

UDC 518.61:
519.21:
533.013.4:
533.595.8

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-599

回転翼の安定に及ぼす大気乱流の影響(1)

——フラッピングとフラッピング—振れの連成振動——

藤 森 義 典

1980年2月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

回転翼の安定に及ぼす大気乱流の影響(1)*

—フラッピングとフラッピング—捩れの連成振動—

藤 森 義 典**

EFFECT OF ATMOSPHERIC TURBULENCE ON THE STABILITY OF A LIFTING ROTOR BLADE (I), FLAP AND COUPLED FLAP-TORSION MOTIONS

By Yoshinori FUJIMORI

ABSTRACT

The purpose of this study is to investigate the motion stability of a lifting rotor blade operating in a turbulent flow. Such a blade may be used in a helicopter or other rotorcrafts and the turbulent flow may be a natural phenomenon or one generated by vortices of other blades.

In order to achieve this goal, a procedure is developed in which use is made of the Markov process theory and the numerical solution of the Floquet transition matrix and its eigenvalues. This study is carried out through the following steps:

- 1) Derivation of equations governing the flap and flap-torsion motions of a blade operating in a three-dimensional turbulent flow field. All three turbulent velocity components are taken into consideration in the formulation.
- 2) Determination of stochastic stability boundaries in terms of the first and second moments of blade angular deflections and their derivatives for the flap motion and the coupled flap-torsion motion.

It is found that terms involving the two horizontal turbulence components appear in the coefficients of the uncoupled flap and the coupled flap-torsion equations. Thus these terms play the role of parametric excitation, and when the turbulence level is high the rotor blade can become unstable. On the other hand, the vertical turbulence component contributes only a purely external force to the uncoupled flap and the coupled flap-torsion equations. Since the aerodynamic damping for the torsional motion vanishes in the reversed flow region, the stability of the coupled flap-torsion motion is dominated by the torsion mode, especially during a high forward velocity flight.

The basic differential equations governing the flap and flap-torsion motions are first linearized and then converted into corresponding stochastic differential equations in the sense of Ito. For simplicity, all parametric excitations are assumed to be of the white noise type with constant

* 昭和54年11月20日 受付

** 機体第二部

spectral densities. In this case, the conversion can be accomplished by adding the correction terms of Wong and Zakai. The equations for the first moments follow directly from taking ensemble averages of the Ito stochastic differential equations. Derivation of the second moment equations is carried out through the following two steps: 1) obtain another set of Ito equations for the second powers and products of the response components by use of Ito's Lemma, and 2) take the ensemble averages of those equations.

Since both the first and second moment equations are differential equations with periodic coefficients, the stability boundary in each case is found by a numerical search involving the determination of the Floquet transition matrix and its eigenvalues.

The analytical solution of the uncoupled flap motion, obtained for the very low advance ratios, affirms that the flap mode remains very stable under normal circumstances. Numerical examples for two advance ratios, 2.4 for the uncoupled flap motion and 1.6 for the coupled flap-torsion motion, are given to illustrate the general theory.

As expected the first moment stability condition is always implied by the second moment stability condition, which could have been proved by use of the Schwartz inequality.

For normal turbulence intensities the boundaries for the first moment stability of the flap and the flap-torsion motions, and the boundary for the second moment stability of the flap motion alone do not deviate much from the baseline (i.e., stability boundary under non-turbulence condition). However, the second moment stability for the coupled flap-torsion motion deteriorates substantially when turbulence is present in the atmosphere.

When we consider the effect of the one-dimensional turbulence, the second moment stability of the flap and flap-torsion motions are most sensitive to the turbulence in the lateral and longitudinal directions, respectively.

概 要

回転翼ブレードが3次元大気乱流中を飛行するとき、ブレードの運動がどのような影響を受けるかを明らかにしたものである。ブレードの運動として(1)フラッピングのみと、(2)フラッピングと捩れの連成系、の2つの場合を考え、両者が3次元大気乱流中では係数励振型の微分方程式でモデル化されることを示した。これらの力学系の安定問題を解くための道具として、統計的平均法とFloquetの遷移行列計算を組合せた一般的方法を提案した。数値計算例からフラッピングモードのみはほとんど大気乱流の影響を受けないとしてよいこと、フラッピングと捩れの連成運動では高速飛行時にその安定性がかなり低下することなどが明らかとなった。

記号表

Symbol	Description
a	Lift curve slope
B	Tip loss factor (= 0.97)
c	Blade chord
c_{d_0}	Blade profile drag coefficient

$E[]$	Ensemble average
F	$(I_\beta / 16 I_a) (c / R)^2$
I_a	Feathering mass moment of inertia of a blade $= \int_0^R i_a d\tau \quad (\text{kg-m}^2)$
I_β	Flapping mass moment of inertia of a blade (kg-m ²)
I_c	Leadlag mass moment of inertia of a blade (kg-m ²)
i_a	Polar mass moment of inertia about elastic axis per unit length of a blade (kg-m)
p	Blade flapping frequency/blade angular velocity
Q	$c I_\beta / (4 R I_a)$
R	Rotor radius
r	Distance from the center of the hub
t	Time
U_p	Nondimensional perpendicular velocity at the blade element

U_T	Nondimensional tangential velocity at blade element
u	Lateral turbulence component (m/sec)
V	Forward flying velocity (m/sec)
v	Longitudinal turbulence component (m/sec)
w	Vertical turbulence component (m/sec)
x	r/R
α	Torsion angle
β	Flap angle
τ	$R^4 \rho c a / I_p$, Blade Lock number
ζ	Leadlag angle
η	$v/\Omega R$
θ	Blade pitch = $\theta_0 + x\theta_1 + \theta_s \sin \psi + \theta_c \times \cos \psi$
θ_0	Collective pitch
θ_c } θ_s }	Cyclic pitch
λ	$w/\Omega R$, Perturbed random inflow rate
μ	$V/\Omega R$, Advance ratio
ξ	$u/\Omega R$
ρ	Air density
τ	Time lag
Φ	Spectrum
ψ	Ωt , Azimuth angle
Ω	Blade angular velocity
ω_α	Torsion frequency/ Ω
ω_β	Nonrotating flap frequency/ Ω
ω_ζ	Nonrotating leadlag frequency/ Ω
(\cdot)	$\frac{d}{d\psi}$, Derivative with respect to azimuth angle ψ
{ }	Vector
(\cdot) ^T	Transpose

同じ記号を別の意味で用いることもあるが、その都度本文中で説明を加えてある。

第1章 緒 論

1-1. 回転翼の振動解析に関する従来の研究

世界的に見るならば過去10年~15年の間に軍事と民生両方からの要請のため回転翼機が数多く設計製作されたことは周知のことであり、その進歩はめざましいものがある。重量軽減、振動吸収や飛行制御の面で回転翼機は従来の固定翼機以上の技術水準が必要となることが多く、そのための基礎研究は欠かせない。回転翼機の特徴はそ

の主な揚力面として回転する翼を用いていることであるから、機体の有害な振動は回転翼システムの設計がよくないために生ずることが多い。それ故基本として1枚のブレードの動力学をよく理解することが非常に大切なことである。ここで述べる回転翼とはヘリコプターのみに限るものでなく、本質的には推進型回転翼機 (Proprop aircraft) や地上にある風車等にも応用できるものである。この節では理論的立場から回転翼の振動解析について今迄どのような研究が行われてきたかを概観する。

理想的条件の下での回転翼機の飛行や安定の問題はよく研究されていて、その結果は多くの教科書にまとめられている。¹⁻⁶⁾ 回転翼の空力弾性問題はLoewy⁷⁾により解説されている。最近の回転翼機の動向については専門家による講演集⁸⁾を見るとよい。

歴史的にはまず1枚のブレードのフラッピング運動が初めて解析された。^{9-12, 22)} 初期の頃はヘリコプターの前進速度が遅く、関節型の回転翼が用いられていたため、フラッピング運動の安定が主として問題となっていたと思われる。1枚のブレードの解析を複数のブレードに拡張することは容易にできる。^{25, 26)} 飛行速度の速いヘリコプターの場合には振れモードも重要となるため、SissinghとKuczynski²³⁾はフラッピングと振れの連成系の方程式を導き、その安定解析をアナログ計算機を使って行った。

最近になって金属材料の破壊靱性や疲労強度が向上したこともあって、フラッピングヒンチやラグヒンチを用いずにブレードを直接片持ち梁として軸に取付ける、いわゆる無関節型ローターが普通となって来た。この型式のローターは関節型のものに比べ設計が簡単で、整備も楽で空力的抵抗が少い、また飛行制御がしやすい等々と長所がある。しかしながらフラッピング運動に誘起される面内方向の曲げモーメントは関節型のブレードに比べ大きくなり、リードラグモードが無視できなくなる。一概に無関節型と云っても実際には多様な変化があり、それぞれ特徴がある。¹¹⁰⁾ OrmistonとHodge²⁹⁾はこのフラッピングとリードラグとの連成を剛体ブレードと付け根部の弾性スプリングで置き換えて数式化した。彼らは3個の機械連成 (mechanical coupling) パラメーターを導入し、それらとブレードの幾何学的ピッチ角とで連成系の運動を説明している。この解析はPeters³¹⁾により非線形範囲まで拡張された。

弾性ブレードの変形、応力や歪みの厳密な解析はHouboltとBrooks²⁷⁾により始められ、後でHodgesとDowell³³⁾が非線形領域まで発展させている。これらではフラッピング方向、リードラグ方向と振れについて任意の数のモードが考慮されている。この弾性ブレードの

安定解析はホバリングの場合についての例³⁴⁾がある。

ブレードの運動はどのようなモードであれ基本的には周期関数を係数に持つ微分方程式に支配される。そのような微分方程式はよく知られた Hill 型の方程式であるが、係数となる周期関数はかなり複雑なものとなる。これらの安定解析のためには Floquet の遷移行列法というのが使われる^{12,27,31)}ことが多い。

以上に引用した回転翼の安定に関する研究はすべて大気中に乱流が存在せず、理想的な条件の下での解析である。このとき運動方程式の係数は定数か周期関数でいずれにしろ決定的 (deterministic) に既知なものである。ブレードの動力学で垂直方向に作用する大気乱流の影響を初めて考慮したのは Gaonkar¹⁴⁻²¹⁾で、彼は Sissingh の導いた式を使って数値計算により応答の性質を研究した。それらの研究では垂直方向の大気乱流は純粋に外力であり、即ち微分方程式の非同次項となるが同次項とはならず、ブレードの安定不安定には関係ない。Arcidiano 等³⁵⁾によると大気乱流による荷重は操舵荷重より低いと報告されている。しかしこれは軍用ヘリコプターについての結果であり、また大気乱流の影響を十分に解析して得た結論ではない。いずれにしろ大気乱流の影響を調べることは、すべてのヘリコプターにとってその乗心地や振動軽減という観点から非常に大切なことである。それ故筆者¹²⁴⁾は3次元の大気乱流を考慮できるように理論的解析法を進展させ、フラッピングと捩れについての例を示した。^{125,126)}

1-2. 力学系の確率的安定に関する従来の研究

すべての物理的現象は大かれ少なかれ不規則な性質を持ち決定的 (deterministic) な解析によっては満足すべき解答を得られないことはよくあることである。力学系の数学モデルが定数係数の微分方程式で表わされ、すべての不規則入力とその右辺にのみ現われるならば、従来のスペクトル解析が系の応答解析に応用できる⁶⁵⁾。しかし不規則入力が微分方程式の係数にも現われると、解の安定性がまず問題となる。もしも系が不安定ならば応答は非有界となる。また系が安定だとしても、系の性質が時間とともに変化しているから、その応答は従来のスペクトル解析では求まらない。

単一周波数係数励振を受ける決定的な力学系の安定問題は初めに Mathieu や Hill により考察された。以後多くの人々により研究されている中でも、Mettler^{92,93)}により問題点がよくまとめられている。

広帯域の不規則係数励振を受ける力学系の安定解析には Markov 過程の諸定理が有用である。基本的考え方は Brown 運動の研究から発展したものである。Markov 過

程における微分、積分の基礎は伊藤⁸¹⁾により確立された。伊藤型の確率微分方程式は決定論的な意味の微分方程式とは違っていて、従来の微分則や積分則が適用できないので注意を要する。

実存する物理現象を支配する微分方程式を伊藤型の確率微分方程式に変換するため、Stratonovich⁸⁶⁾は統計的平均法 (Stochastic Averaging) を提案した。この方法は直観に基づくものであったが、後に Kha'sminskii⁸⁸⁻⁹⁰⁾の極限定理 [Limit Theorem] により厳密に正当化され、最近では Papanicolaou⁹¹⁾により極限定理が一般化されている。伊藤型の微分方程式を Stratonovich 型に変換したりまたはその逆についての方法を Wong & Zakai⁸³⁾や Stratonovich⁸⁷⁾が数式化している。これら Markov 過程の性質やそれに関する諸定理はすでに多くの教科書^{68-70, 82,97,99,100,127,128)}にまとめられている。なおこの分野の最近の話題については講演集^{71,72,101-103)}を見るとよい。

Ariaratnam⁷⁷⁾は Markov 過程の考え方を力学系の安定問題へ応用することを考え、不規則係数励振を受ける Mathieu 型の微分方程式の安定解析⁷⁸⁾を行った。また連続した線形系の解析への拡張も行った⁸⁰⁾。彼は統計的平均法と係数が小さい時に有効である時間平均法を同時に適用して解析を行い、力学系の共振周波数や係数励振のスペクトルレベルの組合せいかんによって1次および2次モーメントが安定化されたり不安定化されたりすることを示した。時間平均を適用できず、しかも周期係数を含んだ力学系の安定解析法は筆者により開発され回転翼問題への応用も検討してある。¹²⁴⁻¹²⁶⁾

力学系が非線形となると統一的解析は困難となるが、白色雑音を受ける場合の解析¹³²⁻¹³⁴⁾が僅かながらある。

以上の研究は系への加振力が広帯域、即ち加振力の相関時間が応答のそれよりかなり小さいという仮定に基づいており、統計的平均が有効である場合であった。その逆の場合、即ち応答の相関時間が加振力のそれより長いときは Markov 過程の諸定理は使えず、Stratonovich⁸⁶⁾の提案した準静的 (Quasi Static) 方法により解析しなければならない。⁹⁵⁾

読者の理解を助けるため Markov 過程における諸定理、確率微分方程式、確率安定の定義、Floquet 遷移行列、大気乱流についての簡単な説明や筆者の見解を付録に述べておく。

1-3. 目的

従来の研究を概観して分るように、回転翼の動力学研究はそれなりに進歩しており、我々の理解はかなり高まって来ていると云える。しかしながら大気乱流の影響を十分に調べているとは云えない。それ故この研究の主た

る目的は回転翼の運動に与える大気乱流の影響を明らかにすることである。即ち回転翼の安定不安定に及ぼす影響を調べることである。またこの目的のために、Markov過程の諸定理とFloquet遷移行列の数値計算とを組合せた新しい方法を提案しその有効性を示す。その順序は、

1) ブレードの運動としてフラッピングと捩れを取り上げ、3次元大気乱流中におけるそれらの運動を支配する微分方程式を導く。

2) 導かれた微分方程式を伊藤型の確率微分方程式に変換し、フラッピングのみの系とフラッピングと捩れの連成系につきそれぞれの応答の1次および2次モーメントが安定であるための条件を求める。

第2章 回転翼運動の支配方程式

2-1. フラッピングのみの運動方程式

ここでは回転翼の1枚のブレードが3次元の大気乱流中を飛行するとし、フラッピング運動を支配する微分方程式を導く。これは他の運動モードと連成する場合への拡張の基礎となるものである。回転翼の振動解析としては軸と多数の回転部分 (blades) から成る全体を考えるべきであるが、簡単のため1枚の回転部分 (a blade) だけを取り扱う。ここで得られる結論は実際の回転翼解析の土台となることは云うまでもない。ブレードは剛体とし弾性は付根部のバネ定数で表わすものとする。解析の都合上以下の仮定を設けた。

- (1) 非定常空気力の効果は無視できる。
- (2) ブレードの揚力勾配は正常流領域と逆流領域のいずれにおいても同じ値で定数とする。
- (3) 失速や圧縮性の影響はないものとする。
- (4) 流れはブレードの断面で2次元のとしスパン方向の流れはないものとする。

回転翼についての座標系を図2-1のようにとり、大気乱流の3成分を u, v, w とする。回転軸の中心からブレード上スパン方向へ r の距離における正接方向の対気流速は

$$\bar{U}_T = \Omega r + (V+v) \sin \psi + u \cos \psi \quad (2-1-1)$$

で与えられ、垂直方向速度は

$$\bar{U}_P = w - [(V+v) \cos \psi - u \sin \psi] \beta - r \dot{\beta} \quad (2-1-2)$$

で与えられる。上式で“ \cdot ”は無次元時間 $\psi = \Omega t$ についての微分である。(2-1-1, 2) 式を速度をブレード先端速度 ΩR で無次元化する、即ち

$$U_T = x + (\mu + \eta) \sin \psi + \xi \cos \psi \quad (2-1-3)$$

$$U_P = \lambda - [(\mu + \eta) \cos \psi - \sin \psi] \beta - x \dot{\beta} \quad (2-1-4)$$

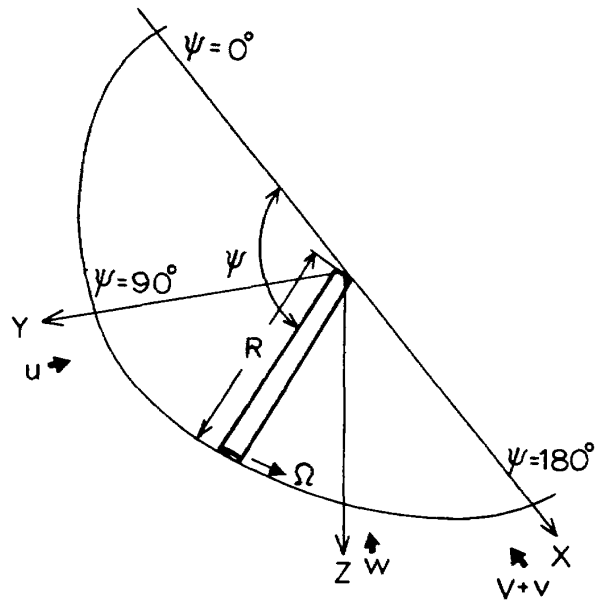


Figure 2-1. Blade Coordinates, Turbulence Components and Tangential and Perpendicular Velocities at the Blade Section.

フラッピングモードの方程式は次のように書ける。

$$I_\beta \ddot{\beta} + K_\beta \dot{\beta} = (1/\Omega^2) \int r dL \quad (2-1-5)$$

スパン方向の巾 $dr = d(Rx)$ に働いている揚力 dL は次式で与えられる。

$$dL = (\rho ac/2) \bar{U}^2 [\theta + (U_P/U_T)] d(Rx) \quad (2-1-6)$$

ここで $\bar{U} = (\bar{U}_T^2 + \bar{U}_P^2)^{1/2}$ はスパン位置 r における全速度である。 w の中には乱流の外に定常流成分も含まれるが、ここではその効果について考慮しない。また $\bar{U} \approx \bar{U}_T$ と仮定して(2-1-5)式を次のように書きかえる。

$$(2/r)(\dot{\beta} + p^2 \beta) = M \quad (2-1-7)$$

但し

$$M = \int U_T^2 [\theta + (U_P/U_T)] x dx \quad (2-1-8)$$

この無次元化されたモーメントは次の3成分に分離できる。

$$M = \int (U_P U_T + U_T^2 \theta) x dx = \Sigma f(\psi) - \beta \tilde{K}(\psi) - \dot{\beta} \tilde{C}(\psi) \quad (2-1-9)$$

第1項 $f(\psi)$ はフラッピング運動に対して純粋な外力の和である。第2項、第3項はそれぞれ空力的な剛性と減衰を示すものであり次のようになる。

$$\tilde{K}(\psi) = \int U_T [(\mu + \eta) \cos \psi - \xi \sin \psi] x dx \quad (2-1-10)$$

$$\tilde{C}(\psi) = \int U_T x^2 dx \quad (2-1-11)$$

これら(2-1-10, 11)式の積分は図2-2に示すように3種の異なる流れ領域について、即ち“1”の正常流領域，“2”の混合流領域，“3”の逆流領域について、別々に行わなければならない。この図2-2(a), (b)において斜線を入れた領域が逆流領域である。回転翼が通常の前進比で飛行しているときには、この逆流領域は図2-2(a)に示すように円形をしている。もし前進比 μ がブレードの先端損失率 B を越えると、即ち $B < \mu$ となると、方位角 $\pi + \epsilon < \psi < 2\pi - \epsilon$ の範囲が逆流領域となり、この ϵ は次式で決まる。

$$\sin \epsilon = B / \mu \quad (2-1-12)$$

もしも $\mu < B$ ならば“3”の領域は存在しない。このため“3”の領域における積分は“1”の領域のものと同じであるが、符号は逆になる。積分範囲をまとめたものを表2-1に示す。

外力 $f(\psi)$ は次の5ヶの集団から成っている。

$$f(\psi) = \tilde{m}_2 + \theta_0 \tilde{m}_{\theta_0} + \theta_1 \tilde{m}_{\theta_1} + \theta_s \tilde{m}_{\theta_s} + \theta_c \tilde{m}_{\theta_c} \quad (2-1-13)$$

但し

$$\tilde{m}_2 = m_2 \lambda + m_{2\eta} \lambda \eta + m_{2\epsilon} \lambda \epsilon \quad (2-1-14)$$

以上の記号を使ってフラッピングの方程式を整理すると次のようになる。

$$(2/r)(\ddot{\beta} + p^2 \beta) + \dot{\beta} \tilde{C} + \beta \tilde{K} = \tilde{m}_2 + \theta_0 \tilde{m}_{\theta_0} + \theta_1 \tilde{m}_{\theta_1} + \theta_s \tilde{m}_{\theta_s} + \theta_c \tilde{m}_{\theta_c} \quad (2-1-15)$$

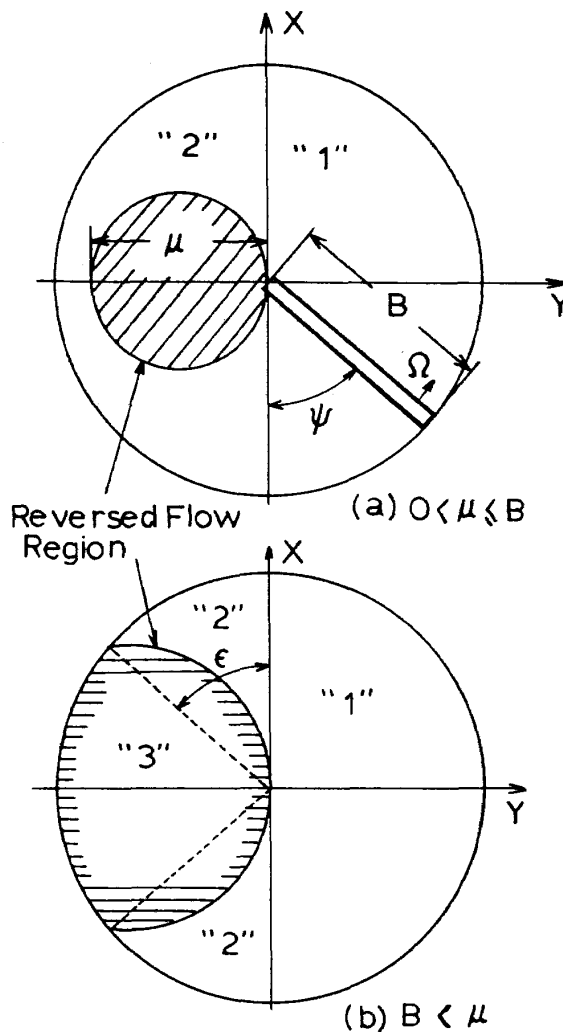


Figure 2-2. Reversed Flow Region on the Blade Rotational Plane.

