

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-582

正方形板の座屈後解析に関する比較研究

三本木 茂夫

1979年8月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 正方形板の座屈後解析に関する比較研究\*

三 本 木 茂 夫\*\*

## A Correlation Study of Methods of Post-Buckling Analysis of Square Plates

By Shigeo SANBONGI

### ABSTRACT

The post-buckling behaviour of flat square plates loaded along two opposite straight edges is analysed using three different methods; Galerkin's method for von Kármán equations; the conventional finite element method; and the finite element-Ritz method. In the Galerkin's method, up to sixteen terms of trigonometric series are used to investigate the convergence characteristics.

The solution to three terms approximation, which is generally used in analytical solutions, is valid under a load which is less than two or three times the primary buckling load. The range of the load depends on the boundary conditions of in-plane displacements at unloaded edges. The solution, to four terms, is extremely improved and agrees with the converged solution in the range of six times the buckling load for an in-plane boundary condition of no distortion. In the higher load range, secondary buckling takes place. Solution to four terms is considerably different from solution to nine terms and sixteen terms, which is regarded as a converged solution.

The solutions by finite element methods are compared with the converged solution by Galerkin's method. Good agreement was obtained in the case of complete Newton-Raphson iteration using total displacements. However, in the case of first order self-correcting algorithms associated with the incremental method, finite element solutions slightly deviated from the converged solution.

### 1. は し が き

薄肉の平板構造は、座屈後もかなり荷重に耐える性質を持つので、梁やシェル構造とは異なり、座屈荷重が必ずしも構造物の耐え得る最高荷重を意味しない。したがって、平板の座屈後の特性に関して、古来多くの研究がなされ、その挙動についての定性的な傾向はほぼ解明されているが、構造設計において必要とされる定量的な解析は支配方程式が非線形であるために、今日でも十分な結果が得られていない。薄板の座屈後挙動を支配する基本的な微分方程式は、von Kármánによって求められているが、最も単純な正方形板の場合でも理論解（解析解）による正確な値は求められていない。

一方、近年の電子計算機の急速な発展により、有限要素法で代表される大規模な数値解析法が著しく進歩し、これまで取扱いが困難であった非線形問題が比較的容易に計算できるようになってきた。しかしながら、これらの数値計算結果と比較する“正解”が得られていないので、計算に使用する要素のタイプやメッシュの大きさによって、どの程度の精度の解が求まるのかが不明である。たとえば、Yang<sup>(1)</sup>は、四辺形要素を用いて、圧縮荷重を受ける正方形板

---

\* 昭和54年6月6日 受付

\*\* 機体第二部

の座屈後変形の解析を行ない、Coan 等<sup>(2)</sup> による解析解の結果と比較しているが、そこで参照した解析解が三項近似による計算結果であることから、両者間の差は、解析解の精度不足ならびに有限要素の分割数の不足の両方に原因しているとしている。

本報告では、これらの点を明らかにする目的で、解析解で用いる級数の項の増加に対する計算結果の収束状態を数値的に調べると共に、二、三の有限要素について非線形解析を行ない、荷重-たわみ曲線を比較した。

## 2. 問題の説明

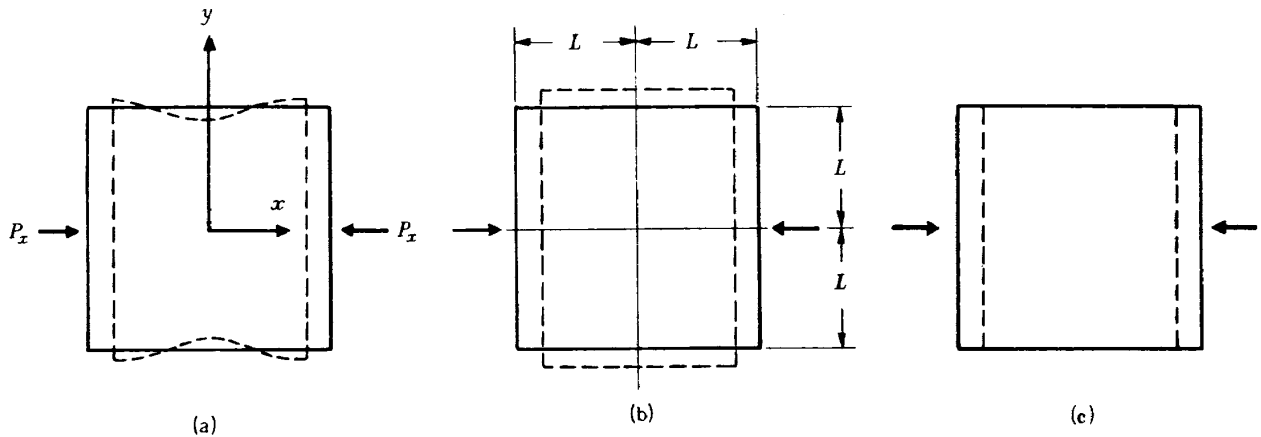


図1 圧縮荷重を受ける周辺単純支持の正方形板

図1に示す正方形板について考える。たわみに関しては四辺とも単純支持とする。側辺 ( $x = \pm L$ ) の辺上には辺に垂直 ( $x$  軸方向) な圧縮荷重  $P_x$  が作用するが、これらの辺は変形後も直線を保つ。他の二辺 ( $y = \pm L$ ) の両内変位境界条件として次の三種類を考える。

Case (a) : 面内変形が自由な場合。

Case (b) : 変形後も縁が直線を保ち、 $y$  方向の変位が可能な場合。

Case (c) :  $y$  方向の変形が拘束されている場合。

補強板構造では、補強材の配置や剛性に応じて、上記 Case (b), (c) の中間的な状態となる。また、Case (a) の境界条件は、実際の構造物に現われることはほとんどないが、平板単独の実験ではこの境界条件が最も簡単なのでよく用いられる。なお、Case (c) の境界条件は、有限要素法による解析だけを扱った。

## 3. Galerkin 法による解析解

Coan<sup>(2)</sup> および Walker<sup>(3)</sup> 等によって基本的な解析手順が示されている。すなわち、圧縮荷重を受ける平板に関する von Kármán の微分方程式

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left\{ \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2 \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left[ \left( \frac{\partial^2 w_0}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w_0}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w_0}{\partial y^2} \right] \right\} \quad \dots (1)$$

$$\frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (w - w_0)}{\partial y^4} = \frac{h}{D} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \quad \dots (2)$$

を用いる。ここで、 $F(x, y)$  は Airy の応力関数、 $w$  は板のたわみ (total)、 $w_0$  は初期たわみ、 $E$  はヤング率、 $D$  は板の曲げ剛性、 $h$  は板厚をそれぞれ表わす。

単純支持の境界条件を満たすたわみ波形として正方形板の場合に次式を用いる。

$$w_0 = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} w_{(0)mn} \cos \left( \frac{m\pi x}{2L} \right) \cos \left( \frac{n\pi y}{2L} \right) \quad \dots (3)$$

$$w = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2L}\right) \quad \dots\dots\dots (4)$$

この波形には対称モードだけが含まれている。

式(3), (4)を式(1)に代入することにより、応力関数  $F$  が次のように表わされる。

$$F = \sum_{p=0,2}^{\infty} \sum_{q=0,2}^{\infty} [b_{pq} - b_{(o)pq}] \cos\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{q\pi y}{2L}\right) + \bar{\sigma} y^2/2 + F_2 \quad \dots\dots\dots (5)$$

ここで  $\bar{\sigma} = P_x/(2Lh)$  .....平均応力

$$b_{pq} = \frac{E}{4(p^2 + q^2)^2} \sum_{n=1}^9 B_n \quad \dots\dots\dots (6)$$

であり、 $B_n$  は  $w_{mn}$  あるいは  $w_{(o)mn}$  の二次関数で表わされ、詳細は文献〔2〕に示されている。また、 $F_2$  は側辺の面内境界条件に関する応力関数であって、前述の Case (b)、すなわち、側辺が変形後も直線を保つ場合は不要となり、Case (a)、すなわち側辺の面内変形が自由な場合に対しては次式で与えられる。

$$F_2 = - \sum_{p=2,4}^{\infty} C_p \cdot \cos\left(\frac{p\pi x}{2L}\right) \left\{ \left[ 1 + \frac{p\pi}{2} \cdot \coth\left(\frac{p\pi}{2}\right) \right] \cosh\left(\frac{p\pi y}{2L}\right) - \frac{p\pi y}{2L} \cdot \sinh\left(\frac{p\pi y}{2L}\right) \right\} \quad \dots\dots\dots (7)$$

ここで

$$\left[ \cosh\left(\frac{p\pi}{2}\right) + \left(\frac{p\pi}{2}\right) / \sinh\left(\frac{p\pi}{2}\right) \right] C_p = \sum_{q=0,2}^{\infty} (-1)^{q/2} [b_{pq} - b_{(o)pq}] \quad \dots\dots\dots (8)$$

これらの結果、式(3)~(8)を式(2)に代入すると、この問題に関する平衡方程式(2)が未定係数  $w_{mn}$  によって表わされる。 $w_{mn}$  を求めるのに Galerkin 法を適用する。すなわち、

$$\int_{-L}^L \int_{-L}^L \left\{ \frac{\partial^4 (w - w_o)}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 (w - w_o)}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 (w - w_o)}{\partial y^4} - \frac{h}{D} \left[ \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right] \right\} \\ \times \cos\left(\frac{m\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2L}\right) dx dy = 0 \quad \dots\dots\dots (9)$$

を各  $m, n$  について計算する。この結果は、 $w_{mn}$  に関する三次の非線形連立方程式となるので、Newton-Raphson 法による数値計算で解を求める。

#### 数値計算手順

$$\left. \begin{aligned} \text{無次元量} \quad & \xi = x/2L, \quad \eta = y/2L \\ & \bar{w} = w/h, \quad \bar{w}_o = w_o/h \\ & \bar{b}_{pq} = b_{pq}/E, \quad \bar{C}_p = C_p/E \\ & \lambda^* = P_x/P_{cr} = 6(1-\nu^2)LP_x/(\pi^2 E h^3) \\ & P_{cr} \text{ は単純支持の正方形板の座屈荷重} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (10)$$

を用いて、式(3)~(8)を式(9)に代入して結果を次のように表わす。

$$\int_{-1/2}^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} (g_1 + g_2 + g_3) \cos(k\pi\xi) \cos(l\pi\eta) d\xi d\eta = 0 \quad \dots\dots\dots (11)$$

ここで  $g_1$  は  $w$  に関する線形項、 $g_2$  は非線形項、 $g_3$  は Case (2) の場合に追加される非線形項である。

$$g_1 = \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} [(\bar{w}_{mn} - \bar{w}_{(o)mn})(m^4 + 2m^2n^2 + n^4)\pi^4 \cdot \cos(m\pi\xi) \cos(n\pi\eta)] \\ - \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} \lambda^* \cdot m^2 \pi^4 \bar{w}_{mn} \cdot \cos(m\pi\xi) \cdot \cos(n\pi\eta) \dots\dots\dots (12)$$

$$g_2 = 12(1-\nu^2) \left[ \sum_{p=0,2}^{\infty} \sum_{q=0,2}^{\infty} (\bar{b}_{pq} - \bar{b}_{(o)pq}) q^2 \pi^2 \cos(p\pi\xi) \cos(q\pi\eta) \right] \times \left[ \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} m^2 \pi^2 \bar{w}_{mn} \cdot \cos(m\pi\xi) \cos(n\pi\eta) \right] + 12(1-\nu^2) \left[ \sum_{p=0,2}^{\infty} \sum_{q=0,2}^{\infty} (\bar{b}_{pq} - \bar{b}_{(o)pq}) p^2 \pi^2 \cdot \cos(p\pi\xi) \cos(q\pi\eta) \right] \times \left[ \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} n^2 \pi^2 \bar{w}_{mn} \cdot \cos(m\pi\xi) \cdot \cos(n\pi\eta) \right] + 12(1-\nu^2) \left[ \sum_{p=0,2}^{\infty} \sum_{q=0,2}^{\infty} 2(\bar{b}_{pq} - \bar{b}_{(o)pq}) p q \pi^2 \cdot \sin(p\pi\xi) \sin(q\pi\eta) \right] \times \left[ \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} m n \pi^2 \cdot \bar{w}_{mn} \cdot \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) \right] \dots\dots\dots (13)$$

$$g_3 = 12(1-\nu^2) \times \left\{ \sum_{p=2,4}^{\infty} \bar{C}_p \left[ 1 - \frac{p\pi}{2} \coth \left( \frac{p\pi}{2} \right) \right] (p\pi)^2 \cos(p\pi\xi) \cosh(p\pi\eta) + \sum_{p=2,4}^{\infty} \bar{C}_p (p\pi)^3 \eta \cdot \cos(p\pi\xi) \sinh(p\pi\eta) \right\} \times \left[ \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} (m\pi)^2 \cdot \bar{w}_{mn} \cos(m\pi\xi) \cos(n\pi\eta) \right] + 12(1-\nu^2) \times \left\{ \sum_{p=2,4}^{\infty} \bar{C}_p \left[ 1 + \frac{p\pi}{2} \coth \left( \frac{p\pi}{2} \right) \right] (p\pi)^2 \cos(p\pi\xi) \cosh(p\pi\eta) - \sum_{p=2,4}^{\infty} \bar{C}_p (p\pi)^3 \eta \cdot \cos(p\pi\xi) \sinh(p\pi\eta) \right\} \times \left[ \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} (n\pi)^2 \cdot \bar{w}_{mn} \cdot \cos(m\pi\xi) \cos(n\pi\eta) \right] + 12(1-\nu^2) \times \left\{ \sum_{p=2,4}^{\infty} 2\bar{C}_p \left[ -1 + \frac{p\pi}{2} \cosh \left( \frac{p\pi}{2} \right) \right] (p\pi)^2 \sin(p\pi\xi) \sinh(p\pi\eta) - \sum_{p=2,4}^{\infty} 2\bar{C}_p (p\pi)^3 \eta \cdot \sin(p\pi\xi) \cosh(p\pi\eta) \right\} \times \left[ \sum_{m=1,3}^{\infty} \sum_{n=1,3}^{\infty} m n \pi^2 \cdot \bar{w}_{mn} \sin(m\pi\xi) \sin(n\pi\eta) \right] \dots\dots\dots (14)$$

