

UDC 621.317.36

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-615

狭帯域不規則信号用3値相関型
中心周波数測定系の解析

松田幸雄・小林 彬

1980年6月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

狭帯域不規則信号用 3 値相関型* 中心周波数測定系の解析

松田 幸雄** 小林 彬***

Analysis of Center Frequency Measurement of Narrow-Band Random Signals with 3-Level Quantized Correlator

Yukio MATSUDA and Akira KOBAYASHI

ABSTRACT

In many cases of instrumentation, it is necessary to measure the center frequency of narrow-band random signals, and a way utilizing an autocorrelator has been suggested. In this method, the input signals are quantized in proper steps and are used for calculating the autocorrelation function. The center frequency of input signals is obtained from the zero crossing points of the autocorrelation function.

The quantization steps are determined by considering both accuracies and the complexity of the actual circuits. Though the 2-level quantization has been employed and it gives the simplest circuits, it suffers from the lowered accuracy due to the signal fluctuations and phase disturbances in the range of small signal amplitudes.

In this paper, the analysis of measuring error for 2-level and 3-level quantization was done and the results are compared with each other. This shows that 3-level quantization gives far more accurate measurement of center frequencies of narrow-band random signals than 2-level quantization with little penalty of circuit complexity.

1. まえがき

計測系の出力が周波数信号で得られる場合、その中心周波数（平均周波数）の推定値を求めるには通常周波数カウンタによる繰返し測定と平均演算、スペクトル解析装置による直接的な方法などがある。一方被測定信号が図1に示す様な狭帯域不規則信号の場合には、その自己相関々数測定系を応用した相関型中心周波数測定方式が提案されている¹⁾。これは狭帯域不規則信号の自己相関々数が、信号周波数の $(1+2k)/4$ 倍 ($k=0, 1, \dots$) の点でゼロになる性質を応用するもので、相関計の動作とは逆に、その出力を常にゼロに保つ様に遅れ時間を可変追尾し、その時の遅れ時間から中心周波数を求める方

法である。

この測定方式による実際の回路構成は、従来入力信号を2値レベル(+1, -1)に量子化したもの(極性信号)について自己相関々数を求める方式が一般的であった。その理由は、2値レベル信号の扱いが通常の論理素子で

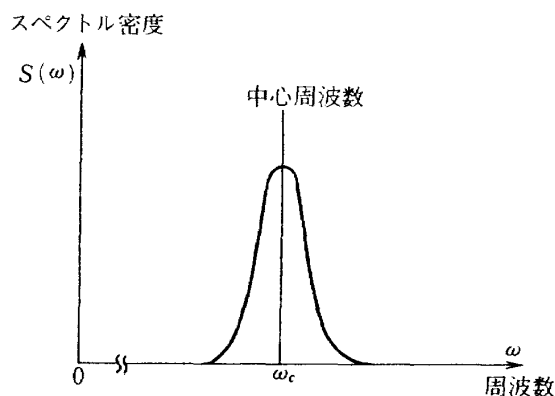


図1 狭帯域不規則信号のパワースペクトル

* 昭和55年4月7日受付

** 原動機部

*** 東京工業大学工学部

容易にでき、これに対して連続信号のまま自己相関々数を得ることが実際の回路上かなり難かしいことにある。しかしながら2値レベルの量子化において、信号振幅が小さくなる点での位相の乱れ、信号の揺ぎ等の現象が強く現われる事が指摘されており²⁾、これより相関々数の測定精度が悪くなる。このため振幅が小さくなる点での影響を避けることを目的として、量子化レベルを3値(+1, 0, -1)にする方式が考えられる。3値レベル量子化は、2値レベルと同程度の簡単な回路構成で測定系が実現でき、上述の理由から測定精度の向上が期待されるが、理論上の観点からこれを求めた例は無い。本研究は3値レベルでの相関々数の統計的誤差を計算することにより、中心周波数測定精度を2値レベル量子化及び連続信号の場合に比較して求め、その結果3値レベル量子化による方式が、大幅な精度改善を期待できるとの結論を得たので報告する。

2. 相関型中心周波数測定系と精度の評価

測定系の概念図を図2に示す。被測定信号 $x(t)$ は量子化により n 値レベル信号 ${}^n x(t)$ に変換され、 ${}^n x(t+\tau)$ との乗算及び平均時間 T_m による平均化操作で自己相関々数 ${}^n R_x(\tau)$ を得る。このとき $x(t)$ を図1のような狭帯域不規則信号とすれば、 ${}^n R_x(\tau)$ は遅れ時間 τ 、

$$\tau = (1 + 2k) \cdot \tau_0 \quad (k = 0, 1, \dots)$$

でゼロの値をとる。いま $x(t)$ の周波数を f_c とすれば、このときの遅れ時間 τ_0 は次式で表わせる。(図3)

$$\tau_0 = 1/4f_c \quad (1)$$

この性質を応用して ${}^n R_x(\tau)$ が常にゼロとなる様に、遅れ時間 τ を逆に可変し、 τ_0 を計測することで中心周波数を求める。なお実際の回路構成上からは、 $k = 0$ の点(第1ゼロ点)を動作点に設定する。

次に測定精度の評価値として自己相関々数の測定誤差、すなわち有限の時間 T_m による平均化で生ずる統計的誤差に注目する。いま図2において平均化出力を $m(t)$ とすれば、この統計的誤差の分散 σ_m^2 は、

$$\sigma_m^2 = \overline{m(t)^2} - \overline{m(t)}^2 \quad (2)$$

ここで $m(t)$ の平均 $\overline{m(t)}$ は定義よりゼロであるから、

$$\sigma_m^2 = \overline{m(t)^2} \quad (3)$$

ここでは図2における平均化操作を、A) 有限時間平均 B) 低域フィルタにて行なうものとすれば、(図4、付録3参照) 各々について次式の様に書くことができる³⁾

$$A) \quad \overline{m(t)^2} = \frac{1}{T_m} \int_{-T_m}^{T_m} \left(1 - \frac{|\tau'|}{T_m}\right) \cdot \phi_{xx}^n(\tau') d\tau' \quad (4)$$

$$B) \quad \widehat{\sigma_m^2} = \frac{1}{T_m} \int_0^\infty e^{-\tau'/T_m} \cdot \phi_{xx}^n(\tau') d\tau' \quad (5)$$

ここに $\phi_{xx}^n(\tau')$ は $x(t)$ に関する n 値レベルの4次元相関関数である。

$$\phi_{xx}^n(\tau') = \frac{{}^n x(t) \cdot {}^n x(t+\tau) \cdot {}^n x(t+\tau') \cdot {}^n x(t+\tau+\tau')}{\dots} \quad (6)$$

本報告では、 $n=2$ 及び $n=3$ について $\phi_{xx}^n(\tau')$ を数値計算し、(4)、(5)式から A)、B) について各々の誤差の分散を求めた。これより測定精度の評価値を得、比較のため計算した連続信号(アナログ)の場合と対比して述べる。なをここで求めた評価値は、図2において「遅れ τ 」にフィードバックがかからない開ループの場合に相当するが、付録2で述べるように実際の閉ループ回路上の設計資料として直接評価することができる。

3. 測定精度の計算

(1) 入力信号、量子化、測定精度評価値

入力信号 $x(t)$ のパワースペクトル密度関数 $S_c(\omega)$ を次式のように規定する。(図5参照)

$$S_c(\omega) = P_m \frac{\sqrt{2\pi}}{\omega b} \cdot \left\{ e^{-\frac{(\omega-\omega_c)^2}{2\omega b^2}} + e^{-\frac{(\omega+\omega_c)^2}{2\omega b^2}} \right\} \quad (7)$$

ここに P_m は平均電力、 ωb^2 は分散値である。また中心周波数 ω_c との比 $\omega b c = \omega b / \omega_c$ をとれば、パワースペクトルの尖鋭度 Q との関係は次の様に考えることができる。(実際の回路動作との比較を容易にするために、 Q をパ

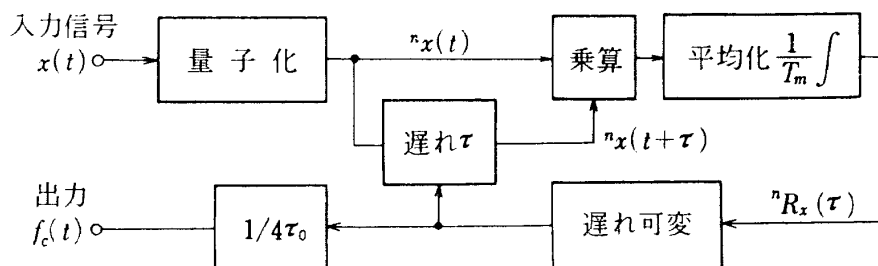


図2 相関型中心周波数測定系

ラメータとして計算を行なった。)

$$Q \approx 0.6 / \omega b c \quad (8)$$

また $x(t)$ の振幅分布 $A(x)$ を、平均値ゼロ、分散値 σ_x^2 の正規分布であると仮定する。(図6参照)