Table 2-1. Integral Limits for the Flap Equation.

Region	Range	Type of Flow	Integral Limits
"1"	$0 < \psi < \pi$ for any μ & B	Normal	$\int = \int_0^B$
"2"	$\pi < \psi < 2\pi$ for $\mu < B$ $\pi < \psi < \pi + \epsilon$ for $2\pi - \epsilon < \psi < 2\pi$ $B < \mu$	Mixed	$\int = \int_0^B - \int_0^{-\mu \sin \psi}$ $= \int_0^B - 2 \int_0^{-\mu \sin \psi}$
"3"	$\pi + \epsilon < \psi < 2\pi - \epsilon$ for $B < \mu$	Reversed	$\int = - \int_0^B$

但し

$$\begin{pmatrix} \bar{C} \\ \bar{K} \\ \tilde{m}_{\theta_0} \\ \tilde{m}_{\theta_1} \\ \tilde{m}_{\theta_s} \\ \tilde{m}_{\theta_c} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & C_\eta & C_\xi & 0 & 0 & 0 \\ K & K_\eta & K_\xi & K_{\eta\eta} & K_{\xi\xi} & K_{\eta\xi} \\ m_{\theta_0} & m_{\theta_0\eta} & m_{\theta_0\xi} & m_{\theta_0\eta\eta} & m_{\theta_0\xi\xi} & m_{\theta_0\eta\xi} \\ m_{\theta_1} & m_{\theta_1\eta} & m_{\theta_1\xi} & m_{\theta_1\eta\eta} & m_{\theta_1\xi\xi} & m_{\theta_1\eta\xi} \\ m_{\theta_s} & m_{\theta_s\eta} & m_{\theta_s\xi} & m_{\theta_s\eta\eta} & m_{\theta_s\xi\xi} & m_{\theta_s\eta\xi} \\ m_{\theta_c} & m_{\theta_c\eta} & m_{\theta_c\xi} & m_{\theta_c\eta\eta} & m_{\theta_c\xi\xi} & m_{\theta_c\eta\xi} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \\ \xi \\ \eta^2 \\ \xi^2 \\ \eta\xi \end{pmatrix} \quad (2-1-16)$$

(2-1-16)式右辺の行列要素は方位角 ψ についての周期関数である。主なものを表2-2に示す。

もしも大気乱流成分 η 、 ξ が0ならば、上の方程式は Sissingh²²⁾によって導かれた式と同じとなる。この(2-1-15)式を見れば分るよ様に、 η や ξ はフラッピング運動に対して係数励振でもありまた純粋な外力でもある。垂直方向の成分 λ は右辺の非同次項として存在するだけなので系の安定性には関係ないものとなる。

表2-2に掲げた関数は周期 $2\pi/\Omega$ の周期関数で各流れの領域で一応閉じた形式で与えられている。しかしその表示はそれぞれの流れ領域でかなり変化するので、表の係数のみから関数の性質を判断できない。このことは各関数について Fourier 級数を作ってその係数の大小をみればよく分ることである。

以後の応用においては運動の安定性のみを取扱うので、系の性質に関係ない純粋な外力の項は除き、大気乱流成分 η 、 ξ 、 λ は小さいとしこれらの線形項のみを保持しておく。このようにしてフラッピング運動については次のように単純化される方程式を安定解析に使う。

$$(2/r)(\ddot{\beta} + p^2\beta) + \dot{\beta}\bar{C} + \beta\bar{K} = 0 \quad (2-1-17)$$

但し

$$\begin{aligned} \bar{C} &= C + C_\eta\eta + C_\xi\xi \\ \bar{K} &= K + K_\eta\eta + K_\xi\xi \end{aligned}$$

TABLE 2-2 Periodic Coefficients of Flap Equation

Coefficient	Region	Function Form
C	1	$B^4/4 + B^3\mu\bar{S}_1/3$
	2	$C_1 + \mu^4(1/16 - \bar{C}_2/12 + \bar{C}_4/48)$
C _η	1	$B^3\bar{S}_1/3$
	2	$C_{\eta 1} + \mu^3(1/4 - \bar{C}_2/3 + \bar{C}_4/12)$
C _ξ	1	$B^3\bar{C}_1/3$
	2	$C_{\xi 1} + \mu^3(\bar{S}_2/6 - \bar{S}_4/12)$
K	1	$B^3\mu\bar{C}_1/3 + B^2\mu^2\bar{S}_2/4$
	2	$K_1 + \mu^4(-\bar{S}_2/12 + \bar{S}_4/24)$
K _η	1	$B_3\bar{C}_1/3 + B^2\mu\bar{S}_2/2$
	2	$K_{\eta 1} + \mu^3(-\bar{S}_2/3 + \bar{S}_4/6)$
K _ξ	1	$-B^3\bar{S}_1/3 + B^2\mu\bar{C}_2/2$
	2	$K_{\xi 1} + \mu^3(-\bar{C}_2/6 + \bar{C}_4/6)$
m _{θ₀}	1	$B^5/5 + B^4\mu\bar{S}_1/2 + B^3\mu^2(1 - \bar{C}_2)/6$
	2	$m_{\theta_0 1} + \mu^5(\bar{S}_1/24 - \bar{S}_3/48 + \bar{S}_5/240)$
m _{θ_{1η}}	1	$B^4\bar{S}_1/2 + B^3\mu(1 - \bar{C}_2)/3$
	2	$m_{\theta_1\eta 1} + \mu^4(5\bar{S}_1/24 - 5\bar{S}_3/48 + \bar{S}_5/48)$
m _{θ_{1ξ}}	1	$B^4\bar{C}_1/2 + B^3\mu\bar{S}_2/3$
	2	$m_{\theta_1\xi 1} + \mu^4(\bar{C}_1/24 - \bar{C}_3/16 - \bar{C}_5/48)$
m _λ	1	$B^3/3 + B^2\mu\bar{S}_1/2$
	2	$m_{\lambda 1} + \mu^3(-\bar{S}_1/4 + \bar{S}_3/12)$

$$\bar{C}_n = \cos n\psi$$

$$\bar{S}_n = \sin n\psi$$

2-2. フラッピングと捩れの連成運動の方程式

この節ではフラッピングと捩れが連成している運動に注目する。まず捩れ運動の方程式を導くが、方法は前節とほとんど同じである。捩れの方程式は一般に次のように書ける。

$$M_t \ddot{\alpha} + M_t \omega_a^2 \alpha = 1/Q^2 \Sigma G_i \quad (2-2-1)$$

但し一般化された角変位 α はブレード先端の捩れ角であり、捩れのモード形は $x = r/R$, $0 \leq x \leq 1$ としているので、一般化質量 M_t や一般力 G_i は次のようになる。

$$M_t = \int_0^1 x^2 \rho_a d(Rx) = 1/3 R t_a = 1/3 I_a \quad (2-2-2)$$

$$G_i = \int x (\text{Moment}) d(Rx) \quad (2-2-3)$$

空気力学的モーメントを求めるための仮定は前節に記したのと大体同じであるが、ブレードの捩れによるモーメントは準定常とする。ここではブレードを厚みのない平板と仮定しているため、空力中心は $1/4$ コード点にあり、これが正常流領域で弾性軸の位置と一致しているとする。逆流領域では $3/4$ コード点が弾性軸となる。このためピッチ角 θ_T やその微分 $\dot{\theta}_T$ による空気力の変化を考えると、その係数は表 2-3 のようになる。⁵⁰⁾ この表は、正常流領域では空気力による減衰が存在するが剛性がなく、逆流領域では減衰がなくなり剛性が生ずる、ということの意味している。以上から一般力は 2 項だけである。

$$G_1 = \int (\rho a c^4 / 4) \bar{U}^2 [x \alpha + \theta_0 + (U_P / U_T)] x d(Rx) \quad (2-2-4)$$

$$G_2 = \int -(\rho a c^3 / 16) \bar{U} [Q(x \dot{\alpha} + \dot{\theta}_0)] x d(Rx) \quad (2-2-5)$$

即ち G_1 が逆流領域の剛性であり G_2 が正常流領域におけ

Table 2-3. Moment Coefficients for Geometric Pitch Angle.

Chord Point	θ_T	$\dot{\theta}_T$
$1/4$	0	$-\frac{\rho a c^3}{16} \bar{U}$
$3/4$	$\frac{\rho a c^2}{4} \bar{U}^2$	0

$$\theta_T = x \alpha + \theta_0 + U_P / U_T$$

る減衰である。もし弾性軸が $1/4$ コード点以外のところにあればモーメントの係数をその都度求めなければならぬ。一般には正常流、逆流領域いずれにおいても減衰、剛性の両方が生ずると考えてよい。

(2-2-1, 4, 5) 式を組合せると捩れの方程式は次のようになる。

$$(1/3r)(\ddot{\alpha} + \omega_a^2 \alpha) + F \dot{\alpha} \tilde{C}_a + Q \alpha \tilde{K}_a + Q \beta \tilde{L}_{r\beta} + Q \tilde{\beta} \tilde{L}_{r\beta} = Q \lambda \tilde{L}_{r\lambda} \quad (2-2-6)$$

但し

$$\tilde{C}_a = \int U_T x^2 dx \quad (2-2-7)$$

$$\tilde{K}_a = - \int U_T^2 x^2 dx \quad (2-2-8)$$

$$\beta \tilde{L}_{r\beta} + \tilde{\beta} \tilde{L}_{r\beta} - \lambda \tilde{L}_{r\lambda} = \int U_P U_T x dx \quad (2-2-9)$$

今簡単のためブレードの質量分布の軸も弾性軸と一致していると仮定しているため、(2-2-6) 式において慣性と

Table 2-4. Integral Limits for the Torsion Equation.

Region	Range	Type of Flow	Integral Limits
"1"	$0 < \psi < \pi$ for any μ & B	Normal	$\int = \int_0^B$
"2 _n "	$\pi < \psi < 2\pi$ for $\mu < B$	Normal	$\int = \int_0^B -\mu \sin \psi$
"2 _r "	$\pi < \psi < \pi + \epsilon$ for $2\pi - \epsilon < \psi < 2\pi$ $B < \mu$	Reversed	$\int = \int_0^{-\mu \sin \psi}$
"3"	$\pi + \epsilon < \psi < 2\pi - \epsilon$ for $B < \mu$	Reversed	$\int = \int_0^B$

連成した項, 即ち $\ddot{\beta}$ に比例した項, は現われなぬ。

次に(2-2-7, 8, 9)式における積分範囲を検討する。空気力を詳細に見積るため混合領域“2”を正常流領域“2_n”と逆流領域“2_r”とに分け, 結果だけ表2-4に示しておく。

(2-2-6)式の右辺にある $\tilde{l}_{r\lambda}$ は

$$\tilde{l}_{r\lambda} = l_{r\lambda} + l_{r\lambda\eta} \eta + l_{r\lambda\xi} \xi \quad (2-2-10)$$

と書くことができ, 左辺にある関数は次のようになる。

$$\begin{pmatrix} \tilde{C}_\alpha \\ \tilde{K}_\alpha \\ \tilde{l}_{r\beta} \\ \tilde{l}_{r\dot{\beta}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_\alpha & C_{\alpha\eta} & C_{\alpha\xi} & 0 & 0 & 0 \\ K_\alpha & K_{\alpha\eta} & K_{\alpha\xi} & K_{\alpha\eta\eta} & K_{\alpha\xi\xi} & K_{\alpha\eta\xi} \\ l_{r\beta} & l_{r\beta\eta} & l_{r\beta\xi} & l_{r\beta\eta\eta} & l_{r\beta\xi\xi} & l_{r\beta\eta\xi} \\ l_{r\dot{\beta}} & l_{r\dot{\beta}\eta} & l_{r\dot{\beta}\xi} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta \\ \xi \\ \eta^2 \\ \xi^2 \\ \eta\xi \end{pmatrix} \quad (2-2-11)$$

行列の要素は ψ についての周期関数で主なものを表2-5

Table 2-5. Periodic Coefficients of Flap-Torsion Equation.

Coefficient	Region	Function Form
C_α	1	$B^4/4 + B^3 \mu \bar{S}_1/3$
	2 _n	$C_{\alpha 1} + \mu^4 (1/32 - \bar{C}_2/24 + \bar{C}_4/96)$
$C_{\alpha\eta}$	1	$B^3 \bar{S}_1/3$
	2 _n	$C_{\alpha\eta 1} + \mu^3 (1/8 - \bar{C}_2/6 + \bar{C}_4/24)$
$C_{\alpha\xi}$	1	$B^3 \bar{C}_1/3$
	2 _n	$C_{\alpha\xi 1} + \mu^3 (\bar{S}_2/12 - \bar{S}_4/24)$
K_α	2 _r	$\mu^5 (\bar{S}_1/48 - \bar{S}_3/96 + \bar{S}_5/480)$
	3	$-B^5/5 - B^4 \mu \bar{S}_1/2 - B^3 \mu^2 (1 - \bar{C}_2)/6$
$K_{\alpha\eta}$	2 _r	$\mu^4 (5 \bar{S}_1/48 - 5 \bar{S}_3/96 + \bar{S}_5/96)$
	3	$-B^4 \bar{S}_1/2 - B^3 \mu (1 - \bar{C}_2)/3$
$K_{\alpha\xi}$	2 _r	$\mu^4 (\bar{C}_1/48 + \bar{C}_3/48 + \bar{C}_5/16)$
	3	$-B^4 \bar{C}_1/2 - B^3 \mu \bar{S}_2/3$
$l_{r\beta}$	2 _r	$\mu^4 (\bar{S}_2/24 - \bar{S}_4/48)$
	3	$B^3 \mu \bar{C}_1/3 + B^2 \mu^2 \bar{S}_2/4$
$l_{r\beta\eta}$	2 _r	$\mu^3 (\bar{S}_2/6 + \bar{S}_4/24)$
	3	$B^3 \bar{C}_1/3 + B^2 \mu \bar{S}_2/2$
$l_{r\beta\xi}$	2 _r	$\mu^3 (\bar{C}_2/12 - \bar{C}_4/12)$
	3	$-B^3 \bar{S}_1/3 + B^2 \mu \bar{C}_2/2$
$l_{r\dot{\beta}}$	2 _r	$\mu^4 (-1/32 + \bar{C}_2/24 - \bar{C}_4/96)$
	3	$B^4/4 + B^2 \mu \bar{S}_1/3$
$l_{r\dot{\beta}\eta}$	2 _r	$\mu^3 (-1/8 + \bar{C}_2/6 - \bar{C}_4/24)$
	3	$B^3 \bar{S}_1/3$
$l_{r\dot{\beta}\xi}$	2 _r	$\mu^3 (-\bar{S}_2/12 + \bar{S}_4/24)$
	3	$B^3 \bar{C}_1/3$
$l_{r\lambda}$	2 _r	$\mu^3 (\bar{S}_1/8 - \bar{S}_3/24)$
	3	$B^3/3 + B^2 \mu \bar{S}_1/2$

$$\begin{aligned} \bar{C}_n &= \cos n\psi \\ \bar{S}_n &= \sin n\psi \end{aligned}$$

に示す。この表についても先の表2-2と同様に、一つの領域から次の領域へと数式表示が異なるので、係数の大きさは必ずしも性質を表わすものではない。この表2-5において注意すべきことは、減衰を表わす係数 $C_a, C_{a\eta}, C_{a\epsilon}$ は正常流領域では「0」でないが、逆流領域になると「0」となる。その他の係数については逆となる。このため振れモードの応答は高い前進比のとき起きやすいことが分る。これは前進比が高くなれば、それだけ減衰を「0」とする逆流領域が図2-1に示すように拡大するからである。振れの場合に準定常表示を用いたのは、定常的空気力だけであると、振れモードについての空力的減衰が全くないことになってしまうからである。一方、付加質量効果、即ち $\ddot{\alpha}$ に比例する項、は実際にはかなり小さいと考えられるので考慮していない。

フラッピングの式が振れモードを含んだようになるため多少修正する。(2-1-15)式の中の振れ角 θ_1 を時間的に変化する振れ角とみなし α と書きかえると、フラッピングの式は次のようになる。

$$\ddot{\beta} + \frac{\gamma}{2} \bar{C} \dot{\beta} + (p^2 + \frac{\gamma}{2} \bar{K}) \beta - \frac{\gamma}{2} \bar{m}_{\theta_1} \alpha = \frac{\gamma}{2} (\bar{m}_s + \theta_0 \bar{m}_{\theta_0} + \theta_s \bar{m}_{\theta_s} + \theta_c \bar{m}_{\theta_c}) \quad (2-2-12)$$

大気乱流成分の線形項のみ保持し、非同次項を落とすとフラッピングと振れの連成した方程式は次のようになる。

$$\begin{Bmatrix} \ddot{\beta} \\ \ddot{\alpha} \end{Bmatrix} + \frac{\gamma}{2} \begin{bmatrix} \bar{C} & 0 \\ 6Q\bar{L}_{r\beta} & 6F\bar{C}_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{\alpha} \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} p^2 + \frac{\gamma}{2} \bar{K} & -\frac{\gamma}{2} \bar{m}_{\theta_1} \\ 3rQ\bar{L}_{r\beta} & \omega_a^2 + 3rQ\bar{K}_a \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \beta \\ \alpha \end{Bmatrix} = 0 \quad (2-2-13)$$

但し

$$\begin{Bmatrix} \bar{m}_{\theta_1} \\ \bar{C}_a \\ \bar{K}_a \\ \bar{L}_{r\beta} \\ \bar{L}_{r\dot{\beta}} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} m_{\theta_1} & m_{\theta_1\eta} & m_{\theta_1\epsilon} \\ C_a & C_{a\eta} & C_{a\epsilon} \\ K_a & K_{a\eta} & K_{a\epsilon} \\ l_{r\beta} & l_{r\beta\eta} & l_{r\beta\epsilon} \\ l_{r\dot{\beta}} & l_{r\dot{\beta}\eta} & l_{r\dot{\beta}\epsilon} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 1 \\ \eta \\ \epsilon \end{Bmatrix} \quad (2-2-14)$$

振れモードの減衰項は逆流領域で「0」となるので、フラッピングと振れの連成した系はフラッピングのみの系よりも安定性が減少すると予想される。

第3章 回転翼の安定解析

3-1. 一般的方法の概略

この節では回転翼の安定問題にかぎらず多くの力学系の安定問題を解く一般的方法を述べる。この方法はMarkov過程における定理の応用とFloquet遷移行列の固有値計算を基礎としている。

安定解析のためには単に微分方程式の同次項のみを保

持しておけばよく、物理的に意味を持つ微分方程式も一般に次の型式となる。

$$\dot{\{Z\}} = [D]\{Z\} + [R]\{Z\} \quad (3-1-1)$$

ここで $\{Z\}$ は応答ベクトル、行列 $[D]$ は決定的な要素を持ち、 $[R]$ は確率的要素、即ち時間とともに不規則に変動する要素、を持つとする。回転翼の安定問題の場合には、 $[D]$ は ψ についての周期関数を含み、 $[R]$ は大気乱流成分を含んだ行列となる。

