

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-634

高膨張ロケットノズル内の流れの計算について

中橋和博・毛呂明夫・宮島博

1980年10月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

高膨張ロケットノズル内の流れの計算について*

中橋和博** 毛呂明夫** 宮島博**

An Investigation of the Numerical Methods for the High-Expansion Rocket Nozzle Flow Calculation

By

Kazuhiro NAKAHASHI, Akio MORO and Hiroshi MIYAJIMA

Abstract

This paper is concerned with an investigation of numerical methods for the inviscid flow calculation of a high-expansion rocket nozzle. A method of characteristics and a space-marching shock capturing finite-difference method are compared for the calculations of the flow field of a conical and bell nozzle.

It is shown that the method of characteristics, which is the conventional one for nozzle flow calculation, is often met with difficulties due to an ill-spaced characteristic net construction in calculations to proceed downstream, especially in the case of nozzles with small throat radii of curvature. These difficulties make the computer program complex and increase the computational time. On the other hand, the finite-difference method with a concept of shock capturing produces reasonable results within a relatively short time and is a simple procedure compared to the characteristic method.

As for the transonic flow of the nozzle throat region, an analytical method of Kliegel and Levine is extended into a more general solution that can be applied, without affecting its simplicity, to the chemically reacting flow.

1. まえがき

超音速ノズル内の流れの解析は、超音速風洞あるいはロケットノズル等に関連してかなり古くから行なわれて来ている。そしてこれらの解析の多くはノズルスロートから下流の非粘性超音速の領域を計算するのに特性曲線法を用いている。特性曲線法はその計算法の簡単さ故に手計算器の頃から用いられ、更に大型計算機へと引き継がれて来たが、この計算法にもいくつかの大きな問題点がある。その一つは、計算の過程で形成されて行く特性曲線の網が流れ場の状態によってしばしば疎密を著しくする事であり、単に精度上の問題であるだけでなく時に

は計算の進行を困難にする。他方、近年の大型計算機の目覚ましい進歩に伴って非粘性超音速流を計算する種々の方法が提案されて来た。これらの中で Kutler ら¹⁾ の提案した空間マーチングによる衝撃波捕獲差分法はアルゴリズムとして非常に簡単なものであり、ノズル内の流れの計算にも適していると思われる。

本研究は、高膨張ロケットノズル内の非粘性流を計算するための方法として衝撃波捕獲差分法の適用を試み、従来用いられて来た特性曲線法との比較を論ずるものであり、同時にスロート遷音速部の解析解に関する化学反応流への簡単な拡張の方法について述べるものである。

2. 記号

b : 式(2)で定義されるエンタルピー係数
 c : 音速

* 昭和55年7月30日 受付

** 角田支所

- D : ダンピング項
- d : ダンピング係数
- $\tilde{\mathbf{F}}, \mathbf{F}$: (2)式, (8)式で定義されるベクトル
- H_t : 全エンタルピー
- h : 局所エンタルピー
- M : マッハ数
- N_η : η 方向の格子点数
- p : 圧力
- R : スロート壁曲率半径の比, r_c/r_i
- s : エントロピー
- $\tilde{\mathbf{U}}, \mathbf{U}$: (2)式, (8)式で定義されるベクトル
- u : 軸方向速度成分
- v : 半径方向速度成分
- x : 軸方向座標
- $\tilde{\mathbf{Z}}, \mathbf{Z}$: (2)式, (8)式で定義されるベクトル
- z : (3)式で定義される座標
- γ : 比熱比
- ϵ_H, ϵ_K : 展開パラメタ
- θ : ノズル壁角度
- ν : プラントル・マイヤー関数
- η : r/r_w
- ξ : x
- ρ : 密度
- 添字
- j : η 方向差分格子添字
- n : ξ 方向差分格子添字
- w : ノズル壁面值

3. 特性曲線法の問題点

超音速ノズル内の流れの解析は、近年の大型計算機の進歩およびそれに付随する数値解析法の開発にもかかわらず、特性曲線法が最も一般的な方法として用いられている。^{2)~5)} 特性曲線法はその格子網の形成法によって次の二つに大別できる(第1図)。即ち、新しい格子点(白丸)が既計算点(黒丸)から延ばされた2本の特性曲線の交点として与えられる直接特性曲線法。他の一つは、格子網を予め決めておき、特性曲線を計算点から逆に上流の既計算面へ延ばす逆特性曲線法である。これら二者の折衷的な手法も化学非平衡流に関連して考えられている。²⁾ しかしながら逆特性曲線法は格子点間の値を求めるための内挿等の操作を必要とするために余り一般的ではなく、専ら直接法およびその変形が用いられている。それ故本研究においても直接特性曲線法による計算について議論する。