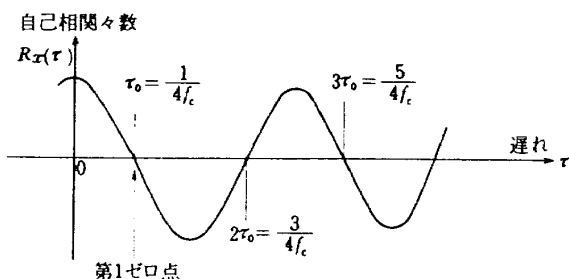


図3 狭帯域不規則信号の自己相関々数

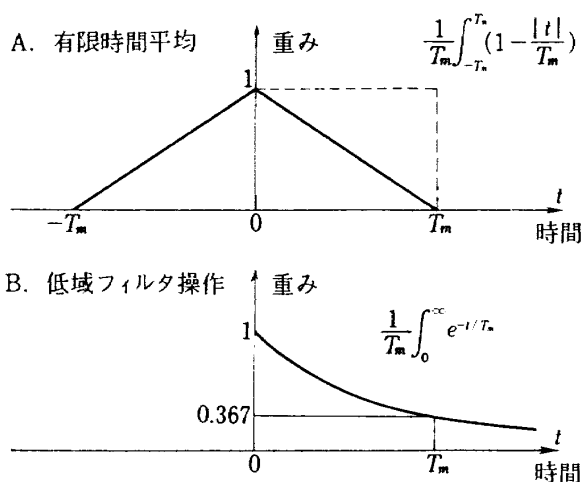


図4 平均化操作

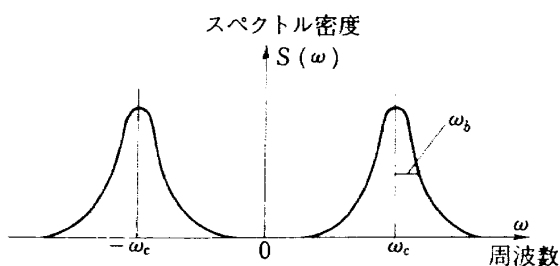


図5 入力信号のパワースペクトル

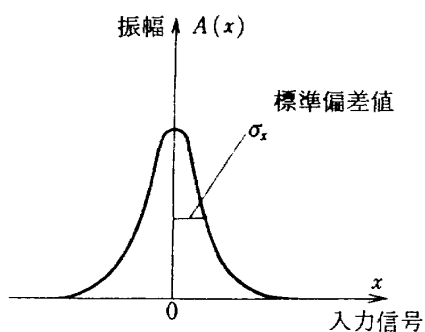


図6 入力信号の振幅分布

$$A(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x} \cdot e^{-\frac{x^2}{2\sigma_x^2}} \quad (9)$$

なを $\sigma_x^2 = P_m$ である。

次に $x(t)$ の自己相関々数 $R_x(\tau)$ は次式より求められる⁴⁾

$$R_x(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S_c(\omega) \cdot e^{j\omega\tau} d\omega$$

$$= P_m \cdot e^{-\frac{\omega b^2 \cdot \tau^2}{2}} \cdot \cos \omega_c \tau \quad (10)$$

ここで $\omega_c \tau = t'$ とおくことにより相関係数 $\rho_x(t')$ は次式の様になる。

$$\rho_x(t') = \frac{R_x(t')}{R_x(0)} = e^{-\frac{\omega b c^2 \cdot t'^2}{2}} \cdot \cos t' \quad (11)$$

3値レベル量子化を表1の様に行なうものとする。ここでしきい値 ξ は σ_x に対する割合で規定する。

$$\xi = v \cdot \sigma_x \quad (v = 0.1, 0.2 \dots)$$

なを $v = 0$ の場合は2値レベル量子化である。図7は2値レベル及び3値レベル量子化の様子を図示したものである。

測定精度の評価値としては、図3における τ_0 での $R_x(\tau)$ のバラツキが測定誤差と考えられる。そこでこれを横軸 τ のバラツキに変換しその値を測定精度の評価値 ε と規定する。いま $R_x(\tau)$ のバラツキを(3)式より σ_0^2 , $R_x(\tau_0)$ の傾きを ΔR とすれば、(τ_0 を中心とした $R_x(\tau)$ の微分係数。 $\Delta R = \Delta R_x(\tau) / \Delta \tau |_{\tau=\tau_0}$) 求める ε は次式で表わせる。(図8参照)

入力信号	出力値 ${}^3x(t)$
$\infty > x(t) > \xi$	+1
$\xi \geq x(t) \geq -\xi$	0
$-\xi > x(t) > -\infty$	-1

表1 3値レベル量子化

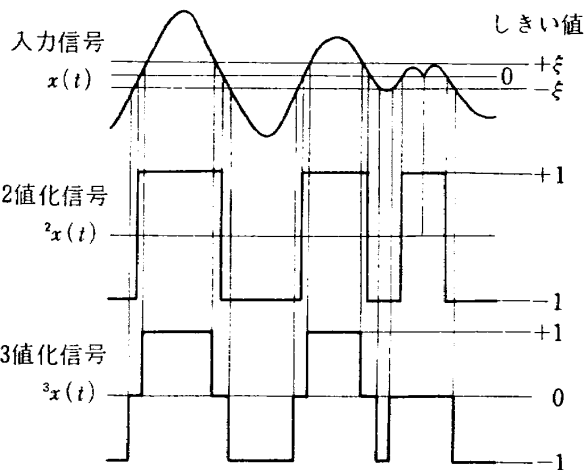


図7 2値及び3値レベル量子化

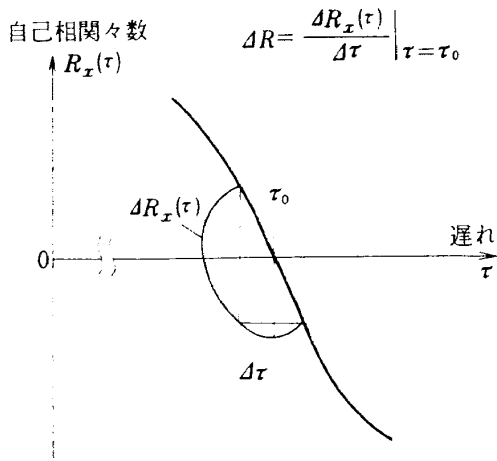


図8 ΔRの定義

$$\varepsilon = \sqrt{\sigma_0^2} / \Delta R \tag{13}$$

以上より求める測定精度の評価値 ε を、平均操作 A), B) について各々 $\bar{\varepsilon}_n$ (有限時間平均), $\hat{\varepsilon}_n$ (低域フィルタ) をもって表わせば(4), (5)式より,

A) 有限時間平均

$$\bar{\varepsilon}_n = \frac{\sqrt{n\sigma_0^2}}{\Delta R_n} = \left[\frac{2}{T_m} \int_0^{T_m} \left(1 - \frac{\lambda}{T_m}\right) \cdot \phi_{xx}^n(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\Delta R_n} \tag{14}$$

B) 低域フィルタ

$$\hat{\varepsilon}_n = \frac{\sqrt{n\sigma_0^2}}{\Delta R_n} = \left[\frac{1}{T_m} \int_0^{T_m} e^{-\frac{\lambda}{T_m}} \cdot \phi_{xx}^n(\lambda) d\lambda \right]^{\frac{1}{2}} \cdot \frac{1}{\Delta R_n} \tag{15}$$

ここで λ は規格化時間, $\lambda = \omega_c \tau'$ (16)

これより $\phi_{xx}^n(\lambda)$ は(6), (11)式より

$$\phi_{xx}^n(\lambda) = \frac{{}^n x(t') \cdot {}^n x(t' + \frac{\pi}{2}) \cdot {}^n x(t' + \lambda) \cdot {}^n x(t' + \frac{\pi}{2} + \lambda)}{\dots} \tag{17}$$

(2) 3値レベル相関々数

n 値レベル相関々数を期待値 $\langle E_n(t) \rangle$ で定義する。いま $x_1 = {}^n x(t)$, $x_2 = {}^n x(t + \tau)$ とすれば,

$$\langle E_n(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot {}_n P^d(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{18}$$

と書ける。ここで ${}_n P^d(x_1, x_2)$ は n 値レベル信号での x_1, x_2 の同時確率密度関数である。いま $n = 3$, 3値レベルについて(18)式を求める。 x_1, x_2 は各々 $(-1, 0, +1)$

の値を持つ。従って(18)式を求める場合 x_1 と x_2 について起るすべての事象を求めなければならない。ところで $x_1 = a$, $x_2 = b$ である場合の事象を, $q(a, b)$ と記述すれば, a, b の組合せによって求まる値, $\bar{q}(a, b)$ は $(-1, 0, 1)$ の値を持つ。ここに

$$\bar{q}(a, b) = q(a, b) \cdot \delta(x_1 - a) \cdot \delta(x_2 - b)$$

である。($\delta(\)$) はデルタ関数を表わす。) これより3値レベルでの確率密度関数を $\bar{q}(a, b)$ の記述で書くとすれば次式を得る。

$$\begin{aligned} {}_3 P^d(x_1, x_2) &= \bar{q}(1, 1) + \bar{q}(1, 0) + \bar{q}(1, -1) \\ &\quad + \bar{q}(0, 1) + \bar{q}(0, 0) + \bar{q}(0, -1) \\ &\quad + \bar{q}(-1, 1) + \bar{q}(-1, 0) + \bar{q}(-1, -1) \end{aligned} \tag{19}$$

ここで $\bar{q}(0, b)$, $\bar{q}(a, 0)$ の項はゼロの値を持つから, (19)式を(18)式に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \langle E_3(t) \rangle &= + \int_{-\xi}^{\infty} \int_{-\xi}^{\infty} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad - \int_{-\xi}^{\infty} \int_{-\infty}^{-\xi} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad - \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{-\xi}^{\infty} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad + \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{-\infty}^{-\xi} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{20}$$

ここに $P(x_1, x_2)$ は入力信号 $x(t)$ を(9)式で正規分布と仮定した事により, $x(t)$ に関する2次元の正規確率密度関数となり, 次式で表わされる⁴⁾

$$\begin{aligned} P(x_1, x_2) &= \frac{1}{K_1} \text{EXP} \left[-\frac{1}{K_2} (x_1^2 - 2\rho_x(\tau)x_1x_2 + x_2^2) \right] \end{aligned} \tag{21}$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに, } K_1 &= 2\pi\sigma_x^2(1 - \rho_x(\tau)^2)^{\frac{1}{2}} \\ K_2 &= 2\sigma_x^2(1 - \rho_x(\tau)^2) \end{aligned} \right\} \tag{22}$$

(21)式を(20)式に代入して次式を得る。

$$\begin{aligned} \langle E_3(t) \rangle &= 2 \int_{-\xi}^{\infty} \int_{-\xi}^{\infty} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \\ &\quad - 2 \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{-\xi}^{\infty} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \end{aligned} \tag{23}$$