もし $[R]$ に含まれる確率過程の相関時間(correlation time)が系の弛緩時間(relaxation time)より短かければ、Stratonovich⁸⁶⁾が提案した統計的(確率論的)平均法(stochastic averaging)を(3-1-1)式に適用できる。さらに、もしも $[D]$ や $[R]$ が微小な係数を含んでいるかそれら自身がかかなり小さいときには、 $\{Z\}$ は時間とともにゆっくりと変化する応答となりBogoliubovやMitropolskiiらが提案している時間平均法(time averaging)を適用してよい。しかし回転翼の運動方程式の中に微小な係数は含まれていない。

問題点をはっきりさせるためまず決定的な系を考えてみる。

$$\dot{\{Z\}} = [D]\{Z\} \quad (3-1-2)$$

もしも $[D]$ が定数行列ならば、この系の安定性は $[D]$ の固有値で調べられる。また $[D]$ が周期関数を含んでいるなら、(3-1-2)式についてFloquet遷移行列を計算し、その固有値を調べればよい。即ち(3-1-2)式の形式についてはすでに解決されている。

(3-1-1)式で示される系について見れば、このように書かれている式を何んらかの方法で(3-1-2)式のように変換することができるなら、(3-1-1)式の問題を解くことができる。以下にその一般的方法を示す。基本的には統計的平均法を応用して変換法を展開する。まず(3-1-1)式の i 番目の行を次のように書く。

$$\frac{d}{dt} Z_i = \sum_{j=1}^N D_{ij} Z_j + \sum_{j=1}^N R_{ij} Z_j \quad (3-1-3)$$

$$i, j = 1, 2, \dots, N$$

但し

$$D_{ij} = \text{The } (i, j) \text{ element of } [D]$$

$$R_{ij} = \sum_{l=1}^M r_{ij,l} \epsilon_l, \text{ the } (i, j) \text{ element of matrix}$$

$$[R]$$

$$r_{ij,l} = \text{Periodic coefficient of the } l\text{-th random excitation in the } (i, j) \text{ element of } [R]$$

$$\epsilon_l = \text{A set of random excitations}$$

$$l = 1, 2, \dots, M$$

$$M = \text{Number of random excitations}$$

簡単のため加振力 ϵ_l は広帯域不規則過程とする。このとき (3-1-3) 式は Stratonovich 型の確率微分方程式と見做すことができる (付録 A 参照)。もし ϵ_l が白色雑音型の確率過程であれば、統計的平均法は単に Wong & Zakai の修正項を加えるだけとなり、(3-1-3) 式は次のような伊藤型の確率微分方程式に変換される。

$$d\{Z\} = [\bar{B}] \{Z\} dt + [\sigma] \{dW\} \quad (3-1-4)$$

但し

$$[\bar{B}] = [D] + [C] \quad (3-1-5)$$

$[\bar{B}]$ や $[C]$ は $N \times N$ の行列となり W の成分は独立な単位 Wiener 過程である。修正行列 $[C]$ の要素は次式となる。

$$C_{ij} = \pi \sum_k^M \sum_m^M \sum_n^M \tau_{ik,m} \tau_{kj,n} \Phi_{mn} \quad (3-1-6)$$

Φ_{mn} は $m \neq n$ のとき相互ベクトルであり、 $n = m$ のときスベクトルとなる。但しこの解析では $n \neq m$ の場合は考えないので Φ_{mn} は常に実数である。 ϵ_l が白色雑音でないときは (3-1-6) 式の計算が少し複雑になるが基本は変わらない。行列 $[\sigma]$ の要素が以後の計算に必要となることはなく、 $\sigma \sigma^T$ の積の形で必要となる。これの (i, j) 要素は次式で表わされる。

$$(\sigma \sigma^T)_{ij} = 2\pi \sum_k^N \sum_l^N \sum_m^M \sum_n^M \tau_{ik,m} \tau_{jl,n} \Phi_{mn} Z_k Z_l \quad (3-1-7)$$

応答ベクトル $\{Z\}$ の 2 次モーメントを求めるため、任意の 2 々の要素の積 $Z_i Z_j$ に伊藤微分則 (Ito differential rule, Ito's Lemma) を適用しておく。その結果は次のようになる。

$$d(Z_i Z_j) = \left[\sum_k^N (\bar{B}_{ik} Z_k Z_j + \bar{B}_{jk} Z_k Z_i) + (\sigma \sigma^T)_{ij} \right] dt + \sum_m^M (Z_j \sigma_{im} + Z_i \sigma_{jm}) dW_m \quad (3-1-8)$$

但し \bar{B}_{ij} は $[\bar{B}]$ の (i, j) 要素である。便宜のため次の記号を用いることとする。

$$Y_l = Z_i Z_j \quad (3-1-9)$$

$$\tilde{S}_l = (\sigma \sigma^T)_{ij} \quad (3-1-10)$$

l と i, j の関係は次式で与えられる。

$$l = l(i, j) = N(i-1) - \frac{1}{2}(j-1)(j-2) + j - i + 1 \quad (3-1-11)$$

l の取り得る範囲は $1 \leq l \leq N(N+1)/2$ for $j \geq i$ である。 $Z_i Z_j$ と $(\sigma \sigma^T)_{ij}$ は (i, j) について対称であるので $j < i$ の場合を考慮する必要はない。

(3-1-7, 10) 式から \tilde{S}_l は次のように書ける。

$$\tilde{S}_l = \sum_{m=1}^{N(N+1)/2} S_{lm} Y_m \quad (3-1-12)$$

また (3-1-8) 式の第 1 項と第 2 項を整理して、行列 $[A]$ とし、 l 番目の行を次のように書く。

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^N (\bar{B}_{ik} Z_k Z_j + \bar{B}_{jk} Z_k Z_i) \\ &= \sum_{k=1}^N (\bar{B}_{ik} Y_{l(k, j)} + \bar{B}_{jk} Y_{l(k, i)}) \\ &= \sum_{m=1}^{N(N+1)/2} A_{l(i, j), m} Y_m \end{aligned} \quad (3-1-13)$$

このようにすると (3-1-8) 式は次のように書き換えられる。

$$d\{Y\} = [[A] + [S]] \{Y\} dt + [\tilde{\sigma}] \{dW\} \quad (3-1-14)$$

$[\tilde{\sigma}]$ の要素は陽に与えられないが、以下の解析に必要とされないので問題ない。 $[A]$ や $[S]$ の要素計算を計算プログラムの中で行うこともできる。しかし要素の数が多くなければ、あらかじめ数式表示を出しておいた方が計算時間は少なくてすむ。

応答ベクトル $\{Z\}$ の 1 次モーメントを支配する方程式は (3-1-4) 式の両辺の期待値を取って導く。

$$\frac{d}{dt} \{E[Z]\} = [[D] + [C]] \{E[Z]\} = [\bar{B}] \{E[Z]\} \quad (3-1-15)$$

(3-1-4) 式の右辺第 2 項は (3-1-15) 式の中には現われない。これは Wiener 過程の増分が応答 Z_i と常に独立であって、かつ dW の期待値は「0」だからである。同様に 2 次モーメントに関する方程式は (3-1-14) 式の両辺の期待値をとり次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{E[Y]\} &= [[A] + [S]] \{E[Y]\} \\ &= [\bar{B}] \{E[Y]\} \end{aligned} \quad (3-1-16)$$

以上で 1 次、2 次モーメントを支配する方程式を導いたが、必要ならばより高次のモーメントを考慮することは容易なことである。 $[\bar{B}]$ や $[\bar{B}]$ の要素は一般に定数、 ψ についての周期関数と不規則係数励振のスペクトルを含んでいるだけだから、(3-1-15, 16) を形式的に決定的問題に対する (3-1-2) 式と同一と見做せることは明らかである。即ち、(3-1-1) 式の問題は (3-1-15, 16) 式についての Floquet 遷移行列を求めることに帰着される。

この節で述べた内容を明確にするため図 3-1 に従来の方法と一般的方法を対比させて示す。左側の流れは閉じた形で解が求められるとき可能な方法である。この場合、時間平均法を使って時間とともに変化する係数を適当な定数で置き換えられることが前提であるが、自由度が多いと解析的に可能とは限らない。先にも言及したように、時間平均法が使えるためには微分方程式の中に微小な係数が含まれていなければならない。そうでなければ数値

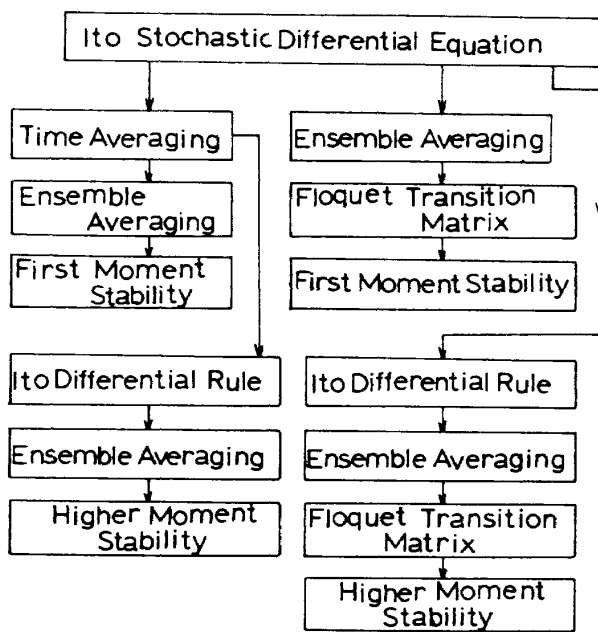


Figure 3-1. Determination of Moment Stability Conditions.

的に解を出すことを考えねばならないことになる。図3-1の右側の流れが新しく提案した一般的数値解析法であって、Floquetの遷移行列計算を組合せたものである。この一般的方法は係数励振のスペクトルが既知であること以外特に仮定を必要とせず、どのような多自由度系であってもよい。またスペクトルが白色雑音型でなければならないということはなく、統計的平均法が使えるための条件として、不規則過程が何らかの意味で広帯域の外乱でありさえすればよい。

3-2. フラッピング運動の安定解析

この節では他の運動と連成していないフラッピング運動のみの安定性を解析する。フラッピング運動は回転翼ブレードの運動モードの中で一番注目しなければならないモードなので、その性質は他の運動と連成した場合の解析の基礎として十分理解しておかなければならない。第1章において述べたようにフラッピング運動はSis-singh²²⁾やPeters¹²⁾により研究されており、この節での解析は大気乱流が存在する場合への一般化であり、その影響を1次と2次モーメントの安定問題として取扱おうとするものである。

前節で述べた一般的方法で安定解析する前に、前進比μが非常に小さいとし解析的に取扱える場合を考えてみる。このとき表2-2に掲げているK, K_η, K_ξ, C, C_η, C_ξ等の周期関数は正常流領域“1”における表示式で全方位角範囲, 0 ≤ ψ ≤ 2πを包括的に近似できる, 即ち

$$C = B^4/4 + B^3 \mu \bar{S}_1/3$$

$$\begin{aligned} C_\eta &= B^3 \bar{S}_1/3 \\ C_\xi &= B^3 \bar{C}_1/3 \\ K &= B^3 \mu \bar{C}_1/3 \\ K_\eta &= B^3 \bar{C}_1/3 + B^2 \mu \bar{S}_2/2 \\ K_\xi &= -B^3 \bar{S}_1/3 + B^2 \mu \bar{C}_2/2 \end{aligned} \tag{3-2-1}$$

フラッピングの応答を

$$\begin{cases} \beta = A \cos \Gamma \\ \Gamma = p \psi + \theta \end{cases} \tag{3-2-2}$$

として振巾Aの安定性を調べる。Aは緩やかに変化するものとすれば

$$\dot{\beta} = -A p \sin \Gamma \tag{3-2-3}$$

となり, (A, θ)についての微分方程式は次のように書ける。

$$\begin{cases} \dot{A} = P \sin \Gamma A \\ \dot{\theta} = P \cos \Gamma \end{cases} \tag{3-2-4}$$

但し P = -(h + Z₁) sin Γ + Z₂ cos Γ/p

$$h = r B^4/8$$

$$Z_1 = r B^3/2 (\mu \bar{S}_1/3 + \eta \bar{S}_1/3 + \xi \bar{C}_1/3)$$

$$Z_2 = r B^3/2 \{ \mu \bar{C}_1/3 + \eta (\bar{C}_1/3 + \bar{\mu} \bar{S}_2/2) + \xi (-\bar{S}_1/3 + \bar{\mu} \bar{C}_2/2) \}$$

$$\bar{\mu} = \mu / B \tag{3-2-5}$$

(3-2-4)式の右辺について時間平均をとり整理すると次のようになる。

$$\begin{cases} \dot{A} = (-h/2) A + G_1 \\ \dot{\theta} = G_2 \end{cases} \tag{3-2-6}$$

但し G₁ = (G₁₁ η + G₁₂ ξ) A

$$G_2 = G_{21} \eta + G_{22} \xi$$

$$G_{11} = (\bar{\mu}/4p) (\bar{C}_{2-2r} + \bar{C}_{2+2r}) - \bar{S}_1/3 + (1-1/p) \bar{S}_{1-2r}/6 + (1+1/p) \bar{S}_{1+2r}/6$$

$$G_{12} = (\bar{\mu}/4p) (\bar{S}_{2-2r} - \bar{S}_{2+2r}) - \bar{C}_1/3 + (1-1/p) \bar{C}_{1-2r}/6 + (1+1/p) \bar{C}_{1+2r}/6$$

$$G_{21} = (\bar{\mu}/4p) (\bar{S}_{2-2r} + \bar{S}_{2+2r}) + \bar{C}_1/3p + (\bar{\mu}/2p) \bar{S}_2 - (1-1/p) \bar{C}_{1-2r}/6 + (1+1/p) \bar{C}_{1+2r}/6$$

$$G_{22} = (\bar{\mu}/4p) (\bar{C}_{2-2r} + \bar{C}_{2+2r}) - \bar{S}_1/3p + (\bar{\mu}/2p) \bar{C}_2 + (1-1/p) \bar{S}_{1-2r}/6 - (1+1/p) \bar{S}_{1+2r}/6$$

\bar{S}_n, \bar{C}_n の定義は表2-2, 表2-5と同じ。

物理的な意味での微分方程式, (3-2-6)式, を統計的平均法を適用して伊藤型の確率微分方程式に変換する。

$$\begin{cases} dA \\ d\theta \end{cases} = \begin{cases} -Ah/2 + m'_1 \\ m'_2 \end{cases} dt + \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{bmatrix} \begin{cases} dW_1 \\ dW_2 \end{cases} \tag{3-2-7}$$

但し

$$m'_1 = \int_{-\infty}^0 \langle E \left[\frac{\partial G_1(\psi_1)}{\partial A} G_1(\psi_2) + \frac{\partial G_1(\psi_1)}{\partial \nu} G_2(\psi_2) \right] \rangle d\bar{\psi}$$

$$m_2' = \int_{-\infty}^0 \langle E \left[\frac{\partial G_2(\psi_1)}{\partial A} G_1(\psi_2) + \frac{\partial G_2(\psi_1)}{\partial \nu} G_2(\psi_2) \right] \rangle d\bar{\psi} \quad (3-2-8)$$

$$(\sigma\sigma^T)_{ij} = \int_{-\infty}^0 \langle E [G_i(\psi_1) G_j(\psi_2)] \rangle d\bar{\psi} \quad (3-2-9)$$

$\bar{\psi} = \psi_1 - \psi_2$, $\langle \rangle =$ 時間平均

今簡単のため η と ξ は独立で白色雑音とし、スペクトルレベルも同じとする。このとき (3-1-7) 式において A と θ に関する方程式は独立となり、安定性については A に関する方程式のみ着目すればよい。即ち

$$dA = k_1 A dt + \sqrt{k_2} A dW_1 \quad (3-2-10)$$

但し $-Ah/2 + m_1' = k_1 A$

$$(\sigma\sigma^T)_{11} = k_2 A^2$$

$$k_1 = -\tau B^2/16 + (\tau B^3/4)^2 \times \pi S_0 \{ 5/18 + 1/6 p^2 + (\bar{\mu}/p)^2/4 \}$$

$$k_2 = (\tau B^3/4)^2 \pi S_0 \{ 1/3 + 1/9 p^2 + (\bar{\mu}/p)^2/4 \}$$

$$S_0 = \Phi_{\eta\eta} = \Phi_{\xi\xi}$$

この (3-1-10) 式から $E[A]$ についての安定不安定を決めることができる。また A^n について伊藤微分則を適用すれば $E[A^n]$ についての安定不安定条件を決められる。あるいは (3-1-10) 式の係数から A についての遷移確率密度関数 $p_A(a, \psi | a_0, 0)$, $\psi > 0$ を支配する Fokker-Planck の方程式は

$$\frac{\partial p_A}{\partial \psi} = -\frac{\partial}{\partial a} (k_1 a p_A) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial a^2} (k_2 a^2 p_A) \quad (3-2-11)$$

であると分るので、この式の解を使う。即ち (3-2-11) 式で初期条件 $p_A(a, \psi | a_0, 0) \rightarrow \delta(a - a_0)$ as $\psi \rightarrow 0$ を満足する解は

$$p_A(a, \psi | a_0, 0) = \frac{1}{a\sqrt{2\pi k_2 \psi}} \exp \left\{ -\frac{1}{2k_2 \psi} \left[\ln \frac{a}{a_0} + \left(\frac{k_2}{2} - k_1 \right) \psi \right]^2 \right\} \quad (3-2-12)$$

と知られているから、これより n 次のモーメントを求めると次のようになる。

$$M_n(\psi) = E[A^n(\psi)] = A_0^n \exp \left[-\left\{ -k_1 + (1-n)\frac{k_2}{2} \right\} n \psi \right] \quad (3-2-13)$$

安定であるための条件は次のようになる。

$$-k_1 + (1-n)\frac{k_2}{2} > 0 \quad (3-2-14)$$

この結果は前進比が低い領域、即ち $0 \leq \mu \leq 0.3$ の範囲ならば有効と思われる。

数値例を示す前に、通常の大気乱流中を飛行していると、スペクトルレベル $\Phi_{\eta\eta}$, $\Phi_{\xi\xi}$ のとり得る範囲を検討してみる。まずこれらのスペクトルは式の導出の途中で無次元化されている。即ち

$\Phi_{\eta\eta} =$ Spectral density of non-dimensional turbu-

lence velocity $\eta(t)$ versus non-dimensional frequency ω/Ω

このスペクトルを物理的な周波数 ω についてのスペクトルに変換すると

$$\bar{\Phi}_{\eta\eta} = \frac{1}{\Omega} \Phi_{\eta\eta} \quad (3-2-15)$$

大気乱流成分 v についてのスペクトルは

$$\bar{\Phi}_{vv} = (\Omega R)^2 \bar{\Phi}_{\eta\eta} \text{ (m/sec)}^2 / \text{rad/sec} \quad (3-2-16)$$

となる。

大気乱流の統計的性質の中で最も基本的なのはその R.M.S. であろうと思われる。解析上は大気乱流を白色雑音としているが、これは物理的には実現されず数学的に理想化されたものである。しかし実在する現象のスペクトルはある周波数範囲ではほぼ一定で高いレベルを持つものの、ある程度以上の周波数領域になると無視できるくらいの低いレベルとなることが多い。このため遮断周波数 [cut off frequency] というものを導入して、白色雑音型でしかも R.M.S. が有限な外力を想定することができる。力学系の応答は白色雑音によっても遮断周波数を持つ白色雑音型の外力のもとでもあまり変らないことはよく知られている。M.S. とスペクトルレベル、遮断周波数 ω_c との間には

$$\sigma_v^2 = 2\omega_c \bar{\Phi}_{vv} \quad (3-2-17)$$

という関係があり、無次元化されたスペクトルと実際のスペクトルレベル、R.M.S. σ_v を種々の遮断数 $n = \omega_c/\Omega$ について計算した値を表 3-1 に示す。大気乱流の R.M.

Table 3-1. Corresponding Normalized Spectrum Level, Real Spectrum Level and Root Mean Square of Excitation $v(t)$.