ベル型の高膨張ノズル内の非粘性流を特性曲線法を用

いて解いたものは既に多くあり、またこの手法の精度に関して詳しく論じた研究⁶⁾もあるものの、特性曲線法に関する問題点についてはほとんど触れられていない。実際に、超音速風洞ノズルや円錐ノズルのような形状変化の穏やかなものに適用した場合には差程大きな問題もなく、高い精度の計算が可能となる。しかしながらベル型ノズルあるいは開口角の大きな円錐ノズルでは、下流へ計算を進めるに従って特性曲線の構成する網目の大きさが均一でなくなって来る。第2図はこの様子を示したも

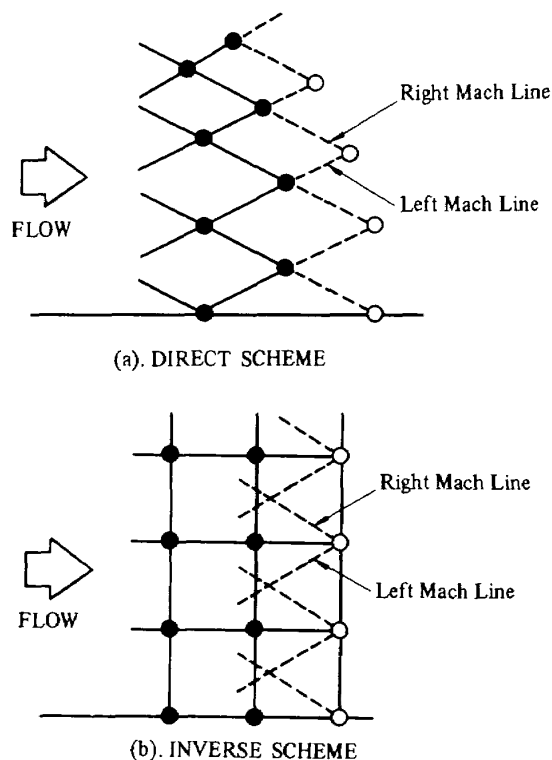


図1 特性曲線法における格子形成法

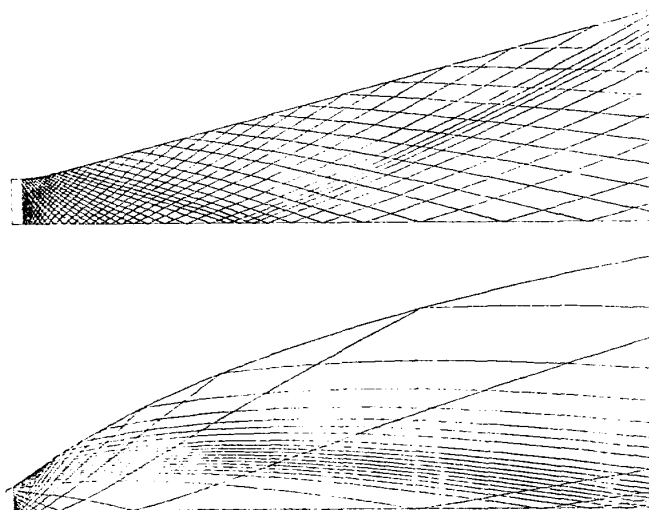


図2 15度円錐ノズルおよびベルノズル内のマッハ線網

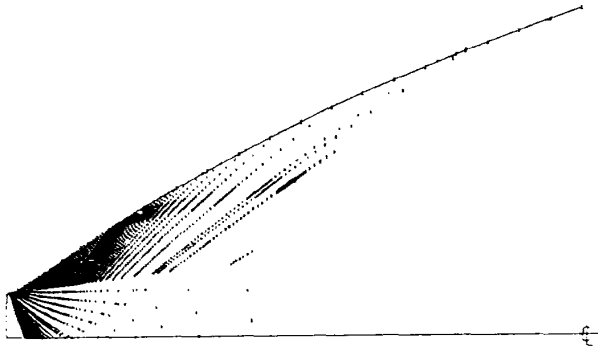


図3 特性曲線法によるベルノズル内の格子点分布

のである。この図は後に述べる差分法で計算した結果をもとにして、スロート近くの出発線上の等間隔な点からマッハ線を下流へ引いていったものである。図に示されるように、マッハ線の網を形成する様子がノズルの壁面形状によって著しく違って来る事が理解できる。特にロケットノズルの場合には、スロート部の壁面曲率半径が風胴ノズルなどに比べてかなり小さく、これが特性曲線法による計算の出発値に影響して下流の特性曲線の網の不均一性を著しくしている。