(23)式で積分の範囲, $\pm\xi$ は(22)式で規定した3値レベル量子化のしきい値で, $\xi = 0$ とすることにより2値レベル相関々数が求められる。すなわち,

$$\langle E_2(t) \rangle = 2 \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2$$

$$-2 \int_{-\infty}^0 \int_0^{\infty} P(x_1, x_2) dx_1 dx_2 \tag{24}$$

(3) 3値レベル4次元相関々数

3値レベル量子化での4次元相関々数 ϕ_{xx}^3 を, (2)と同様な方法を用いて求める。いま $x(t)$ に対し, $x_1 = {}^n x(t)$, $x_2 = {}^n x(t+\tau)$, $x_3 = {}^n x(t+\tau')$, $x_4 = {}^n x(t+\tau+\tau')$ また $x_1, x_2, x_3, x_4 = \#$ と書くことにすれば, n 値レベルの4次元相関々数は次式の様に表わせる。

$$\langle E_n(t)^2 \rangle =$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 \cdot x_4 \cdot {}_n P^d(\#) d\# \tag{25}$$

ここに ${}_n P^d(\#)$ は n 値レベルでの x_1, x_2, x_3, x_4 の同時確率密度関数である。いま $n = 3$ の場合(19式と同様な記述により次式を得る。

$$\begin{aligned} {}_3 P^d(\#) = & \bar{q}(1, 1, 1, 1) \\ & + \bar{q}(1, 1, 1, -1) + \bar{q}(1, 1, -1, 1) \\ & + \bar{q}(1, -1, 1, 1) + \bar{q}(-1, 1, 1, 1) \\ & + \bar{q}(1, -1, -1, 1) + \bar{q}(1, 1, -1, -1) \\ & + \bar{q}(-1, -1, 1, 1) + \bar{q}(-1, 1, 1, -1) \\ & + \bar{q}(1, -1, 1, -1) + \bar{q}(-1, 1, -1, 1) \\ & + \bar{q}(-1, -1, -1, 1) + \bar{q}(-1, -1, 1, -1) \\ & + \bar{q}(-1, 1, -1, -1) + \bar{q}(1, -1, -1, -1) \\ & + \bar{q}(-1, -1, -1, -1) \end{aligned} \tag{26}$$

ここで $\bar{q}(0, a, b, c)$ などの項は, ゼロの値を持つ。これより, (26)式を(25)式に代入して計算を行ない, (23)式に対応して次式を得る。

$$\begin{aligned} \langle E_3(t)^2 \rangle = & 2 \left[\int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} P(\#) d\# \right. \\ & + \int_{\xi}^{\infty} \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{\xi}^{\infty} P(\#) d\# \\ & + \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} P(\#) d\# \\ & + \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{\xi}^{\infty} \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{\xi}^{\infty} P(\#) d\# \\ & - \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{\xi}^{\infty} P(\#) d\# \\ & \left. - \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{\xi}^{\infty} P(\#) d\# \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} P(\#) d\# \\ & - \int_{\xi}^{\infty} \int_{-\infty}^{-\xi} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} P(\#) d\# \end{aligned} \tag{27}$$

ここに $P(\#)$ は4次元の正規確率密度関数で次の様に書ける⁴⁾

$$P(\#) = \frac{1}{(2\pi)^2 |C|^{\frac{1}{2}}} \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{2|C|} \cdot \# \cdot C^{-1} \cdot \#^T \right\} \tag{28}$$

ここに C は x_1, x_2, x_3, x_4 の共分散行列で次式で表わせる⁴⁾。また C^{-1} はその逆行列である。(28式の記述及び展開については付録1に示した。)

$$C = \begin{bmatrix} R(0) & R(\tau) & R(\tau') & R(\tau+\tau') \\ R(\tau) & R(0) & R(\tau-\tau') & R(\tau') \\ R(\tau') & R(\tau-\tau') & R(0) & R(\tau) \\ R(\tau+\tau') & R(\tau') & R(\tau) & R(0) \end{bmatrix} \tag{29}$$

(27)式で $\xi = 0$ とおけば, 2値レベルでの4次元相関々数が求まる。

以上から付録1に示す方法で(27)式を数値積分で求め, (14), (15)式における $\bar{\varepsilon}_2, \bar{\varepsilon}_3, \hat{\varepsilon}_2, \hat{\varepsilon}_3$ を得た。数値積分の計算精度に大きく影響するパラメータとして, $x_1 \sim x_4$ についてのキザミ幅は, 振幅分布 $A(x)$ の標準偏差値 σ_x の1/10以下とし, (14), (15)式を求める際の時間軸 λ のキザミ幅は $\pi/200(\phi_{xx}^n(\lambda)$ の1周期時間/200)とした。

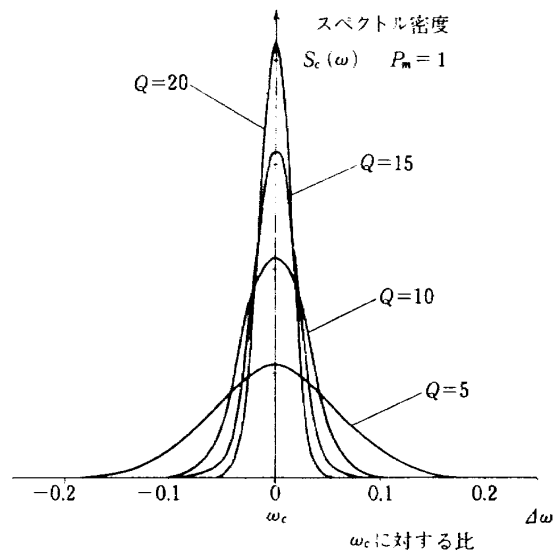


図9 計算パラメータ (Qに対するスペクトル変化)

4. 結 果

計算のパラメータとして、入力信号の Q (5, 10, 15, 20), しきい値 ξ (0 ~ 1.4, 0 は 2 値レベルである。) を与えた。図 9 は Q の変化に対するパワースペクトルの形を、図 10 は振幅分布における ξ の位置を参考にしたものである。なを $P_m = 1, (\sigma_x^2 = 1)$ とした。

(1) 3 値レベル相関々数と 4 次元相関々数

相関々数の例を図 11 に示す。ここで $Q=5, \xi=0, 0.4, 0.8, 1.4$ の他に比較のためアナログについても示してある。図 12 に 4 次元相関々数の例を示す。図 11, 図 12 とともに縦軸は各々 $R(0), \phi_{xx}(0)$ で規格化した値を

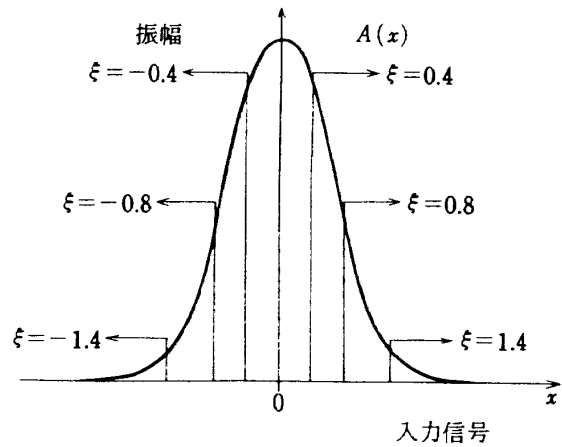


図 10 計算パラメータ (しきい値の規定)