$\bar{\Phi}_{\eta\eta}$	$\bar{\Phi}_{\eta\eta} \frac{v v}{(\text{m/sec})^2 \text{rad/sec}}$	σ_v m/sec $n=1$	σ_v m/sec $n=2$	σ_v m/sec $n=3$
3.183×10^{-4}	0.175	2.77	3.92	4.80
6.366×10^{-4}	0.350	3.92	5.54	6.70
9.549×10^{-4}	0.525	4.80	6.79	8.31
1.591×10^{-3}	0.875	6.19	8.77	10.73
2.228×10^{-3}	1.225	7.33	10.37	12.70
3.183×10^{-3}	1.75	8.76	12.40	15.18

$\Omega = 7\pi \text{ rad/sec}$ $R = 5 \text{ m}$

S. はせいぜい 2~3 m/sec であることが多くの実測で分っているので、この表3-1に現われる 10 m/sec 前後の数値はかなり高い値である。ヘリコプターの場合のように隣接するブレードの先端から出る渦による乱れを考慮するとしても、無次元化されたスペクトルレベルで 10^{-3} の程度が実在する最大の大気乱流と考えてよい。

さて不等式、(3-1-14)式、に立戻りこれを満足する領域を考える。 $\mu = 0$ (hovering) の場合に(3-1-14)式は次のようになる。

$$S_0 < 18 / [\pi r B^2 \{n(3+1/p^2) + 2(1+1/p^2)\}] \quad (3-2-18)$$

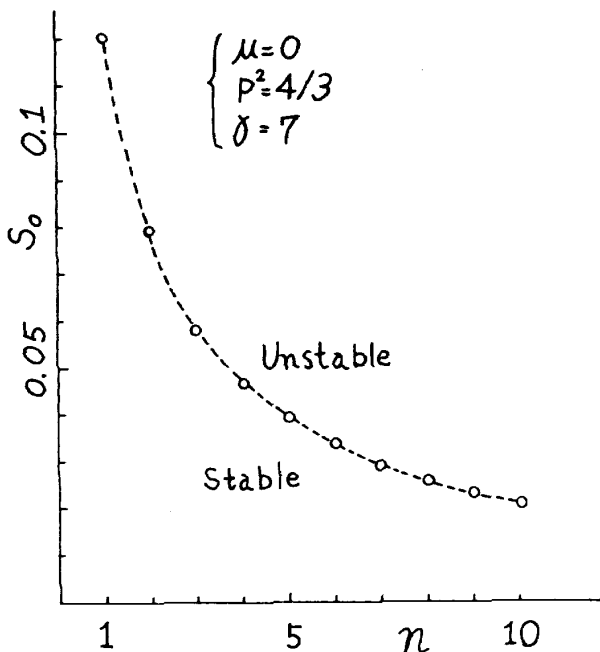


Figure 3-2. Stability Boundaries of Flap Motion at Hovering.

安定不安定の境界線を図3-2に示す。横軸の整数 n はモーメントの次数なので。印以外の中間点で意味を持つものではない。縦軸は無次元化されたスペクトルレベルである。 10^{-2} の程度のスペクトルレベルがあってもフラッピング運動は不安定とならないことが分り、表3-1の R. M. S. から判断してブレードがホバリング中にフラッピングモードだけで不安定となる可能性は低いと云えよう。

次に前節で述べた一般的方法を応用して安定不安定を決める。この場合は時間平均を行なわないので微分方程式の中に微小なパラメータがあるかないかは関係ない。この方法によれば前節で示した 2 種の行列、1 次モーメントのための $[\bar{B}]$ と 2 次モーメントのための $[\bar{\bar{B}}]$ を求めればよいことになる。

フラッピング応答ベクトルを $\{X\} = [\beta, \dot{\beta}]^T$ のように書くと(2-1-17)式は次のようになる。

$$\{\dot{X}\} = [D]\{X\} + [R]\{X\} \quad (3-2-19)$$

$[D]$ や $[R]$ は今の場合次のようになる。

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 - \frac{\gamma}{2}K & -\frac{\gamma}{2}C \end{bmatrix} \quad (3-2-20)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{\gamma}{2}(K_\eta \eta + K_\xi \xi) & -\frac{\gamma}{2}(C_\eta \eta + C_\xi \xi) \end{bmatrix} \quad (3-2-21)$$

$C, C_\eta, C_\xi, K, K_\eta, K_\xi$ 等は方位角 ψ についての周期関数で表2-2に掲げてあるものである。Wong & Zakai の修正項は次のような行列となる。

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} \end{bmatrix} \quad (3-2-22)$$

但し

$$C_{21} = \pi \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 [C_\eta K_\eta \Phi_{\eta\eta} + (C_\eta K_\xi + C_\eta K_\xi) \Phi_{\eta\xi} + C_\xi K_\xi \Phi_{\xi\xi}]$$

$$C_{22} = \pi \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 [C_\eta^2 \Phi_{\eta\eta} + 2C_\eta C_\xi \Phi_{\eta\xi} + C_\xi^2 \Phi_{\xi\xi}]$$

1 次モーメントの安定を決める行列 $[\bar{B}]$ は $[D]$ と $[C]$ の和である。即ち

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -p^2 - \frac{\gamma}{2}K + C_{21} & -\frac{\gamma}{2}C + C_{22} \end{bmatrix} \quad (3-2-23)$$

2 次モーメントの安定を決める行列 $[\bar{\bar{B}}]$ は

$$[\bar{\bar{B}}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & 1 \\ S_{31} & 2\bar{B}_{21} + S_{32} & 2\bar{B}_{22} + S_{33} \end{bmatrix} \quad (3-2-24)$$

但し

$$\bar{B}_{21} = -p^2 - \frac{\gamma}{2}K + C_{21}$$

$$\bar{B}_{22} = -\frac{\gamma}{2}C + C_{22}$$

$$S_{31} = \pi \frac{\gamma^2}{2} [K_\eta^2 \Phi_{\eta\eta} + 2K_\eta K_\xi \Phi_{\eta\xi} + K_\xi^2 \Phi_{\xi\xi}]$$

$$S_{32} = 4 C_{21}$$

$$S_{33} = 2 C_{22}$$

応答ベクトル $\{X\}$ は 2 次元なので、2 次モーメントのベクトル $\{Y_i\}$ は次のように 3 次元となる。

$$\{E[Y_i]\} = \begin{Bmatrix} E[X_1 X_1] \\ E[X_1 X_2] \\ E[X_2 X_2] \end{Bmatrix} \quad (3-2-25)$$

2 次モーメントの安定はフラッピング角とその微分(速度)についての相関々数や相互相関々数の有界を意味し、1 次モーメント安定はそれらの平均値のみの有界を意味する。

この一般的方法に基づいて計算した安定不安定境界線

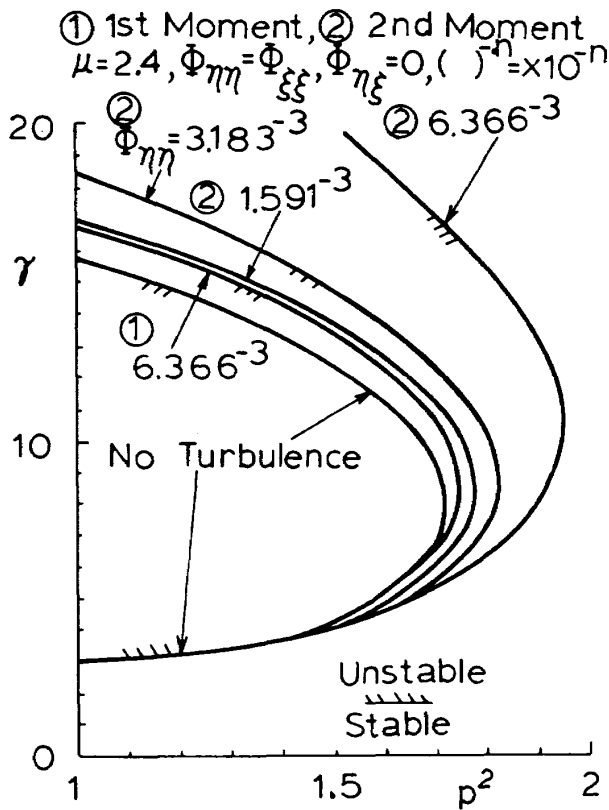


Figure 3-3. First and Second Moment Stability Boundaries of Flap Motion.

の例を図3-3に示す。これは前進比 $\mu=2.4$ の場合の領域を (p^2, γ) 平面上に掲げたものである。進行方向とそれに垂直な方向の大気乱流成分は無相関であり、同じスペクトルレベルを持つとしている。このように不安定領域が大気乱流のスペクトルレベルが高くなるにつれて広がるのが分かる。また1次モーメント安定は2次モーメント安定の中に含まれる。即ち2次モーメントが安定であれば1次モーメントも安定である。このことは Schwartz の不等式からも結論されることである。この図3-3で大気乱流のない場合の曲線はアナログ計算機²²⁾や Floquet 遷移行列法¹²⁾による結果と同じであることは云うまでもない。不安定領域はかなり高いスペクトルレベル、 $\Phi_{\eta\eta} \approx 10^{-3}$ 、の下でもあまり拡大しないで、フラッピングのみの運動は大気乱流に対して鈍感であると言える。これは解析に用いた(2-1-7)式で減衰項の定数部分 $rB^4/8$ が0(1)の程度なので系の特性は強い乱れがあってもあまり変わらないためと思われる。

従来固定翼機の突風応答を考えると、大気乱流は均一で等質なものとして仮定することが多い。ヘリコプターの運動を取扱うときも同様な大気乱流モデルを考えてよいが、ヘリコプターは通常の航空機よりかなり低空を飛ぶことがあるので一方向の大気乱流を考えるのも多少の参

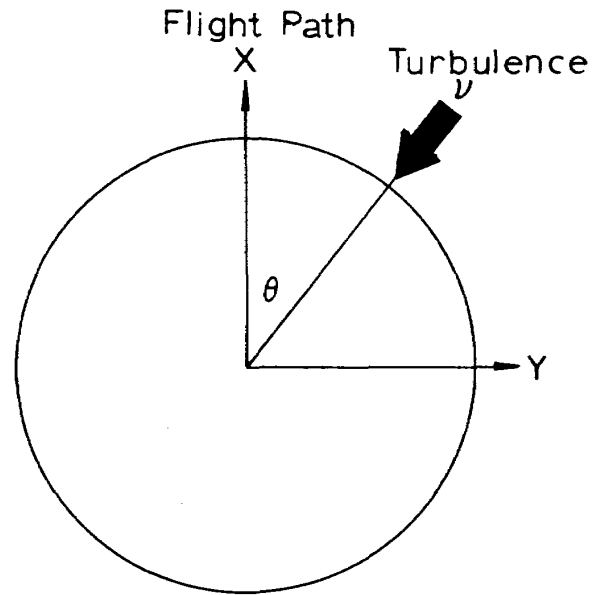


Figure 3-4. One-Dimensional Horizontal Turbulence from Arbitrary Direction.

考となろう。飛行高度が低いと大気乱流も等質でなく一方向にのみ強いということもよくあることである。以下に安定不安定領域がどのくらい指向性を持っているか検討する。

フラッピング運動の安定性は垂直方向の乱流成分に関係ないので、図3-4に示すようにブレードの回転面内で一方向乱流を考える。 θ は進行方向から乱流を望む角度である。このとき飛行方向とそれに垂直方向の成分は次のようになる。

$$\begin{aligned} \eta(t) &= v(t) \cos \theta \\ \xi(t) &= v(t) \sin \theta \end{aligned} \quad (3-2-26)$$

一般にこの大気乱流 $v(t)$ は変動分の外に平均値を有しているが、今簡単のため $E[v(t)] \approx 0$ とする。このときスペクトルや相互スペクトルはそれぞれ次のように書ける。

$$\begin{aligned} \Phi_{\eta\eta} &= \Phi_{vv} \cos^2 \theta \\ \Phi_{\xi\xi} &= \Phi_{vv} \sin^2 \theta \\ \Phi_{\eta\xi} &= \Phi_{vv} \sin \theta \cos \theta \end{aligned} \quad (3-2-27)$$

図3-4から分かるように、 $\theta=90^\circ$ と $\theta=-90^\circ$ の方向からの大気乱流は同じ効果を持つ。しかしその中間 $-90^\circ < \theta < 90^\circ$ においては θ の値により影響は異なる。

右側方向($0 < \theta < 90^\circ$)から大気乱流がブレードに当たる場合の1次モーメント安定不安定境界を図3-5に、2次モーメントのそれを図3-6に示す。左側方向($-90^\circ < \theta < 0$)の場合の1次モーメント、2次モーメントをそれぞれ図3-7、図3-8に示す。これらの図から分かることは、スペクトルレベルが同じでも安定不安定領域が当る

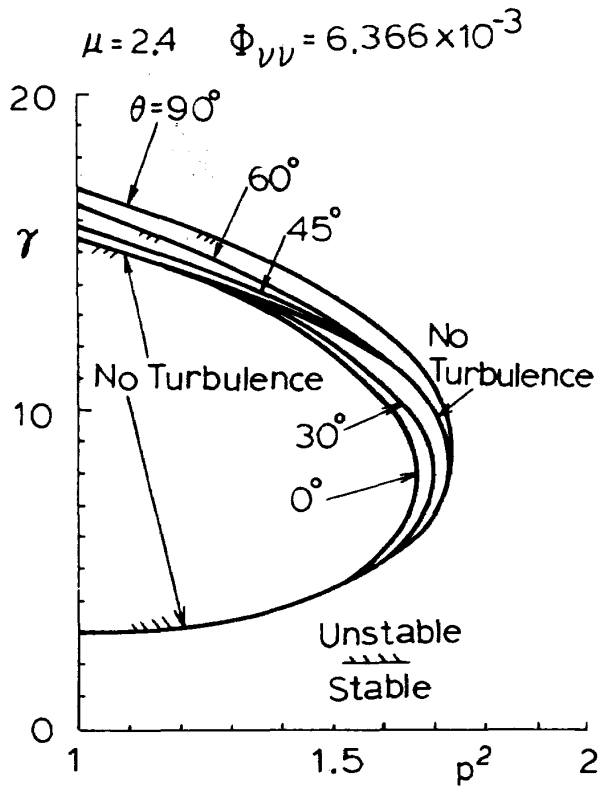


Figure 3-5. First Moment Stability Boundaries of Flap Motion due to One-Dimensional Right-Sided Turbulence.

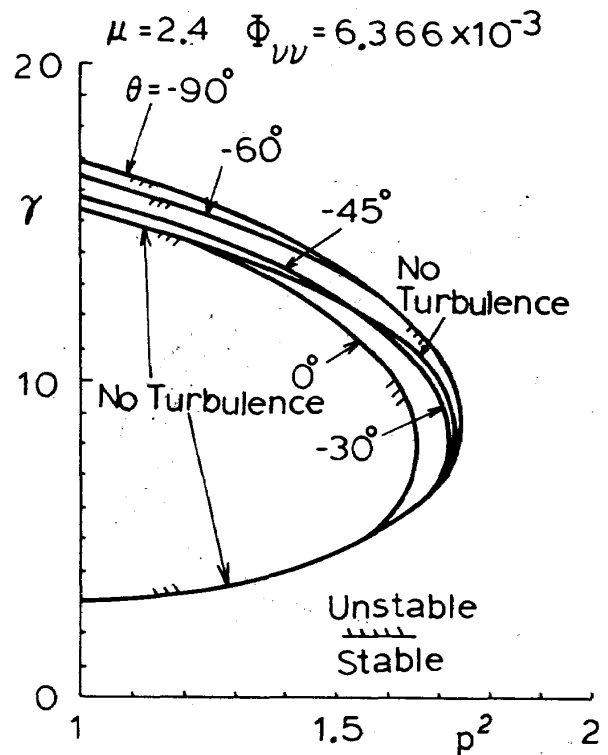


Figure 3-7. First Moment Stability Boundaries of Flap Motion due to One-Dimensional Left-Sided Turbulence.

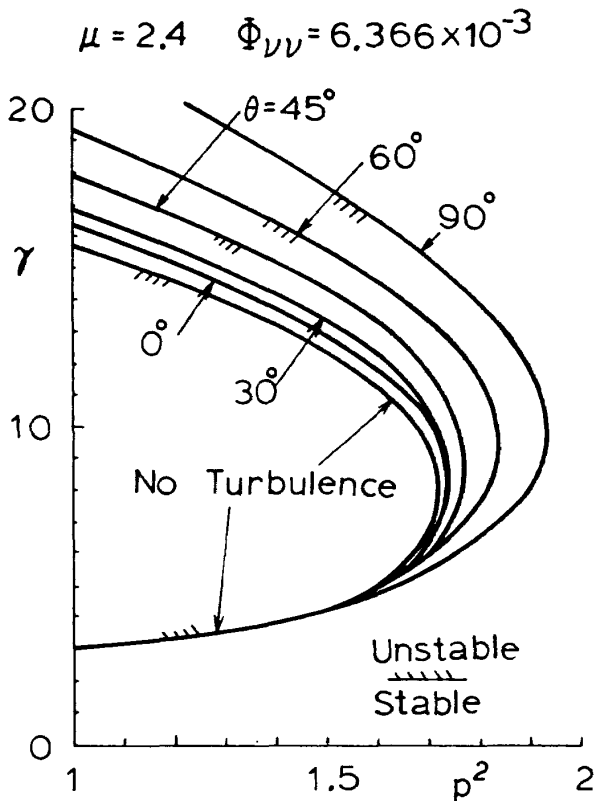


Figure 3-6. Second Moment Stability Boundaries of Flap Motion due to One-Dimensional Right-Sided Turbulence.

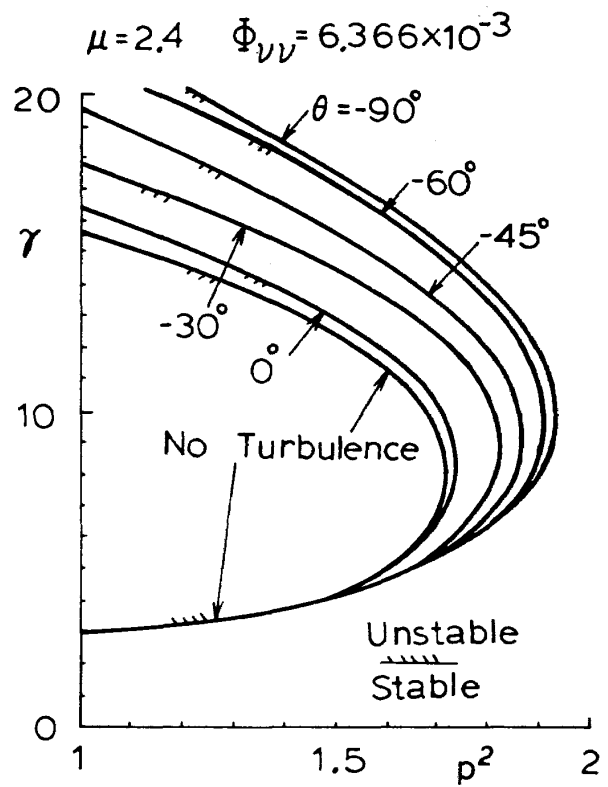


Figure 3-8. Second Moment Stability Boundaries of Flap Motion due to One-Dimensional Left-Sided Turbulence.

方向によりかなり変化すること、進行方向に垂直な方向からの大気乱流により最も不安定領域が拡大すること、1次モーメントの場合には方向によっては不安定領域が減少してくることもあること、等である。

力学系の安定不安定について判断する上で、1次モーメントが安定であっても、それは平均値が有界であるだけだから変動分は大きくなり得るので、2次モーメントが安定であることが大切である。またここに示したフラッピングのみの運動について見れば、1次モーメントの不安定領域は大気乱流のスペクトルレベルがかなり高くないと変化しないので、1次モーメント安定を実用上の目安とすることはできない。

3-3. フラッピングと捩れの連成運動の安定解析

この節ではフラッピングと捩れの連成した系について安定性を検討する。大気乱流が存在しない場合は既に Sissingh & Kuczynski²³⁾により解析されているので、この節の内容は大気乱流がある場合へと拡張したものにならない。ここで問題とするのは先と同様に1次、2次モーメントについての安定不安定である。これらの判定のために必要な2つの行列 $[\bar{B}]$, $[\bar{B}]$ を3章1節で示した一般的方法を使って求める。用いる方程式は2章2節で導いた(2-2-13)式である。

応答ベクトルを $\{X\} = [\beta, \dot{\beta}, \alpha, \dot{\alpha}]^T$ とすると(2-2-13)式は次のように書ける。

$$\{\dot{X}\} = [D]\{X\} + [R]\{X\} \tag{3-3-1}$$

但し

$$[D] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \tag{3-3-2}$$

$$[R] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{21} & R_{22} & R_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ R_{41} & R_{42} & R_{43} & R_{44} \end{bmatrix} \tag{3-3-3}$$

$[D]$ や $[R]$ の中で周期関数を含んだ要素を書き上げると

$$D_{21} = -p^2 - \frac{\gamma}{2} K$$

$$D_{22} = -\frac{\gamma}{2} C$$

$$D_{23} = \frac{\gamma}{2} m_{\theta_1}$$

$$D_{41} = -3\gamma Q l_{r\beta}$$

$$D_{42} = -3\gamma Q l_{r\dot{\beta}}$$

$$D_{43} = -\omega_a^2 - 3\gamma Q K_a$$

$$D_{44} = -3\gamma F C_a$$

$$R_{21} = -\frac{\gamma}{2} (K_\eta \eta + K_\xi \xi)$$

$$R_{22} = -\frac{\gamma}{2} (C_\eta \eta + C_\xi \xi)$$

$$R_{23} = \frac{\gamma}{2} (m_{\theta_1 \eta} \eta + m_{\theta_1 \xi} \xi)$$

$$R_{41} = -3\gamma Q (l_{r\beta \eta} \eta + l_{r\beta \xi} \xi)$$

$$R_{42} = -3\gamma Q (l_{r\dot{\beta} \eta} \eta + l_{r\dot{\beta} \xi} \xi)$$

$$R_{43} = -3\gamma Q (K_{a\eta} \eta + K_{a\xi} \xi)$$

$$R_{44} = -3\gamma F (C_{a\eta} \eta + C_{a\xi} \xi)$$

この中で $K, K_\eta, K_\xi, C, C_\eta, C_\xi, m_{\theta_1}, m_{\theta_1 \eta}, m_{\theta_1 \xi}$ は ψ についての周期関数で表2-2に与えられている。また、 $l_{r\beta}, l_{r\beta \eta}, l_{r\beta \xi}, l_{r\dot{\beta}}, l_{r\dot{\beta} \eta}, l_{r\dot{\beta} \xi}, K_a, K_{a\eta}, K_{a\xi}, C_a, C_{a\eta}, C_{a\xi}$ も ψ についての周期関数で表2-5に与えられている。Wong & Zakaiの修正項は次のような行列となる。

$$[C] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} \end{bmatrix} \tag{3-3-4}$$