$m, n$  の最大値を共に  $M$  とし,

$\bar{w}_{mn}$  を  $\bar{w}_{11}, \bar{w}_{13}, \dots, \bar{w}_{1M}, \bar{w}_{31}, \bar{w}_{33}, \dots, \bar{w}_{3M}, \dots, \bar{w}_{M1}, \dots, \bar{w}_{MM}$  の順序に配列して, 各項を新たに  $\bar{w}_i$  で表わすと, 未知数  $w_i$  の数  $N$  は  $(M+1)^2/4$  となる。  $\bar{b}_{pq}$  および  $\bar{C}_p$  は  $\bar{w}_{mn}$  の二次式なので, これも  $\bar{w}_i$  の順序に整理する。

$$\begin{aligned}\bar{b}_{pq} &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N b_{ij} \bar{w}_i \bar{w}_j \\ \bar{C}_p &= \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N C_{ij} \bar{w}_i \bar{w}_j \dots\dots\dots (15)\end{aligned}$$

$b_{ij}$  および  $C_{ij}$  をマトリックスの形で初めて数値計算しておく。また、式(11)~(14)の計算では、

$$\begin{aligned}&\int_{-1/2}^{1/2} \cos(p\pi\xi) \cos(m\pi\xi) \cos(k\pi\xi) d\xi \quad \text{あるいは} \\ &\int_{-1/2}^{1/2} \sinh(p\pi\eta) \sin(n\pi\eta) \cos(l\pi\eta) d\eta \quad \text{などの積分が必要となるので、これも前もって計算し、マトリックス}\end{aligned}$$

スの形で記憶しておく。

式(11)の  $k, l$  を  $\bar{w}_{mn}$  の場合と同様に、11, 13, 15, ... の順序にとって計算を行なうと、一般に  $i$  番目の方程式が次のように表わされる。

$$f_i = \sum_{r=1}^N \sum_{s=r}^N \sum_{t=s}^N A_{irst} \bar{w}_r \bar{w}_s \bar{w}_t + B_i \bar{w}_i + C_i = 0 \quad \dots\dots\dots (16)$$

$A_{irst}$  は定数であり、 $B_i$  は  $w_{(0)}, \lambda^*, \nu$  の関数、 $C_i$  は  $w_{(0)}, \nu$  の関数である。未知数  $N$  の増大と共にこれらの係数の数は急激に増大する。 $N=4$  の場合の係数を付録 I に示す。 $N=3$  の場合は文献〔3〕に示されているがミスプリントがある。

Newton-Raphson 法では式(16)の  $\bar{w}$  に関する微係数

$k_{ij} = \partial f_i / \partial \bar{w}_j$  が必要なので、これもプログラムの中で自動的に求めるようにした。方程式の計算では、 $\lambda^*$  を適当な増分間隔で与え、各増分間で解が収束するまで反復計算を行なった。すなわち

$$\{\bar{w}_{(n+1)}\} = \{\bar{w}_{(n)}\} - [k_{(n)}]^{-1} \{f_{(n)}\} \quad \dots\dots\dots (17)$$

収束判定は次式によって行なった。

$$[(\sqrt{\sum \bar{w}_i^2})_{n+1} - (\sqrt{\sum \bar{w}_i^2})_n] / (\sqrt{\sum \bar{w}_i^2})_n \leq 0.0001 \quad \dots\dots\dots (18)$$

#### 4. 固定座標表示の有限要素解析

##### 4.1 解析法の概要<sup>(4)</sup>

離散化された外力(節点力)を  $\{P\}$ 、離散化された変位(節点変位)を  $\{\delta\}$ 、弾性体内の応力を  $\{\sigma\}$ 、ひずみを  $\{\epsilon\}$ 、仮想節点変位を  $\{\delta^*\}$ 、これにともなうひずみを  $\{\epsilon^*\}$  で表わすと、物体力が存在しない場合の仮想仕事は次式で与えられる。

$$\int \{\sigma\}^T \{\epsilon^*\} dV - \{P\}^T \{\delta^*\} = 0 \quad \dots\dots\dots (19)$$

上式に

$$\{\sigma\} = [D] \{\epsilon\}, \quad [D] \text{ は弾性応力-ひずみマトリックス} \quad \dots\dots\dots (20)$$

$$\{\epsilon^*\} = [\partial \epsilon / \partial \delta] \{\delta^*\} \quad \dots\dots\dots (21)$$

の関係を代入すると

$$\int \{\epsilon\}^T [D] [\partial \epsilon / \partial \delta] \{\delta^*\} dV - \{P\}^T \{\delta^*\} = 0 \quad \dots\dots\dots (22)$$

となり、平衡方程式として次式が得られる。

$$\int \{\partial \epsilon / \partial \delta\}^T \{D\} \{\epsilon\} dV - \{P\} = 0 \quad \dots\dots\dots (23)$$

上式を Newton-Raphson 法などで解く際に必要な接線剛性マトリックス  $[K]$  は、この式を  $\delta$  で微分することにより次のように求められる。剛性マトリックスの各係数を  $K_{ij}$  で表わすと

$$K_{ij} = K_{ij}^L + K_{ij}^N \quad \dots\dots\dots (24)$$

$$K_{ij}^L = \int \left\{ \frac{\partial \epsilon^L}{\partial \delta_i} \right\}^T \{D\} \left\{ \frac{\partial \epsilon^L}{\partial \delta_j} \right\} dV \quad \dots\dots\dots (25)$$

$$K_{ij}^N = \int \left( \left\{ \frac{\partial \epsilon^L}{\partial \delta_i} \right\}^T \{D\} \left\{ \frac{\partial \epsilon^N}{\partial \delta_i} \right\} + \left\{ \frac{\partial \epsilon^N}{\partial \delta_i} \right\}^T \{D\} \left\{ \frac{\partial}{\partial \delta_j} (\epsilon^L + \epsilon^N) \right\} + \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon^N}{\partial \delta_i \partial \delta_j} \right\}^T \{D\} \{\epsilon^L + \epsilon^N\} \right) dV \quad \dots\dots\dots (26)$$

ここで

$K_{ij}^L$  = 線形の剛性マトリックス成分

$K_{ij}^N$  = 非線形の剛性マトリックス成分

$\{\epsilon^L\}$  = 線形ひずみ成分

$\{\epsilon^N\}$  = 非線形ひずみ成分

となる。

平板に対する、ひずみと変位の関係式は、面内変位を  $u, v$ 、変形によって生じるたわみを  $w$ 、初期たわみを  $w_0$  とすれば次のように表わされる。

$$\{\epsilon^L\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^L \\ \epsilon_y^L \\ \gamma_{xy}^L \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial x} - Z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \cdot \frac{\partial w_0}{\partial y} - Z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w_0}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w_0}{\partial x} - 2Z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (27)$$

$$\{\epsilon^N\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^N \\ \epsilon_y^N \\ \gamma_{xy}^N \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \right) \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (28)$$

変位関数による表示

要素の変位  $u, v, w$  を変位関数  $\{N\}$  と節点変位  $\{\delta\}$  とで表示すると

$$\begin{aligned} u &= \{N_u\}^T \{\delta_u\} \\ v &= \{N_v\}^T \{\delta_v\} \quad \dots\dots\dots (29) \\ w &= \{N_w\}^T \{\delta_w\} \end{aligned}$$

これを用いて式(27)、(28)のひずみを表示すると次のようになる。

$$\{\varepsilon^L\} = [B^L]\{\delta\} + [B^Z]\{\delta_w\} \quad \dots\dots\dots (30)$$

ここで  $\{\delta\} = \{\delta_u, \delta_v, \delta_w\}$

$$[B^L] = \begin{bmatrix} \{\partial N_u / \partial x\} & 0 & \{\delta_{w0}\}^T [C_{xx}] \\ 0 & \{\partial N_v / \partial y\} & \{\delta_{w0}\}^T [C_{yy}] \\ \{\partial N_u / \partial y\} & \{\partial N_v / \partial x\} & \{\delta_{w0}\}^T [C_{xy}] \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (31)$$

$\{\delta_{w0}\}$  は初期たわみ  $w_0$  に対応する節点変位

$$\begin{aligned} [C_{xx}] &= \{\partial N_w / \partial x\} \{\partial N_w / \partial x\}^T \\ [C_{yy}] &= \{\partial N_w / \partial y\} \{\partial N_w / \partial y\}^T \\ [C_{xy}] &= \{\partial N_w / \partial x\} \{\partial N_w / \partial y\}^T + \{\partial N_w / \partial y\} \{\partial N_w / \partial x\}^T \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (32)$$

$$[B^Z] = -Z \begin{bmatrix} \{\partial^2 N_w / \partial x^2\} \\ \{\partial^2 N_w / \partial y^2\} \\ 2\{\partial^2 N_w / \partial x \partial y\} \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (33)$$

非線形ひずみは

$$\{\varepsilon^N\} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} \{\delta_w\}^T [C_{xx}] \{\delta_w\} \\ \{\delta_w\}^T [C_{yy}] \{\delta_w\} \\ \{\delta_w\}^T [C_{xy}] \{\delta_w\} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (34)$$

剛性マトリックス

$[K] = [K^L] + [K^N]$  とすれば

$$\begin{aligned} [K^L] &= h \cdot \int [B^L]^T [D] [B^L] dx dy \quad \dots\dots\dots \delta_u, \delta_v, \delta_w \text{ に対応する} \\ &+ \frac{h^3}{12} \int [B^Z]^T [D] [B^Z] dx dy \quad \dots\dots\dots \delta_w \text{ だけに対応する} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (35)$$

ここで  $h$  は板厚を表わす。

$$\begin{aligned} [K^N] &= h \cdot \int [B^L]^T [D] [B^N] dx dy \quad \dots\dots\dots \delta_u, \delta_v, \delta_w \text{ 行と } \delta_w \text{ 列に対応する} \\ &+ h \cdot \int [B^N]^T [D] [B^L] dx dy \quad \dots\dots\dots \delta_w \text{ 行と } \delta_u, \delta_v, \delta_w \text{ 列に対応する} \\ &+ h \cdot \int [B^N]^T [D] [B^N] dx dy \quad \dots\dots\dots \delta_w \text{ だけに対応する} \\ &+ h \cdot \int (\bar{\sigma}_x [C_{xx}] + \bar{\sigma}_y [C_{yy}] + \bar{\tau}_{xy} [C_{xy}]) dx dy \quad \dots\dots\dots \delta_w \text{ だけに対応する} \end{aligned} \quad \dots\dots\dots (36)$$

ここで

$$[B^N] = \begin{bmatrix} \{\delta_w\}^T [C_{xx}] \\ \{\delta_w\}^T [C_{yy}] \\ \{\delta_w\}^T [C_{xy}] \end{bmatrix} \quad \dots\dots\dots (37)$$

$\bar{\sigma}_x$  などは板の断面内の平均応力（膜応力）を表わし、次式で与えられる。



$$\{\bar{\sigma}\} = \begin{Bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{Bmatrix} = [D]([B^L]\{\delta\} + \{\epsilon^N\}) \quad \dots\dots\dots (38)$$

### 平衡方程式

Newton-Raphson 法や荷重修正増分法で非線形方程式を計算する際、式(38)は一般に満足されず、零にはならない。この値を不平衡力として  $\{f\}$  で表わす。

$$\begin{aligned} \{f\} &= [K^L]\{\delta\} \quad \dots\dots\dots \delta_u, \delta_v, \delta_w \text{ に対応する} \\ &+ h \int [B^N]^T \{\bar{\sigma}\} dx dy \quad \dots\dots\dots \delta_w \text{ だけに対応する} \\ &- \{P\} \quad \dots\dots\dots (39) \end{aligned}$$

平衡方程式の解法として、有限要素法では荷重修正増分法を一般に使用するが、今回は Newton-Raphson 法による計算も行ない、両者の結果を比較した。

### Newton-Raphson 法

式(38), (39)の剛性マトリックス  $[K^L]$ ,  $[K^N]$  および式(39)の不平衡力  $\{f\}$  が構造全体について組み立てられたものとして

$$\{\delta\}_{n+1} = \{\delta\}_n - ([K^L] + [K^N])_n^{-1} \{f\}_n \quad \dots\dots\dots (40)$$

の反復計算を行なう。荷重-変位曲線を求めるためには、後述の増分法の場合と同様に、荷重を適当なきざみで与え、各荷重ステップにおいて、希望する精度の解が求まるまで式(40)の反復計算を行なう。計算精度の判定は前と同様に

$$[(\sqrt{\sum \delta_i^2})_{n+1} - (\sqrt{\sum \delta_i^2})_n] / (\sqrt{\sum \delta_i^2})_n \leq 0.0001$$