第3図は、実際に特性曲線法によってベル型ノズル内の流れを計算し、その格子点の位置をプロットしたものである。図に示されるように、格子点分布の不均一性は計算初期の段階で既に現われており、下流に行くに従ってその傾向が助長されて最終的に計算を進める事が困難な状態となっている。このような格子点分布の著しい疎密を防ぐには、計算を下流に進める各段階で格子点の位置を修正するような手法が必要となり、非常に煩雑な計算過程が要求される。

一般にロケットノズルの性能計算においては、ノズル内の非粘性流の計算の他に化学反応および境界層計算も必要とし、この事から非粘性流の計算は十分な精度を持ちかつ効率的である事が要求される。その意味において上に示した特性曲線法は最適な計算手法とは言い難く、これに代わる他の適切な計算手法が望まれる。

4. 差分法

4.1 方程式

軸対称非粘性超音速流に関する基礎方程式は、第4図に示す円柱座標系に対して保存形表示で書くと次のようになる。

$$\frac{\partial \tilde{U}}{\partial x} + \frac{\partial \tilde{F}}{\partial r} + \tilde{Z} = 0 \quad (1)$$

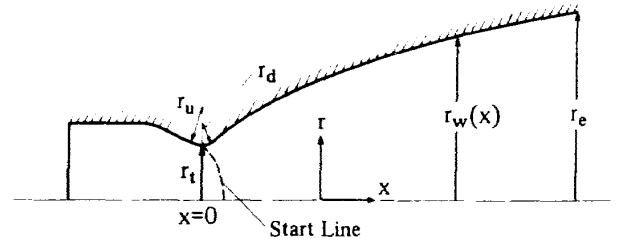


図4 座標系

ここに、 \tilde{U} 、 \tilde{F} 、 \tilde{Z} はそれぞれ次のような成分を持つベクトルである。

$$\tilde{U} = \begin{vmatrix} \rho u \\ p + \rho v^2 \\ \rho uv \end{vmatrix}, \quad \tilde{F} = \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ p + \rho v^2 \end{vmatrix}, \quad \tilde{Z} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \rho v \\ \rho uv \\ \rho v^2 \end{vmatrix} \quad (2)$$

ただし、 u 、 v はそれぞれ x および r 方向の速度成分を意味し、 ρ 、 p は密度および圧力を示す。

エネルギー保存式は全エンタルピ (H_t) に対する式で表わすと、

$$H_t = h(p, \rho) + \frac{1}{2}(u^2 + v^2) = \text{一定} \quad (3)$$

局所エンタルピー $h(p, \rho)$ は、一般に圧力と密度の関数として与えられるが、理想気体を仮定した場合には次の式となる。

$$h = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{p}{\rho} \quad (4)$$

しかし局所化学平衡を仮定した場合には、 h は p と ρ の陽的な関係式では与えられず、この取扱いについては4.5節で述べる。

ノズル壁面形状は x の関数として与える。即ち、

$$r = r_w(x) \quad (5)$$

計算領域はこの壁面とノズル対称軸、およびスロート部と出口面で囲まれるが、差分計算上の都合から計算面を矩形領域にするために次の座標変換を行なう。

$$\xi = x, \quad \eta = \frac{r}{r_w} \quad (6)$$

この変換により(1)式は以下に書き換えられる。

$$\frac{\partial U}{\partial \xi} + \frac{\partial F}{\partial \eta} + Z = 0 \quad (7)$$

ここに

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{U} &= \tilde{\mathbf{U}} \\ \mathbf{F} &= -\frac{r_w'}{r_w} \eta \tilde{\mathbf{U}} + \frac{1}{r_w} \tilde{\mathbf{F}} \\ \mathbf{Z} &= \frac{r_w'}{r_w} \tilde{\mathbf{U}} + \tilde{\mathbf{Z}} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