但し

$$C_{21} = T_{2221}$$

$$C_{22} = T_{2232}$$

$$C_{23} = T_{2322}$$

$$C_{41} = T_{4221} + T_{4441}$$

$$C_{42} = T_{4222} + T_{4442}$$

$$C_{43} = T_{4223} + T_{4443}$$

$$\tag{3-3-5}$$

$$T_{2221} = \pi \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 [K_\eta C_\eta \Phi_{\eta\eta} + K_\xi C_\xi \Phi_{\xi\xi} + (C_\eta K_\xi + C_\xi K_\eta) \Phi_{\eta\xi}]$$

$$T_{2222} = \pi \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 [C_\eta^2 \Phi_{\eta\eta} + C_\xi^2 \Phi_{\xi\xi} + 2C_\eta C_\xi \Phi_{\eta\xi}]$$

$$T_{2322} = -\pi \left(\frac{\gamma}{2}\right)^2 [C_\eta m_{\theta_1 \eta} \Phi_{\eta\eta} + C_\xi m_{\theta_1 \xi} \Phi_{\xi\xi} + (C_\eta m_{\theta_1 \xi} + C_\xi m_{\theta_1 \eta}) \Phi_{\eta\xi}]$$

$$T_{4221} = \frac{3}{2} \pi \gamma^2 Q [K_\eta l_{r\beta \eta} \Phi_{\eta\eta} + K_\xi l_{r\beta \xi} \Phi_{\xi\xi} + (K_\eta l_{r\beta \xi} + K_\xi l_{r\beta \eta}) \Phi_{\eta\xi}]$$

$$T_{4222} = \frac{3}{2} \pi \gamma^2 Q [l_{r\beta \eta} C_\eta \Phi_{\eta\eta} + l_{r\beta \xi} C_\xi \Phi_{\xi\xi} + (l_{r\beta \eta} C_\xi + l_{r\beta \xi} C_\eta) \Phi_{\eta\xi}]$$

$$T_{4223} = -\frac{3}{2} \pi \gamma^2 Q [l_{r\dot{\beta} \eta} m_{\theta_1 \eta} \Phi_{\eta\eta} + l_{r\dot{\beta} \xi} m_{\theta_1 \xi} \Phi_{\xi\xi} + (l_{r\dot{\beta} \eta} m_{\theta_1 \xi} + l_{r\dot{\beta} \xi} m_{\theta_1 \eta}) \Phi_{\eta\xi}]$$

$$T_{4441} = 9\pi \gamma^2 F Q [l_{r\beta \eta} C_{a\eta} \Phi_{\eta\eta} + l_{r\beta \xi} C_{a\xi} \Phi_{\xi\xi} + (l_{r\beta \eta} C_{a\xi} + l_{r\beta \xi} C_{a\eta}) \Phi_{\eta\xi}]$$

$$T_{4442} = 9\pi \gamma^2 F Q [l_{r\dot{\beta} \eta} C_{a\eta} \Phi_{\eta\eta} + l_{r\dot{\beta} \xi} C_{a\xi} \Phi_{\xi\xi} + (l_{r\dot{\beta} \eta} C_{a\xi} + l_{r\dot{\beta} \xi} C_{a\eta}) \Phi_{\eta\xi}]$$

$$T_{4443} = 9\pi \gamma^2 F Q [K_{a\eta} C_{a\eta} \Phi_{\eta\eta} + K_{a\xi} C_{a\xi} \Phi_{\xi\xi} + (K_{a\eta} C_{a\xi} + K_{a\xi} C_{a\eta}) \Phi_{\eta\xi}]$$

$$T_{4444} = 9\pi \gamma^2 F^2 [C_{a\eta}^2 \Phi_{\eta\eta} + C_{a\xi}^2 \Phi_{\xi\xi} + 2C_{a\eta} C_{a\xi} \Phi_{\eta\xi}]$$

$$\tag{3-3-6}$$

上の T_{ijkl} に付いている 4 桁の添字 $i j k l$ は、行列 $[R]$ の (i, j) と (k, l) 要素の見かけ上の積を意味している。積の作り方は (3-1-6) 式に従う。

1 次モーメントのための行列 $[\bar{B}]$ は $[D]$ と $[C]$ の和として次のようになる。

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ D_{21}+C_{21} & D_{22}+C_{22} & D_{23}+C_{23} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ D_{41}+C_{41} & D_{42}+C_{42} & D_{43}+C_{43} & D_{44}+C_{44} \end{bmatrix} \quad (3-3-7)$$

次に 2 次モーメントのための行列 $[\bar{B}]$ を求める。(3-1-10, 12) 式で示したように $[\bar{B}] = [A] + [S]$ であるから、まず $[S]$ の「0」でない要素を求めると次のようになる。

$$\begin{aligned} S_{21} &= V_{2121} \\ S_{52} &= 4 T_{2221} \\ S_{55} &= 2 T_{2222} \\ S_{53} &= 2 V_{2321} \\ S_{56} &= 4 T_{2322} \\ S_{58} &= V_{2323} \\ S_{71} &= V_{4121} \\ S_{72} &= 2 T_{4221} + T_{4122} \\ S_{73} &= V_{4321} + V_{4123} \\ S_{74} &= V_{4421} \\ S_{75} &= 2 T_{4222} \\ S_{76} &= V_{4322} + 2 T_{4223} \\ S_{77} &= V_{4422} \\ S_{78} &= V_{4323} \\ S_{79} &= V_{4423} \\ S_{10,1} &= V_{4141} \\ S_{10,2} &= 2 V_{4241} \\ S_{10,3} &= 2 V_{4341} \\ S_{10,4} &= 4 T_{4441} \\ S_{10,5} &= V_{4242} \\ S_{10,6} &= 2 V_{4342} \\ S_{10,7} &= 2 V_{4442} \\ S_{10,8} &= V_{4343} \\ S_{10,9} &= 4 T_{4443} \\ S_{10,10} &= 2 T_{4444} \end{aligned} \quad (3-3-8)$$

但し

$$\begin{aligned} V_{2121} &= \frac{\pi \gamma^2}{2} [K_\eta^2 \Phi_{\eta\eta} + K_\xi^2 \Phi_{\xi\xi} + 2K_\eta K_\xi \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{2323} &= \frac{\pi \gamma^2}{2} [m_{\theta_1\eta}^2 \Phi_{\eta\eta} + m_{\theta_1\xi}^2 \Phi_{\xi\xi} + 2m_{\theta_1\eta} m_{\theta_1\xi} \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4121} &= 3\pi \gamma^2 Q [K_\eta l_{r\beta\eta} \Phi_{\eta\eta} + K_\xi l_{r\beta\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (K_\eta l_{r\beta\xi} + K_\xi l_{r\beta\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4122} &= 3\pi \gamma^2 Q [C_\eta l_{r\beta\eta} \Phi_{\eta\eta} + C_\xi l_{r\beta\xi} \Phi_{\xi\xi} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &+ (C_\eta l_{r\beta\xi} + C_\xi l_{r\beta\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4123} &= -3\pi \gamma^2 Q [m_{\theta_1\eta} l_{r\beta\eta} \Phi_{\eta\eta} + m_{\theta_1\xi} l_{r\beta\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (m_{\theta_1\eta} l_{r\beta\xi} + m_{\theta_1\xi} l_{r\beta\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4321} &= 3\pi \gamma^2 Q [K_\eta K_{\alpha\eta} \Phi_{\eta\eta} + K_\xi K_{\alpha\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (K_\eta K_{\alpha\xi} + K_\xi K_{\alpha\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4421} &= 3\pi \gamma^2 F [K_\eta C_{\alpha\eta} \Phi_{\eta\eta} + K_\xi C_{\alpha\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (K_\eta C_{\alpha\xi} + K_\xi C_{\alpha\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4322} &= 3\pi \gamma^2 Q [C_\eta K_{\alpha\eta} \Phi_{\eta\eta} + C_\xi K_{\alpha\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (C_\eta K_{\alpha\xi} + C_\xi K_{\alpha\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4422} &= 3\pi \gamma^2 F [C_\eta C_{\alpha\eta} \Phi_{\eta\eta} + C_\xi C_{\alpha\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (C_\eta C_{\alpha\xi} + C_\xi C_{\alpha\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4323} &= -3\pi \gamma^2 Q [m_{\theta_1\eta} K_{\alpha\eta} \Phi_{\eta\eta} + m_{\theta_1\xi} K_{\alpha\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (m_{\theta_1\eta} K_{\alpha\xi} + m_{\theta_1\xi} K_{\alpha\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4423} &= -3\pi \gamma^2 F [m_{\theta_1\eta} C_{\alpha\eta} \Phi_{\eta\eta} + m_{\theta_1\xi} C_{\alpha\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (m_{\theta_1\eta} C_{\alpha\xi} + m_{\theta_1\xi} C_{\alpha\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4141} &= 18\pi \gamma^2 Q^2 [l_{r\beta\eta}^2 \Phi_{\eta\eta} + l_{r\beta\xi}^2 \Phi_{\xi\xi} + 2l_{r\beta\eta} l_{r\beta\xi} \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4241} &= 18\pi \gamma^2 Q^2 [l_{r\beta\eta} l_{r\beta\xi} \Phi_{\eta\eta} + l_{r\beta\xi} l_{r\beta\eta} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (l_{r\beta\eta} l_{r\beta\xi} + l_{r\beta\xi} l_{r\beta\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4341} &= 18\pi \gamma^2 Q^2 [l_{r\beta\eta} K_{\alpha\eta} \Phi_{\eta\eta} + l_{r\beta\xi} K_{\alpha\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (l_{r\beta\eta} K_{\alpha\xi} + l_{r\beta\xi} K_{\alpha\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4242} &= 18\pi \gamma^2 Q^2 [l_{r\beta\eta}^2 \Phi_{\eta\eta} + l_{r\beta\xi}^2 \Phi_{\xi\xi} + 2l_{r\beta\eta} l_{r\beta\xi} \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4342} &= 18\pi \gamma^2 Q^2 [l_{r\beta\eta} l_{r\beta\xi} \Phi_{\eta\eta} + l_{r\beta\xi} l_{r\beta\eta} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (l_{r\beta\eta} l_{r\beta\xi} + l_{r\beta\xi} l_{r\beta\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4343} &= 18\pi \gamma^2 Q^2 [K_{\alpha\eta}^2 \Phi_{\eta\eta} + K_{\alpha\xi}^2 \Phi_{\xi\xi} + 2K_{\alpha\eta} K_{\alpha\xi} \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{2321} &= -\frac{\pi \gamma^2}{2} [m_{\theta_1\eta} K_\eta \Phi_{\eta\eta} + m_{\theta_1\xi} K_\xi \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (m_{\theta_1\eta} K_\xi + m_{\theta_1\xi} K_\eta) \Phi_{\eta\xi}] \\ V_{4123} &= -3\pi \gamma^2 Q [l_{r\beta\eta} m_{\theta_1\eta} \Phi_{\eta\eta} + l_{r\beta\xi} m_{\theta_1\xi} \Phi_{\xi\xi} \\ &\quad + (l_{r\beta\eta} m_{\theta_1\xi} + l_{r\beta\xi} m_{\theta_1\eta}) \Phi_{\eta\xi}] \end{aligned} \quad (3-3-9)$$

この V_{ijkl} の 4 桁の添字 $i j k l$ も $[R]$ の (i, j) と (k, l) 要素の見かけの積を表わす。しかしこの場合 (3-1-7) 式に従って積を作るものとする。 $[A]$ の要素計算は (3-1-13) 式に従って行う。 $[S]$ と $[A]$ とを加算して最終的な行列 $[\bar{B}]$ は次のようになる。

$$[\bar{B}] = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \bar{B}_{21} & \bar{B}_{22} & \bar{B}_{23} & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ \bar{B}_{41} & \bar{B}_{42} & \bar{B}_{43} & \bar{B}_{44} & 0 \\ S_{51} & S_{52} + 2\bar{B}_{21} & S_{53} & 0 & S_{55} + 2\bar{B}_{22} \\ 0 & 0 & \bar{B}_{21} & 0 & 0 \\ S_{71} & S_{72} + \bar{B}_{41} & S_{73} & S_{74} + \bar{B}_{21} & S_{75} + \bar{B}_{42} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \bar{B}_{41} & 0 & 0 \\ S_{10,1} & S_{10,2} & S_{10,3} & S_{10,4} + 2\bar{B}_{41} & S_{10,5} \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix}
 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 \\
 1 & 0 & 0 \\
 0 & 1 & 0 \\
 S_{56}+2\bar{B}_{23} & 0 & S_{58} \\
 \bar{B}_{22} & 1 & \bar{B}_{23} \\
 S_{76}+\bar{B}_{43} & S_{77}+\bar{B}_{22}+\bar{B}_{44} & S_{78} \\
 0 & 0 & 0 \\
 \bar{B}_{42} & 0 & \bar{B}_{43} \\
 S_{10,6} & S_{10,7}+2\bar{B}_{42} & S_{10,8} \\
 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 0 & 0 \\
 S_{79}+\bar{B}_{23} & 0 \\
 2 & 0 \\
 \bar{B}_{44} & 1 \\
 S_{10,9}+2\bar{B}_{43} & S_{10,10}+2\bar{B}_{44}
 \end{matrix} \quad (3-3-10)$$

今2次モーメントのベクトルは(3-1-11)式に従い次のようになっている。

$$\{E[Y_i]\} = \{E[X_i X_j]\} = \begin{Bmatrix} E[X_1 X_1] \\ E[X_1 X_2] \\ E[X_1 X_3] \\ E[X_1 X_4] \\ E[X_2 X_2] \\ E[X_2 X_3] \\ E[X_2 X_4] \\ E[X_3 X_3] \\ E[X_3 X_4] \\ E[X_4 X_4] \end{Bmatrix} \quad (3-3-11)$$

フラッピングのみの場合には行列 $[\bar{B}]$ の大きさは 3×3 であったが、捩れと連成すると 10×10 と大きくなる。このため計算時間が多くかかる。もし $[D]$ や $[R]$ の次元が多く「0」でない要素が多いとすると行列 $[B]$ や $[\bar{B}]$ の計算を計算機プログラムの中で自動的に行えるようにすることは可能である。その方が誤りを少なくするという点で都合がよいこともあろう。しかしこの回転翼ブレードの問題では「0」要素もかなりあり、次元数も大きくはないので式の上で最終的な表示を与えた。

このフラッピングと捩れの連成系についても垂直方向の大気乱流成分は安定問題には関係なく、一方向大気乱流に対する指向性を考えるときも、前節と同様平面内の方向性を検討するだけでよい。

等質な大気乱流の下での安定不安定の例を図3-9に示す。大気乱流のない場合の境界線(基準線)はアナログ

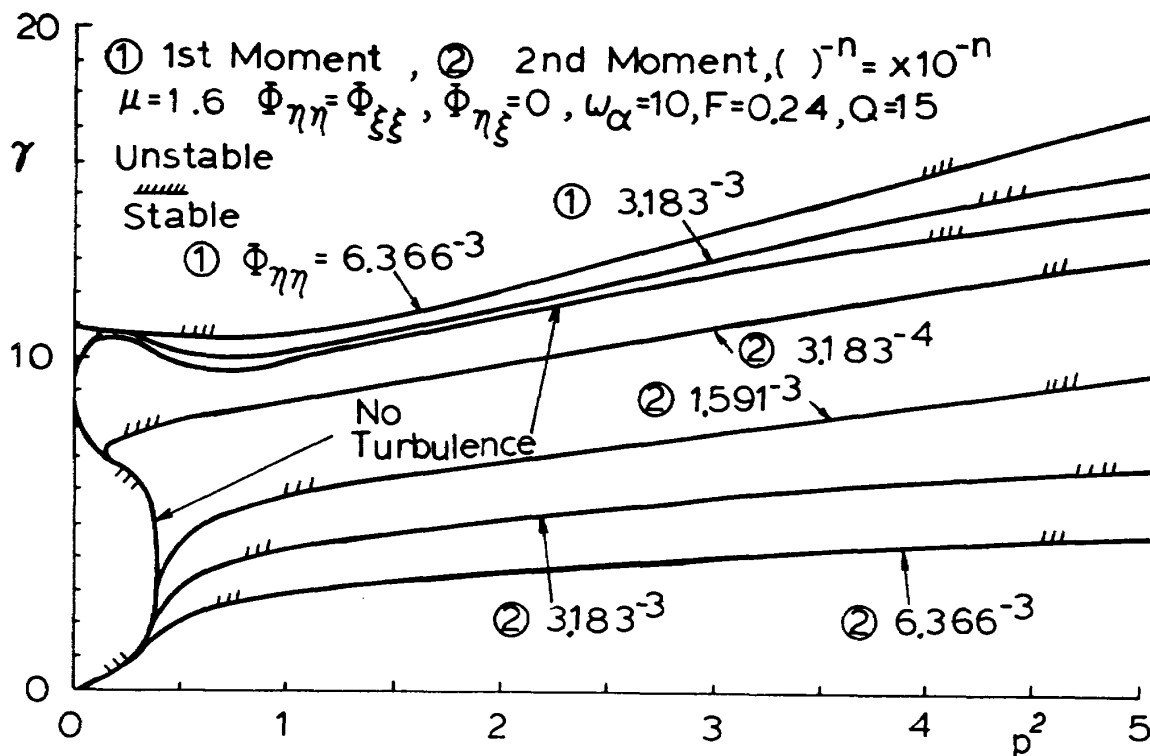


Figure 3-9. First and Second Moment Stability Boundaries of Flap-Torsion Motion.

計算²³⁾による結果と同じものである。これより大気乱流の存在によって1次モーメント、2次モーメントの安定不安定領域が変化する様子が分るのである。1次モーメントの不安定領域は僅かながら減少する傾向にあるが、2次モーメントのそれは常に増大する。フラッピングのみの場合の数値例と同じく、2次モーメント安定は常に1次モーメント安定を含んでいる。この場合基準線が $p^2 > 1$ の範囲ではほぼ直線となっているので、境界線はすべて直線が少し下へ押し下げられた状況となっている。

決定論的な係数励振の問題では Mathieu-Hill 型の微分方程式に代表されるように、主な不安定が系の固有振動数の $1/2$ の振動数で起きるとされている。今考えている場合では $p^2 \approx 0.25$ の近傍で不安定が生ずることになる。そのため図3-9で $0 < p^2 < 1$ の領域の安定不安定境界線が $1 < p^2$ における傾向とは少し離れることになる。しかしフラッピング方向の剛性は常に $1 < p^2$ であるから²⁹⁾ $0 < p^2 < 1$ の範囲の結果は實際上意味はない。

フラッピングと捩れの連成した系においてもフラッピングのみの場合と同様に2次モーメント安定が必要であるので、図3-9においても1次モーメントの結果についてはあまり注目しなくてよい。この連成したときはフラッピングのみの場合と比較するとはるかに低いスペクトルレベル($\approx 10^{-4}$)で不安定領域がかなり拡大する。この

ため通常的气象条件における大気乱流の下で、この連成系の安定性はかなり悪化することが予想される。

一方向大気乱流が当たるときも前節と同様に検討した。右側、左側方向の結果をそれぞれ図3-10、3-11に示す。方向を示す角度の取り方は図3-4に示した通りである。これらにより応答の安定性が指向性を持っていることが明らかとなった。この場合 $\theta = 0^\circ$ 、即ち進行方向から、大気乱流が当たるとき不安定領域が最も大きくなる。フラッピングのみの場合は図3-6や図3-8から分るように進行方向に垂直な方向($\theta = 90^\circ$)から大気乱流が当たったとき不安定領域が最大となったのと比べると位相が 90° ずれていることになるが、これについての明確な理由は分っていない。

第4章 結 論

この研究から得られた結論を総括すると次のようになる。

- 1) 回転翼ブレードが三次元大気乱流中を飛行するとき、そのフラッピング運動やフラッピングと捩れの連成運動を支配する方程式は周期関数と不規則変数を係数に持つ微分方程式となる。
- 2) フラッピング運動、フラッピングと捩れの連成運動にとって水平面内の2ケの大気乱流成分は係数励振と

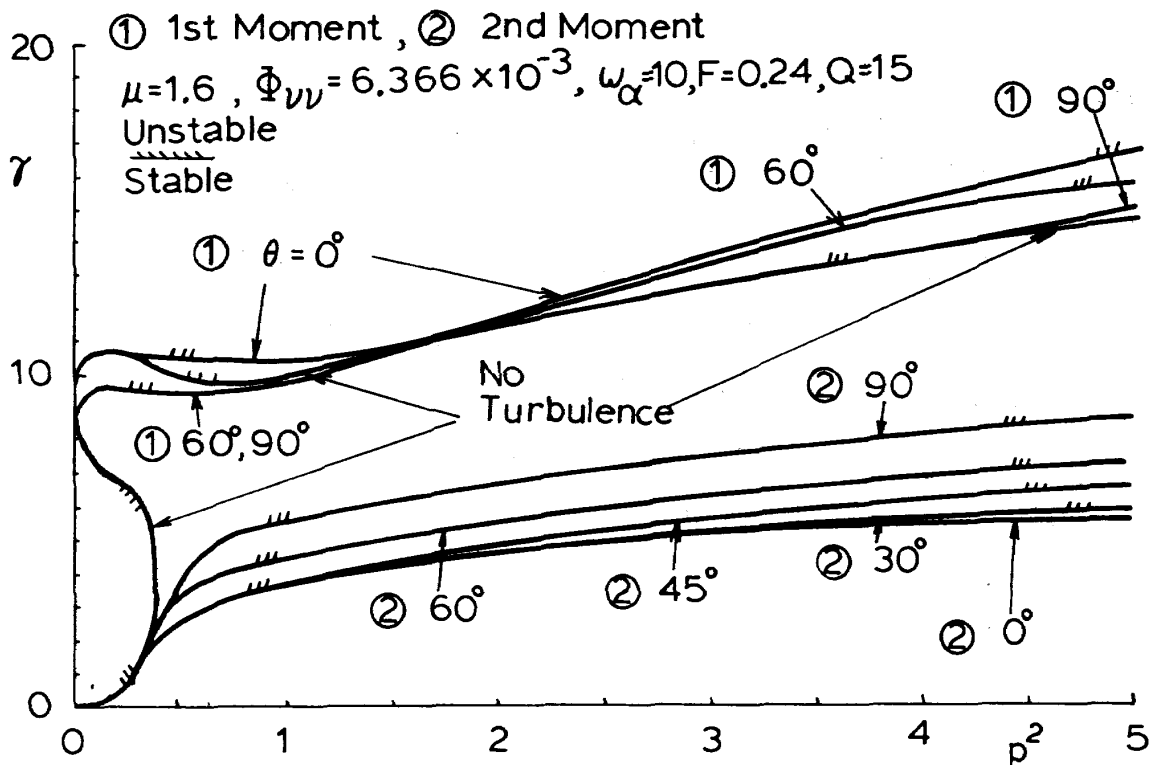


Figure 3-10. First and Second Moment Stability Boundaries of Flap-Torsion Motion due to One-Dimensional Right-Sided Turbulence.

