\partial T^+}{\partial \zeta} &= B^+ (T_e^+ - T^+) \\
\frac{\partial T^-}{\partial \zeta} &= -B^- (T_e^- - T^-)
\end{aligned} \right\} \quad (61)$$

ここに、 $B$  はビオ数で、次式で定義される。

$$B = h\kappa/2\lambda \quad (62)$$

ここで、 $\kappa$  はシェル表面と境界層間との熱伝達率であり、 $\lambda$  はシェル材料の熱伝導率である。

式(59)において、肉厚と半径との比が 1 に比較して微小であるという仮定、式(16)、に基づく省略を行なえば、次式を得る。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 T^{(m)}}{\partial \theta^2} + R^2 \left( \frac{\partial^2 T^{(m)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(m)}}{\partial t} \right) \\
& + \frac{2m+1}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \left\{ 2 \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{m}{2} \rfloor} i(2m-2i+1) T^{(m-2i)} \right. \\
& - \left. \frac{m(m+1)}{2} \{ T^+ + (-1)^m T^- \} \right\} \\
& = - \frac{2m+1}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \left\{ \frac{\partial T^+}{\partial \zeta} - (-1)^m \frac{\partial T^-}{\partial \zeta} \right\} \\
& ; m = 0, 1, 2, \dots, \infty. \quad (63)
\end{aligned}$$

この結果は、Steele と Yang とにより導かれた結果に一致する。しかしながら、前節までに述べたように、Kirchhoff-Love の仮定に基づく薄肉円筒シェル理論では、合理的な近似として、温度関数  $T$  の線形近似、式(22)、が成り立つことから、式(63)はさらに省略を進めることができ、 $m=0$  および 1 に対応する 2 式のみを考えればよいことになる。

$$\left. \begin{aligned}
& \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \theta^2} + R^2 \left( \frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t} \right) \\
& = - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \left( \frac{\partial T^+}{\partial \zeta} - \frac{\partial T^-}{\partial \zeta} \right) \\
& \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \theta^2} + R^2 \left( \frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t} \right) - \frac{3}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 (T^+ - T^-)
\end{aligned} \right\}$$

$$= -\frac{3}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \left(\frac{\partial T^+}{\partial \zeta} + \frac{\partial T^-}{\partial \zeta}\right) \quad \dots\dots (64)$$

ここに、 $T^+$  および  $T^-$  は、式(60)より、それぞれ次式で与えられる。

$$T^+ = T^{(0)} + T^{(1)}, \quad T^- = T^{(0)} - T^{(1)} \quad (65)$$

また、 $\partial T^+/\partial \zeta$  および  $\partial T^-/\partial \zeta$  は、式(61)より、それぞれ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial T^+}{\partial \zeta} &= B^+ (T_e^+ - T^{(0)} - T^{(1)}) \\ \frac{\partial T^-}{\partial \zeta} &= -B^- (T_e^- - T^{(0)} + T^{(1)}) \end{aligned} \right\} (66)$$

式(65)と(66)とを用いれば、式(64)は次のように書ける。

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \theta^2} + R^2 \left(\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}\right) \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \{(B^+ + B^-)T^{(0)} + (B^+ - B^-)T^{(1)}\} \\ &= -\frac{1}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 (B^+ T_e^+ + B^- T_e^-) \\ &\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \theta^2} + R^2 \left(\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}\right) \\ &\quad - \frac{3}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 \{(B^+ - B^-)T^{(0)} + (2B^+ + B^-)T^{(1)}\} \\ &= -\frac{3}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 (B^+ T_e^+ - B^- T_e^-) \end{aligned} \right\} (67)$$

式(67)が、Kirchhoff-Love の仮定に基づく薄肉円筒シェルの一次近似理論における熱伝導方程式である。

もし、シェルの外表面および内表面と、これに接する境界層間との熱伝達率が同じであると仮定できるならば、次式が成り立つ。

$$B^+ = B^- = B \quad (68)$$

したがって、式(67)は次のように  $T^{(0)}$  および  $T^{(1)}$  に関して互いに独立した式となる。

$$\left. \begin{aligned} &\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial \theta^2} + R^2 \left(\frac{\partial^2 T^{(0)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(0)}}{\partial t}\right) - \left(\frac{2R}{h}\right)^2 T^{(0)} \\ &= -\frac{B}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 (T_e^+ + T_e^-) \\ &\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial \theta^2} + R^2 \left(\frac{\partial^2 T^{(1)}}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial T^{(1)}}{\partial t}\right) - 3\left(\frac{2R}{h}\right)^2 (1+B)T^{(1)} \\ &= -\frac{3B}{2} \left(\frac{2R}{h}\right)^2 (T_e^+ - T_e^-) \end{aligned} \right\} \dots\dots (69)$$