また、 r_w' はノズル壁面の傾きを意味する。

上述の方程式において対称軸上、即ち $r = 0$ は特異点となる。これは $r \rightarrow 0$ の極限操作によって取除け、(1)式は以下の式となる。

$$\frac{d\mathbf{U}^c}{dx} + \mathbf{F}^c = 0 \quad (9)$$

ここに

$$\mathbf{U}^c = \begin{pmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}^c = \begin{pmatrix} 2\rho v \\ 2\rho uv \\ p + 2\rho v^2 \end{pmatrix} \quad (10)$$

4.2 数値解法

(7)式は、ノズル内の流れが超音速である限り双曲形の偏微分方程式である事から、数値解法はノズルスロート近くの既知面から下流へ解を進める形で解く事が出来る。(7)式の差分には、MacCormack⁷⁾の予測子-修正子法を用いる。この差分法は衝撃波による不連続性が流れ場に現われてもその強さおよび位置をほぼ正確に決めうる。第5図において、既知面 n から解面 $n+1$ を求めるには、 $2 \leq j \leq N_r - 1$ に対して次のようになる。

$$\text{予測子: } \mathbf{U}_j^{(1)} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\mathbf{F}_{j+1}^n - \mathbf{F}_j^n) - \Delta \xi \mathbf{Z}_j^n \quad (11)$$

$$\text{修正子: } \mathbf{U}_j^{n+1} = \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_j^{(1)} - \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\mathbf{F}_j^{(1)} - \mathbf{F}_{j-1}^{(1)}) - \Delta \xi \mathbf{Z}_j^{(1)} + \mathbf{D}_j^n \right\} \quad (12)$$

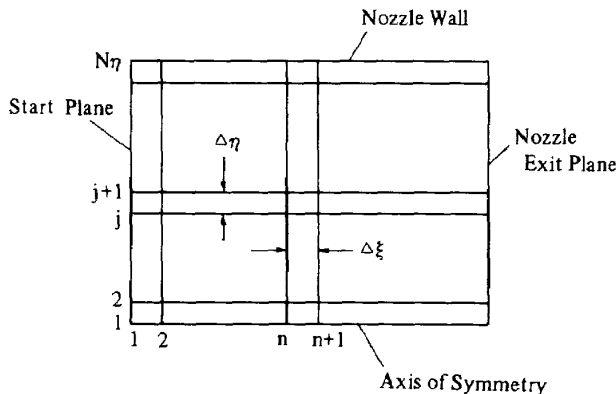


図5 計算面

ここに、

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^n &= \mathbf{U}(n \Delta \xi, j \Delta \eta) \\ \mathbf{F}_j^n &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^n, n \Delta \xi, j \Delta \eta) \\ \mathbf{F}_j^{(1)} &= \mathbf{F}(\mathbf{U}_j^{(1)}, (n+1) \Delta \xi, j \Delta \eta) \end{aligned}$$

また、 \mathbf{D}_j^n はダンピング項を意味し、ここでは4次のダンピング項を用いる。

$$\mathbf{D}_j^n = -d \Delta \eta^4 \frac{\partial^4 \mathbf{U}_j^n}{\partial \eta^4} \quad (13)$$

ここに d はダンピングの大きさを決める定数である。

壁面での差分は次式で与える。

$$\mathbf{U}_j^{(1)} = \mathbf{U}_j^n - \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\mathbf{F}_j^n - \mathbf{F}_{j-1}^n) - \Delta \xi \mathbf{Z}_j^n \quad (14)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{U}_j^{n+1} &= \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{U}_j^n + \mathbf{U}_j^{(1)} - \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\mathbf{F}_j^{(1)} - \mathbf{F}_{j-1}^{(1)}) \right. \\ &\quad \left. - \Delta \xi \mathbf{Z}_j^{(1)} - \frac{\Delta \xi}{\Delta \eta} (\mathbf{F}_j^n - 2\mathbf{F}_{j-1}^n + \mathbf{F}_{j-2}^n) \right\} \quad (15) \end{aligned}$$

ただし、 $j = N_r$ である。

マーチング方向のステップサイズ $\Delta \xi$ は、安定条件から次のように与えられる。

$$\Delta \xi \leq r_w \Delta \eta \frac{u^2 - c^2}{|uv| + c(u^2 + v^2 - c^2)^{1/2}} \quad (16)$$