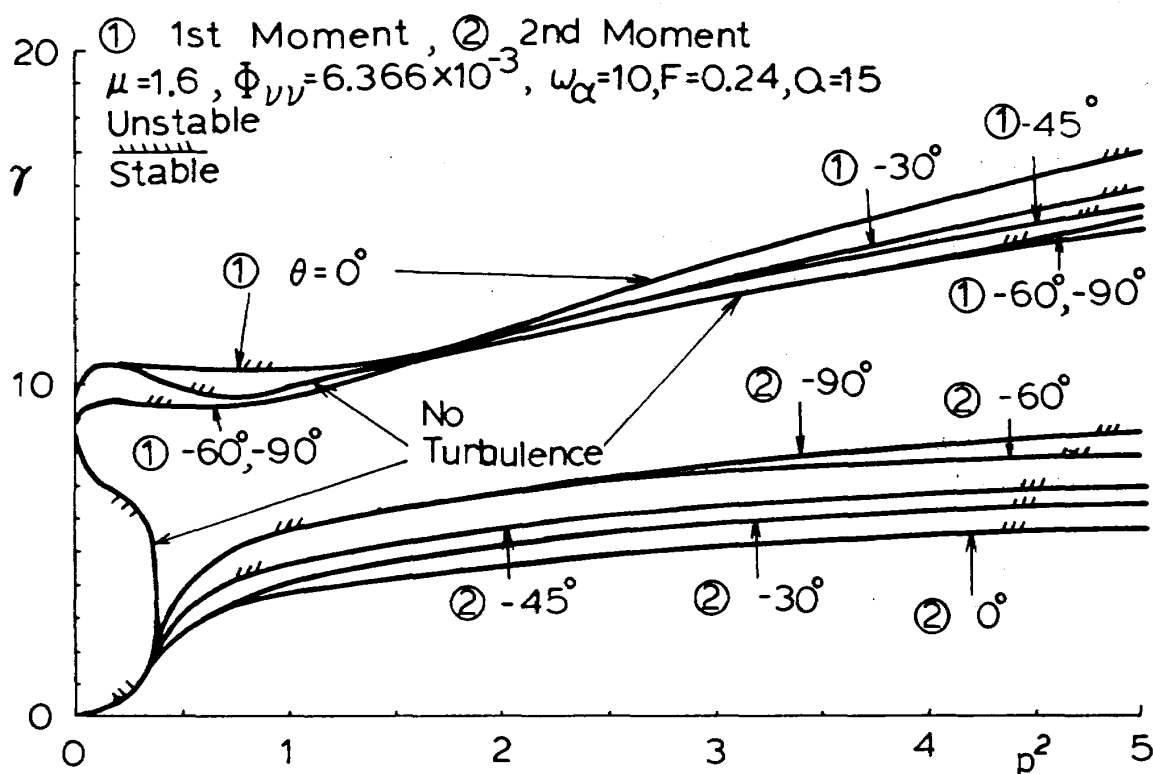


Figure 3-11. First and Second Moment Stability Boundaries of Flap-Torsion Motion due to One-Dimensional Left-Sided Turbulence.

なるが、垂直方向の成分は純粋な外力である。

3) 回転翼ブレードの安定問題解析のため新しく提案した方法は Markov 過程における諸定理と Floquet 遷移行列の数値計算を併用している。この方法は周期関数や不規則な係数を含む一般の微分方程式に適用可能である。具体的にはフラッピング運動とフラッピングと捩れの連成運動についての1次、2次モーメントの安定条件決定に適用し、方法が有効であることを示した。

4) 本解析法は回転翼のすべての飛行速度範囲にわたって有効である。

5) 数値計算により次のことが明らかとなった。

2次モーメント安定は自動的に1次モーメント安定を意味する。また1次モーメントは実用上安定不安定の判定には不十分であり2次モーメント安定の条件を求めな

ければならない。

6) フラッピング運動のみの場合：ホバリング時では大気乱流のスペクトルレベルがかなり高くなっても系が不安定となることはない。また高速飛行時では系の不安定領域が実際にはあり得ないような高いスペクトルレベルでないと拡大しないので、大気乱流の影響はあまり考えなくてよい。

7) フラッピングと捩れの連成運動の場合：高速飛行時では不安定領域が通常の大気乱流スペクトルレベルでもかなり拡大するので、大気乱流の影響を無視できない。

8) 一方向だけの大気乱流を考えると、フラッピングのみの場合には進行方向に垂直な方向からの大気乱流に最も敏感であり、フラッピングと捩れの連成系においては進行方向の乱流に対して最も敏感である。

REFERENCES

1. Young, R. A., "Helicopter Engineering." New York: The Ronald Press, 1949.
2. Nikolsky, A. A., "Helicopter Analysis." New York: Wiley, 1951.
3. Gessow, A. and Myers, G. C., Jr., "Aerodynamics of the Helicopters." New York: Frederick Ungar, 1967.

4. McCormick, B. W., Jr., "Aerodynamics of V/STOL Flight." New York: Academic Press, 1967.
5. Saunders, G. H., "Dynamics of Helicopter Flight." New York: Wiley, 1975.
6. Bramwell, A. R. S., "Helicopter Dynamics." New York: Wiley, 1976.
7. Loewy, R. G., "Review of Rotary-Wing V/STOL Dynamic and Aeroelastic Problems," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 14, No. 3, (July, 1969), pp. 3–23.
8. "Rotorcraft Dynamics." Ames Research Center Conference Report. NASA SP-352, 1974.
9. Wilde, E., Bramwell, A. R. S. and Summerscales, R., "The Flapping Behaviour of a Helicopter Rotor at High Tip-Speed Ratio." ARC CP No. 877, April 1965.
10. Lowis, O. J., "The Stability of Rotor Blade Flapping Motions at High Tip Speed Ratio." ARC R&M No. 3544, January 1963.
11. Shutler, A. G. and Jones, J. P., "The Stability of Rotor Blade Flapping Motion." ARC R&M No. 3178, May 1958.
12. Peters, D. A. and Hohenemser, K. H., "Application of the Floquet Transition Matrix to the Problems of Lifting Rotor Stability," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 16, No. 2, (May, 1971), pp. 25–33.
13. Wan, F. Y. M., "Nonstationary Response of Linear Time-Varying Dynamical Systems to Random Excitation." ASME Paper No. 73-APM-6, 1973.
14. Gaonkar, G. H. and Hohenemser, K. H., "Flapping Response of Lifting Rotor Blades to Atmospheric Turbulence," *Journal of Aircraft*, Vol. 6, No. 6, (November-December, 1969), pp. 496–503.
15. Gaonkar, G. H. and Hohenemser, K. H., "Stochastic Properties of Turbulence Excited Rotor Blade Vibrations." AIAA Paper No. 70-548, 1970.
16. Gaonkar, G. H., Hohenemser, K. H. and Yin, S. K., "Random Gust Response Statistics for Coupled Torsion-Flapping Rotor Blade Vibrations," *Journal of Aircraft*, Vol. 9, No. 10, (October, 1972), pp. 726–729.
17. Gaonkar, G. H., "A General Method with Shaping Filters to Study Random Vibration Statistics of Lifting Rotors with Feedback Controls," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 21, No. 2, (1972), pp. 213–225.
18. Gaonkar, G. H., "Interpolation of Aerodynamic Damping of Lifting Rotors in Forward Flight from Measured Response Variance," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 18, No. 3, (1971), pp. 381–389.
19. Gaonkar, G. H., "Peak Statistics and Narrow-Band Features of Coupled Torsion-Flapping Rotor Blade Vibrations to Turbulence," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 34, No. 1, (1974), pp. 35–52.
20. Gaonkar, G. H., "A Study of Lifting Rotor Flapping Response Peak Distribution in Atmospheric

- Turbulence," *Journal of Aircraft*, Vol. 11, No. 2, (February, 1974), pp. 104–111.
21. Gaonkar, G. H., "Random Vibration Peaks in Rotorcraft and the Effects of Nonuniform Gusts," *Journal of Aircraft*, Vol. 14, No. 1, (January, 1977), pp. 68–76.
 22. Sissingh, G. J., "Dynamics of Rotors Operating at High Advance Ratios," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 13, No. 3, (July, 1968), pp. 56–63.
 23. Sissingh, G. J. and Kuczynski, W. A., "Investigations on the Effect of the Blade Torsion on the Dynamics of the Flapping Motion," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 15, No. 2, (April, 1972), pp. 2–9.
 24. Perisho, C. H., "Analysis of the Stability of a Flexible Rotor Blade at High Advance Ratio," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 4, (April, 1959), pp. 4–18.
 25. Hohenemser, K. H. and Yin, S. K., "Some Applications of the Method of Multiblade Coordinates," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 17, No. 3 (July, 1972), pp. 3–12.
 26. Biggers, J. C., "Some Approximations to the Flapping Stability of Helicopter Rotors." NASA SP-352, February 1974, pp. 45–53.
 27. Hammomd, C. E., "An Application of Floquet Theory to Prediction of Mechanical Instability." NASA SP-352, February 1974, pp. 147–158.
 28. Gaffery, T. M., "The Effect of Positive Pitch-Flap Coupling (Negative δ_3) on Rotor Blade Motion Stability and Flapping," *Journal of the American Helicopter Society*, 14 : 2, (April, 1969), pp. 49–67.
 29. Ormiston, R. A. and Hodges, D. H., "Linear Flap-Lag Dynamics of Hingeless Helicopter Rotor Blades in Hover," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 17, No. 2 (April, 1972), pp. 2–14.
 30. Friedmann, P. and Silverthorn, L. J., "Flap-Lag Dynamics of Hingeless Helicopter Blades at Moderate and High Advance Ratio." NASA SP-352, February 1974, pp. 55–66.
 31. Peters, D. A., "Flap-Lag Stability of Helicopter Rotor Blades in Forward Flight," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 20, No. 4, (October 1975), pp. 2–13.
 32. Houbolt, J. C. and Brooks, G. W., "Differential Equations of Motion for Combined Flapwise Bending, Chordwise Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades." NACA TN 3905, February 1957.
 33. Hodges, D. H. and Dowell, E. H., "Nonlinear Equations of Motion for the Elastic Bending and Torsion of Twisted Nonuniform Rotor Blades. NASA TND 7818, December 1974.
 34. Hodges, D. H. and Ormiston, R. A., "Stability of Elastic Bending and Torsion of Uniform Cantilever Rotor Blades in Hover with Variable Structural Coupling. NASA TND 8192, April 1976.
 35. Arcidianoco, P. J., Bergquist, R. R. and Alexander, W. T., Jr., "Helicopter Gust Response Characteristics Including Unsteady Aerodynamic Stall Effect." NASA SP-352, February 1974, pp. 91–100.

36. Gladwell, G. M. L. and Stamees, C. W., "On the Stability of an Unsymmetrical Rigid Supported in Unsymmetrical Bearing," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 3, No. 3, (1966), pp. 221–232.
37. Gorbunov, A. A. and Dimentberg, M. F., "Some Diagnostic Problems for an Oscillatory System with Periodic Parametric Excitation," *Mechanics of solid*, Vol. 9, No. 2, (1974), English Edition, pp. 43–46.
38. Kaplan, W., "Operational Methods for Linear Systems." Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1962.
39. Ralston, A. and Wilf, H. S. (eds.), "Mathematical Methods for Digital Computers, Vol. II." New York: Wiley, 1967.
40. Bachelor, G. K., "The Theory of Homogeneous Turbulence. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1953.
41. Lumley, J. L. and Panofsky, H. A., "The Structure of Atmospheric Turbulence." New York: Interscience, 1964.
42. Panchev, S., "Random Function and Turbulence." New York: Pergamon Press, 1971.
43. Monin, A. S. and Yaglom, A. M., "Statistical Fluid Mechanics: Mechanics of Turbulence, Vol. 2." Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1971.
44. Tennekes, H. and Lumly, J. L., "A First Course in Turbulence." Cambridge, Massachusetts: The MIT Press, 1972.
45. Leslie, D. C., "Development in the Theory of Turbulence." Oxford: Clarendon Press, 1973.
46. Reynolds, A. J., "Turbulence Flow in Engineering." New York: Wiley, 1974.
47. Townsend, A. A., "Structure of Turbulent Shear Flow." Cambridge, England: Cambridge University Press, 1975.
48. Hinze, H. O., "Turbulence." New York: McGraw Hill, 1975.
49. Bradshaw, P. (ed.), "Topics in Applied Physics, Vol. 12, Turbulence." Berlin: Springer-Verlag, 1976.
50. Bisplinghoff, R. L., Ashley, H. and Halfman, R. L., "Aeroelasticity." Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1955.
51. Houbolt, J. C., Steiner, R. and Pratt, K. G., "Dynamic Response of Airplanes to Atmospheric Turbulence Including Data on Input and Response." NASA TR-199, June 1964.
52. Olsen, J. H., Goldberg, A. and Rogers, M. (eds.), "Aircraft Wake, Turbulence and its Detection." New York: Plenum Press, 1971.
53. Etkin, B., "Dynamics of Atmospheric Flight." New York: Wiley, 1972.

54. Leverton, J. W., "Helicopter Noise-Blade Slap, Part I: Review and Theoretical Study. NASA CR-1221, October 1968; Helicopter Noise-Blade Slap, Part II: Experimental Results." NASA CR-1987, March 1972.
55. Lowson, M. V. and Ollerhead, J., "A Theoretical Study of Helicopter Rotor Noise," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 9, No. 2, pp. 197-222.
56. Widnall, S., "Helicopter Noise due to Blade-Vortex Interaction," *Journal of the American Helicopter Society*, Vol. 50, No. 1, Pt. 2, (1971), pp. 354-365.
57. Johnson, W., "Lifting-Surface Solution for Vortex Induced Airloads," *AIAA Journal*, Vol. 9, No. 4, (April, 1971), pp. 689-695.
58. Filotas, L. T., "Vortex Induced Helicopter Blade Loads and Noise," *Journal of Sound and Vibration*, Vol. 27, No. 3, (1973), pp. 387-398.
59. "Wind Effects on Buildings and Structures." *International Research Seminar Proceeding*, September 11-15, 1967, Vol. 1 & 2. Ottawa, Canada: University of Toronto Press, 1967.
60. Hino, M., "Spectrum of Gusty Wind, in *Proceedings of the Third International Conference on Wind Effects on Buildings and Structures*," October 1971, pp. 69-77.
61. Naudascher, E. (ed.), "Flow-Induced Structural Vibrations." *IUTAM-IAHR Symposium*, Karlsruhe, 1972. Berlin: Springer-Verlag, 1974.
62. "Wind Effects on Buildings and Structures." *Proceedings of the Third International Conference*, Tokyo 1971. Tokyo: Saikon Co., 1971.
63. "Wind Effects on Buildings and Structures." *Proceedings of the Fourth International Conference*, Heathrow, 1975. Cambridge, England: Cambridge University Press, 1975.
64. Houghton, E. L. and Carruthers, N. B., "Wind Forces on Buildings and Structures: Introduction." New York: Wiley, 1976.
65. Lin, Y. K., "Probabilistic Theory of Structural Dynamics." New York: McGraw-Hill, 1967.
66. Lin, Y. K., "Structural Response Under Turbulent Flow Excitations, Random Excitation of Structures by Earthquakes and Atmospheric Turbulence." Parkus, H. (ed.) *CISM Courses and Lectures No. 225*. Wien: Springer-Verlag, 1977. pp. 238-307.
67. Lyon, R. H., "Statistical Energy Analysis of Dynamical Systems." Cambridge, Massachusetts: MIT Press, 1975.
68. Arnold, L., "Stochastic Differential Equations: Theory and Applications." New York: Wiley, 1974.
69. Srinivasan, S. K. and Mehata, K. M., "Stochastic Processes." New Delhi: Tata McGraw-Hill, 1976.
70. Kushner, H. J., "Stochastic Stability and Control." New York: Academic Press, 1967.

71. Herman, G. (ed.), "Dynamic Stability of Structures." Proceeding of an International Conference held at Northwestern University, October 18-20, 1965. New York: Pergamon Press, 1967.
72. "Lecture Notes in Mathematics 294: Stability of Stochastic Dynamical Systems." Berlin: Springer-Verlag, 1972.
73. Loh, N. K., "Optimal Control and Filtering of Stochastic Systems, Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1968.
74. Tam, D. S-F., "Stability of Linear Gyroscopic Systems under Parametric Random Excitations," Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1973.
75. Ly, B. L., "Almost-Sure Stability of Some Linear Stochastic Systems," Ph. D. Thesis, University of Waterloo, Canada, 1974.
76. Ariaratnam, S. T. and Graefe, P. W. C., "Linear Systems with Stochastic Coefficients," International Journal of Control, Vol. 1, No. 3, (1965), pp. 239–250.
77. Ariaratnam, S. T., "Stability of Mechanical Systems under Stochastic Parametric Excitations," in Lecture Notes in Mathematics No. 294: Stability of Stochastic Dynamical Systems. Berlin: Springer-Verlag, 1972, pp. 291–302.
78. Ariaratnam, S. T. and Tam, D. S-F., "Parametric Random Excitations of a Damped Mathieu Oscillator, Zeitschrift für Angewandte Mathematik und Mechanik, Vol. 56 (1976), pp. 449–452.
79. Ariaratnam, S. T. and Pi, H. N., "On the First Passage Time for Envelope Crossing for a Linear Oscillator," International Journal of Control, Vol. 18, No. 1, (1973), pp. 89–96.
80. Ariaratnam, S. T. and Tam, D. S-F., "Moment Stability of Coupled Linear Systems under Combined Harmonic and Stochastic Excitations." Stochastic Problems in Dynamics, Clarkson, B. L., ed. London: Pitman, 1977, pp. 90–103.
81. Ito, K., "On Stochastic Differential Equations," Memoires of the American Mathematical Society, No. 4, (1951), pp. 1–51.
82. Ito, K. and McKean H. P., Jr., "Diffusion Processes and Their Sample Paths." New York: Springer-Verlag and Academic Press, 1965.
83. Wong, E. and Zakai, M., "On the Convergence of Ordinary Integrals to Stochastic Integrals," Annals of Mathematical Statistics, Vol. 36, No. 5, (1965), pp. 1560–1564.
84. Bolotin, V. V., "Statistical Aspects in the Theory of Structural Stability, in Harmann, G. (ed.), Dynamic Stability of Structures." Oxford: Pergamon Press, 1967, pp. 67–81.
85. Bolotin, V. V., "On the Stability of Parametrically Excited Systems," Mechanics of Solid, Vol. 9, No. 5, (1974), English Edition, pp. 75–79.
86. Stratonovich, R. L., "Topics in the Theory of Random Noise, Vol. 1 & 2." New York: Gordon and

Breech, 1963.