とした。

### 荷重修正増分法

Newton-Raphson 法の各荷重ステップの反復を 1 回で済ませる方法で、当然のことながら解の精度は若干落ちるが、増分理論に基づく弾塑性問題や、移動座標表示の大変形解析のように、最初から平衡方程式が増分形で表示されている場合には、Newton-Raphson 法を厳密に適用することができないので、もっぱら、この荷重修正増分法が使用されている。

荷重増分を  $\{\Delta P\}$ 、変位増分を  $\{\Delta \delta\}$ 、および式(39)に相当する不平衡力  $\{f\}$  として

$$([K^L] + [K^N])_n \{\Delta \delta\} = \{\Delta P\} - \{f\}_n \quad \dots\dots\dots (41)$$

によって、右辺の荷重(前ステップの不平衡力  $\{f\}_n$  で修正された荷重増分)に対応する  $\{\Delta \delta\}$  を計算する。

$$\left. \begin{aligned} \text{ひずみ増分} \quad \{\Delta \epsilon\} &= [\partial \epsilon / \partial \delta] \cdot \{\Delta \delta\} \\ \text{応力増分} \quad \{\Delta \sigma\} &= [D] \{\Delta \epsilon\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (42)$$

を計算して前ステップの値に加える

$$\left. \begin{aligned} \{\epsilon\}_{n+1} &= \{\epsilon\}_n + \{\Delta \epsilon\} \\ \{\sigma\}_{n+1} &= \{\sigma\}_n + \{\Delta \sigma\} \\ \{\delta\}_{n+1} &= \{\delta\}_n + \{\Delta \delta\} \\ \{P\}_{n+1} &= \{P\}_n + \{\Delta P\} \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (43)$$

これらの累積した値を次のステップの初期値として順次計算を続行する。

不平衡力  $\{f\}$  が大きい場合に、次のステップでは  $\{\Delta P\}$  を零として式(41)~(43)の計算を繰り返すと、見かけ上は

Newton-Raphson 法と同様となるが、式 39 の  $\{f\}$  に含まれている  $\{\bar{\sigma}\}$  が累積値であるために、 $\{f\}$  が正しい不平衡力とならない。一方、前述の Newton-Raphson 法では  $\{\bar{\sigma}\}$  をその時点における変位によって直接計算するので正確な不平衡力を与える。

## 4.2 解析に使用した要素

### (1) 長方形要素 (RECT)<sup>(5)</sup>

要素の形状寸法等を図 2 に示す。

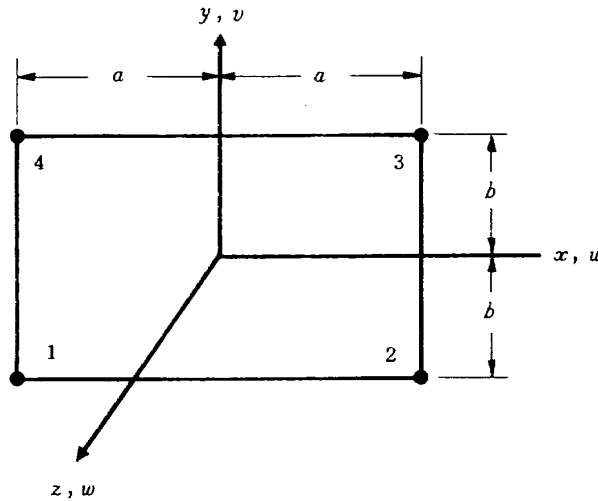


図 2 長方形要素 (RECT)

変位関数:  $\xi = x/a$ ,  $\eta = y/b$  を用いて式 29 の形で表示すると

$$\{N_u\}^T = \frac{1}{4} \left\{ (1-\xi)(1-\eta), (1+\xi)(1-\eta), (1+\xi)(1+\eta), (1-\xi)(1+\eta), \right. \\ \left. 4(1-\xi^2), 4(1-\eta^2) \right\}^T \quad \dots\dots\dots (44)$$

$$\{\delta_u\} = \{u_1, u_2, u_3, u_4, \alpha_1, \alpha_2\} \quad \dots\dots\dots (45)$$

$$\{N_v\}^T = \{N_u\}^T \quad \dots\dots\dots (46)$$

$$\{\delta_v\} = \{v_1, v_2, v_3, v_4, \alpha_3, \alpha_4\} \quad \dots\dots\dots (47)$$

$$\{N_w\}^T = \{H_{01}(\xi) \cdot H_{01}(\eta), H_{02}(\xi) \cdot H_{01}(\eta), H_{02}(\xi) \cdot H_{02}(\eta), H_{01}(\xi) \cdot H_{02}(\eta), \\ H_{11}(\xi) \cdot H_{01}(\eta), H_{12}(\xi) \cdot H_{01}(\eta), H_{12}(\xi) \cdot H_{02}(\eta), H_{11}(\xi) \cdot H_{02}(\eta), \\ H_{01}(\xi) \cdot H_{11}(\eta), H_{02}(\xi) \cdot H_{11}(\eta), H_{02}(\xi) \cdot H_{12}(\eta), H_{01}(\xi) \cdot H_{12}(\eta), \\ H_{11}(\xi) \cdot H_{11}(\eta), H_{12}(\xi) \cdot H_{11}(\eta), H_{12}(\xi) \cdot H_{12}(\eta), H_{11}(\xi) \cdot H_{12}(\eta) \}^T \quad \dots\dots\dots (48)$$

ここで

$$H_{01}(\xi) = 1 - \frac{3}{4}(1+\xi)^2 + \frac{1}{4}(1+\xi)^3, \quad H_{02}(\xi) = \frac{3}{4}(1+\xi)^2 - \frac{1}{4}(1+\xi)^3 \\ H_{11}(\xi) = \left[ (1+\xi) - (1+\xi)^2 + \frac{1}{4}(1+\xi)^3 \right] a, \quad H_{12}(\xi) = \left[ -\frac{1}{2}(1+\xi)^2 + \frac{1}{4}(1+\xi)^3 \right] b \quad \dots\dots (49)$$

$H_{01}(\eta)$  なども同様であり、上式の  $\xi$  を  $\eta$  に、 $a$  を  $b$  に置きかえる。

$$\{\delta_w\} = \{w_1, w_2, w_3, w_4, w_{x1}, w_{x2}, w_{x3}, w_{x4}, w_{y1}, w_{y2}, w_{y3}, w_{y4}, w_{xy1}, w_{xy2}, w_{xy3}, w_{xy4}\} \quad \dots\dots\dots (50)$$

ここで  $w_{,x} = \partial w / \partial x$ ,  $w_{,xy} = \partial^2 w / \partial x \partial y$  などを表わす。

これらの変位関数は比較的単純なわりに解析精度が良く特にこの  $\{N_w\}^T$  による板の座屈解析は極めて良好な結果を示している。<sup>(6)</sup>

式(44)~(50)を式(30)~(39)に代入して剛性マトリックス等を計算する。積分はすべて Gauss の数値積分で処理した ( $x, y$  方向に各 5 点)。

また、式(44)~(47)の面内変位関数には、未知パラメータの中に節点に関係しないパラメータ  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4$  が含まれているので、要素の剛性マトリックス等を計算した後でこれらの消去を行なう。

すなわち、剛性マトリックスで表わした平衡方程式を並べかえて次のように表わす。

$$\begin{bmatrix} K_{\alpha\alpha} & K_{\alpha\delta} \\ K_{\delta\alpha} & K_{\delta\delta} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta\alpha \\ \Delta\delta^* \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ \Delta P \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} f_\alpha \\ f_\delta \end{Bmatrix} \equiv \begin{Bmatrix} F_\alpha \\ F_\delta \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (51)$$

上式から  $\{\Delta\alpha\}$  を消去すると

$$([K_{\delta\delta}] - [K_{\delta\alpha}] \cdot [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \cdot [K_{\alpha\delta}]) \{\Delta\delta^*\} = \{F_\delta\} - [K_{\delta\alpha}] \cdot [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \cdot \{F_\alpha\} \quad \dots\dots\dots (52)$$

$$\{\Delta\alpha\} = [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \cdot (\{F_\alpha\} - [K_{\alpha\delta}] \{\Delta\delta^*\}) \quad \dots\dots\dots (53)$$

式(52)から、 $\alpha_1 \sim \alpha_4$  を消去した剛性マトリックス  $[K^*]$  および修正荷重増分  $\{\Delta P^*\}$  が次のように求まる

$$\begin{cases} [K^*] = [K_{\delta\delta}] - [K_{\delta\alpha}] \cdot [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \cdot [K_{\alpha\delta}] \\ \{\Delta P^*\} = \{F_\delta\} - [K_{\delta\alpha}] [K_{\alpha\alpha}]^{-1} \{F_\alpha\} \end{cases} \quad \dots\dots\dots (54)$$

これらを用いて組み立てた構造全体の平衡方程式を解いて変位増分を計算した後で、各要素のひずみ増分を式(42)で求める際には、式(53)によって  $\{\Delta\alpha\}$  を計算し、これと  $\{\Delta\delta^*\}$  を組み合わせて  $\{\Delta\delta\}$  を作って使用する。したがって、 $\{\Delta\alpha\}$  を消去するとき求めた  $[K_{\alpha\alpha}]^{-1}$ ,  $[K_{\alpha\delta}]$  などの値を各要素ごとに記憶してとっておく。

## (2) FEM-RITZ 要素<sup>(7)</sup>

これは要素と云うよりも解析法の一つであるが、定式化が有限要素法と同様なのでこの節に含めたものである。この方法は有限要素法と Ritz 法とを混合したものであって、構造全体を平面応力の要素で分割し、各節点変位  $u_i, v_i$  で膜変位を表わすが、たわみ  $w$  に関しては、構造全体を一つの要素と見なして、境界条件を満たす関数で表わす。平面応力要素の変位関数には前述の長方形要素の場合と同じ関数  $\{N_w\}^T$  を用いた。ただし、簡単化のために  $\alpha_1 \sim \alpha_4$  に対応する項は省略した。周辺単純支持の正方形板あるいは長方形板の場合は、境界条件を満たす構造全体に関するたわみ関数として次式を用いる。

対称モードのみの場合： $\frac{1}{4}$ 領域について（図3(a)参照）

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{m=1,3}^M \sum_{n=1,3}^M w_{mn} \cos\left(\frac{m\pi x}{2L_x}\right) \cos\left(\frac{n\pi y}{2L_y}\right) \\ w_o &= w_{(o)11} \cdot \cos\left(\frac{\pi x}{2L_x}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2L_y}\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (55)$$

非対称モードを含む場合：全領域について（図3(b)参照）

$$\left. \begin{aligned} w &= \sum_{m=1,2}^M \sum_{n=1,2}^M w_{mn} \sin\left(\frac{m\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{L_y}\right) \\ w_o &= w_{(o)11} \cdot \sin\left(\frac{\pi x}{L_x}\right) \sin\left(\frac{\pi y}{L_y}\right) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (56)$$

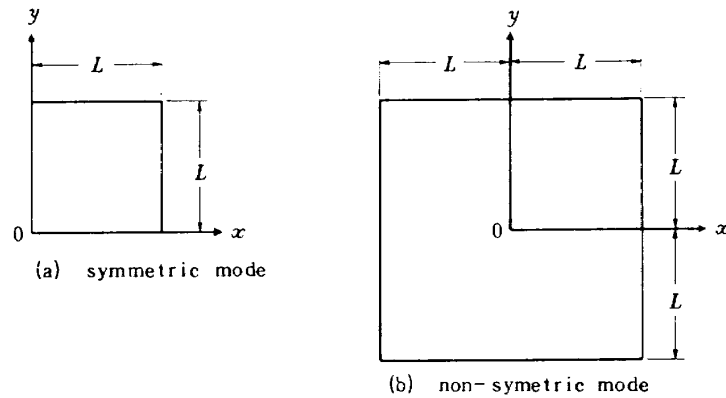


図3 FEM-RITZ要素の解析領域

これらの変位関数を用いて、式(31)~(38)の計算を行なえば、 $u_i, v_i, w_{mn}$ を“節点変位”とした剛性マトリックス等が得られる。

構造全体について組立てた場合の面内変位のグループ  $u_1, u_2, \dots, u_N, v_1, v_2, \dots, v_N$  を  $\{d\}$  で表わし、たわみ  $w_{11}, \dots, w_{MM}$  のグループを  $\{\bar{w}\}$  で表わし、これらに対応する部分マトリックスで全体剛性マトリックスを表示すると次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{dd} & K_{d\bar{w}} \\ K_{d\bar{w}}^T & K_{\bar{w}\bar{w}} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d \\ \bar{w} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} F_d \\ F_{\bar{w}} \end{Bmatrix} \quad \dots\dots\dots (57)$$

ここで、 $\{d\}, \{\bar{w}\}$  は式(51)と同様に増分量の節点変位であり、 $\{F_d\}, \{F_{\bar{w}}\}$  は修正荷重増分である。 $[K_{dd}]$  は線形の剛性マトリックスなので、非線形方程式を解く前に消去し、 $\{\bar{w}\}$  だけを未知数とする方程式に書きなおす。

$$([K_{\bar{w}\bar{w}}] - [K_{d\bar{w}}]^T [K_{dd}]^{-1} [K_{d\bar{w}}]) \{\bar{w}\} = \{F_{\bar{w}}\} - [K_{d\bar{w}}]^T [K_{dd}]^{-1} \{F_d\} \quad \dots\dots\dots (58)$$