4.3 境界条件

ノズル壁面では tangency 条件を満たさねばならない。即ち、

$$\frac{v}{u} = \frac{dr_w}{dx} \quad \text{at } r = r_w \quad (17)$$

この条件は次の手順で満たされる。まず壁面での差分(14)式から $\mathbf{U}_{N_r}^{n+1}$ を得、更にこれを各成分に分解して

$u_{N_r}^{n+1}, v_{N_r}^{n+1}, p_{N_r}^{n+1}, \rho_{N_r}^{n+1}$ を得る。しかしこの結果

は上記の tangency 条件を一般に満たしていないため、流れ方向を $\Delta \theta$ だけ修正する必要がある。これは、

$$\Delta \theta = \tan^{-1} \left(\frac{dr_w}{dx} \right) - \tan^{-1} \left(\frac{\bar{v}_{N_r}^{n+1}}{\bar{u}_{N_r}^{n+1}} \right) \quad (18)$$

として与えられる。この修正は、 $\Delta \theta$ が正の時には膨張波、負の時は圧縮波を課す事を意味し、その結果としての静圧は Prandtl-Myer 関数で与えられる。

$$\nu(p^{n+1}, H_t, s) = \nu(\bar{p}^{n+1}, H_t, s) + \Delta \theta \quad (19)$$

ただし、

$$\nu = \frac{1}{2} \int \left[\frac{2(H_t - h)}{c^2} - 1 \right]^{1/2} \frac{d(H_t - h)}{(H_t - h)} \quad (20)$$

$$c^2 = c^2(h, s)$$

4.4 初期条件 (スロート部遷音速解)

スロート部の遷音速領域に対する解法は種々提案されている。^{8)~18)} この中で級数展開による解析解^{8)~12)}は数値計算による手法^{13)~18)}に比べ簡潔性において魅力あり、特に Kliegel and Levin¹⁰⁾の解は Sauer⁸⁾および Hall⁹⁾の解をスロート部の壁面曲率半径が比較的小さい場合にも有効であるように改良したもので有用である。しかしながらこれらの解析解は熱的熱量的に完全な気体を仮定しており、化学反応を伴った流れに対しては厳密な意味では正しくない。化学反応流に対する解析解^{11)~12)}も提案されてはいるが、上記 Hall や Kliegel らの解のような簡便さが損なわれている。そこで本研究では、Hall あるいは Kliegel らの解を、その簡便さを損なうことなく容易に化学反応流へ拡張できる手法を考える。

臨界速度 c^* で無次元化した速度成分 $(\bar{u}, \bar{v}) = (u/c^*, v/c^*)$ を用いて渦なし流の方程式を書くと、

$$\left(\bar{u}^2 - \frac{c^2}{c^{*2}}\right) \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{x}} + \left(\bar{v}^2 - \frac{c^2}{c^{*2}}\right) \frac{\partial \bar{v}}{\partial \bar{r}} + 2\bar{u}\bar{v} \frac{\partial \bar{u}}{\partial \bar{r}} - \frac{\bar{v}c^2}{\bar{r}c^{*2}} = 0 \quad (21)$$

ただし、 \bar{x} , \bar{r} はスロート半径 r_s で正規化した軸方向および半径方向座標である。エネルギー式は次式で与えられる。

$$H_t = h + \frac{1}{2} c^{*2} (\bar{u}^2 + \bar{v}^2) \quad (22)$$

熱的熱量的に完全な気体では、(22)式内の局所エンタルピー h が $c^2/(\gamma-1)$ と表わせ、これを用いて (21)式内の c^2 を消去することができるが、熱量的に不完全な気体では h と c^2 の関係を陽的な形で表わせない。しかしこの場合においても、スロート部で等エントロピーの流れでありかつ局所化学平衡あるいは凍結流であると仮定すると、 h と c^2 の関係は一義的に決まるはずである。そこでこの関係を次に示す陽的な関係式で表わせるものと仮定する。

$$c^2 = c^{*2} + b(h - h^*) \quad (23)$$

上式中で、 h^* は臨界局所エンタルピーを意味し、また係数 b は等エントロピー、局所化学平衡流 (または凍結流) の仮定の下でのスロート部近傍における一次元流の計算結果をもとにして、最小二乗法で決められるものとする。図6は(23)式による c^2 と h の間の関係を、音速条件における比熱比 (γ^*) を用いて計算した場合と比較したもので、5節で述べる水素酸素 (O/F = 5.5) に関する計算例である。