87. Stratonovich, R. L., "A New Representation for Stochastic Integrals and Equations," *SIAM Journal of Control*, Vol. 4, No. 2, (1966), pp. 362–371.
88. Kha'sminskii, R. Z., "Necessary and Sufficient Condition for the Asymptotic Stability of Linear Stochastic Systems," *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 12, No. 1, (1967), pp. 144–147.
89. Kha'sminskii, R. Z., "A Limit Theorem for the Solution of Differential Equations with Random Right-Hand Sides," *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 11, No. 3, (1966), pp. 390–406.
90. Kha'sminskii, R. Z., "On the Stochastic Processes Defined by Differential Equations with a Small Parameter," *Theory of Probability and its Applications*, Vol. 11, No. 2, (1966), pp. 211–228.
91. Papanicolaou, G. C., "Some Problems and Methods for the Analysis of Stochastic Equations," *SIAM-AMS Proceedings*, Vol. 6, *Stochastic Differential Equations*, J. B. Keller and H. P. McKean (eds.). Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1973, pp. 21–33.
92. Mettler, E., "Stability and Vibration Problems of Mechanical Systems under Harmonic Excitations," in: Hermann, G. (ed.), *Dynamic Stability of Structures*. Oxford: Pergamon Press, 1967, pp. 169–188.
93. Mettler, E., "Combination Resonances in Mechanical Systems under Harmonic Excitation," *Proceeding of the Fourth Conference on Nonlinear Oscillation*. Academic Publication House of Czechoslovakia Academy of Sciences, 1968, pp. 51–70.
94. Sethna, P. R. and Balachandra, "On Nonlinear Gyroscopic Systems," in Nemant-Nasser, (ed.), *Mechanics Today*, Vol. 3. New York: Pergamon Press, 1976, pp. 191–242.
95. Lennox, W. C. and Kuak, Y. C., "Narrow Band Excitation of a Nonlinear Oscillator." ASME Paper No. 76-APM-38, 1976.
96. Yamamoto, T. and Yasuda, K., "Occurrence of the Summed and Differential Harmonic Oscillations in a Nonlinear Multidegree-of-Freedom Vibratory System," *Journal of Applied Mechanics*, (September, 1974), pp. 781–786.
97. Friedman, A. "Stochastic Differential Equations and Application, Vol. 1 & 2." New York: Academic Press, 1975.
98. Prokorov, Y. V. and Rozanov, Y. A. "Probability Theory." New York: Springer-Verlag, 1969.
99. Wong, E., "Stochastic Processes in Information and Dynamical Systems." New York: McGraw-Hill, 1971.
100. Soong, T. T., "Random Differential Equations in Science and Engineering." New York: Academic Press, 1973.
101. Clarkson, B. L. et al. (eds.) "Stochastic Problems in Dynamics." London: Pitman Publishing Limited, 1977.

102. Parkus, H. (ed.), "Random Excitation of Structures by Earthquakes and Atmospheric Turbulence." CISM Courses and Lectures No. 225. New York: Springer-Verlag, 1977.
103. Ito, K. (ed.), "Stochastic Differential Equations." Proceedings of the International Symposium on Stochastic Differential Equations, Kyoto 1976, Kinokuni-ya, 1978.
104. Young, M. I., "A Theory of Rotor Blade Stability in Powered Flight," Journal of American Helicopter Society, Vol. 9, No. 3, (July 1964), pp. 12–25.
105. Hohenemser, K. H. and Heaton, P. W., Jr., "Aeroelastic Instability of Torsionally Rigid Helicopter Blades," Journal of the American Helicopter Society, Vol. 12, No. 2, (April 1967), pp. 1–13.
106. Burkam, J. E. and Wen-Liu Miao, "Exploration of Aeroelastic Stability Boundaries with a Soft-in-Plane Hingeless Rotor Model," Journal of the American Helicopter Society, Vol. 17, No. 4, (October 1972), pp. 27–35.
107. Anderson, W. D., "Investigation of Reactionless Mode Stability Characteristics of a Stiff Inplane Hingeless Rotor System," 29th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Reprint No. 734, May 1973.
108. Huber, H. B., "Effect of Torsion-Flap-Lag Coupling," 29th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Reprint No. 731, May 1973.
109. Ormiston, R. A. and Bousman, W. G., "A Study of Stall-Induced Flap-Lag Instability," 29th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Reprint No. 730, May 1973.
110. Hohenemser, K. H., "Hingeless Rotorcraft Flight Dynamics." Agadograph No. 197, September 1974.
111. Friedmann, P., "Aeroelastic Instabilities of Hingeless Helicopter Blades," Journal of Aircraft, Vol. 10, No. 10, (October 1973), pp. 623–631.
112. Hodges, D. H. and Ormiston, R. A. "Stability of Elastic Bending and Torsion of Uniform Cantilevered Rotor Blades in Hover." AIAA Paper No. 73–405, 1973.
113. Tong, P., "Nonlinear Instability of a Helicopter Blade in Hovering," AIAA Journal, Vol. 12, No. 3, (March 1974), pp. 360–366.
114. Gordon, E. Ya., "Stochastic Stability of the Periodic Motion of a Balanced Rotor System with a Slot Coupling," Soviet Applied Mechanics, Vol. 12, No. 7–12, (1976), pp. 957–961.
115. Friedmann, P. and Reyna-Allende, M., "Aeroelastic Stability of Coupled Flap-Lag-Torsional Motion of Helicopter Rotor Blade in Forward Flight." AIAA Paper No. 77–455.
116. Friedmann, P. and Yuan, C., "Effect of Modified Aerodynamic Strip Theories on Rotor Blade Aeroelastic Stability, AIAA & ASME/SAE 17th Structure," Structural Dynamics and Materials Conference, 1976.
117. Kaza, K. R. V. and Hammond, C. E., "An Investigation of Flap-Lag Stability of Wind Turbine Rotors

in the Presence of Velocity Gradients and Helicopter Rotors in Forward Flight," AIAA ASME/SAE 17th Structure, Structural Dynamics and Materials Conference, 1976.

118. Friedmann, P., "Influence of Modeling and Blade Parameters on the Aerostatic Stability of a Cantilevered Rotor," AIAA Journal, Vol. 15, No. 2, (February 1977), pp. 149-158.
119. Hodges, D. H. and Ormiston, R. A., "Stability of Hingeless Rotor Blades in Hover with Pitch-Link Flexibility," AIAA Journal, Vol. 15, No. 4, (April 1977), pp. 476-482.
120. George, A. R. and Kim, Y. N., "High-Frequency Broadband Rotor Noise," AIAA Journal, Vol. 15, No. 4, (April 1977), pp. 538-544.
121. Hodges, D. H., "A Theoretical Technique for Analyzing Aeroelastic Stability of Bearingless Rotors," AIAA Journal, Vol. 17, No. 4, (April 1979), pp. 400-407.
122. Wei., F-S. and Peters, D. A., "Lag Damping in Autorotation by a Perturbation Method," 34th Annual National Forum of the American Helicopter Society, Preprint No. 78-25, 1978.
123. Chopra, I. and Dugundji, J., "Nonlinear Dynamic Response of a Wind Turbine Rotor under Gravitational Loading," AIAA Journal, Vol. 16, No. 8, (August 1978), pp. 773-774.
124. Fujimori, Y., "Effect of Atmospheric Turbulence on the Stability of a Lifting Rotor Blade," Ph. D. Thesis, University of Illinois, U. S. A., 1978.
125. Lin, Y. K., Fujimori, Y. and Ariaratnam, S. T., "Rotor Blade Stability in Turbulent Flows Part I," AIAA Journal, Vol. 17, No. 6, (June 1979), pp. 545-552.
126. Fujimori, Y., Lin, Y. K. and Ariaratnam, S. T., "Rotor Blade Stability in Turbulent Flows Part II," AIAA Journal, (July 1979). pp. 673-678.
127. 渡辺信三：確率微分方程式 産業図書，昭和51年8月。
128. 砂原善文：確率制御過程論，養賢堂，1971。
129. 砂原善文：ランダム係数を持つ分布定数システムの解析，不規則固有値問題への招待 I，システムと制御，Vol.19, No.8, (1975), pp. 431-437。
130. 砂原善文：ランダム係数を持つ分布定数システムの解析，不規則固有値問題への招待 II，システムと制御，Vol.19, No.9, (1975), pp. 473-480。
131. 秋月影雄，宮崎通雄：不規則雑音を受ける非線形振動系におけるゆらぎ，日本機械学会論文集第1部，Vol.43, No.367, (昭和52年8月)，pp. 903-909。
132. 砂原善文，朝倉俊行，森田洋二：不規則雑音を受ける非線形力学系の漸近安定について，日本機械学会論文集第1部，Vol.43, No.371, (昭和52年7月)，pp. 2519-2525。
133. 砂原善文，朝倉俊行，森田洋二：不規則変動係数を持つ非線形力学系の確率漸近安定について，日本機械学会論文集第1部，Vol.44, No.380, (昭和53年4月)，pp. 1234-1241。
134. 砂原善文，朝倉俊行：非退化形非線形力学系の確率的挙動について，日本機械学会論文集C編，Vol.45, No.394, (昭和54年6月)，pp. 689-695。

付録 A Markov 過程における諸定理と確率微分方程式^{65,68,86,97,99,100,127,128)}

Markov 過程の概念は工学の広い分野で応用されていることは周知のことである。この付録 A では読者の便宜のため定義、定理と説明をまとめてある。より詳しくは参考文献を見ていただきたい。

1) Markov 過程

不規則過程 $X(t)$ は次の関係が条件付き確率密度関数 (the conditional probability density functions (p.d.f.)) の間に存在するとき Markov 過程と云われる。

$$p_X(x_n, t_n | x_m, t_m; m=1, 2, \dots, n-1) = p_X(x_n, t_n | x_{n-1}, t_{n-1}) \tag{A-1-1}$$

但し $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n$

(A-1-1) 式の右辺は遷移確率密度関数 (transition probability density function (t.p.d.f.)) と呼ばれている。

Markov 過程においては未来の増分 $X_n - X_{n-1}$ は現時点 t_{n-1} 以前に生じた過去の増分とは独立である。この性質のため Markov 過程は単段記憶不規則過程 (one-step memory random process) と呼ばれることもある。もしも確率密度の初期値とある時刻から次の時刻への t.p.d.f. が分っていれば任意の次元の結合確率密度関数 (joint p.d.f.) が求められる。

Markov 過程の t.p.d.f. は次の Chapman-Kolmogorov 方程式を満足する。

$$p_X(x_2, t_2 | x_1, t_1) = \int p_X(x, t | x_1, t_1) p_X(x_2, t_2 | x, t) dx \tag{A-1-2}$$

加うるに、Markov 過程 $X(t)$ は、もしも $X(t)$ が連続でその連続な t.p.d.f. が小さい数 ϵ について次の 3 条件を満たすならば、拡散 Markov 過程 (diffusive Markov process) と呼ばれる。

$$(1) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| > \epsilon} p_X(y, t + \Delta t | x, t) dy = 0 \tag{A-1-3}$$

$$(2) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x) p_X(y, t + \Delta t | x, t) dy = A(x, t) \tag{A-1-4}$$

$$(3) \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int_{|y-x| \leq \epsilon} (y-x)^2 p_X(y, t + \Delta t | x, t) dy = B(x, t) \tag{A-1-5}$$

条件(1)は小さい時間内に $X(t)$ が大きく変化する確率は小さいことを意味する。条件(2)(3)はモーメントであり有界な A, B は拡散過程の係数と呼ばれている。以上の定義は $X(t)$ がベクトルになっても変わらない。そのとき A は偏

位ベクトル (drift vector or 1st derivate moment), B は拡散行列 (diffusion matrix or 2nd derivate moment) と呼ばれる。 $X(t)$ の成分を $X_j(t), j=1, 2, \dots, n$ とすると A や B の要素は次のように書ける。

$$A_j(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int \dots \int (y_j - x_j) p_X(y, t + \Delta t | x, t) dy_1 \dots dy_n \tag{A-1-6}$$

$$B_{jk}(x, t) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta t} \int \dots \int (y_j - x_j)(y_k - x_k) p_X(y, t + \Delta t | x, t) dy_1 \dots dy_n \tag{A-1-7}$$

以下では一般のベクトル型 Markov 過程を取扱うものとする。拡散 Markov 過程の t.p.d.f. $p = p(x, t | x_0, t_0)$ は 2 々の偏微分方程式を満足する。第一の方程式は Kolmogorov 前向き (forward) 方程式で、通常 Fokker-Planck の方程式と呼ばれているものである。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_i \frac{\partial}{\partial x_i} [A_i(x, t)p] + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [B_{ij}(x, t)p] \tag{A-1-8}$$

第 2 の方程式は Kolmogorov の後向き (backward) 方程式と呼ばれている。

$$\frac{\partial p}{\partial t_0} + \sum_i A_i(x_0, t_0) \frac{\partial p}{\partial x_{0i}} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_{ij}(x_0, t_0) \frac{\partial^2 p}{\partial x_{0i} \partial x_{0j}} = 0 \tag{A-1-9}$$

(A-1-8) 式において微分は前向き変数 x, t について、

(A-1-9) 式においては後向き変数 x_0, t_0 についてである。

(A-1-9) 式は次のようにも書く。

$$\mathcal{L}_{x_0, t_0}(p) = 0 \tag{A-1-10}$$

但し

$$\mathcal{L}_{x, t} = \frac{\partial}{\partial t} + \sum_i A_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j B_{ij} \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} \tag{A-1-11}$$

この作用素 (operator) はベクトル型 Markov 過程の微分生成作用素 (differential generator) と云われている。

A_i や B_{ij} が時間 t について独立であると、遷移確率密度関数は $t - t_0$ が大きくなるにつれて定常確率密度関数に近づく。この定常確率密度関数は x_0, t_0 と初期条件に関して独立で、Markov 過程が定常状態に達したときの無条件確率密度関数となる。

2) Wiener 過程と白色雑音過程

スカラー過程 $W(t), 0 \leq t \leq T$, は次の 2 条件を満たすとき Wiener 過程ないし Brown 運動過程と云う。

(a) 任意の $0 < s < t < T$ に対して増分 $[W(t) - W(s)]$ は正規分布 (Gaussian distribution) でその平均値と分散

は次のように与えられる。

$$E[W(t) - W(s)] = 0$$

$$E\{[W(t) - W(s)]^2\} = \sigma^2 |t - s| \quad (\text{A-2-1})$$

但し $W(0) = 0$

(b) 時刻 $t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n < T$ に対して増分

$$[W(t_2) - W(t_1)], [W(t_3) - W(t_2)], \dots, [W(t_n) - W(t_{n-1})]$$

は互いに独立である。

このWiener過程は連続であるがどの時刻においても古典的な意味で微分可能ではない。有限な時間内でも分散は非有界となる。

弱い意味で定常 (weakly stationary) な不規則過程 $X(t)$ はその相関々数 (correlation function) $R_x(t, s)$ が次のような型式となるとき白色雑音過程 (white noise process) と云われる。

$$R_x(t, s) = E[X(t) X(s)]$$

$$= 2\pi K \delta(\tau), \quad \tau = t - s \quad (\text{A-2-2})$$

このことは $X(t)$ のスペクトルがすべての周波数領域で一定値 K を持ち、非有界な自乗平均を持つことを意味し非現実的である。しかしこの白色雑音過程は純粋に数学的理想モデルではあるけれど、実際の問題を解くときには非常に有効なことが多い。この白色雑音過程はWiener過程の微分として、形式的に次のように定義することもできる。

$$X(t) = \frac{dW(t)}{dt} \quad (\text{A-2-3})$$

または

$$W(t) = \int_0^t X(s) ds \quad (\text{A-2-4})$$

Wiener過程は微分可能ではないから上の(A-2-3)式は古典的な意味 (Riemann-Stieltjes) ではなく、超関数 (distribution) としての定義であることが分る。

以上スカラー型のWiener過程や白色雑音過程についての定義はそのままベクトル型のものについても同様である。ベクトル型Wiener過程の要素はそれ自身スカラー型Wiener過程であり一般に要素は互いに独立であったりそうでなかったりする。

3) 確率積分 (Stochastic Integrals)

次のような積分を考えてみる。

$$I = \int_{t_0}^T G[W(t), t] dW \quad (\text{A-3-1})$$

但し $W(t)$, $t_0 < t < T$, はWiener過程で $G[W(t), t]$ は $W(t)$ の関数である。この積分は古典的なRiemann-Stieltjes積分で定義されないことは、Wiener過程の標本関数が有限な時間内でも非有界な分散を持つことから明らかである。(A-3-1)式は次のように書ける。

$$I_i = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} G[(1-\lambda)W(t_i)$$

$$+ \lambda W(t_{i+1}), (1-\lambda)t_i + \lambda t_{i+1}]$$

$$\times [W(t_{i+1}) - W(t_i)] \quad (\text{A-3-2})$$

但し

$$0 \leq \lambda \leq 1$$

$$\Delta t = \text{Max}(t_{i+1} - t_i)$$

$$t_0 < t_1 < \dots < t_i < t_{i+1} < \dots < t_N = T_N$$

記号 $\lim_{\Delta t \rightarrow 0}$ は極限が自乗平均として定義されることを意味する。この積分 I_i は λ の選び方により異った不規則値に収束する。特に $\lambda = 0$ の場合には伊藤積分となる。即ち

$$I_0 = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} G[W(t_i), t_i] [W(t_{i+1}) - W(t_i)]$$

$$(\text{A-3-3})$$

$\lambda = 1/2$ のときはStratonovich積分となる。

$$I_{1/2} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sum_{i=1}^{N-1} G[(W(t_{i+1}) + W(t_i))/2,$$

$$(t_{i+1} + t_i)/2]$$

$$\times [W(t_{i+1}) - W(t_i)] \quad (\text{A-3-4})$$

Stratonovich積分と伊藤積分の関係は次式で与えられる。

$$\int_{t_0}^T G[W, t] dW = \int_{t_0}^T G[W, t] dW + \frac{1}{2} \int_{t_0}^T \frac{\partial G[W, t]}{\partial W} dt$$

$$(\text{A-3-5})$$

(A-3-5)式で asterisk* は Stratonovich積分を表す。もし $G[W, t]$ のかわりに $G(x, t)$; 但し x は N 次元ベクトル型拡散過程, W は M 次元 Wiener過程, と書くと (A-3-5)式を一般化して次のように書くことができる。

$$\int_{t_0}^T G(x, t) \left\{ \begin{matrix} dW_\alpha \\ dX_j \end{matrix} \right\} = \int_{t_0}^T G(x, t) \left\{ \begin{matrix} dW_\alpha \\ dX_j \end{matrix} \right\} + \frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \int_{t_0}^T \frac{\partial}{\partial x_k} G(x, t) \left\{ \begin{matrix} \sigma_{k\alpha}(x, t) \\ B_{kj}(x, t) \end{matrix} \right\} dt$$

$$\alpha = 1, 2 \dots N$$

$$j = 1, 2 \dots N$$

$$(\text{A-3-6})$$

但し $[B(x, t)]$ は x の拡散行列である。その要素 $B_{jk} = (\sigma\sigma^T)_{jk}$ や σ は (A-4-1) で定義する。

4) 確率微分方程式 (Stochastic Differential Equations (s.d.e.))