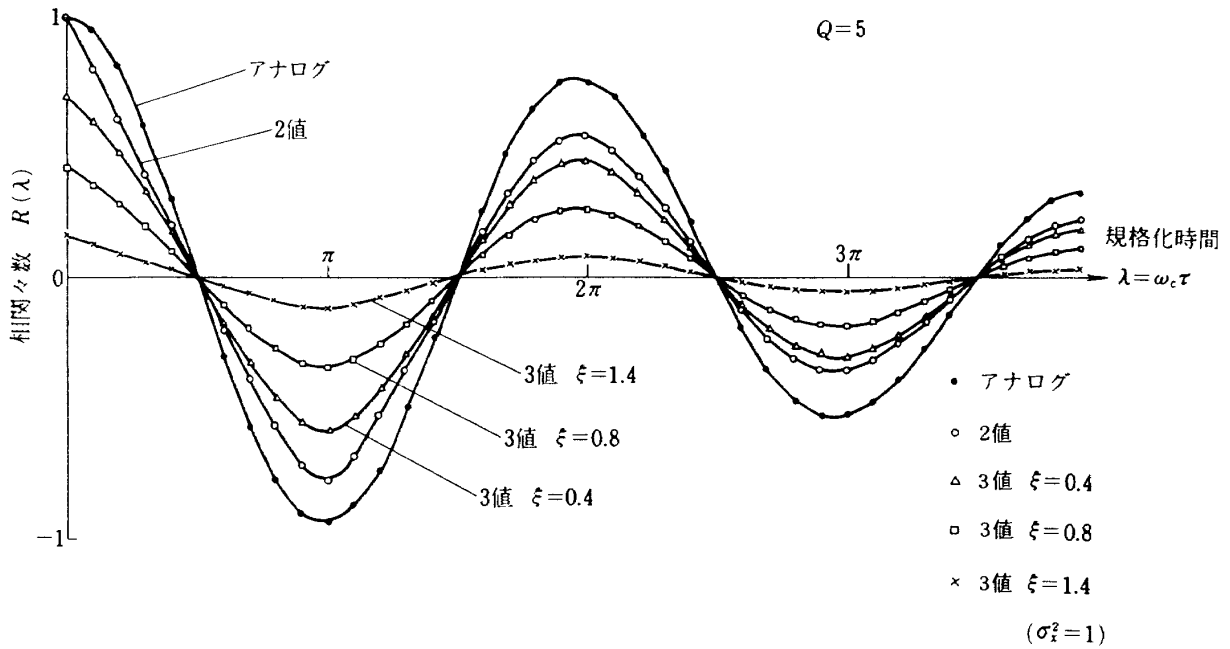


図 11 相関々数の例

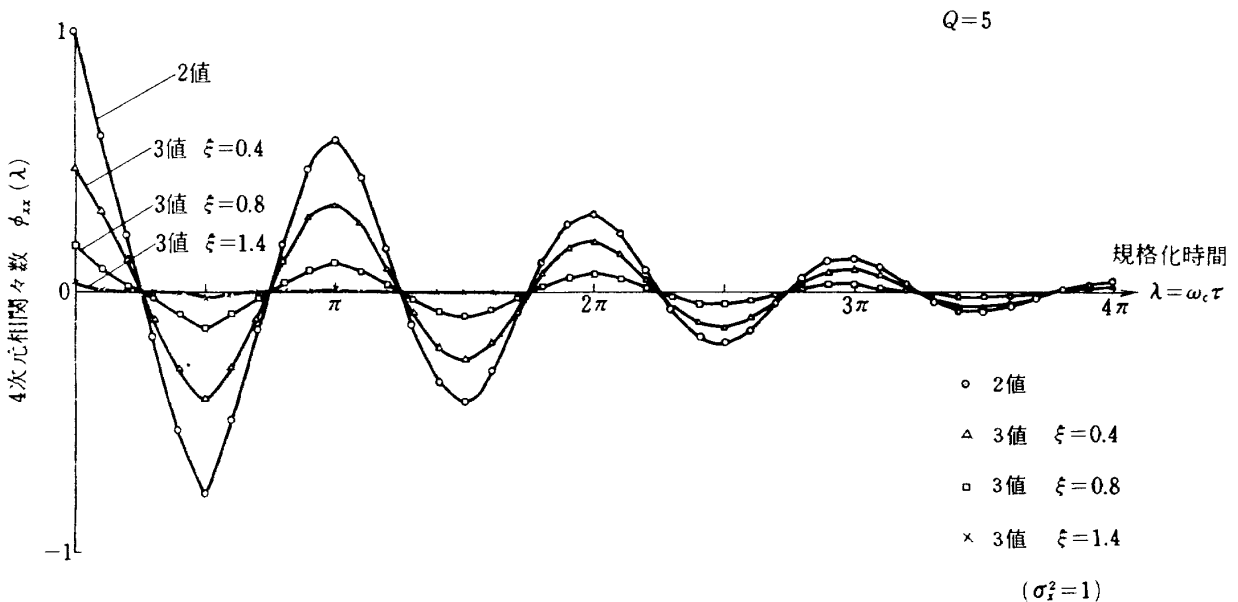


図 12 4 次元相関々数の例

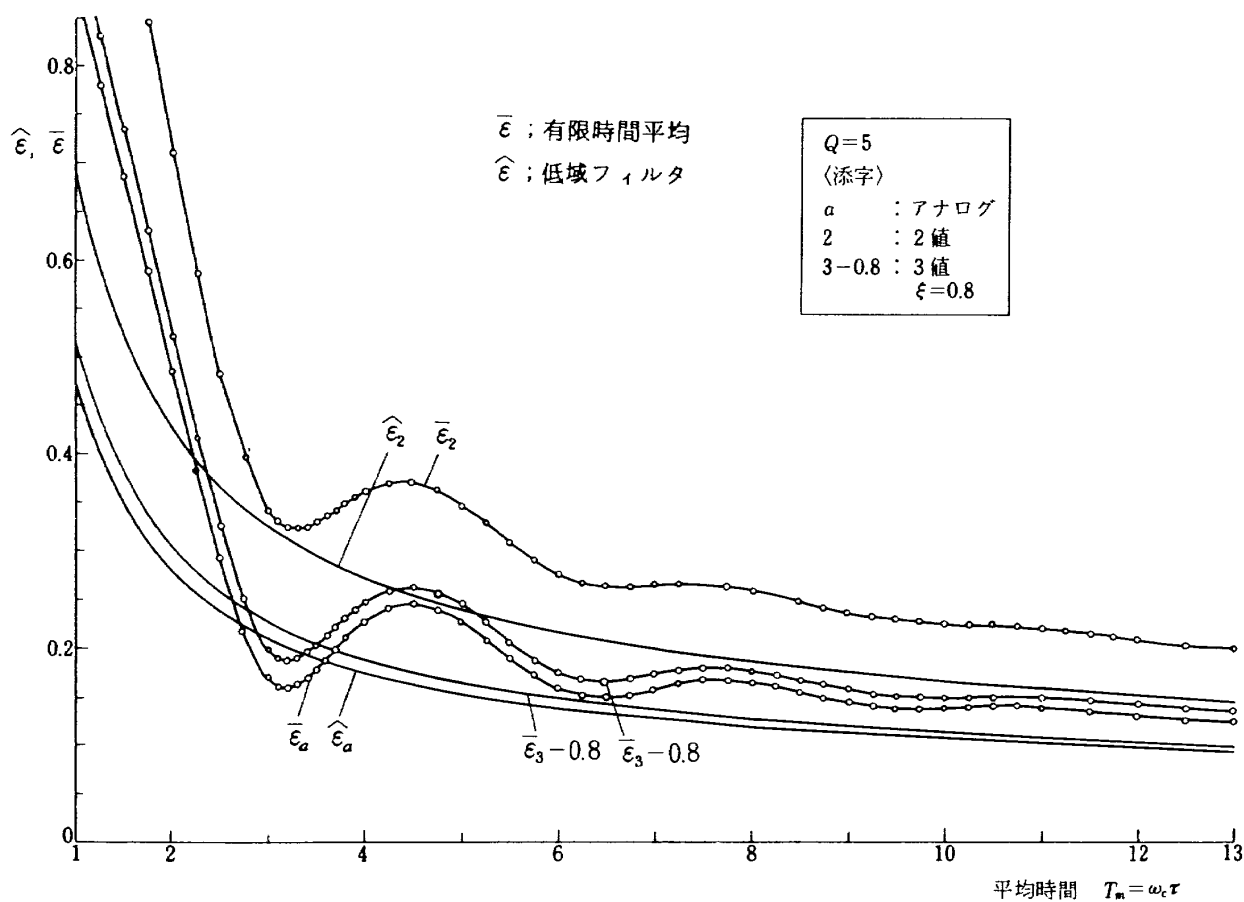


図13 T_m に対する $\bar{\varepsilon}$, $\hat{\varepsilon}$ の変化 ($Q=5$)

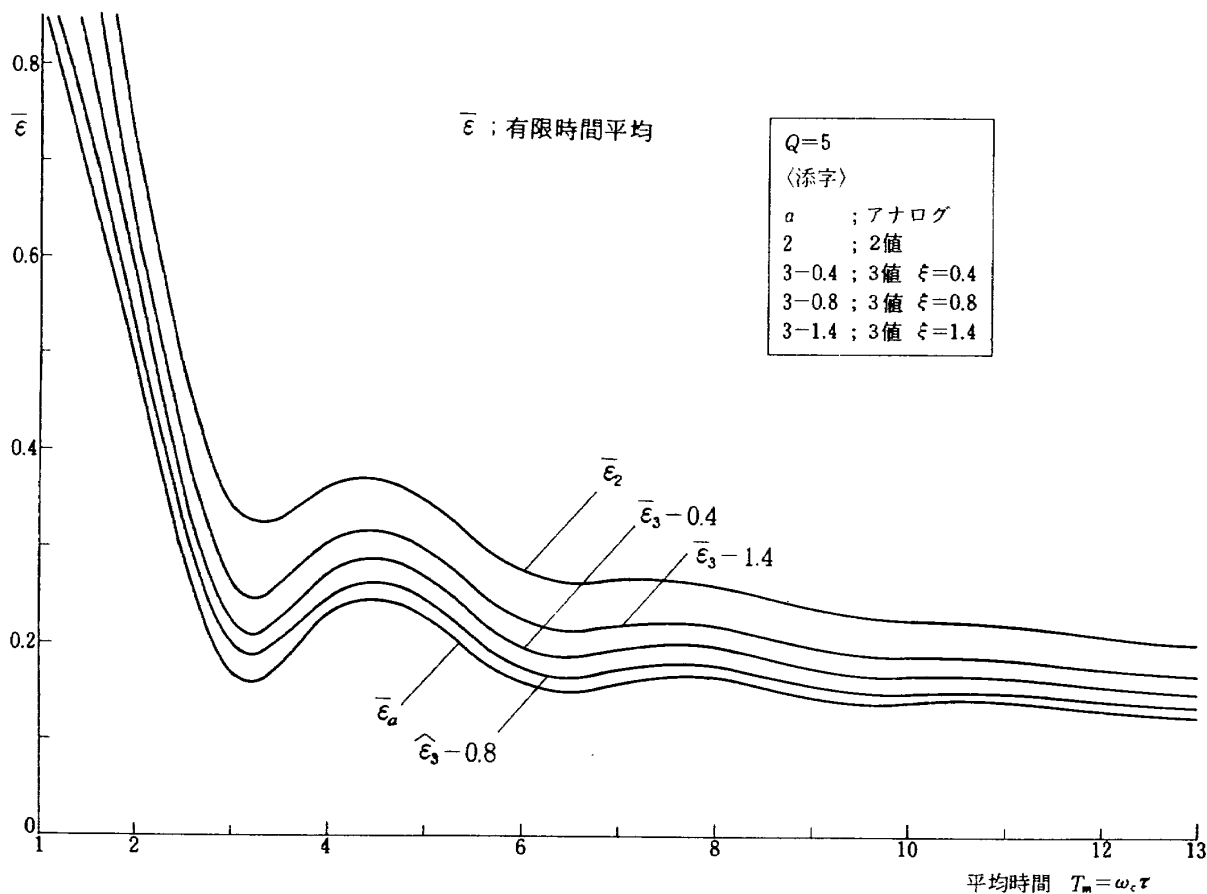


図14 T_m に対する $\bar{\varepsilon}$ の変化 ($Q=5$)