(23)式で全エンタルピー H_t を $h^* + (1/2)c^{*2}$ と書き換え、(21)式を用いて局所エンタルピーを消去すると、

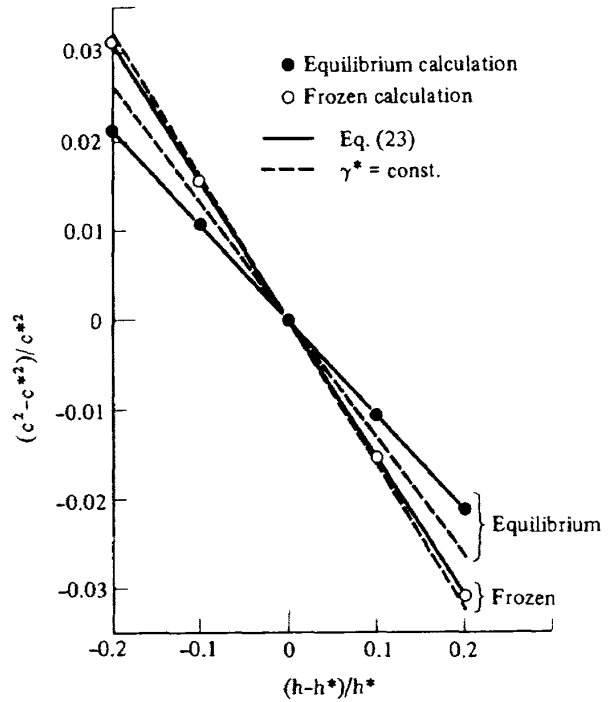


図6 ノズルスロート領域における c^2 と h の関係

$$\frac{c^2}{c^{*2}} = 1 + \frac{1}{2} b (1 - \bar{u}^2 - \bar{v}^2) \quad (24)$$

この式を(21)式に代入して式中の c^2 を消去し、更に遷音速近似を施すと、

$$(2+b)u' \frac{\partial u'}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial v'}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} v' = 0 \quad (25)$$

ただし、 u' , v' は微小擾乱速度であり、 $\bar{u} = 1 + u'$, $\bar{v} = v'$ で定義されるものである。

さて、(25)式は級数展開による Hall の手法を用いることによって解析的に解くことができるが実際には級数展開の込み入った手続きを必要としない。それは、下に示す理想気体に対する Hall の遷音速近似式と比較することにより理解できる。即ち、

$$(\gamma+1)u' \frac{\partial u'}{\partial \bar{x}} - \frac{\partial v'}{\partial \bar{r}} - \frac{1}{\bar{r}} v' = 0 \quad (26)$$

(25)式と(26)式を比較すると両者は係数を除いて一致する。従って(25)式で $b = (\gamma-1)$ と置くとこの方程式は熱的熱量的に完全な場合に対する方程式となり、このことは(23)式からも容易に予測できる。従って逆に(26)式に対する Hall の級数展開解において γ を $(b+1)$ と置き換えるとスロート部の化学反応流に対する(25)式の解が直ちに得られる。

Hall は(26)式を解くにおいて、スロート部の壁面曲率半径 r_c とスロート半径 r_s との比 $R = r_c/r_s$ の逆数をもって各物理量を級数展開し、速度成分 (\bar{u}, \bar{v}) につい

て以下の形の解を得た。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= 1+u' = 1 + \epsilon_H u_1 + \epsilon_H^2 u_2 + \epsilon_H^3 u_3 \\ \bar{v} &= v' = \left[\frac{\tau+1}{2} \epsilon_H \right]^{\frac{1}{2}} \left[\epsilon_H v_1 + \epsilon_H^2 v_2 + \epsilon_H^3 v_3 \right] \end{aligned} \right\} \quad (27)$$

ここに

$$\epsilon_H = 1/R \quad (28)$$

さて、先に記したように(25)式と(26)式の比較から、(25)式の解は Hall の解(27)式内に現われる τ を $(b+1)$ で置き換える事によって得られ、その結果はスロート近傍で有効な局所化学平衡流または凍結流の解となる。以下にその結果を示す。

$$\left. \begin{aligned} \bar{u} &= 1 + \epsilon_H u_1(\bar{\tau}, z) + \epsilon_H^2 u_2(\bar{\tau}, z) + \epsilon_H^3 u_3(\bar{\tau}, z) \\ \bar{v} &= \left[\frac{b+2}{2} \epsilon_H \right]^{\frac{1}{2}} \left[\epsilon_H v_1(\bar{\tau}, z) + \epsilon_H^2 v_2(\bar{\tau}, z) + \epsilon_H^3 v_3(\bar{\tau}, z) \right] \end{aligned} \right\} \quad (29)$$