#### 計算手順

- (1)  $[K_{dd}]$  を Cholesky 分解する (バンドマトリックス)。
- (2)  $[K_{dd}]^{-1} [K_{d\bar{w}}]$  を計算し、これを  $[X_{d\bar{w}}]$  とおく。
- (3)  $[K_{\bar{w}\bar{w}}] - [K_{d\bar{w}}]^T [X_{d\bar{w}}]$  を求める (式(58)の左辺)。
- (4)  $\{F_{\bar{w}}\} - [X_{d\bar{w}}]^T \{F_d\}$  を求める (式(58)の右辺)。
- (5)  $\{\bar{w}\}$  について解く。
- (6)  $\{d\} = [K_{dd}]^{-1} (\{F_d\} - [K_{d\bar{w}}] \{\bar{w}\})$  を求める。
- (7) ひずみや応力を計算する。

この方法では、ある程度要素分割を細かくしても、 $[K_{dd}]$  が  $u_i v_i$  だけに対応したバンドマトリックスなのでそれほど大きな記憶容量を必要としない、更に、一度 Cholesky 分解しておけば、後の繰り返し計算では単にマトリックス積の演算となるので計算時間も短い。

$\{\bar{w}\}$  の大きさは、どの程度の座屈波形まで含めるかによって異なるが、一般にそれほど大きくならない (今回の計算では 4~25 である)。したがって、 $[K_{d\bar{w}}]$  および  $[K_{\bar{w}\bar{w}}]$  を反復計算の度に作成しても、通常の有限要素法の場合と比べて計算時間はかなり少なくなる。

#### (3) 帯板要素 (STRIP)<sup>(8)(9)</sup>

図4に示すように、全体構造を一定の方向に切断した帯板を要素とするもので、補強板の座屈解析で効果的に適用されているが、これを非線形解析用に拡張したものである。

荷重方向 ( $x$  方向) を帯板の長手方向にとり、この方向に沿ったたわみ関数を三角関数で表わし、帯板の巾方向

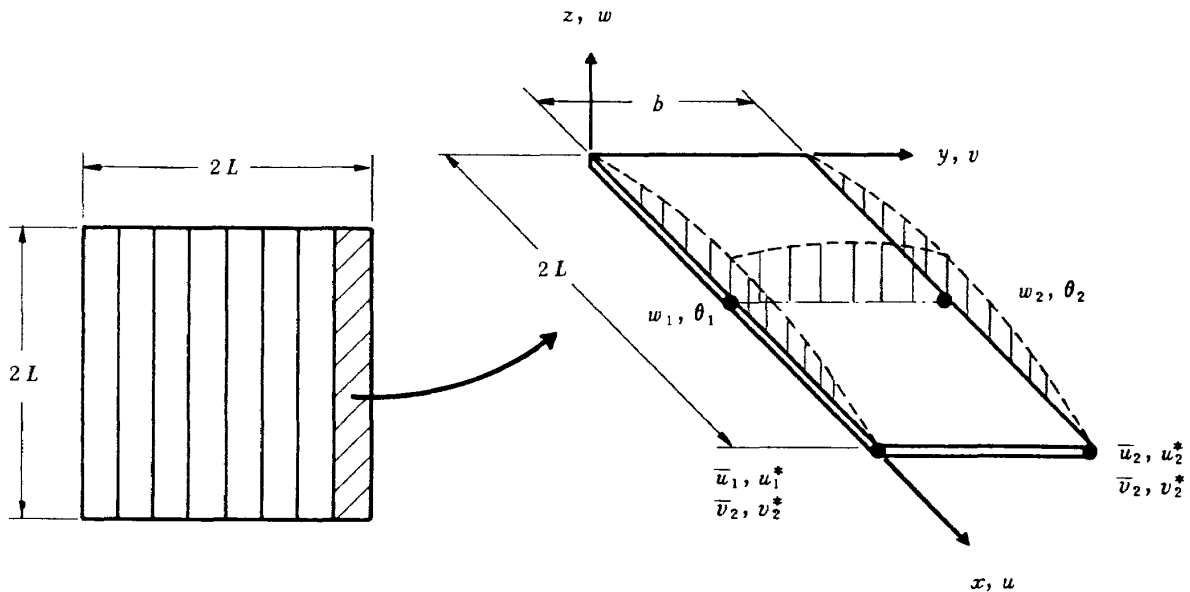


図4 帯板要素 (STRIP)

( $y$  方向) に沿っては三次多項式で表わす。

今の問題では、 $x=0$  および  $x=2L$  において単純支持の条件となっているので、最も単純なたわみ関数として次式を用いた。

$$\{N_w\}^T = \sin(\pi\xi) \{ (1-3\eta^2+2\eta^3), (\eta-2\eta^2+\eta^3)b, (3\eta^2-2\eta^3), (-\eta^2+\eta^3)b \}^T$$

$$\{\delta_w\} = \{w_1, \theta_1, w_2, \theta_2\} \quad \dots\dots\dots (59)$$

ここで  $\xi = x/2L$ ,  $\eta = y/b$

面内変位  $u, v$  に関しては

$$\left. \begin{aligned} u &\approx \int \epsilon_x^N dx = \int \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \approx \sin(2\pi\xi) \\ v &\approx \int \epsilon_y^N dx = \int \frac{1}{2} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dx \approx \sin^2(\pi\xi) \end{aligned} \right\} \quad \dots\dots\dots (60)$$

の関係を考慮して次のように置いた。

$$\{N_u\}^T = \{ (1-\eta)\xi, \eta\xi, (1-\eta)\sin(2\pi\xi), \eta\sin(2\pi\xi) \}^T$$

$$\{\delta_u\} = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, u_1^*, u_2^*\} \quad \dots\dots\dots (61)$$

$$\{N_v\}^T = \{ (1-\eta), \eta, (1-\eta)\sin^2(\pi\xi), \eta\sin^2(\pi\xi) \}^T$$

$$\{\delta_v\} = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, v_1^*, v_2^*\} \quad \dots\dots\dots (62)$$

上式と式(31)~(33)を用いて剛性マトリックス等を計算する。

## 5. 数値計算結果

### 5.1 一次座屈近傍の荷重-変位特性

Coan<sup>(2)</sup>, Walker<sup>(3)</sup>, Yang<sup>(1)</sup>等は  $P/P_{cr}$  が 3~4 程度までについて解析を行なっているので、まず最初に、この荷

重の範囲の計算結果について示す。Galerkin 法による解析解では、初期たわみ  $w_0$  のある場合とない場合の両者について計算を行なったが、有限要素法による解析では  $w_0/h = 1/30$  の場合だけについて計算した。

#### (1) Galerkin 法の結果

図5には正方形板中央の無次元たわみ  $w_c/h$  と無次元荷重  $P/P_{cr}$  の関係を示す。 $P_{cr}$  は周辺単純支持正方形板の圧縮座屈荷重、 $h$  は板厚をそれぞれ表わす。 $N$  は式(15)のところで述べたように、たわみ  $w$  を級数で近似した場合の項数である。 $N$  が4以上の場合は、 $x$  および  $y$  方向共に同じ次数までとってある(たとえば、 $N=4$  では  $w_{11} \cos(\pi\xi) \cos(\pi\eta)$ ,  $w_{13} \cos(\pi\xi) \cos(3\pi\eta)$ ,  $w_{31} \cos(3\pi\xi) \cos(\pi\eta)$ ,  $w_{33} \cos(3\pi\xi) \cos(3\pi\eta)$  の4項)。 $N=3$  の場合は、Coan および Walker の場合と同様に、 $w_{11} \cos(\pi\xi) \cos(\pi\eta)$ ,  $w_{13} \cos(\pi\xi) \cos(3\pi\eta)$ ,  $w_{31} \cos(3\pi\xi) \cos(\pi\eta)$  の三項からなる不完全級数である。図5からわかるように、 $N=3$  と  $N=4$  とでは、わずかに項の違いであるが、ここで示した荷重範囲では、 $N=4$  が  $N=3$  と比較して極めて良好な近似値を与えている。特に、Case (a), すなわち側辺の面内変位が自由な場合に精度の改善が著しい。Coan が研究を行なった当時は電子計算機が今日のように手軽に使用できる状況ではなかったので、連立方程式の解法の関係で三項近似に留めたものと思われる。

図6には、荷重方向の縮み  $u$  を座屈時の縮み  $u_{cr}$  で無次元化した  $u/u_{cr}$  と  $P/P_{cr}$  との関係を示す。縮み量に関しては、たわみと反対に、Case (b), すなわち側辺が直線を保持する場合の方が  $N=3$  に対する  $N=4$  の精度向上が著しい。特に Case (b) については、 $N=4, 9, 16$  に

対する計算結果が、図5の範囲 ( $P/P_c < 4.5$ ) ではほとんど一致している。

なお、図5は55ステップ、図6は65ステップまでのNewton-Raphsonによる計算結果である。各ステップにおいて最高10回までの反復を許し、式(18)の条件を満たしたならば次のステップに進むようにした。各ステップご

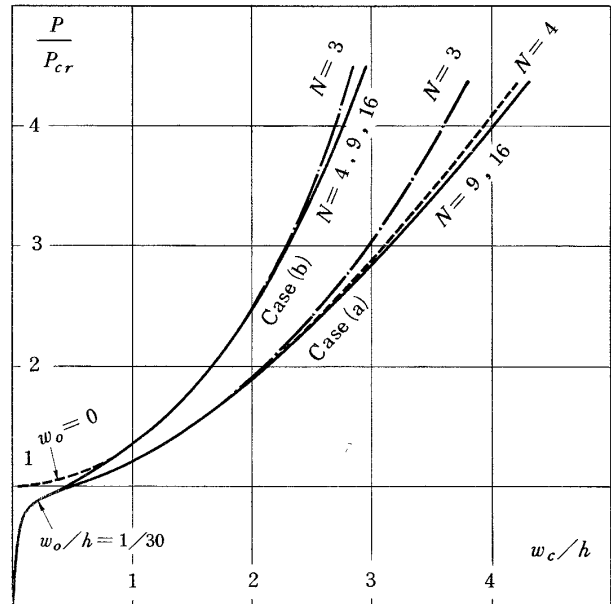


図5 Galerkin法による板の中央のたわみの計算結果

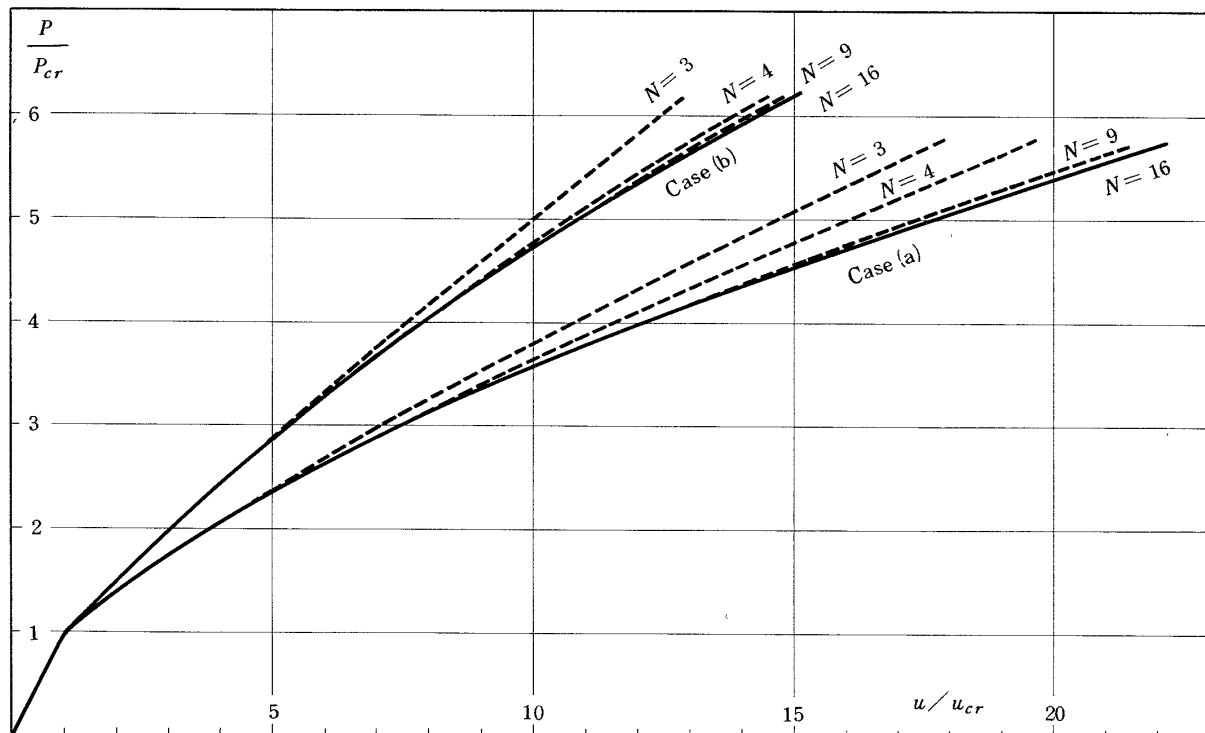


図6 Galerkin法による荷重方向縮み量の計算結果

との反復回数を調べると、平均3回で解が収束しており、荷重-たわみ曲線の変化が急な部分でも4回で収束している。後述の各種有限要素解との比較では  $N=16$  の計算結果を“収束解”として参照する。