この結果は Bolotin により導かれた結果に一致する。

### 7. 結 論

Kirchhoff-Love の仮定に基づく円筒シェル理論にお

いては、変位および応力ばかりでなく温度分布も肉厚方向に線形近似するのが合理的な一次近似であることを示した。したがって、高次項を取り入れることによって精度を漸近的に高めていくことができるとする Steele と Yang の主張は、シェルの熱伝導方程式から温度分布を決定する場合においてのみ正当なものであるが、変形・応力状態まで含めて解析する場合には、Kirchhoff-Love の仮定を排除ないし改善した高次シェル理論を用いなければ無意味である。Kirchhoff-Love の仮定に基づく円筒シェル理論において、温度分布が合理的な近似として線形近似できる結果として三次元熱伝導方程式は、肉厚方向の平均温度と温度勾配に関する二つの二次元放物型偏微分方程式で与えられる。もし、シェルの内・外表面に接する媒質が同質のもので、接触面の境界層とシェルの間の熱伝達率が等しければ、これらの二つの熱伝導方程式は互いに独立な式となる。これは、Bolotin が温度分布を肉厚方向に線形と仮定して得た結論と一致する。

本論文で導いた一次近似熱伝導方程式により決定される温度分布を用いて円筒シェルに端末荷重が作用する  $n \geq 2$  (ただし、 $n$  は周方向変形波形の波数) の熱弾性境界値問題を、Kirchhoff-Love の仮定に基づく種々の線形シェル理論で解く場合、理論の相違によって解の間に生じる相対的な誤差は Kirchhoff-Love の仮定に含まれる基本誤差の範囲の微小量である。したがって、Flügge, Naghdi, Koiter-Sanders, Novozhilov, Love-Reissner 理論などのいずれの理論を用いても、一次近似解として正しい解が得られる。

本報告で用いたルジャンドルの多項式による級数展開の方法は、三次元弾性論から薄肉弾性円筒シェルに対する基礎方程式を系統的に導く方法として有効であることが示された。この方法によれば、漸近式の形で二次元化された方程式から二次元化近似精度を除々に向上させることができる。この方法は、円筒シェルばかりでなく任意の形状のシェル、積層シェルおよび板への適用、さらに肉厚方向のせん断応力を考慮したシェル理論および板の高次理論の定式化などに対して発展的応用が期待される。

### 謝 辞

筆者が、本報告をまがりなりにもまとめ上げることができたのは、本研究を行なうことを勧めて下さった当所機体第一部 古賀達蔵熱弾性研究室長の懇切な御指導によるもので、シェル理論の知識をはじめ、解析方法、結果の検討さらには文章の適否にいたるまで全体にわたって多大な御教示および御援助を戴いた。ここに同室長に厚く感謝いたします。

## 参 考 文 献

- 1) Bolotin, V. V., "Equations for the Non-Stationary Temperature Fields in Thin Shells in the Presence of Sources of Heat," PMM, Journal of Applied Mathematics and Mechanics, Vol. 24, No.2, 1960, pp. 515-519
- 2) Steele, C. R. and Yang, J. - S., "Thermal Stresses in Thin Shells," SUDAAR No.371, Stanford University, March 1969
- 3) Flügge, W., "Statik und Dynamik der Schalen," 3rd edition, Springer-Verlag, 1962
- 4) Koiter, W. T., "A Consistent First Approximation in the General Theory of Thin Elastic Shells," Proceedings of the Symposium on the Theory of Thin Elastic Shells, Delft, August 1959 (North-Holland, 1960) pp.12-33
- 5) Love, A.E.H., "A Treatise on the Mathematical Theory of Elasticity," 4th edition, the University Press, Cambrig, 1959
- 6) Naghdi, P. M., "On the Theory of Thin Elastic Shells," Quarterly of Applied Mathematics, Vol. 14, No. 4, January 1957, pp.369-380
- 7) Sanders, J. L., Jr., "An Improved First-Approximation Theory of Thin shells," NASA TR-R24, National Aeronautics and Space Administration, 1959
- 8) Novozhilov, V. V., "The Theory of Thin Shells," (English translation from the Russian original, 1951) Noordhoff, 1959
- 9) Reissner, E., "A New Derivation of the Equations for Deformation of Elastic Shells," American Journal of Mathematics, Vol. 63, No. 1, January 1941, pp. 177-184
- 10) Koga, T. and Endo, S., "Comparison of Accuracies of Solutions of Linear Shell Theories for Closed Circular Cylinders Under Edgewise Loading," NAL TR-552T, National Aerospace Laboratory, November 1978
- 11) 古賀達蔵, 遠藤修司, "円筒かくの線形境界値問題の解の精度," 日本機械学会論文集, A編, 第45巻, 第393号, 昭和54年5月, pp. 481-488
- 12) Sneddon, I. N., "Special Functions of Mathematical Physics and Chemistry," 2nd edition, Oliver and Boyd, 1961; あるいは, 森口繁一, 宇田川銈久, 一松 信, "数学公式 I, II, III," 岩波全書 221, 229, 244, 岩波書店, 1956, 1957, 1960