N 次元ベクトル X についての s.d.e. は次のように書ける。

$$dx = m(x, t) dt + \sigma(x, t) dW \quad (\text{A-4-1})$$

但し, m は N 次元ベクトル, W は M 次元の Wiener 過程, σ は $N \times M$ の行列である。この s.d.e. は次のような確率積分方程式 (stochastic integral equation) と等しい。

$$x(t) = x(t_0) + \int_{t_0}^t m(x, s) dx + \int_{t_0}^t \sigma(x, s) dW(s) \quad (\text{A-4-2})$$

このため (A-4-1) 式は (A-4-2) 式の右辺第 3 項がどのように定義されるかにより異った性格を持つことが分る。もし積分を伊藤積分とすれば (A-4-1) 式は伊藤型の s.d.e. であり, Stratonovich 積分とすれば Stratonovich 型の s.d.e. となる。伊藤積分は通常の演算則に従わないので注意を要する。

今 (A-4-1) 式を伊藤型の s.d.e. とするとベクトル型 Markov 過程 $X(t)$ の t.p.d.f., $p(x, t | x_0, t_0)$ は次の Fokker-Planck 方程式を満足する。

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \sum_j \frac{\partial}{\partial x_j} (m_j p) + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} [(\sigma \sigma^T)_{ij} p] \quad (\text{A-4-3})$$

(A-4-3) 式と (A-1-8) 式を見比べれば

$$m_j = A_j \quad (\text{A-4-4})$$

$$(\sigma \sigma^T)_{jk} = B_{jk} \quad (\text{A-4-5})$$

であることは明らかである。また一方 (A-4-2) 式を Stratonovich 型積分と見做すとき (A-4-1) 式は Stratonovich 型 s.d.e. となるのである。

$$dx = m(x, t) dt + \sigma(x, t) dW \quad (\text{A-4-6})$$

この方程式は (A-3-6) 式の法則に従って伊藤型の s.d.e. に変換できる。

$$dx = \bar{m}(x, t) dt + \sigma(x, t) dW \quad (\text{A-4-7})$$

但し

$$\bar{m}(x, t) = m(x, t) + \frac{1}{2} \sigma_x(x, t) \sigma^T(x, t) \quad (\text{A-4-8})$$

このように Stratonovich s.d.e. の 1 次誘導モーメント (1st derivate moment) は $m(x, t)$ ではなく $\bar{m}(x, t)$ であり伊藤型 s.d.e. のそれとは異なる。2 次誘導モーメント (2nd derivate moments) は Stratonovich 型, 伊藤型いずれの s.d.e. でも同じである。両者の 1 次誘導モーメントは (A-4-8) 式の関係で結ばれている。(A-4-8) 式右辺第 2 項の積 $\frac{1}{2} \sigma_x(x, t) \sigma^T(x, t)$ は Wong and Zakai の修正項 (correction term) と呼ばれるものである。この項をやり取りするだけで伊藤型を Stratonovich 型へ, またその逆へと, 変換することができる。(A-4-6) 式の Stratonovich s.d.e. において, 偏位ベクトル (drift vector), $m(x, t)$, は解過程の真の偏位を表わしていない。何故ならば解過程 $X(t)$ とその時刻の不規則加振力との相互作用が考慮されていないからである。

5) 伊藤微分則 (Ito Differential Rule (Ito's Lemma))

伊藤により導入された微分則は通常の微分則とはかなり違ったものである。それを簡単に説明しておく。確率関数を取扱う上で特別の微分則が必要になる理由は次の例

$$\int_0^t W(s) dW(s)$$

を考えてみれば明らかである。但し W は単位 Wiener 過程である。これは定義から次のようになる。

$$\int_0^t W(s) dW(s) = W^2(t)/2 - t/2 \quad (\text{A-5-1})$$

これは次式に等しくなる。

$$d(W^2(t)) = dt + 2W(t) dW(t) \quad (\text{A-5-2})$$

しかしながら $W^2(t)$ の微分は次のようになる。

$$d(W^2(t)) = [W(t) + dW(t)]^2 - W^2(t) = 2W(t) dW(t) + (dW(t))^2 \quad (\text{A-5-3})$$

(A-5-2) 式と (A-5-3) 式を比較すれば $W^2(t)$ の微分については (A-5-3) 式の右辺にある 2 項の項を dt の程度の項と見做さなければならず, そのため $(dW(t))^2$ を dt で置き換えなければならない。

伊藤微分則を厳密に導くことはかなり複雑なので, ここでは直観的導出を示しておく。今, $\phi(x, t)$ を x, t についてのスカラー関数で, t について微分可能, x のすべての成分について少なくとも 2 回微分可能とする。 x は次のように伊藤型の s.d.e. で表わされるとする。

$$dx_i = m_i dt + \sum_k \sigma_{ik} dW_k \quad (\text{A-5-4})$$

ϕ を Taylor 級数に展開する。

$$d\phi = \frac{\partial \phi}{\partial t} dt + \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} dx_i dx_j + \dots \quad (\text{A-5-5})$$

(A-5-4) 式で与えられている dx_i を (A-5-5) 式に代入し

$$0[(dW_k)^2] \approx dt$$

であることを使えば, ϕ の微分 $d\phi$ について次のように書ける。

$$d\phi = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} m_i + \frac{1}{2} \sum_i \sum_j \sum_k \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_i \partial x_j} \sigma_{ik} \sigma_{jk} \right] dt + \sum_i \frac{\partial \phi}{\partial x_i} (\sigma dW)_i + 0((dt)^{3/2}) \quad (\text{A-5-6})$$

dt の程度の項までを保持しておく上式は次のようになる。

$$d\phi = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \phi_x^T m + \frac{1}{2} \text{tr}(\phi_{xx} \sigma \sigma^T) \right] dt + \phi_x^T \sigma dW \quad (\text{A-5-7})$$

x, m, W がすべてスカラー量ならば上式は次のように簡単になる。

$$d\phi = \left[\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} m + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \sigma^2 \right] dt + \frac{\partial \phi}{\partial x} \sigma dW \quad (\text{A-5-8})$$

この微分則は解過程 $X(t)$ の高次のモーメントを支配する方程式を導くとき特に必要となる。上の (A-5-6, 7) 式の中を見ると (A-1-11) 式で定義した微分生成作用素を応用していることと同じであることが分る。

6) 定義, 定理と確率微分方程式の相互関係

以上付録Aで説明した種々の定義, 概念をまとめ, 図A-1のブロック図に示す。物理上の微分方程式の解がMarkov過程に近づくのかどうかということは応用上大きな問題であろう。ただ数学的側面からは加振力がある程度広帯域であるならばMarkov過程に近づくことと云ってよい。また物理上の微分方程式を確率微分方程式に置き換えるとき, それがStratonovich型のs.d.e.なのか, 伊藤型のs.d.e.なのかということも大きな問題である。歴史的に見るならば, 係数励振のない力学系を取り扱うときはWong & Zakaiの修正項が「0」となりStratonovich型, 伊藤型いずれのs.d.e.も同一となり混乱はなかつ

た。係数励振があるときは, Stratonovich型か伊藤型のどちらのs.d.e.を使うかによって得られる結論が違ってくる。もしも, 先に言及したように, 加振力が広帯域でしかも白色雑音に近い力学系を支配している微分方程式は, まず近似的にStratonovich型s.d.e.に変換されると考えるべきである。そして修正項を加えることにより伊藤型のs.d.e.とする。もし加振力が広帯域であってもあるスペクトル形状を持つときはStratonovich-Khasminskiiの極限定理を基にした統計的平均法を使い直接伊藤型s.d.e.を求めなければならない。形式的に(A-2-3)式のように書けるからと云って, 係数励振を持つ物理上の微分方程式をそのまま伊藤型s.d.e.と見做すのが混乱のもとである。いずれにしても解過程がMarkov過程ないしそれに近い場合については伊藤型のs.d.e.が中心的役割をはたす。

付録B 確率安定(Stochastic Stability)

不規則過程の確率安定については多くの定義がある。その中で最もよく使われるのは(1)モーメント安定, (2)標本安定(確率1で安定), である。この2種の安定性の間にはいかなる関係もなく, 各々独立した定義である。

1) モーメント安定 (Moment Stability)

微分方程式が次式で与えられているとする。

$$\dot{x} = F(x, t, \eta(t)) \quad (\text{B-1})$$

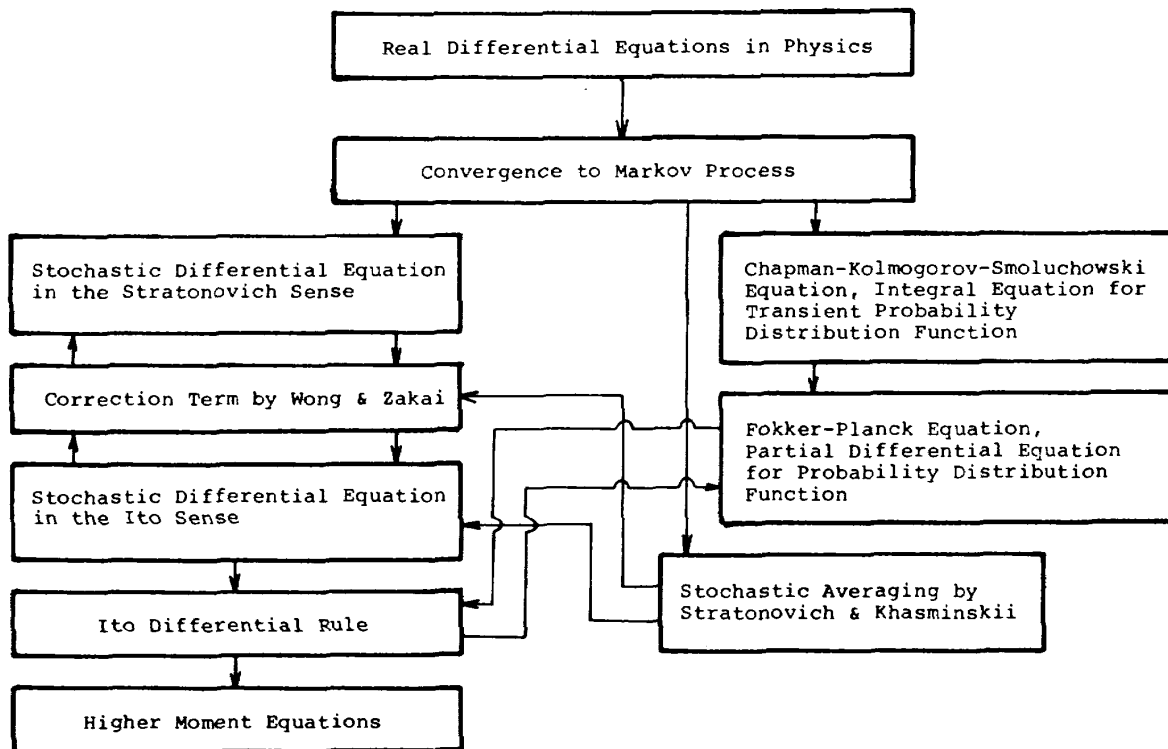


Figure A-1. Various Definitions and Operations in the Markov Process.

但し $F(0, t, \eta(t)) = 0$

この方程式の自明解 (trivial solution) $x = 0$ は

$$E[x^n(t)] < \infty \tag{B-2}$$

の条件を満足するとき、 n 次モーメント安定と云われる。 $n=1$ のとき $x=0$ は 1 次モーメント (平均値) 安定であるといひ、 $n=2$ のとき 2 次モーメント (自乗平均) 安定であるという。この安定は不規則変数の任意のべき乗の集合平均が有界であることと定義される。基本的には集合平均であるが、不規則過程が Ergodic であれば時間平均で置き換えたものと考えてよい。

2) 標本安定 (Sample Stability (Stability with Probability One))

1) と同様なモデルの微分方程式について、自明解 $x = 0$ が任意の微小な数 $\epsilon > 0$ に関して次の条件を満足するとき確率 1 で安定であるという。

$$\lim_{T \rightarrow \infty} Pr \{ \text{Sup}_{t > T} \|x(t)\| < \epsilon \} = 1 \tag{B-3}$$

但し、 $\|x(t)\|$ は適当に選んだノルムとする。この標本安定の意味する内容は、不規則過程 $x(t)$ のすべての事象を考えたとき、ノルム $\|x(t)\|$ の最大値が $t > T$ の範囲で最終的には確率 1 で「0」に収束するという条件である。

付録 C Floquet 遷移行列^{12,38,85)}

一般に線形系は次のように書ける。

$$\{\dot{Z}\} = [D]\{Z\} \tag{C-1}$$

但し、 $\{Z\}$ は N 次元ベクトル、 $[D]$ は周期 T の周期関数を要素に持つ $N \times N$ の行列である。この系の安定性は遷移解の安定性を調べることにより明らかとなる。

Floquet の定理によれば (C-1) 式は次のような遷移解を持つ。

$$\{Z(t)\} = [A(t)]\{\alpha_k \exp(\eta_k t)\} \tag{C-2}$$

但し、 $[A(t)]$ は周期 T の行列、 η_k は複素特性値であり、 α_k は初期条件から次のように決まる定数である。

$$\{\alpha_k\} = [A(0)]^{-1} \{Z(0)\} \tag{C-3}$$

$\exp(\eta_k T) = A_k$ と書き、周期性から $[A(0)] = [A(T)]$ であるから、 $\{Z(T)\}$ と $\{Z(0)\}$ は次のように書ける。

$$\begin{aligned} \{Z(T)\} &= [A(0)][A_k]\{\alpha_k\} \\ \{Z(0)\} &= [A(0)]\{\alpha_k\} \end{aligned} \tag{C-4}$$

但し、 $[A_k]$ は対角行列 (diagonal matrix) である。2 々のベクトル $\{Z(T)\}$ と $\{Z(0)\}$ とは 1 次結合となっている。

$$\{Z(T)\} = [Q]\{Z(0)\} \tag{C-5}$$

ここで $[Q]$ は Floquet の遷移行列と呼ばれている。この $[Q]$ により周期 T 離れた 2 々のベクトルの関係を知るこ

とができる。(C-5) 式を用いて (C-4) 式を書きなおすと次のようになる。

$$[A(0)][A_k]\{\alpha_k\} - [Q][A(0)]\{\alpha_k\} = 0 \tag{C-6}$$

(C-6) 式の l 番目の行を書き出してみると次のようになる。

$$\sum_j \sum_k (A_j \delta_{lk} - Q_{lk}) A_{kj} \alpha_j = 0 \tag{C-7}$$

但し、 $l=k$ のとき $\delta_{lk}=1$ とし、 $l \neq k$ のとき $\delta_{lk}=0$ とする。 Q_{lk} は $[Q]$ の (l, k) 要素であり、 A_{kj} は $[A(0)]$ の (k, j) 要素である。 $[A(0)]$ の列は任意であるから (C-7) 式を次のように書いてよい。

$$|A_j [I] - [Q]| = 0 \tag{C-8}$$

これより A_j は $[Q]$ の固有値であることが分る。一般にこれらは複素数である。(C-2) 式の η_k は固有値より次のようにして求まる。

$$\eta_k = \frac{1}{T} \ln A_k \tag{C-9}$$

$\eta_k = \lambda_k + i \omega_k$ と書くと λ_k は

$$\lambda_k = \frac{1}{2T} \ln [\{ \text{Re}(A_k) \}^2 + \{ \text{Im}(A_k) \}^2] \tag{C-10}$$

となり、ベクトル $\{Z(t)\}$

$$\{Z(t)\} = [A(t)]\{\alpha_k \exp(\lambda_k t) [\cos \omega_k t + i \sin \omega_k t]\} \tag{C-11}$$

となる。故に系の安定性は η_k の実数部である λ_k により決まる。もし λ_k が「0」より大きければ系は不安定となる。 η_k の虚数部 ω_k は

$$\omega_k = \frac{1}{T} \tan^{-1} \left[\frac{\text{Im}(A_k)}{\text{Re}(A_k)} \right] \tag{C-12}$$

となり、これは系の応答周波数を示す。 $[Q]$ を実際に計算するにはまず初期条件 $Z(0)$ を次のように与える。

$$\begin{aligned} Z_j(0) &= 1 \quad \text{for } j = l \\ &= 0 \quad \text{for } j \neq l \end{aligned}$$

(C-1) 式を一周期間数値積分して求められる $Z(t)$ のベクトルは $[Q]$ の l 番目の列となる。初期条件 $Z(0)$ の「0」でない要素の順序を変えて繰り返せば、 $[Q]$ の N 々の列を作り出せる。

数値積分にはどのような方法を用いてもよい。本論中に述べた回転翼ブレードの問題においては、大気乱流成分を「0」とすれば 1 次モーメント、2 次モーメントいずれも同じ安定不安定領域を与えなければならぬので、計算精度を調べることができる。もし精度が悪いと両者は同一の結果を与えない。

付録 D 大気乱流^{40-49,59-64)}

ここではヘリコプターが飛行中に遭遇するであろう大

気乱流の性質や、統計的平均法を回転翼の問題に適用してよいかどうかといった質問に対して多少の見解を述べておく。

本文中において述べたごとく統計的平均法は力学系への加振力の相関時間 (correlation time) が系の弛緩時間 (relaxation time) より短いときに有効である。回転翼ブレードの減衰はかなり高く、フラッピングの式においては減衰の定数部が $B^2 r / 8$ である。これは数値的に 0(1) の程度で、フラッピング運動の弛緩時間を短くする傾向にあると考えられる。しかし不安定に近い飛行状態を想定すると、実際の減衰は小さいものとなり系の弛緩時間が長くなると考えることは不合理ではない。

次に大気乱流の相関時間が短いという仮定について考察してみる。回転翼の問題では自然に存在する大気乱流と前後のブレードの先端や胴体から出てくる渦による圧力変動との2種類あり、両者を分離して考えることはできず、全体を一つの大気乱流として、少なくとも局所的には均質で定常な不規則過程としている。この大気乱流の性質はその相関々数により特徴づけられる。相関々数は一般に時間差と、空間における座標位置の差、との関数となっている。

1次元の大気乱流を例にとり、定常でしかも均質な大気乱流の性質を時間-空間についての相関々数表示からよく理解できることを示す。この場合相関々数の等高線を描いてみると図D-1のようになるのが普通である。形としては丸いが真円とはかぎらない。 τ は時間差で、 ξ は空間における座標差である。等高線は $(\tau, \xi) = (0, 0)$ で1となるように正規化して図示するから、等高線の値は相関係数を表わすことになる。 τ や ξ のスケールを適当に選び、 ξ は大気乱流とともにある移動座標とすると、

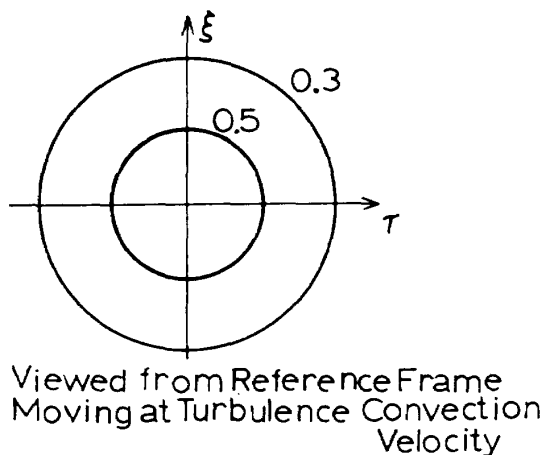


Figure D-1. Correlation Contours of One-Dimensional Turbulence Field.

等高線を同心円群として描くことができる。等高線図は大気乱流の相関時間や空間的相関長さを図の上で示すもので、相関値「0」の等高線と τ 軸や ξ 軸の交点が時間的および空間的相関長さの目安であると考えてよい。勿論これらの目安は座標系が違えば変わるものである。

大気乱流と観測者の移動速度をそれぞれ U, V とし、それらについている座標系を x_1, x_2 とする。空間に固定されている座標系 x と x_1, x_2 との関係は次のようになる。

$$\begin{aligned} x &= x_2 + Vt \\ &= x_1 + Ut \end{aligned} \tag{D-1}$$

各々の座標系において時刻 t_1, t_2 との座標位置の差は

$$\begin{aligned} \xi &= x(t_1) - x(t_2) \text{ in the inertial system,} \\ \xi_1 &= x_1(t_1) - x_1(t_2) \text{ in the system moving with } U \\ \xi_2 &= x_2(t_1) - x_2(t_2) \text{ in the system moving with the observer} \end{aligned}$$

であることから、(D-1) 式より明らかに次のようになる。

$$\begin{aligned} \xi_2 &= \xi - V\tau \\ \xi_1 &= \xi - U\tau \end{aligned} \tag{D-2}$$

但し、 $\tau = t_1 - t_2$ 。これより ξ_1 と ξ_2 の関係は次のように書ける。

$$\xi_2 = \xi_1 + (U - V)\tau \tag{D-3}$$

(D-3) 式は次のようにも書ける。

$$\begin{Bmatrix} \xi_2 \\ \tau \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & U-V \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \xi_1 \\ \tau \end{Bmatrix} \tag{D-4}$$

この関係を使って (ξ_1, τ) 平面上の等高線を (ξ_2, τ) 平面のそれに変換したり、またその逆も可能であることが分る。この変換行列を次の3ヶの行列に分解することができる。即ち

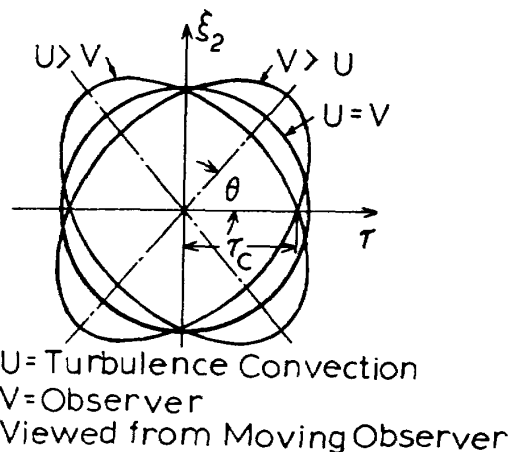


Figure D-2. Correlation Contours of One-Dimensional Turbulence Field.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & U-V \\ 0 & 1 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(U-V) \\ \frac{1}{2}(U-V) & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \text{(rigid body translation)} \quad \text{(uniform shear)} \\ &+ \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}(U-V) \\ -\frac{1}{2}(U-V) & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \text{(rigid body rotation)} \end{aligned} \quad (D-5)$$

右辺の第一，第三行列は平行移動と剛体回転を表わし，第二行列が変形を表わす。但し変形しても等高線に囲まれた面積は同じでなければならない。 x_2 座標系においては等高線の外観が U と V の値に左右されることが分る。

もし $U=V$ ならば円形となり， $U \neq V$ ならば楕円に近いものとなる。 U と V との関係が $U=V$ ， $V>U$ ， $V<U$ の場合につきそれぞれの等高線の形状を図D-2に示す。 τ 軸から反時計まわりに測った軸の傾斜角 θ は次式で決まる。

$$\theta = \tan^{-1} (V-U) \quad (D-6)$$

直観から空間的な相関長さは，どのような空間座標系を取っても同じでなければならない。しかし V や U に差があり，それが大きくなると傾斜角 θ はかなり大きくなると考えられ極限として $\theta \rightarrow 90^\circ$ となる。このとき面積の同じ楕円は細くなり相関時間は短くなる。以上の考察から回転翼の飛行速度と大気乱流の移動速度に差がある場合には統計的平均法が適用可能である。

TR-599 正誤表

頁	誤	正
P 14 , 左 7 行目	(3-1-14) 式	(3-2-14) 式
P 14 , 左 8 行目	(3-1-14) 式	(3-2-14) 式
P 34 , 左 3 行目	$E[x^n(t)] < \infty$	$\lim_{t \rightarrow \infty} E[x^n(t)] < \infty$
P 34 , 左下から 8 行目	$[A_k]$	$\lceil A_k \rceil$
P 34 , 左下から 7 行目	$[A(0)]$	$[A(0)]$
P 34 , 左下から 6 行目	$[A_k]$	$\lceil A_k \rceil$
P 34 , 右 3 行目	$[A_k]$	$\lceil A_k \rceil$

航空宇宙技術研究所報告599号

昭和55年2月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊦182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17