## (2) 長方形要素 (RECT) の結果

図7に示すように、正方形板の  $1/4$  領域について、2, 3, 5, 10 の各分割について計算した。対称条件として、 $x$  軸上では  $\partial w / \partial y = 0$ ,  $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ ,  $v = 0$ ,  $y$  軸上では  $\partial w / \partial x = 0$ ,  $\partial^2 w / \partial x \partial y = 0$ ,  $u = 0$  をそれぞれ用いた。

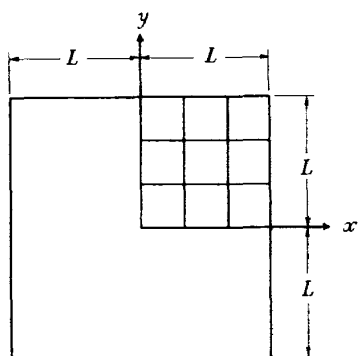


図7 解析領域と要素分割 (3×3 の場合)

図8に正方形板中央のたわみ  $w_c/h$  の計算結果を示す。Case (a)では、5×5 の以上の分割の場合に収束解とほぼ一致しているが、Case (b)では2×2 分割でも同程度の一致が得られている。両者の場合共、10×10 分割の計算結果が収束解に対して一定のずれを示しているのは、

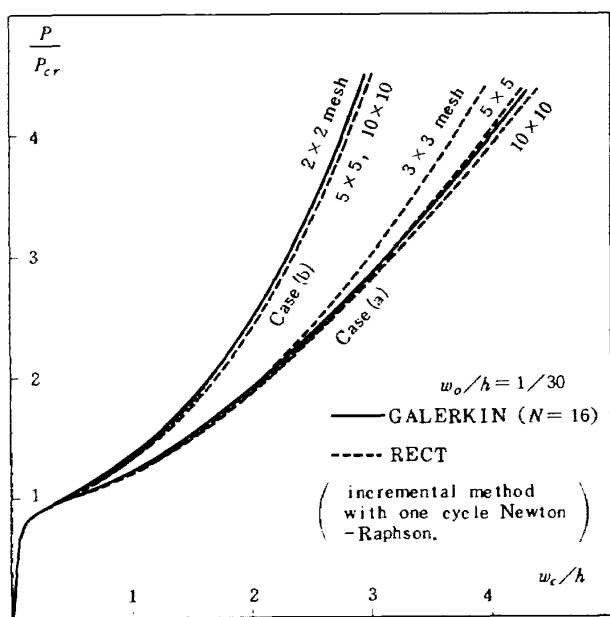


図8 長方形要素 (RECT) による板の中央のたわみの計算結果

この計算が4.1節で述べた荷重修正増分法で行なったことに原因している。この点に関する検討結果を次に述べる。

図9は座屈荷重近傍について、三通りの数値計算法でたわみを求めた結果を示す。図中の丸印は、式(9)の中の  $\{\bar{\sigma}\}$ , すなわち、反復計算の際の初期応力を、その段階までに求められている変位を直接用いて計算した場合であり、収束解と完全に一致している。一方、三角印は、各ステップの応力増分の累積によって計算された  $\{\bar{\sigma}\}$  を用いた場合であり、丸印の場合と同じ回数の反復を各ステップで行なっているにもかかわらず、収束解から離れ

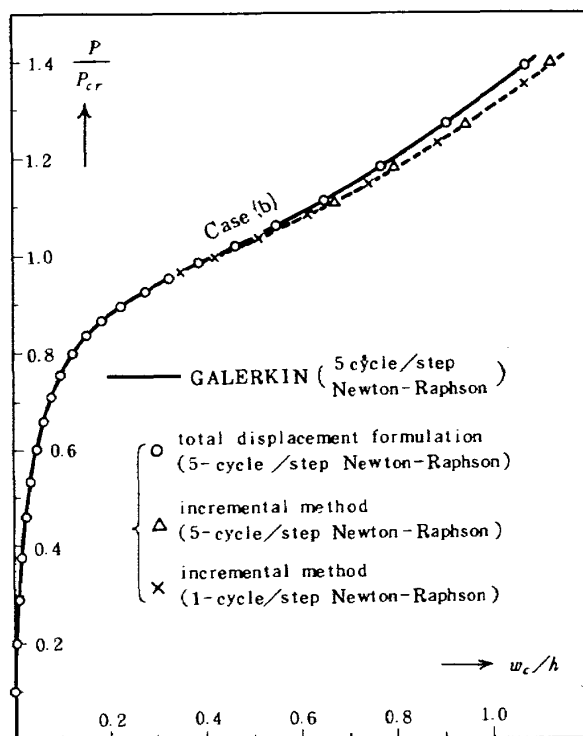


図9 各種反復計算によるたわみの計算結果

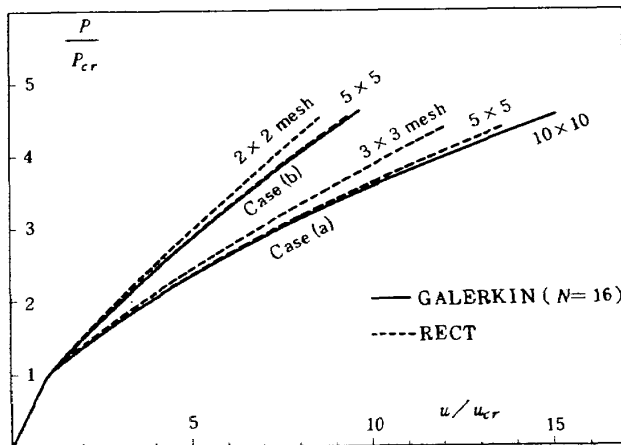


図10 長方形要素 (RECT) による荷重方向の縮みの計算結果

てゆく傾向を示している。また、バツ印は反復を一回で済ませる荷重修正増分法の場合であり、5回反復する三角印の場合とほとんど同じ結果を示している。この原因は、4.1節で述べたように、応力増分の累積結果を用いる方法では、平衡方程式の残差が正確に得られない点にある。したがって、いわゆる増分法で計算する場合は、各ステップで何回も反復することは意味がなく、増分間隔を小さくして一回の反復（荷重修正増分法と同じ）で済ませた方が効果的である。しかしながら、適正な増分間隔の決定は問題の種類にも関係してむづかしい点がある。不平衡力自身が正確に与えられないので、収束解と若干ずれたところに解が収束していても、これを識別することができないからである。この観点から云えば、全体変位で表示した Newton-Raphson 法は、常に正確な不平衡力を与えるので安心して計算できる利点を持つが、構成方程式などが増分形で与えられる問題に対して適用することができない。

図10には荷重方向の縮み量  $u/u_{cr}$  を示す。縮み量に関しては、たわみの場合と異なり、収束解からのずれが表われないで、分割数の増大と共に単調に収束している。

### (3) FEM-RITZ 要素の結果

解析領域および要素分割は図7と同じである。たわみ関数には式(55)の対称モードを使用した。

図11には  $5 \times 5$  分割および  $10 \times 10$  分割で計算した板中央のたわみを示す。ここに示した荷重範囲では、両者の分割数に関する差はほとんどないので一本の曲線で代

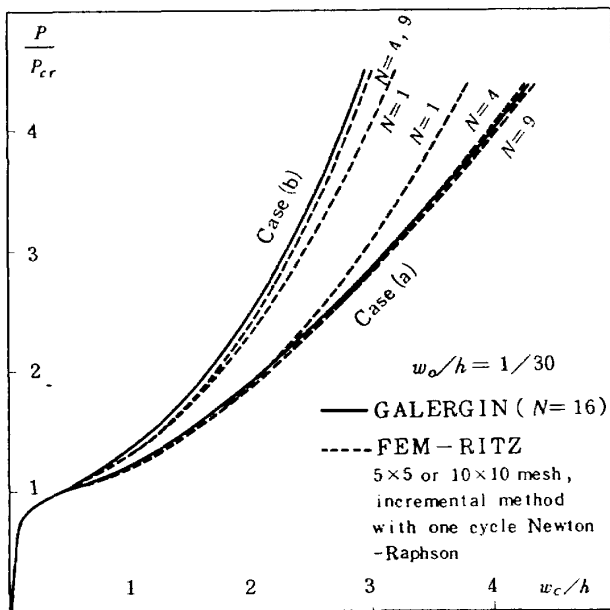


図11 FEM-RITZ 要素による  
板中央のたわみの計算結果  
( $5 \times 5$  および  $10 \times 10$  分割の場合)

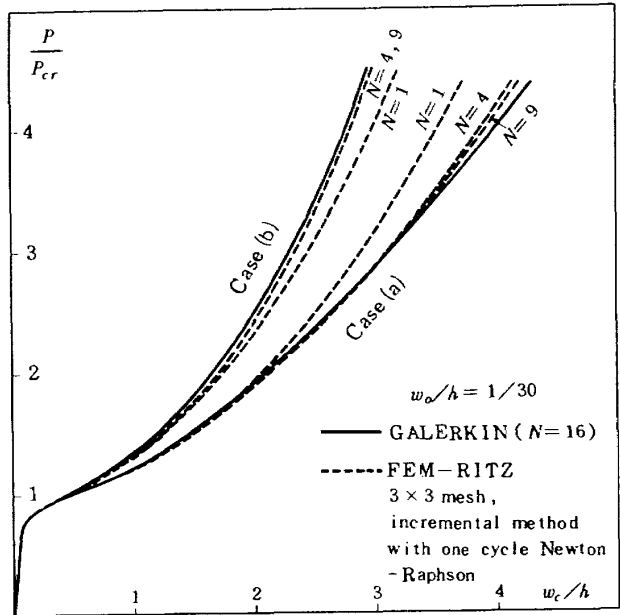


図12 FEM-RITZ 要素による  
板中央のたわみの計算結果  
( $3 \times 3$  分割の場合)

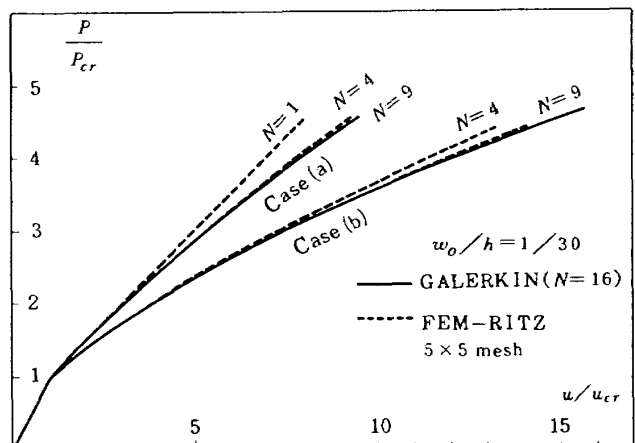


図13 FEM-RITZ 要素による  
荷重方向の縮みの計算結果

表させてある。一方、たわみ関数の項数  $N$  の影響は大きく、Galerkin 法の場合（図5）とはほぼ同様な傾向を表わしている。ただし、Case (b) では  $N$  が小さいほどたわみが過大に計算されている点が、Galerkin 法と反対の傾向を示している。 $N=9$  の計算結果は、長方形要素の結果（図8）とほとんど一致しており、荷重修正増分法に原因した収束解からのずれが生じている。

図12には  $3 \times 3$  分割に対する板中央のたわみの計算結果を示す。細かい分割の場合と比べると、Case (a) では若干の差違が生じているが、全体としてはほぼ同様の傾向を示している。これらの結果から、FEM-RITZ 要素による解析では、たわみ関数を適切に選ぶことができ



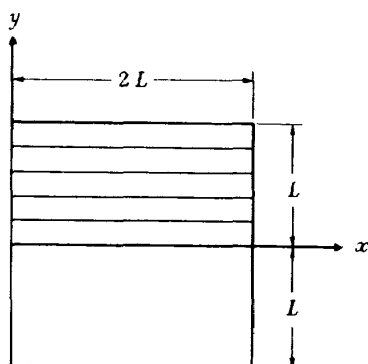


図 14 帯板要素による解析領域と要素分割

れば、要素分割をそれほど細かくしなくとも、比較的良好な近似解が得られそうである。

図13には  $5 \times 5$  分割による荷重方向の縮みの計算結果を示す。全体の傾向は Galerkin 法の結果と同様である。Case (b) の場合、たわみが大きめの値から収束していたが、縮みに関しては Galerkin 法や長方形要素の結果と同様に小さめの値から収束している。この原因については今のところ不明であるが、後述の帯板要素の計算結果でも同様な傾向が表われている。

#### (4) 帯板要素 (STRIP) の結果

図14に解析領域と要素分割図を示す。今回使用した要素は式 (59) に示したように、 $x$  方向の変化を一項の三角関数で表わしたたわみ関数を用いているので、 $y$  方向の分割を細かくしても意味がなく、5 要素に分割した場合だけについて計算した。

板中央のたわみの計算結果を図15に示す。全体の傾向は FEM-RITZ 要素の  $N=1$  の結果 (図11, 12) と良く一致している。この要素による計算結果も、Case (b) の場合は収束解と比べてたわみが過大になっている。

図16には荷重方向の縮みの計算結果を示す。Case (b) の場合は FEM-RITZ 要素による結果と同様に、たわみとは逆に収束解に対して小さめの値となっている。いずれにしても、 $P/P_{cr}$  がある程度以上大きいところでは近似解の精度が落ちる。