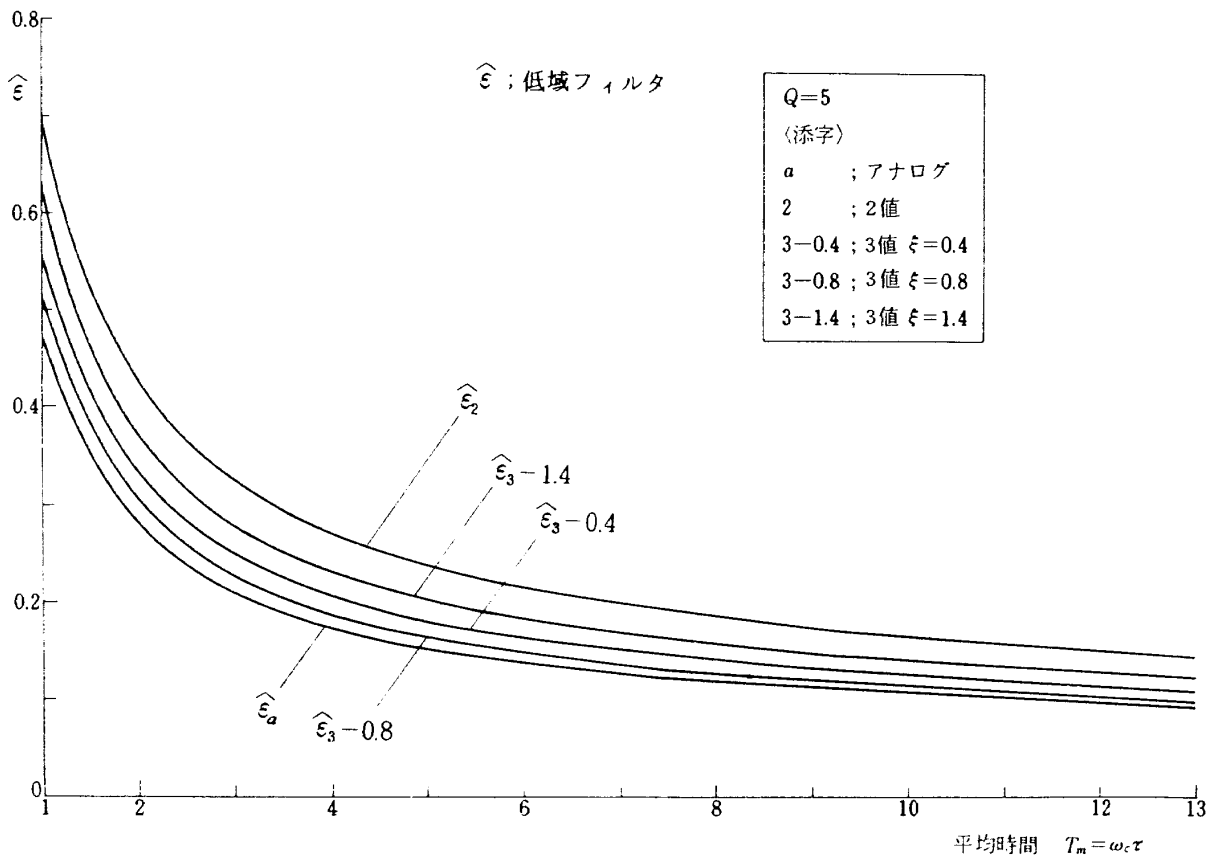


図 15 T_m に対する $\hat{\varepsilon}$ の変化 ($Q=5$)

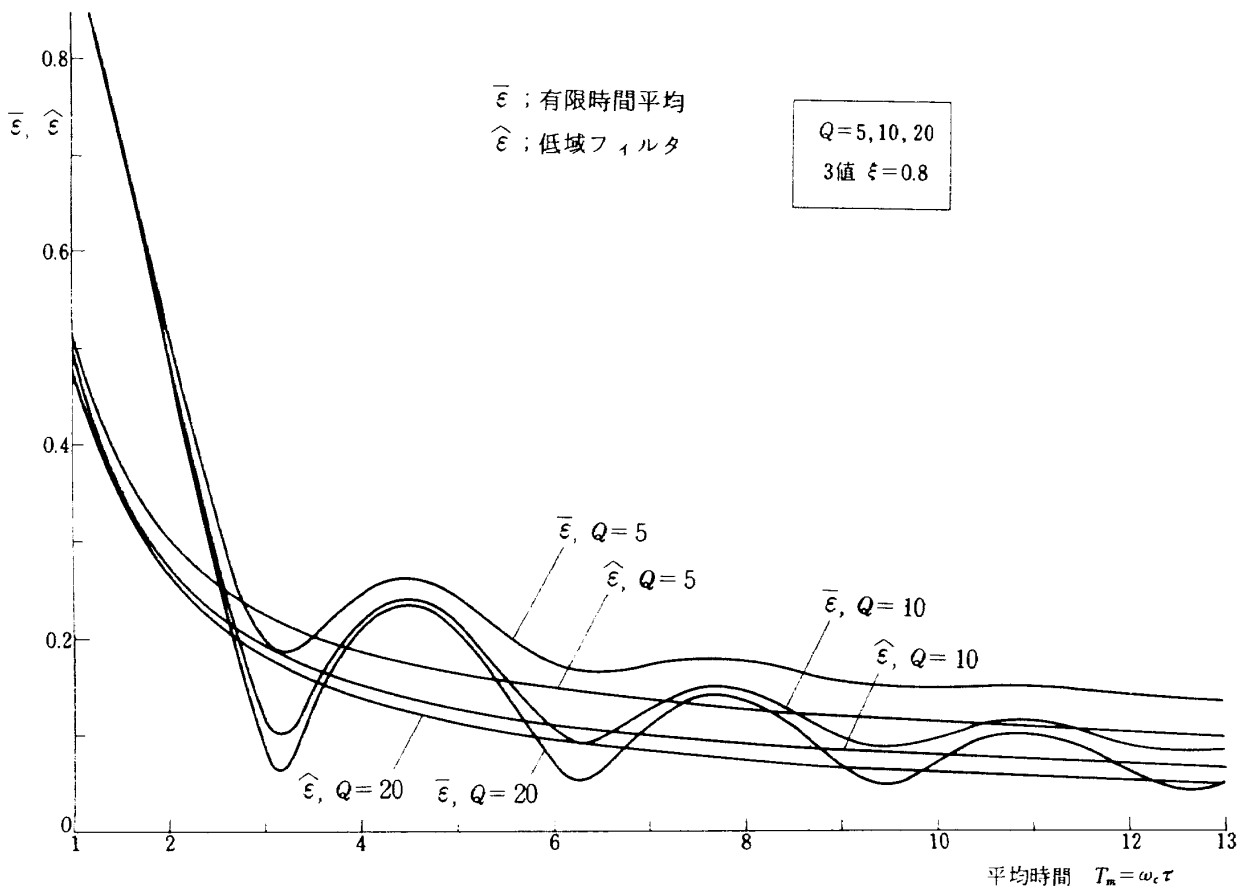


図 16 T_m に対する $\bar{\varepsilon}$, $\hat{\varepsilon}$ の変化 ($\xi=0.8$)

とった。また横軸は(10)式で規定した規格化時間で、以後結果の時間軸としてこれを用いる。(例として、 $\lambda=2\pi$ では $1/\lambda$ は中心周波数の1周期時間となる。また T_c は入力周波数の周期を表わす。)

(2) 平均時間 T_m

平均時間 T_m に対する $\bar{\varepsilon}$ 、 $\hat{\varepsilon}$ の変化を図13に示す。これは、 $Q=5$ 、 $\xi=0$ 、 0.8 及びアナログについて各々 $\bar{\varepsilon}$ 、 $\hat{\varepsilon}$ を示したもので、 $T_m \leq 1.5 T_c$ では $\bar{\varepsilon}$ は π の周期で振動する形となることがわかる。この傾向は Q の増加とともに顕著になり、有限時間平均を用いる場合には注意を要する。図14、図15は各々 $\bar{\varepsilon}$ 、 $\hat{\varepsilon}$ を $\xi=0$ 、 0.4 、 0.8 、 1.4 及びアナログについて示したもので後述する様に $\xi=0.8$ 付近が最適値であることがわかる。図16は $\xi=0.8$ 一定における $Q=5$ 、 10 、 20 での $\bar{\varepsilon}$ 、 $\hat{\varepsilon}$ を各々示したものである。

次に T_m を実用上の長さにとった場合の $\hat{\varepsilon}$ の変化を図17に示す。図より $T_m \geq 2 \sim 5 T_c$ で $1/\sqrt{T_m}$ の傾きを持つ直線となり、以降の計算(図で破線で表わした部分)は省略した。図17で縦軸は測定誤差を%で表わし、また両軸とも対数目盛である。図17より求めた一定周期での $\hat{\varepsilon}$ の値を表2に、また一定誤差値を与える T_m の値を表3にまとめて示した。この結果は実用回路上の平均時間を与えている。

(3) 3値レベル量子化のしきい値 ξ

しきい値 ξ に対する $\hat{\varepsilon}$ の変化を図18に示す。これは $Q=5$ 、 10 、 15 、 20 にて各々 ξ を $0 \sim 1.4$ まで数点について計算し求めたものである。これは、 $T_m = 2 \cdot T_c$ の場合についての値であるが、図17より T_m が実用域の場合についても同じ傾向を示すと思われる。図18によれば、 $Q=5 \sim 20$ において最適なしきい値は 0.8 付近にあることがわかる。図19はこの様子を示したもので、2値レベル及びアナログに対する差違が明らかであり、 $\xi=0.8$ では測定誤差はアナログとはほぼ同程度まで改善されることがわかる。

$Q \backslash T_m$	$10 T_c$	$30 T_c$	$100 T_c$	$300 T_c$
5	4.6 %	2.75	1.68	0.92
10	3.2	1.9	1.18	0.65
15	2.6	1.55	0.96	0.53
20	2.2	1.32	0.82	0.45