# 付 録





本文中に現われるルジャンドル多項式  $P_n(x)$  およびその導関数を含む定積分の値の導き方の概略と結果について付記する。

A. 基本となる諸公式

ルジャンドル多項式  $P_n(x)$  の定義式およびそれに関連した基本的な諸公式を列記する。(文献[12]参照)

$$\circ P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n; n \text{ は } 0 \text{ または正の整数} \quad (\text{A.1})$$

$$\circ P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} (-1)^s \frac{(2n-2s)! x^{n-2s}}{s!(n-s)!(n-2s)!} \quad (\text{A.2})$$

$$\circ \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{s=0}^{\lfloor \frac{n-k}{2} \rfloor} (-1)^s \frac{(2n-2s)! x^{n-k-2s}}{s!(n-s)!(n-k-2s)!}$$

;  $k$  は 0 または正の整数,  $0 \leq k \leq n$

(A.3)

$$\frac{d^{n-2}}{dx^{n-2}} P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{n+1} n!} x^2 - \frac{(2n-2)!}{2^n (n-1)!}; n \geq 2$$

$$\frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}} P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!} x; n \geq 1$$

$$\frac{d^n}{dx^n} P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n n!}; n \geq 0$$

$$\circ \frac{d^k}{dx^k} P_n(x) = 0; 0 \leq n < k \quad (\text{A.4})$$

$$\circ \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n \Big|_{x=\pm 1} = 0; 0 \leq k < n \quad (\text{A.5})$$

$$\circ \int_{-1}^1 \frac{d^k}{dx^k} (x^2 - 1)^n dx = \left[ \frac{d^{k-1}}{dx^{k-1}} (x^2 - 1)^n \right]_{-1}^1 = 0$$

;  $1 \leq k < n$

(A.6)

$$\circ \int_0^1 x^\alpha (1-x)^\beta dx = \frac{1}{\lambda} B\left(\frac{\alpha+1}{\lambda}, \beta+1\right)$$

;  $\alpha, \beta > -1, \lambda > 0$  (A.7)

ここに,  $B(p, q)$  はベータ関数で, ガンマ関数により次式で与えられる。

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \quad (\text{A.8})$$

ただし, ガンマ関数には次の性質がある。

$$\left. \begin{aligned} \Gamma(n+1) &= n! \\ \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \sqrt{\pi} \\ \Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right) &= \frac{(2n)! \sqrt{\pi}}{2^{2n} n!} \end{aligned} \right\} \quad (\text{A.9})$$

$$\circ P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n \quad (\text{A.10})$$

$$\circ \frac{dP_n(1)}{dx} = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \frac{dP_n(-1)}{dx} = -(-1)^n \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{A.11})$$

B.  $P_n(x)$  を含む定積分

一例として次の定積分を計算する。

$$I = \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx; m \text{ は } 0 \text{ または正の整数}$$

$P_n(x)$  の定義式 (A.1) を用いて右辺を次のように表わす。

$$I = \frac{1}{2^n n!} \int_{-1}^1 x^m \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n dx$$

いま,  $m \geq n$  として, 式 (A.5) の関係に留意して部分積分を  $n$  回繰返せば, 次式を得る。

$$I = \frac{m!}{2^n n! (m-n)!} \int_{-1}^1 x^{m-n} (1-x^2)^n dx$$

右辺の被積分項は,  $m-n$  が奇数のとき奇関数,  $m-n$  が偶数のとき偶関数であるから, 前者のときは, その積分は 0 となる。

$$I = 0; m > n, m-n = \text{奇数}$$

後者のときは,  $[0, 1]$  間の積分の 2 倍として計算できるから, 式 (A.7) を参照して, 次の結果を得る。

$$I = \frac{2^{n+1} m! \left(\frac{m+n}{2}\right)!}{(m+n+1)! \left(\frac{m-n}{2}\right)!}; m \geq n, m-n = \text{偶数}$$