#### 5.2 二次座屈までの荷重-変位特性

板が薄い場合の一次座屈応力は一般にかなり低い値となるので、薄板構造では二次座屈まで検討する必要がある、これまでもいくつかの研究がなされている。<sup>(10)(11)</sup>

今回は、解の収束状況を調べるために、Galerkin 法による解析をまず最初に行ない、通常の有限要素法では計算時間が大きくなるので、FEM-RITZ 要素による計算結果とを比較することにした。前に述べたように、荷重修正増分計算法では FEM-RITZ 要素の結果でも、

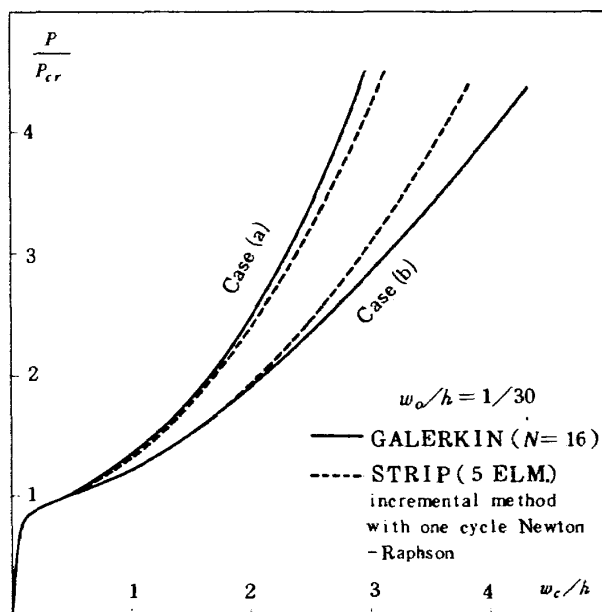


図 15 帯板要素 (STRIP) による板中央のたわみの計算結果

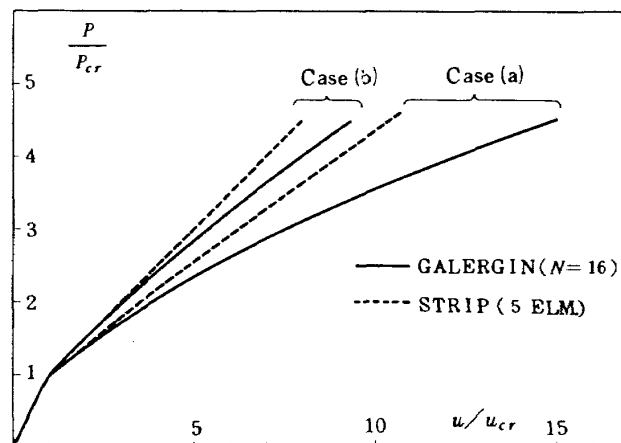


図 16 帯板要素 (STRIP) による荷重方向の縮みの計算結果

収束解に対して一定のずれを生じるので、不平衡力を変位で直接に求める方法を用いた。

図17には正方形板中央のたわみの計算結果を示す。図中の実線および点線は Galerkin 法の結果であって、Case (a) と (b) についてのみ示してある。丸印は FEM-RITZ 要素の結果であって、Case (b), (c) について示してある。Case (a), すなわち側辺の面内変位が自由の場合は、ここに示した荷重の範囲では二次座屈を生じない。

Case (b), すなわち側辺が直線を保持する場合は、二次座屈を生じる。Galerkin 法における  $N=4$  と  $N=9$  の計算結果は、二次座屈の生じる前まではほとんど同じ値を示しているが、その後は大きな差が生じている。

$N=9$  と  $N=16$  に対する結果はほぼ同様であり、 $N=16$  の値は収束値に近いと思われる。

Case (b) に対する FEM-RITZ 要素 ( $10 \times 10$  分割,  $N=9$ ) の結果は、 $N=16$  の Galerkin 法の結果とほとんど一致している。Case (c), すなわち側辺の  $y$  方向面内変位を拘束した場合については、FEM-RITZ 要素の結果だけであるが、これまでの計算例から見て、ほぼ収束解に近い値と思われる。

図18には Case (b) の場合の  $5 \times 5$  分割による計算結果を示す。FEM-RITZ 要素の傾向も Galerkin 法の傾向と同様に、たわみ関数の項数  $N$  の影響が二次座屈では顕著である。

なお、今回の有限要素法の計算では、荷重増分をステップごとに与えて、対応する変位増分を求める計算法を一貫して採用したので、荷重-たわみ曲線の極大値近傍で数値計算が不安定となる。したがって、通常はその時点で計算を打ち切る。図17, 18 は、計算が不安定になる点までをプロットしたものである。一方、Galerkin 法の計算プログラムでは方程式の未知数が少なくてプログラムが比較的単純なので、 $|K|$  が零に近くなるまでは式(10)の非線形方程式を解く際に、各ステップごとに荷重  $\lambda^*$  を与えて、変位  $w_i$  を求め、 $|K| \div 0$  近傍では、 $w_i$  の内の一箇を規定して、その代りに  $\lambda^*$  を未知数に置きか

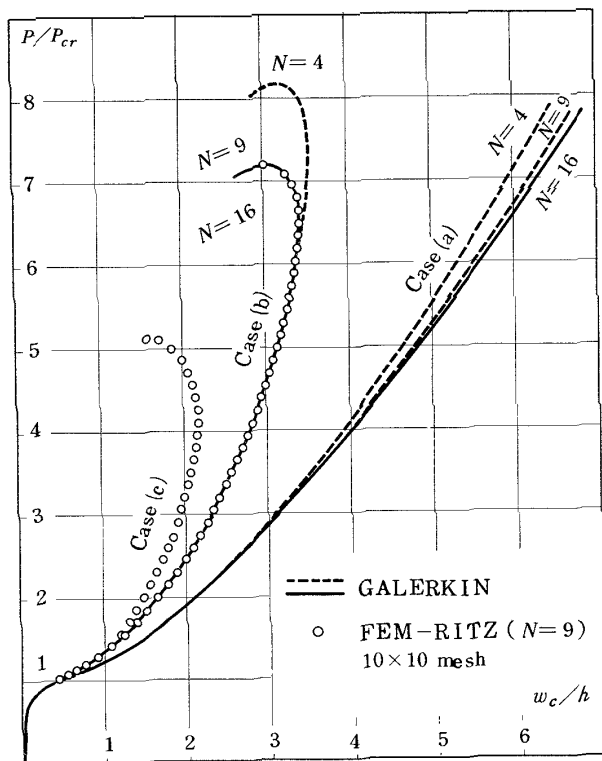


図17 正方形板中央点のたわみの計算結果

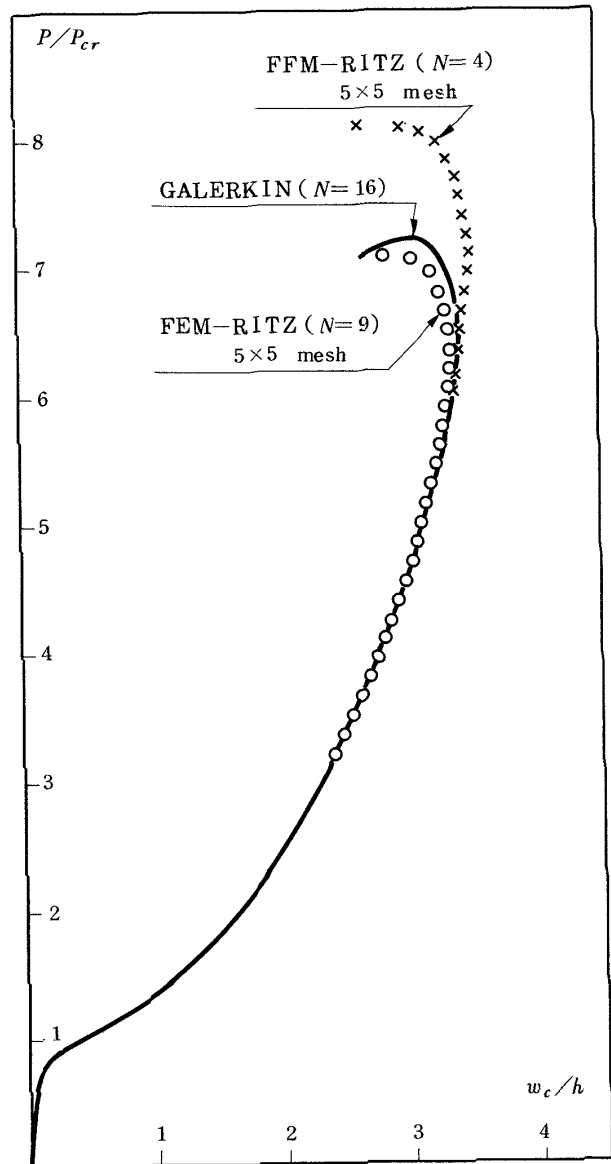


図18 FEM-RITZ 要素の比較

えると云う操作を行ない、極点を通過させるようにした。

これによる計算結果を図19に示す。図中の実線領域は  $|K| > 0$  であり、点線領域は  $|K| < 0$  である。ところで、二次座屈の計算では有限要素解析 (FEM-RITZ 要素) において、不平衡力が正確に計算される変位表示の方法を用いたので、荷重の極大値を超えて荷重増分を与えた場合、その荷重に対応する解が近くにあれば、何回かの反復後にその解へ収束するはずである。これを試みた結果を図19の丸印で示す。この例では数回の反復で  $|K| > 0$  の別な曲線上に解が収束し、以後の荷重増加に対しては、Galerkin 法の計算結果とほとんど一致した値を示している。

図19はあたかも実験における飛び移り現象の再現のごとく見えるが、そうではなく、解析は単に、静力学の平

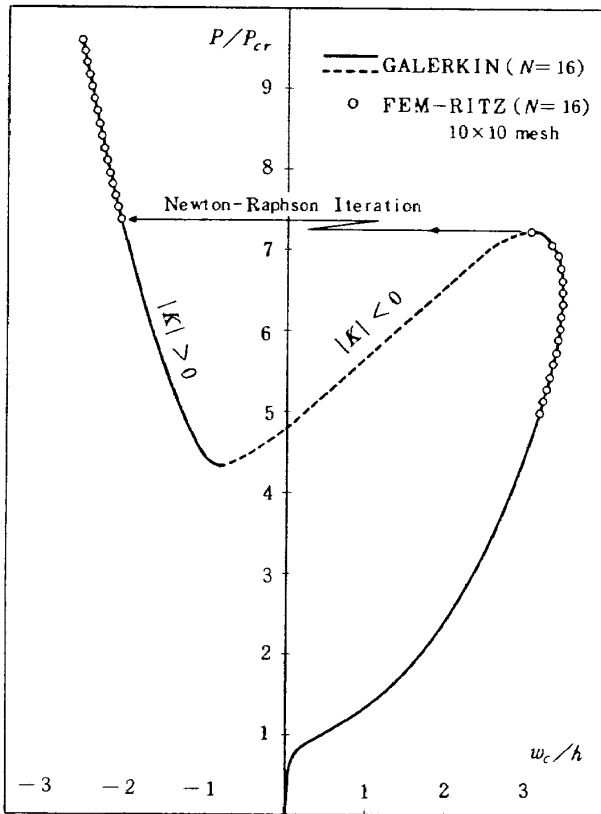


図 19 二次座屈近傍の荷重-たわみ曲線

衡方程式の解の一部を求めただけである。ただし、二次座屈荷重以上の荷重に対する挙動を調べたい場合には、簡便な計算法であると思われる。

図20には荷重の増加に伴うたわみ波形の変化を示す。実線は荷重方向 ( $x$  軸上) のたわみ波形、点線はそれと垂直な方向 ( $y$  軸上) の波形で表わす。

図21には  $y$  軸と平行な断面上の応力  $\sigma_x$  を一次座屈応力  $\sigma_{cr}$  で無次元化したものを示す。FEM-RITZ 要素による  $10 \times 10$  分割の計算結果を要素中心でプロットしたので、板の中央 ( $x = 0$ ) の代わりに  $x/L = 1/20$  , 荷