表2 平均時間 T_m に対する誤差 [%] ($\xi=0.8$)

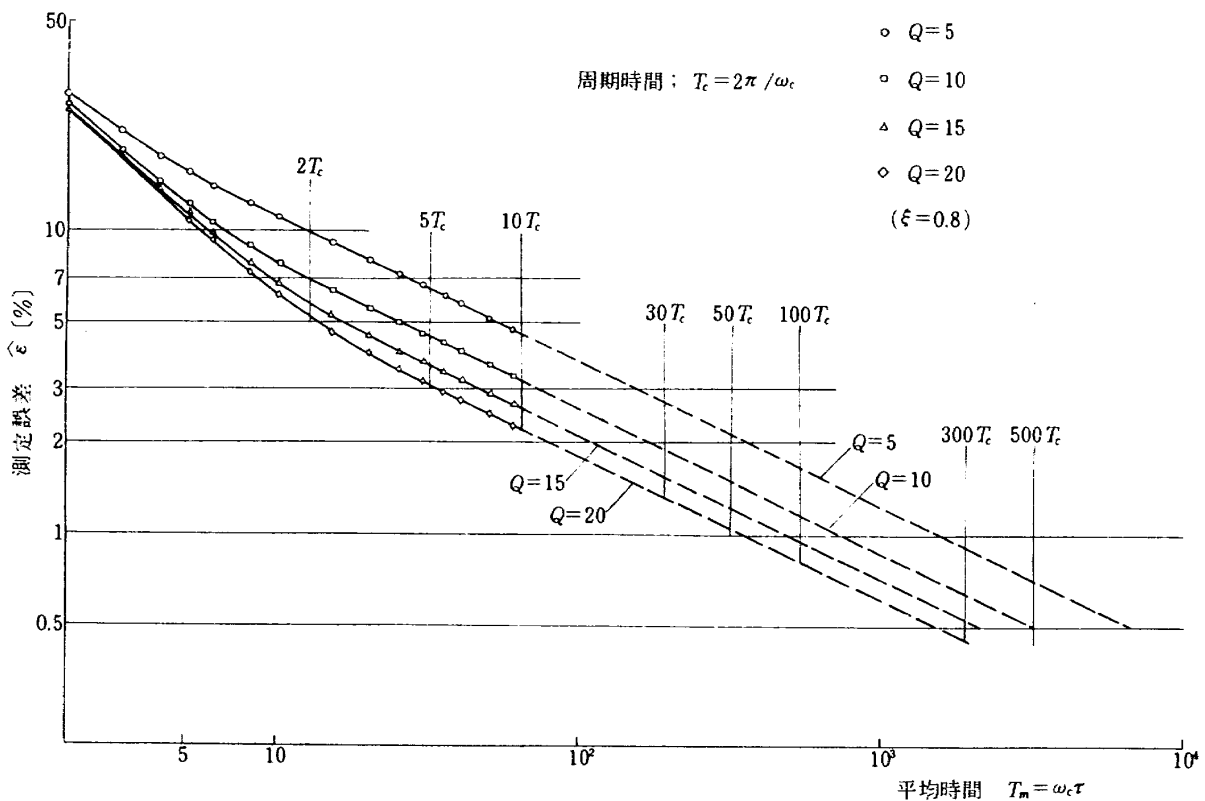


図17 T_m に対する $\hat{\varepsilon}$ の変化 ($\xi=0.8$)

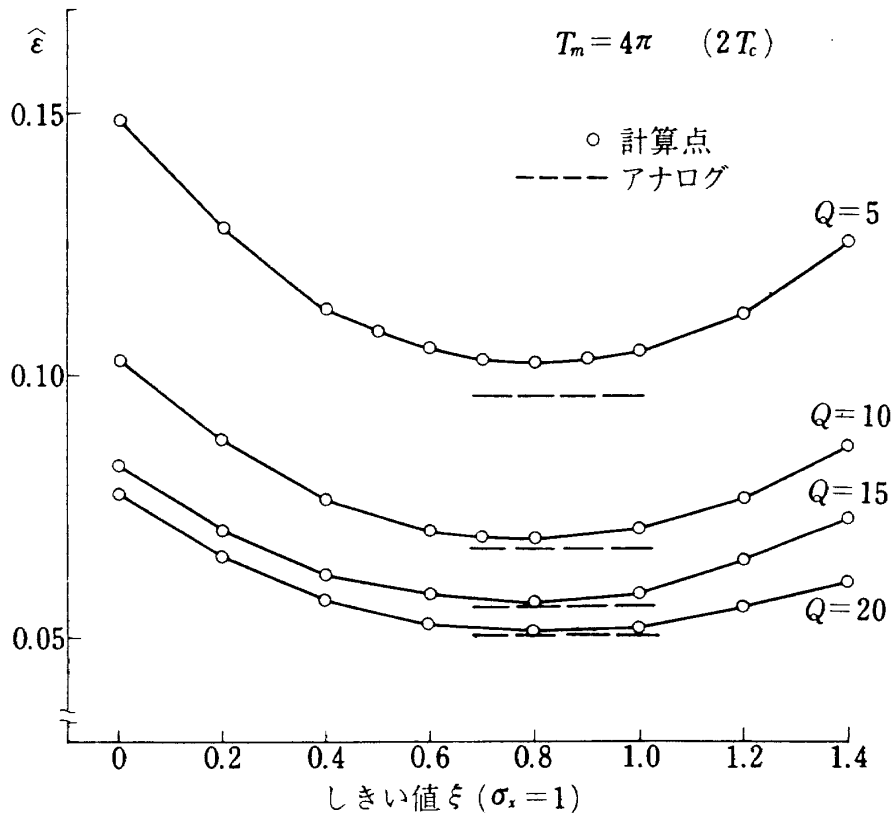


図 18 ξ に対する $\hat{\varepsilon}$ の変化

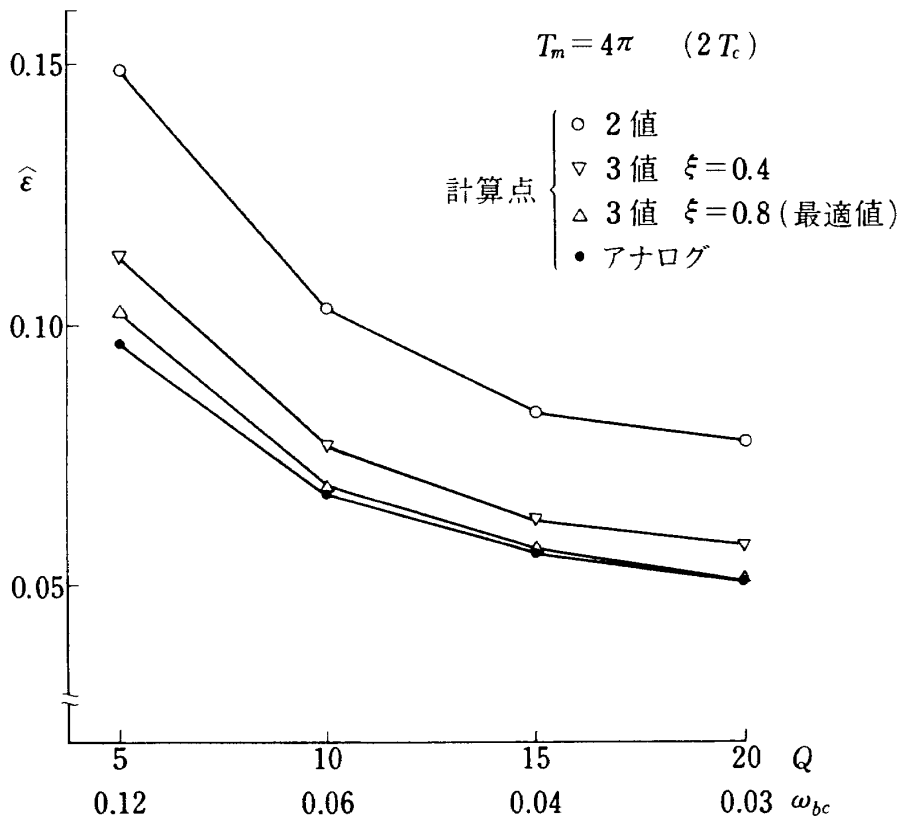


図 19 Q に対する $\hat{\varepsilon}$ の変化

$Q \backslash \hat{\epsilon}$	5%	1%	0.5%
5	$8.4 T_c$	252.	1082.
10	4.	116.	509.
15	2.55	80.	366.
20	2.15	56.	239.