$m < n$  では, 部分積分を  $m$  回繰返して次式を得る。

$$I = \frac{(-1)^m m!}{2^n n!} \int_{-1}^1 \frac{d^{n-m}}{dx^{n-m}} (x^2 - 1)^n dx$$

右辺の積分は, 式 (A.6) を参照すれば, 0 になることが判る。

$$I = 0; m < n$$

結局, 0 とならない  $I$  の値は次式で与えられる。

$$I = \frac{2^{n+1} m! \left(\frac{m+n}{2}\right)!}{(m+n+1)! \left(\frac{m-n}{2}\right)!}; m \geq n, m-n = \text{偶数}$$

ほぼ上の例と同様にして, 本文中に現われる  $P_n(x)$  を含む種々の定積分は計算できる。結果をまとめて以下に列記する。ここで指定された以外の  $(m, n)$  の組み合わせに対しては, 積分値はすべて 0 となる。

$$\circ \int_{-1}^1 x^m P_n(x) dx = \frac{2^{n+1} m! \left(\frac{m+n}{2}\right)!}{(m+n+1)! \left(\frac{m-n}{2}\right)!}; m \geq n, m-n = \text{偶数} \quad (\text{B.1})$$

$$\int_{-1}^1 P_n(x) dx = 2 \quad ; n = 0$$

$$\int_{-1}^1 x P_n(x) dx = \frac{2}{3} \quad ; n = 1$$

$$\int_{-1}^1 x^2 P_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{3} & ; n = 0 \\ \frac{4}{15} & ; n = 2 \end{cases}$$

$$\int_{-1}^1 x^3 P_n(x) dx = \begin{cases} \frac{2}{5} & ; n = 1 \\ \frac{4}{35} & ; n = 3 \end{cases}$$

$$\circ \int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = \frac{2}{2m+1} \quad ; n = m$$

(B.2)

$$\circ \int_{-1}^1 x P_n(x) P_m(x) dx$$

$$= \begin{cases} \frac{2m}{(2m-1)(2m+1)} & ; n = m-1 \\ \frac{2(m+1)}{(2m+1)(2m+3)} & ; n = m+1 \end{cases}$$

(B.3)

$$\circ \int_{-1}^1 x^2 P_n(x) P_m(x) dx$$

$$= \begin{cases} \frac{2(m-1)m}{(2m-3)(2m-1)(2m+1)} & ; n = m-2 \\ \frac{2\{2m(m+1)-1\}}{(2m-1)(2m+1)(2m+3)} & ; n = m \\ \frac{2(m+1)(m+2)}{(2m+1)(2m+3)(2m+5)} & ; n = m+2 \end{cases}$$

(B.4)

$$\circ \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{dP_m(x)}{dx} dx = 2$$

;  $m \geq n+1$ ,  $m-n = \text{奇数}$  (B.5)

$$\circ \int_{-1}^1 x P_n(x) \frac{dP_m(x)}{dx} dx$$

$$= \begin{cases} \frac{2m}{2m+1} & ; n = m \\ 2 & ; m \geq n+2, m-n = \text{偶数} \end{cases}$$
 (B.6)

$$\circ \int_{-1}^1 P_n(x) \frac{d^2 P_m(x)}{dx^2} dx$$

$$= (m-n)(m+n+1) \quad ; m \geq n+2, m-n = \text{偶数}$$
 (B.7)

$$\circ \int_{-1}^1 x P_n(x) \frac{d^2 P_m(x)}{dx^2} dx$$

$$= (m-n)(m+n+1) - 2 \quad ; m \geq n+1, m-n = \text{奇数}$$
 (B.8)

$$\circ \int_{-1}^1 x^2 P_n(x) \frac{d^2 P_m(x)}{dx^2} dx$$

$$= \begin{cases} \frac{2(m-1)m}{2m+1} & ; n = m \\ (m-n)(m+n+1) - 4 & ; m \geq n+2, m-n = \text{偶数} \end{cases}$$
 (B.9)

---

## 航空宇宙技術研究所報告577号

昭和54年6月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)☎182

印刷所 株式会社 三興印刷  
東京都新宿区信濃町12

---

Printed in Japan

This document is provided by JAXA.