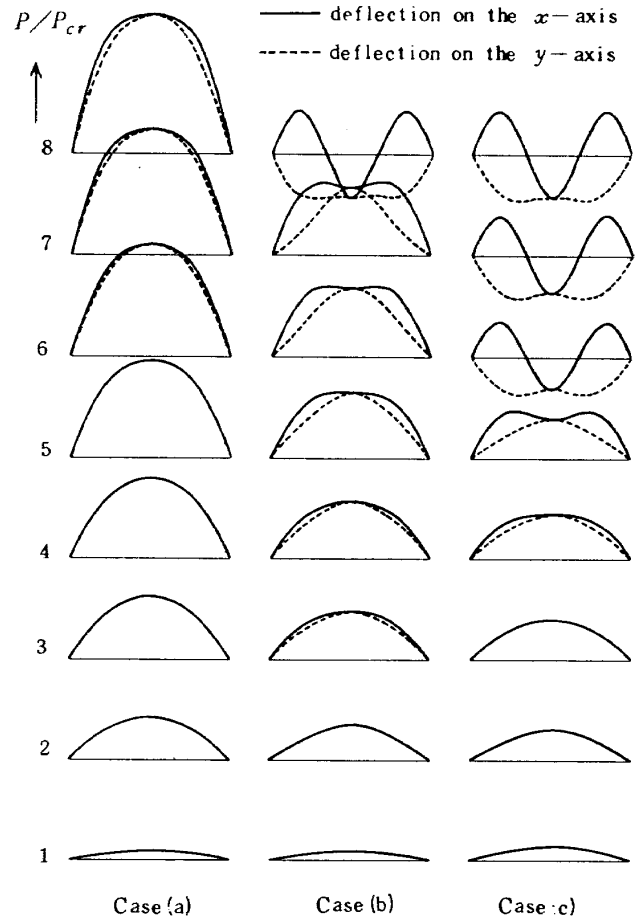


図 20 荷重の増加に伴うたわみ波形の変化

重端 ( $x/L = 1$ ) 代りに  $x/L = 19/20$  の断面上の応力分布をそれぞれ表わしている。

今後、板の幾何学的非線形解析を別な方法で行なう際の計算精度のチェックに使用できるように、荷重-たわみ曲線を描くのに十分な点の数値を付録IIに示す。

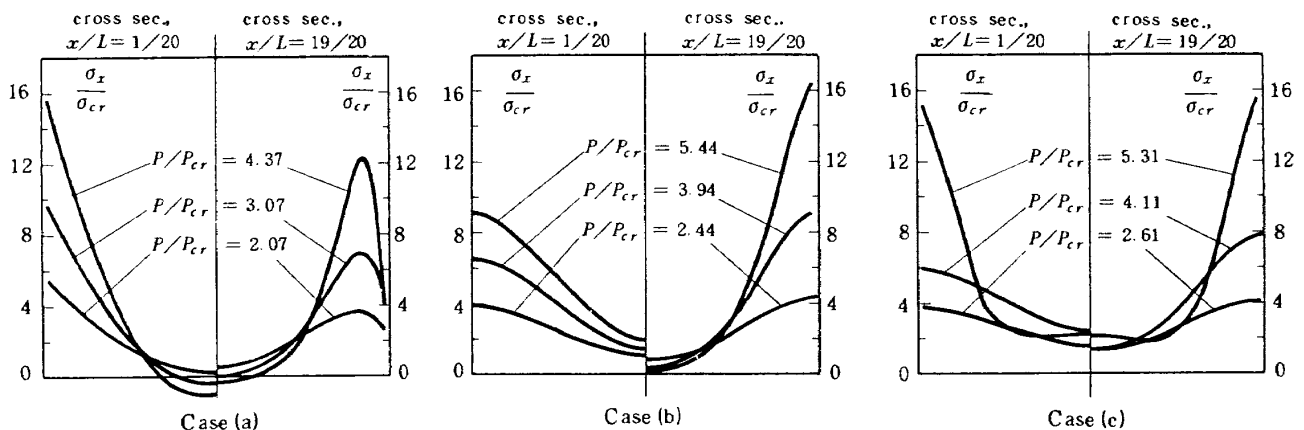


図 21 代表的な応力分布

## 計算時間の比較

解析法が同じであっても、計算プログラムの作り方によって計算時間は大きく変わることもあるので、一概に比較することはむづかしいが、だいたいの傾向はつかめると思われる。解の収束判定基準や解析法の違いによって反復計算の回数や増分ステップの数が異なるので、1サイクル1ステップ当たりの計算時間で表した結果を表1に示す。計算はすべて当研究所の大型電子計算機FACOM 230-75 アレイプロセッサを使用して行なった。有限要素法に類する計算法では、Case (a),(b)などの境界条件による計算時間の差は生じないが、Galerkin法の場合は境界条件の違いによって式の項数が異なるので(式(5)~(7)参照)、計算時間も異なる。

今回の計算結果で特に注目される点を以下に述べる。

Galerkin法とFEM-RITZ法は、同じたわみ関数を用いており、項数 $N$ が同じ場合にはほぼ同様の解を示しているが、計算時間の傾向は大きく異なる。すなわち、 $N \leq 9$ の範囲では両者同程度の時間であるが、 $N=16$ では、両者の差が逆転する。特に、Galerkin法のCase (a)の計算時間の増大が著しい。

表1 計算時間の比較

要素または 解析法	要素分割	項数 $N$	CPUT (sec) cycle $\times$ step
Galerkin 法		3	(a) 0.06
			(b) 0.03
		4	(a) 0.16
			(b) 0.04
		9	(a) 1.45
			(b) 0.51
		16	(a) 18.4
			(b) 5.0
RECT	5 $\times$ 5		7.6
	10 $\times$ 10		39.7
FEM-RITZ	5 $\times$ 5	4	0.60
		9	0.91
		16	1.47
	10 $\times$ 10	4	1.40
		9	2.07
		16	3.29
STRIP	5	1	0.95

表中の(a), (b)はそれぞれCase (a), Case (b)の問題に関するものであることを示す。

一方、通常の有限要素(RECT)による計算時間は、他の場合と比べてかなり大である。計算時間の大部分(80%)は要素剛性マトリックスの計算であり、連立方程式を解くのにかかる時間はわずか10%である。今回は計算精度を重視し、数値積分点として $x, y$ 方向共に各5点(合計25点)を用いたことも計算時間の増加の一因となっている。

## 6. 有限変形理論の適用に関する検討

今回の解析はすべて有限変形理論に基づいて行なったものであるが、従来の結果<sup>(2)(3)</sup>と比べて変形が大きい範囲まで扱っているため、解の妥当性について若干の検討を行なう。

板の有限変位理論では次の仮定が採用されている。

Kirchhoffの仮定、すなわち、変形前の中央面の法線は変形後も直線を保つ。

板のひずみと回転は共に1に比べて十分に小さい。

上記の基本仮定のもとに、具体的には次に示す近似が用いられている。

- (i) 変形前の座標を基準にとり、簡略化したGreenのひずみ(式(28)および(29))を用い、ひずみエネルギー等の積分領域には変形前の寸法形状を用いる。
- (ii) 曲率変化を近似的に $\partial^2 w / \partial x^2$ ,  $\partial^2 w / \partial y^2$ などで表わす。

これらの近似を用いた解析結果が、変形の増大にともなって、どの程度の差異を生じるかを検討するために、次に示すような例題について数値計算を行なった。

## (1) トラス構造の幾何学的非線形解析

これは、前述の(i)の近似の影響を調べるために計算したものであって、問題および結果を図22, 23に示す。図中の実線は真ひずみを用いたEuler表示による計算結果(ただし、断面積は不変)であり、点線は(i)と同様の近似を用いたTotal Lagrangian表示による計算結果である。これらの結果から、回転 $\theta$ が0.1以下では両者の差が1%以下であることがわかる。

したがって、平板の場合の平均的な回転を $w/L$ で代表させると、両者の差異が1%以下になる板厚 $h$ と $L$ との関係は

$$h/L = 0.1 / (w/h) \quad \dots\dots\dots (63)$$

となる。

## (2) 圧縮荷重を受ける梁の大たわみ解析

これは、前述の(ii)の近似の影響を調べるために、計算を行なったものであって、結果を図24に示す。

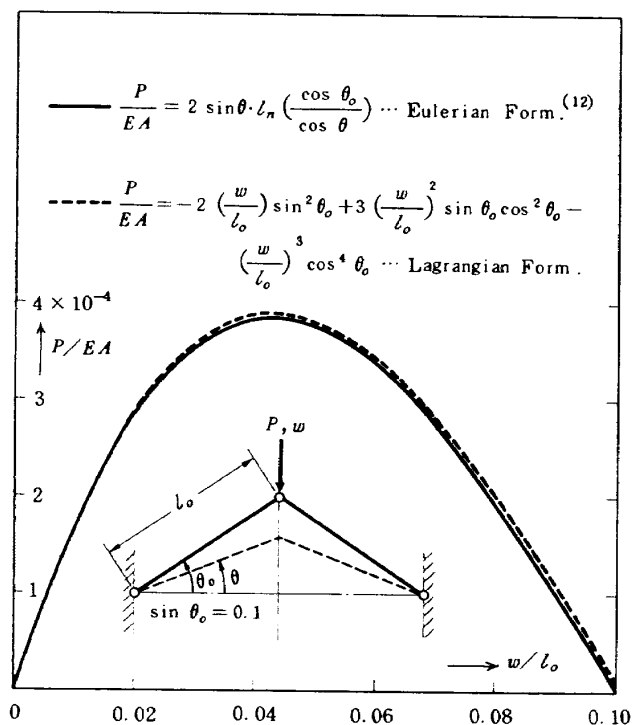


図 22 トラス構造の非線形解析結果

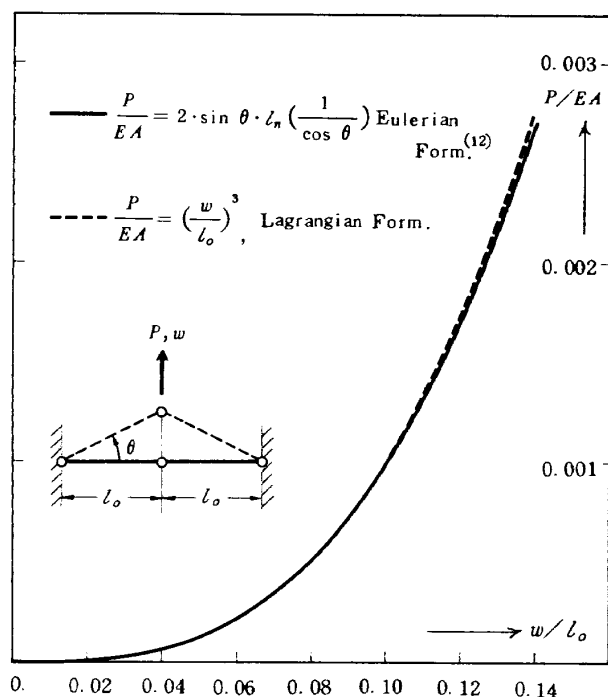


図 23 棒(弦)の非線形解析結果

初期たわみ  $w_0$  のある場合の計算結果の内、実線は移動座標表示(近似的な Euler 表示)の有限要素解析<sup>(13)</sup>によるものであり、点線は(i)および(ii)の近似に基づいて平板の場合と同様な計算を行なったものである。また、 $w_0 = 0$  の場合の解は正確な曲率  $d\theta/ds$  を用いた理論解<sup>(14)</sup>の結果である。(i), (ii)の近似を用いた Total -

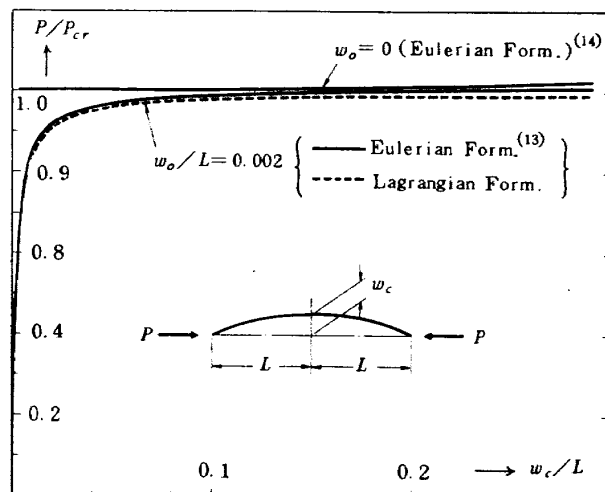


図 24 梁の非線形解析結果

Lagrangian 表示による  $w_0 = 0$  の場合の解は  $P/P_{cr} = 1$  の直線となる。前の例題と同様に、 $w/L \leq 0.1$  の範囲について計算結果を比較すると、初期たわみのある場合および初期たわみのない場合共に、解析法による差は 1% 以下である。

上記(1), (2)の結果から、平板の大たわみ問題に関する有限変形理論による解析結果は、Kirchhoff の仮定の範囲および式 (63) の範囲においては、Euler 表示との差異が 1% 以下であると推測される。

## 7. まとめ

周辺単純支持の正方形板の座屈後解析を、いくつかの解析法によって計算して比較することにより、次のような結果を得た。

(1) 従来、von K'arm'an の微分方程式を Galerkin 法等で計算した解が理論解として参照されているが、たわみ関数として三項の三角級数を用いた計算結果は、 $P/P_{cr} \leq 2$  の範囲(側辺の面内変位が自由な場合)、または  $P/P_{cr} \geq 3$  の範囲(側辺が直線を保つ場合)に対して、良好な近似解を与えるが、もう一項増やした四項の級数による結果は、それぞれ  $P/P_{cr} \leq 4$ 、および  $P/P_{cr} \geq 6$  の範囲で良好な近似解を与える(図 5, 図 17 参照)。

(2) 通常の有限要素法による計算はかなりの時間を必要とするので  $P/P_{cr} < 4.5$  の範囲までしか計算しなかったが、正方形板の  $1/4$  領域を  $5 \times 5$  分割以上にすれば、ほぼ Galerkin 法の収束解に近い結果が得られる。ただし、各応力増分の累積値として求めた応力値を用いて不平衡力を計算する方法では、Newton-Raphson 法の反復を何回行なっても、Galerkin 法の収束解に対して一

定のずれを生じる。

(3) 有限要素法と Ritz 法との混合である FEM-RITZ 要素による計算は、面内変形を表わす要素の分割をそれほど細かくしなくても、適切なたわみ関数をとることによって高精度の解が得られ、計算時間も少ない。たわみ関数の項数が同じ場合には、Galerkin 法の計算結果とほとんど同じである。なお、この方法の計算においても、不平衡力をその時点の変位 (total) から直接計算しないと、前述と同様なずれを生じる。