表3 一定誤差に対する平均時間周期〔 T_c 〕
($\xi = 0.8$)

5. まとめ

3値レベル相関々数の統計的誤差を数値解析で求めることにより、相関型中心周波数測定系の測定精度を従来の2値レベル及びアナログの場合と比較して評価することができた。これによれば、3値レベル量子化を行なう際設定するしきい値を、入力信号の標準偏差値（一般には $r \cdot m \cdot s$ 電圧）の0.8程度にすることにより、アナログの場合と同程度の測定精度が得られる。この事は、2値レベル量子化のコンパレータをしきい値電圧を持つ3値レベル量子化のコンパレータに変更するだけで、大幅に測定精度を改善することが可能である事を示している。また平均化時間は1%誤差で測定する場合、入力信号周期の50 ($Q = 20$) ~ 250 ($Q = 5$) 倍程度必要で、これは例えば1KHzの信号に対し50 ~ 250msecであり、通常の周波数カウンタによるくり返し測定と平均演算、スペクトル解析器などによる測定方式に対し短時間で結果が連続的に得られる。以上より本方式が不規則信号の中心周波数測定に対し、非常に有効な方法であることを理論上の点から明らかにすることができた。

6. おわりに

本報告は筆者が東京工業大学に研修生として留学した際行なった研究をまとめたもので⁵⁾本研究の解析対象となる3値レベル相関型中心周波数測定系のハードウェアについては、これと平行して試作・研究が行なわれ⁶⁾その動作試験の結果と本報告の結果とは非常に良い対応を示すことが確かめられた。付録2にその結果とハードウェアについて概略を示す^{7), 8)}

最後に本研究を行なうに当って、東京工業大学制御工学科の山浦富雄助手及び中山鳩夫氏に多くの協力と助言をいただいたことを記し、感謝の意を表します。

参 考 文 献

- 1) H. Steinberg et al. 「Short-Time Measurement of Narrow-Band Random Signals by Means of a Zero Counting Process」 J. of Applied Physics Vol. 26, No. 2
- 2) 内藤, 狼, 小林「空間フィルタによる速度計測」計測と制御 7-11 (1968)
- 3) 磯部孝(編)「相関々数及びスペクトル」東大出版会
- 4) 茅, 佐藤, 宮川「不規則信号論と動特性推定」コロナ社
- 5) 松田 他, 「狭帯域不規則信号の中心周波数測定に関する3値相関々数の解析」, 第18回計測自動制御学会学術講演会予稿集 (1979-8) 1411
- 6) 中山 他, 「狭帯域不規則信号用3値相関型中心周波数測定装置」同上 1412
- 7) 小林, 山浦, 中山, 松田「狭帯域不規則信号用3値相関型中心周波数測定装置」, 電気学会, 電子計測研究会資料 (1979-11)
- 8) 中山, 山浦, 小林, 松田「3値信号の相関々数を用いる狭帯域不規則信号用平均周波数測定法」, 計測自動制御学会論文集掲載予定

記号

付録 1 数値計算

- $A(x)$; $x(t)$ の振幅分布
- $\langle E \rangle$; 期待値を表わす
- f_c ; $x(t)$ の中心周波数
- $m(t)$; 平均化出力
- n ; 添字, n 値レベルを表わす
- P_m ; $x(t)$ のパワースペクトルの平均電力
- $P(a, b)$; 2次元の正規確率密度関数
- $P^d(a, b, \dots)$; a, b, \dots の同時確率密度関数
- $P(\#)$; 4次元の正規確率密度関数
- Q ; $x(t)$ のパワースペクトルの尖鋭度
- $R(\tau)$; 自己相関々数
- ΔR ; $\tau = \tau_0$ での $R(\tau)$ の傾き
- S_c ; $x(t)$ のパワースペクトル
- T_c ; $1/f_c$
- T_m ; 規格化平均化時間
- $x(t)$; 被測定入力信号
- $\delta(\)$; デルタ関数
- ε ; 精度の評価値
- $\bar{\varepsilon}$; 精度の評価値 (有限時間平均)
- $\hat{\varepsilon}$; 精度の評価値 (低域フィルタ)
- λ ; 規格化時間 ($\omega_c \tau'$)
- ξ ; 3 値量子化でのしきい値
- $\rho(t)$; 相関係数
- σ_m^2 ; 平均化出力の統計的誤差
(誤差分布の分散)
- σ_x^2 ; $A(x)$ の分散
- $\bar{\sigma}_0^2$; 有限時間平均での出力誤差分布の分散
- $\hat{\sigma}_0^2$; 低域フィルタでの出力誤差分布の分散
- τ, τ' ; 時間遅れ
- $\phi_{xx}(\tau)$; 4次元相関々数
- ωb^2 ; パワースペクトルの分散
- ω_c ; $x(t)$ の中心周波数
- C ; 共分散行列
- C^{-1} ; 逆行列
- $\#$; x_1, x_2, x_3, x_4 の略記号

目的とする積分式を I とすると,

$$I = \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} F(\#) d\# \quad (\text{付 1})$$

ここに被積分関数 $F(\#)$ は,

$$F(\#) = \frac{1}{4\pi^2 |C|^{\frac{1}{2}}} \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{2} \cdot \# \cdot C^{-1} \cdot \#^T \right\} \quad (\text{付 2})$$

式より C, C^{-1} を計算すると $R(\tau) = 0$ より

$$C = \begin{bmatrix} R(0) & 0 & R(\tau') & R(\tau'+\tau) \\ 0 & R(0) & R(\tau'-\tau) & R(\tau') \\ R(\tau') & R(\tau'-\tau) & R(0) & 0 \\ R(\tau'+\tau) & R(\tau') & 0 & R(0) \end{bmatrix} \quad (\text{付 3})$$

$$C^{-1} = \begin{bmatrix} m_1 & m_2 & m_3 & m_4 \\ m_2 & m_6 & m_7 & m_3 \\ m_3 & m_7 & m_6 & m_2 \\ m_4 & m_3 & m_2 & m_1 \end{bmatrix} \quad (\text{付 4})$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに} \quad m_1 &= R_0 \cdot (R_0^2 - R_d^2 - R_\tau^2) \\ m_2 &= R_0 \cdot (R_d + R_s) \\ m_3 &= R_\tau^3 - R_\tau \cdot R_s \cdot R_d - R_0^3 \\ m_4 &= R_s \cdot R_d^2 - R_\tau^3 \cdot R_d - R_0^2 \cdot R_s \\ m_6 &= R_0 \cdot (R_0^2 - R_\tau^2 - R_s^2) \\ m_7 &= -R_\tau^2 \cdot R_s - R_0^2 \cdot R_d + R_d \cdot R_s^2 \end{aligned} \right\} \quad (\text{付 5})$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} R_0 &= R(0) \\ R_\tau &= R(\tau') \\ R_d &= R(\tau' - \tau) \\ R_s &= R(\tau' + \tau) \end{aligned} \right\} \quad (\text{付 6})$$

である。以上より (付 2) 式は,

$$F(\#) = \frac{1}{4\pi^2 |C|^{\frac{1}{2}}} \text{EXP} \left\{ -\frac{1}{2} G(\#) \right\} \quad (\text{付 7})$$

ここに,

$$\begin{aligned} G(\#) &= (x_1, x_2, x_3, x_4) \cdot C^{-1} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \\ &= m_1(x_1^2 + x_4^2) + m_6(x_2^2 + x_3^2) \\ &\quad + 2m_7 x_2 x_3 + 2m_4 x_1 x_4 \\ &\quad + 2m_2(x_1 x_2 + x_3 x_4) \end{aligned}$$

$$+ 2 m_3 (x_1 x_3 + x_2 x_4) \quad (付 8)$$

ここで誤差関数を次式で定義する。

$$ERFC(X) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_X^\infty e^{-Y^2} dY \quad (付 9)$$

これを用いて(付1)式の積分を、次式のように3次元積分の形に変形する。いま x_1, x_2, x_3 を記号 \ast で表わすとすれば、

$$I = \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} \int_{\xi}^{\infty} f(\ast) \cdot ERFC \{ g(\ast) \} d\ast \quad (付 10)$$

ここに

$$\begin{aligned} f(\ast) &= K_3 \cdot EXP(-h(\ast)/A) \\ K_3 &= \sqrt{2\pi} / (8\pi^2 \cdot \sigma_x^3 \sqrt{m_1}) \\ A &= 2\sigma_x^2 \cdot |C| \\ h(\ast) &= C_1 x_1^2 + C_2 x_2^2 + C_3 x_3^2 \\ &\quad + C_4 x_1 x_2 + C_5 x_1 x_3 + C_6 x_2 x_3 \\ g(\ast) &= K_4 \cdot (\xi + C_7 x_3 + C_8 x_2 + C_9 x_1) \\ K_4 &= (m_1 / 2 \cdot |C|)^{\frac{1}{2}} \\ C_1 &= (m_1^2 - m_4^2) / m_1 \\ C_2 &= (m_1 \cdot m_6 - m_3^2) / m_1 \\ C_3 &= (m_1 m_6 - m_2^2) / m_1 \\ C_4 &= 2(m_1 m_2 - m_3 m_4) / m_1 \\ C_5 &= 2(m_1^2 - m_2 m_4) / m_1 \\ C_6 &= 2(m_1 m_7 - m_2 m_3) / m_1 \\ C_7 &= m_2 / m_1 \\ C_8 &= m_3 / m_1 \\ C_9 &= m_4 / m_1 \end{aligned}$$

(付 11)

次に(付10)式における無現大と等価な積分範囲を与えるため、被積分関数 $F(\ast)$ の存在する範囲に注目する。いま(付10)式より $F(\ast)$ は、

$$F(\ast) = f(\ast) \cdot ERFC \{ g(\ast) \} \quad (付 12)$$

また $f(\ast)$ は(付11)式より、

$$f(\ast) = K_3 \cdot EXP(-h(\ast)/A) \quad (付 13)$$

ここで $\sigma_x^2 = 1$ とすれば K_3 は $\tau' = 0, \pi/2$ の点を除き充分小さい。そこで(付13)式の指数部を、

$$ARG(\ast) = h(\ast)/A \quad (付 14)$$

とすれば、 $ARG(\ast) \geq 10$ では $f(\ast)$ は充分小さいと考えられる。以上より数値計算の範囲として、この値をとる x_1, x_2, x_3 を求めた。いま $ARG(\ast) = 10$ とおいて(付14)式を展開すれば次式を得る。

$$S_1 x_1^2 + S_2 x_2^2 + S_3 x_3^2 = \bar{d} \quad (付 15)$$

ここに S_1, S_2, S_3 は次式で示す特性方程式の3実根、また $\bar{d} = 10 \cdot A$ である。

$$\begin{vmatrix} C_1 - S & C_4/2 & C_5/2 \\ C_4/2 & C_2 - S & C_6/2 \\ C_5/2 & C_6/2 & C_3 - S \end{vmatrix} = 0 \quad (付 16)$$

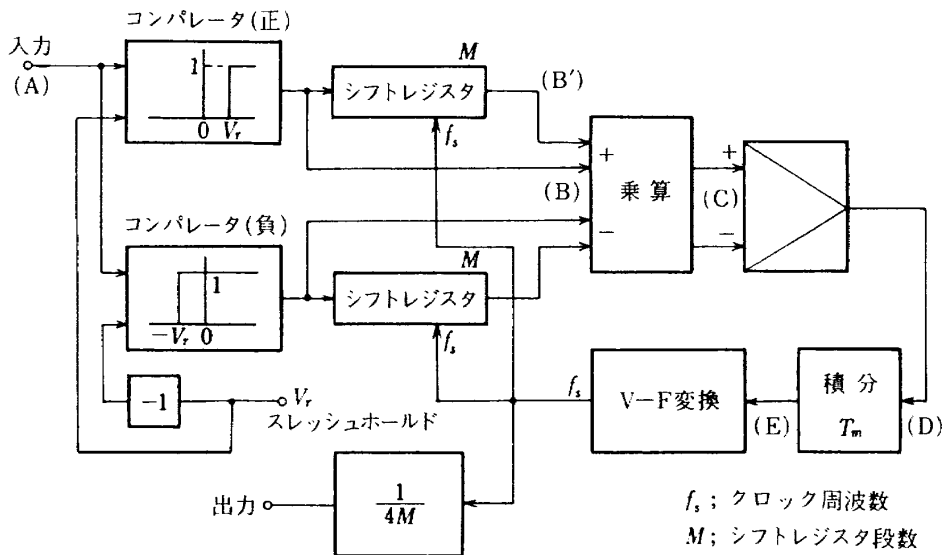
(付15)式は中心が(0, 0, 0)の楕円面であることを示している。(付15)式より

$$\frac{x_1^2}{\bar{d}/S_1} + \frac{x_2^2}{\bar{d}/S_2} + \frac{x_3^2}{\bar{d}/S_3} = 1 \quad (付 17)$$

これより x_1, x_2, x_3 の存在する範囲は楕円面の各座標上の端、 $\pm \sqrt{\bar{d}/S_1}, \pm \sqrt{\bar{d}/S_2}, \pm \sqrt{\bar{d}/S_3}$ である。

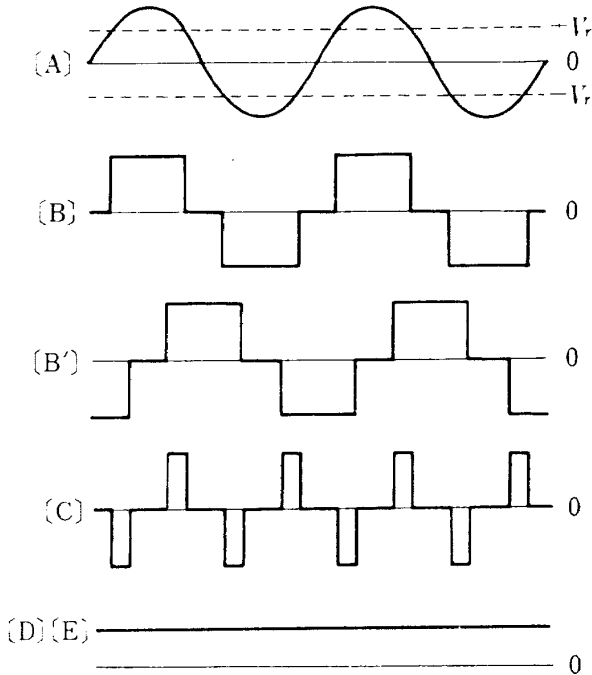
付録2 試作回路について

文献4), 5)にて試作された回路のブロックダイアグラムを付図1に、また回路が平衡状態での各信号波形を



付図1 試作回路

付図2に示す。入力信号(A)はしきい値電圧 V_r を持つ正負のコンパレータにより3値化される。(B) シフトレジスタはクロック周波数 f_s が連続可変、段数 $M=50$ のもので、遅延時間 $\tau = f_s \cdot M$ である。(B') ここで f_s は、積分器出力(E)に対応したV-F変換器出力である。



付図2 平衡時の波形

本回路で求めた特性を付図3, 4に示す。

付図3は平均時間 T_m に対する測定誤差を実測した結果で、入力信号は $f_c = 300$ [Hz] の狭帯域不規則信号である。図において計算で求めた値(図17参照)を参考に示した。付図4は最適なスレッショールドレベルを求めたもので、図18に対応している。これによれば $\xi = 0.7 \sim 0.9$ の間で測定誤差が最小となり、付図3, 4とも計算結果とかなり良い一致がみられる。

付録3 平均化操作³⁾

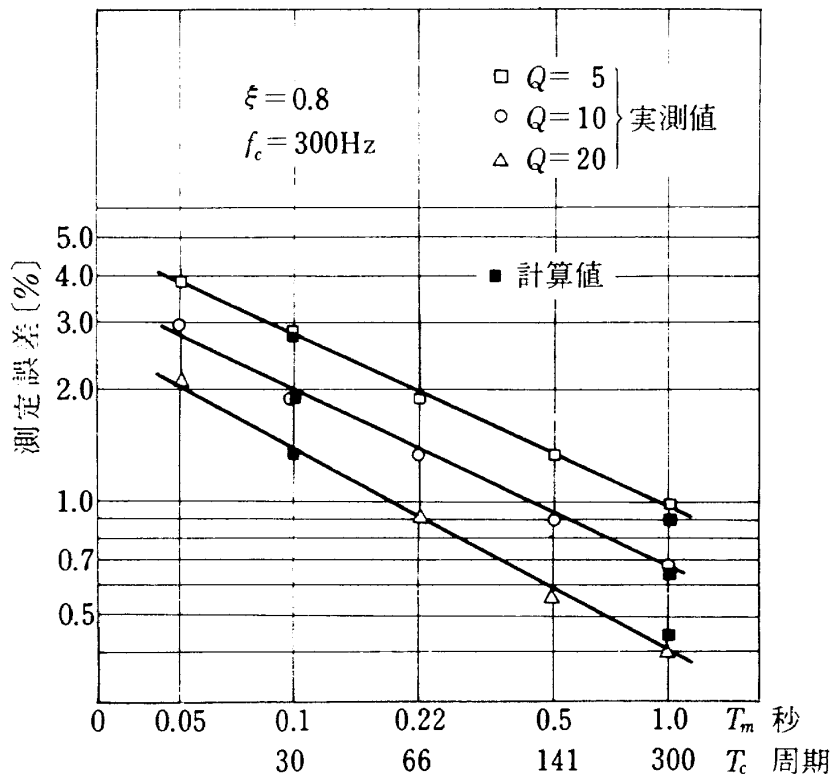
入力信号 $x(t)$ に対する自己相関々数 $\phi_x(\tau)$ は次式で表わせる。

$$\phi_x(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (\text{付18})$$

実際には有限の時間で測定を行なうため、次式が用いられる。

$$R_x(\tau) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t)x(t+\tau) dt \quad (\text{付19})$$

ところで具体的な測定回路では、(付19)式の平均化操作を行なう場合、有限の時間で相加平均をとるには、計算機等による演算が必要となり一般的でない。このため通常の回路ではC・Rによる一次遅れ回路を置いて平均化を行なう。ここで前者の相加平均は次式の様に書ける。



付図3 T_m に対する測定誤差の変化, 計算値との比較

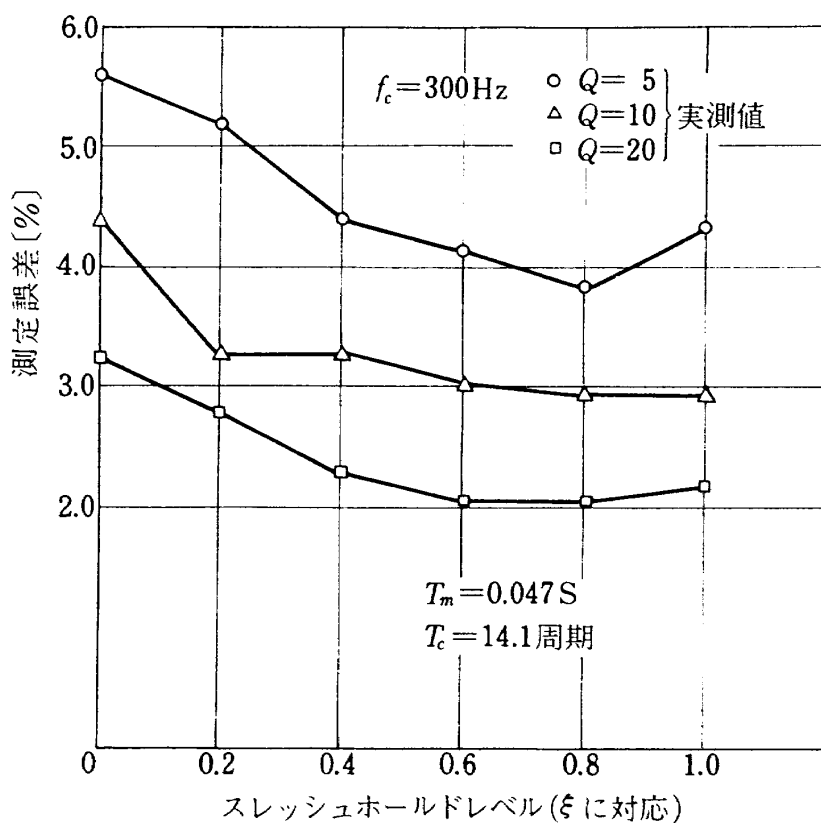
$$\frac{1}{T} \left(1 - \frac{|t|}{T}\right), \quad (-T \leq t \leq T) \quad (\text{付20})$$

本報告では(付20)式による平均化を, A) 有限時間平均
(付21)式による平均化を, B) 低域フィルタと呼ぶこ
とにする。

またC・Rによる一次遅れ回路では, 時定数を τ とする
とその伝達関数 $H(t)$ は次の様に表わせる。

$$H(t) = 1 / (1 + ST)$$

$$L^{-1}[H(t)] = \frac{1}{T} e^{-t/T}, \quad (0 \leq t < \infty) \quad (\text{付21})$$



付図4 最適なスレッシュホールドレベル

航空宇宙技術研究所報告615号

昭和55年6月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表)〒182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川2-27-12