(4) 帯板要素は FEM-RITZ 要素よりも適用範囲は広いが、今回使用した要素は、長手方向に沿うたわみ関数を一項で近似したものであるため、当然のことながら変形が大きくなると誤差が増大する。

(5) Case (b)における二次座屈荷重は、Galerkin法の  $N=9$ ,  $N=16$  の結果および FEM-RITZ 要素の  $N=9$  ( $10 \times 10$  分割) の結果共にほぼ同じ値であるが、両解析法共に、 $N=4$  の結果はこれらの値と比べてかなり高い値を示す。

#### 参 考 文 献

- 1) T. Y. Yang; Elastic Post-Buckling Prediction of Plates using Discrete Elements, AIAA J., Vol. 9, No. 9, Sept. 1971, pp. 1665 ~ 1666.
- 2) J. M. Coan and U. Ill; Large-Deflection Theory for Plates with Small Initial Curvature Loaded in Edge Compression, Journal of Applied Mechanics, Vol. 18, Transactions, American Society of Mechanical Engineers, Vol. 73, June 1951, pp. 143 ~ 151.
- 3) A. C. Walker; The Post-Buckling Behaviour of Simply-Supported Square Plates, the Aeronautical Quarterly, Vol. 20, Aug. 1969, pp. 203 ~ 222.
- 4) J. A. Stricklin, W. E. Haisler and W. A. Von Rieseman; Formulation, Computation and Solution Procedure for Material and/or Geometric Non-Linear Structural Analysis by the Finite Element Method, SC-CR-72-3102, Sandia Laboratories, Jan. 1972.
- 5) 三本木茂夫, 「補強板の圧縮強度の解析(その2)」, 第20回構造強度に関する講演会講演集, July 1978, pp. 246 ~ 249
- 6) W. G. Carson and R. C. Newton; Plate Buckling Analysis using a Fully Compatible Finite Element, AIAA J., Vol. 7, No. 3, March 1969, pp. 527 ~ 529.
- 7) H. Ohtsubo; A Method of Elastic-Plastic Analysis of Largely Deformed Plate Problems, Advances in Computational Methods in Structural Mechanics and Design, 1972, UAH Press, pp. 439 ~ 456.
- 8) J. S. Przemieniecki; Matrix Analysis of Local Instability in Plates, Stiffened Panels and Columns, International Journal for Numerical Methods in Engineering, Vol. 5, 1972, pp. 209 ~ 216.
- 9) 三本木茂夫, 「補強板の圧縮強度の解析」, 第19回構造強度に関する講演会講演集, July 1977, pp. 190 ~ 193
- 10) 辺吾一, 植村益次, 「一軸圧縮を受ける薄板の二次座屈」, CAS 研究報告, No. 18, March 1975, pp. 23 ~ 30
- 11) 高村東作, 西村融, 「薄板構造物の幾何学的非線形解析について」, 日本航空宇宙学会誌, Vol. 27, No. 302, March 1979, pp. 43 ~ 51
- 12) 山田嘉昭, 「塑性・粘弾性」, コンピュータによる構造工学講座II-2-A, 培風館, May 1972, pp. 104 ~ 106
- 13) 三本木茂夫, 「梁および板の非線形解析」, 日本鋼構造協会第5回大会研究集会マトリックス構造解析法研究発表論文集, June 1971, pp. 186 ~ 193
- 14) S. P. Timoshenko and J. M. Gere; Theory of Elastic Stability, McGraw-Hill, pp. 76 ~ 81.

## 付 録 I

下記に示す 4 項のたわみ関数を用いた Galerkin 法による平衡方程式の係数を表 A-1 および A-2 に示す。

たわみ関数 (板厚で無次元化したもの) :

$$\begin{aligned}\bar{w} &= \bar{w}_{11} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2L}\right) + \bar{w}_{13} \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \\ &\quad \cos\left(\frac{3\pi y}{2L}\right) + \bar{w}_{31} \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2L}\right) + \\ &\quad \bar{w}_{33} \cos\left(\frac{3\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{3\pi y}{2L}\right) \\ \bar{w}_o &= \bar{w}_o \cos\left(\frac{\pi x}{2L}\right) \cos\left(\frac{\pi y}{2L}\right)\end{aligned}$$

平衡方程式 :

$$f_i = \sum_{r=1}^4 \sum_{s=r}^4 \sum_{t=s}^4 A_{irst} \bar{w}_r \bar{w}_s \bar{w}_t + B_i \bar{w}_i + C_i = 0$$

ここで  $\bar{w}_i$  は未知係数  $\bar{w}_{mn}$  を  $\bar{w}_{11}, \bar{w}_{13}, \bar{w}_{31}, \bar{w}_{33}$  の順序に配列したものであり, たとえば  $\bar{w}_2 = \bar{w}_{13}$  となる。表中の (11, 13, 33) などの表示は  $\bar{w}_{11} \bar{w}_{13} \bar{w}_{33}$  の三次項に対応することを示す。

また,  $\nu$  はポアソン比を,  $\lambda^*$  は無次元化した荷重 ( $\lambda^* = P_x/P_{cr}$ ) をそれぞれ表わす (本文の式 (10) を参照)。

表A-1 4項近似による平衡方程式の係数 (Case (a))

EQ. No.	$A_{irst}$											
	11, 11, 11	11, 11, 13	11, 11, 31	11, 11, 33	11, 13, 13	11, 13, 31	11, 13, 33	11, 31, 31	11, 31, 33	11, 33, 33		
1	0.086268	0.29905	0.18750	-0.04183	0.64503	0.73239	0.55426	1.03693	1.26625	0.31246		
2	0.099682	0.64503	0.36619	0.27713	1.00392	2.80381	1.03404	1.72526	5.24314	0.26247		
3	0.06250	0.36619	1.03693	0.63312	1.40190	3.4505	5.2431	0.0	0.0	0.0		
4	-0.013943	0.27713	0.63312	0.31246	0.51702	5.2431	0.52494	0.0	0.0	0.0		
EQ. No.	$A_{irst}$ ( 続き )											
	13, 13, 13	13, 13, 31	13, 13, 33	13, 31, 31	13, 31, 33	13, 33, 33	31, 31, 31	31, 31, 33	31, 33, 33	33, 33, 33		
1	0.33464	1.40191	0.51702	1.72526	5.24313	0.26247	0.0	0.0	0.0	0.0		
2	1.98775	3.13725	6.15222	6.31977	6.11322	12.7980	0.0	0.0	0.0	0.0		
3	1.04575	6.31977	3.05661	0.0	0.0	0.0	5.11174	15.2974	21.3309	0.32954		
4	2.05074	3.05661	12.7980	0.0	0.0	0.0	5.09912	21.3309	0.98861	9.05071		
EQ. No.	$B_i$											
	11	13	31	33	$C_i$							
1	$\frac{1-\lambda^*}{3(1-\nu^2)} - 0.086268 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.099682 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.06250 \cdot \bar{w}_0^2$	$0.013943 \cdot \bar{w}_0^2$	$-\frac{\bar{w}_0}{3(1-\nu^2)}$							
2	$-0.099682 \cdot \bar{w}_0^2$	$\frac{25-\lambda^*}{3(1-\nu^2)} - 0.21392 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.11619 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.22786 \cdot \bar{w}_0^2$	0.							
3	$-0.06250 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.11619 \cdot \bar{w}_0^2$	$\frac{25-9\lambda^*}{3(1-\nu^2)} - 0.56250 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.56250 \cdot \bar{w}_0^2$	0.							
4	$0.013943 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.22786 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.56250 \cdot \bar{w}_0^2$	$\frac{81-9\lambda^*}{3(1-\nu^2)}$	0.							



表 A-2 4 項近似による平衡方程式の係数 (Case (b))

EQ. No.	$A_{irst}$											
	11, 11, 11	11, 11, 13	11, 11, 31	11, 11, 33	11, 13, 13	11, 13, 31	11, 13, 33	11, 31, 31	11, 31, 33	11, 33, 33		
1	0.1250	0.1875	0.1875	0.0	1.065	0.50	1.170	1.065	1.170	0.405		
2	0.0625	1.065	0.250	0.585	0.0	3.25	0.0	1.625	5.625	0.0		
3	0.0625	0.250	1.065	0.585	1.625	3.25	5.625	0.0	0.0	0.0		
4	0.0	0.585	0.585	0.405	0.0	5.625	0.0	0.0	0.0	0.0		
EQ. No.	$A_{irst}$ ( 続き )											
	13, 13, 13	13, 13, 31	13, 13, 33	13, 31, 31	13, 31, 33	13, 33, 33	31, 31, 31	31, 31, 33	31, 33, 33	33, 33, 33		
1	0.0	1.625	0.0	1.625	5.625	0.0	0.0	0.0	0.0	0.0		
2	5.125	0.0	15.1875	7.375	0.0	21.652	0.0	0.0	0.0	0.0		
3	0.	7.375	0.0	0.0	0.0	0.0	5.125	15.1875	21.652	0.0		
4	5.0625	0.0	21.652	0.0	0.0	0.0	5.0625	21.652	0.0	10.125		
EQ. No.	$B_i$											
	11	13	31	33	$C_i$							
1	$\frac{1-\lambda^*}{3(1-\nu^2)} - 0.125 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.0625 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.0625 \cdot \bar{w}_0^2$	0.0	CONST.							
2	$-0.0625 \cdot \bar{w}_0^2$	$\frac{25-\lambda^*}{3(1-\nu^2)} - 0.5625 \cdot \bar{w}_0^2$	0.0	$-0.5625 \cdot \bar{w}_0^2$	$-\frac{\bar{w}_0}{3(1-\nu^2)}$							
3	$-0.0625 \cdot \bar{w}_0^2$	0.0	$\frac{25-\lambda^*}{3(1-\nu^2)} - 0.5625 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.5625 \cdot \bar{w}_0^2$	0.0							
4	0.0	$-0.5625 \cdot \bar{w}_0^2$	$-0.5625 \cdot \bar{w}_0^2$	$\frac{81-9\lambda^*}{3(1-\nu^2)}$	0.0							

## 付 録Ⅱ

16項のたわみ関数を用いた Galerkin 法による計算結果の内、荷重 ( $P/P_{cr}$ ) と板中心のたわみ ( $w_c/h$ ) を表 A-3 および表 A-4 に示す。これらは共に初期たわみ ( $w_0/h=1/30$ ) のある場合である。表 A-5 には初期たわみが零の場合の結果を  $P/P_c < 2$  の範囲について示す。これ以上の荷重範囲では、表 A-3 および表 A-4 の値とほとんど同じである。

表 A-3 板の中心のたわみ (Free Edge,  $w_0/h=1/30$ ,  $\nu=0.3$ )

$P/P_{cr}$	$w_c/h$	$P/P_{cr}$	$w_c/h$
0.1780	0.00721	1.548	1.555
0.3309	0.01646	1.748	1.823
0.4712	0.02961	2.007	2.132
0.5922	0.04813	2.338	2.488
0.6916	0.07388	2.736	2.882
0.7708	0.1092	3.136	3.253
0.8332	0.1570	3.536	3.609
0.8834	0.2199	3.936	3.954
0.9259	0.2996	4.336	4.289
0.9656	0.3959	4.736	4.615
1.007	0.5074	5.136	4.932
1.054	0.6338	5.536	5.241
1.111	0.7758	5.936	5.540
1.183	0.9356	6.336	5.831
1.275	1.116	6.736	6.115
1.394	1.321	7.136	6.390

表 A-4 板の中心のたわみ (Straight Edge,  $w_0/h=1/30$ ,  $\nu=0.3$ )

$P/P_{cr}$	$w_c/h$	$P/P_{cr}$	$w_c/h$
0.1780	0.00721	3.194	2.418
0.3309	0.01645	3.594	2.606
0.4713	0.02960	3.994	2.774
0.5925	0.04809	4.394	2.925
0.6923	0.07377	4.794	3.060
0.7723	0.1089	5.194	3.180
0.8360	0.1561	5.594	3.284
0.8882	0.2174	5.994	3.367
0.9344	0.2936	6.394	3.414
0.9795	0.3840	6.694	3.410
1.029	0.4875	6.787	3.398
1.087	0.6039	6.863	3.382
1.159	0.7345	6.936	3.361
1.251	0.8810	7.008	3.331
1.371	1.046	7.080	3.287
1.530	1.233	7.148	3.219
1.740	1.445	7.183	3.151
2.020	1.686	7.194	3.110
2.394	1.957	7.199	3.040
2.794	2.204	7.176	2.912

表 A-5 初期たわみ  $w_0=0$  の場合の板の中心のたわみ

FREE EDGE		STRAIGHT EDGE	
$P/P_{cr}$	$w_c/h$	$P/P_{cr}$	$w_c/h$
1.0	0.0	1.0	0.0
1.011	0.2197	1.016	0.2198
1.041	0.4165	1.042	0.3525
1.091	0.6234	1.094	0.5234
1.152	0.8095	0.153	0.6681
1.249	1.039	1.261	0.8723
1.324	1.188	1.300	0.9344
1.423	1.363	1.398	1.074
1.555	1.568	1.529	1.236
1.728	1.809	1.706	1.424
1.955	2.089	1.944	1.641

---

## 航空宇宙技術研究所報告582号

昭和54年8月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山4-1-7(羽田ビル)

---