ここに

$$z = \bar{x} / \left[\frac{b+2}{2} \epsilon_H \right]^{\frac{1}{2}} \quad (30)$$

また、 u_1, u_2, u_3 および v_1, v_2, v_3 は、

$$u_1 = \frac{1}{2} \bar{\tau}^2 - \frac{1}{4} + z \quad (31a)$$

$$v_1 = \frac{1}{4} \bar{\tau}^3 - \frac{1}{4} \bar{\tau} + \bar{\tau} z \quad (31b)$$

$$\begin{aligned} u_2 &= \frac{2b+11}{24} \bar{\tau}^4 - \frac{4b+19}{24} \bar{\tau}^2 + \frac{10b+67}{288} \\ &+ z \left(\bar{\tau}^2 - \frac{5}{8} \right) - \frac{2\bar{\tau}-1}{6} \end{aligned} \quad (31c)$$

$$\begin{aligned} v_2 &= \frac{b+4}{9} \bar{\tau}^5 - \frac{20b+83}{96} \bar{\tau}^3 + \frac{28b+121}{288} \bar{\tau} \\ &+ z \left(\frac{2b+11}{6} \bar{\tau}^3 - \frac{4b+19}{12} \bar{\tau} \right) + \bar{\tau} z^2 \end{aligned} \quad (31d)$$

$$\begin{aligned} u_3 &= \frac{556b^2+2849b+5362}{10368} \bar{\tau}^6 \\ &- \frac{388b^2+1937b+3430}{2304} \bar{\tau}^4 \\ &+ \frac{304b^2+1439b+2377}{1728} \bar{\tau}^2 \\ &- \frac{2708b^2+13255b+24758}{82944} \\ &+ z \left\{ \frac{52b^2+155b+430}{384} \bar{\tau}^4 \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &- \frac{52b^2+179b+406}{192} \bar{\tau}^2 \\ &+ \left. \frac{92b^2+364b+911}{1152} \right\} \\ &+ z^2 \left\{ -\frac{7b+4}{8} \bar{\tau}^2 + \frac{13b-14}{48} \right\} \\ &+ \frac{4b^2-49b-26}{144} z^3 \end{aligned} \quad (31e)$$

$$\begin{aligned} v_3 &= \frac{6836b^2+36703b+60494}{82944} \bar{\tau}^7 \\ &- \frac{3380b^2+18151b+30062}{13824} \bar{\tau}^5 \\ &+ \frac{3424b^2+18119b+29923}{13824} \bar{\tau}^3 \\ &- \frac{7100b^2+36511b+59660}{82944} \bar{\tau} \\ &+ z \left\{ \frac{556b^2+2849b+5362}{1728} \bar{\tau}^5 \right. \\ &- \frac{388b^2+1937b+2730}{576} \bar{\tau}^3 \\ &+ \left. \frac{304b^2+1439b+2377}{864} \bar{\tau} \right\} \\ &+ z^2 \left\{ \frac{52b^2+155b+430}{192} \bar{\tau}^3 \right. \\ &- \left. \frac{52b^2+179b+406}{192} \bar{\tau} \right\} - z^3 \left\{ \frac{7b-4}{12} \bar{\tau} \right\} \end{aligned} \quad (31f)$$

以上の解は、物理量を R の逆数でもって展開して得られた解である。それ故これは $\epsilon_H (= 1/R)$ が 1 より小さな場合、即ち壁面曲率半径 r_c がスロート半径 r_t に比べ小さな場合には有効ではなくなってくる。¹⁹⁾ この事から Kliegel and Levin¹⁰⁾ は Troidal coordinate の概念を用いて $(R+1)$ の逆数による展開を提案した。この Kliegel らの結果は May¹⁹⁾ によって他の解との詳しい比較がなされており、また実験値²⁰⁾ とも比較されて満足しうる値が得られることが確かめられている。従って上記(28)~(31)式で示した解にも Kliegel らの手法を適用する。その結果は以下ようになる。

$$\begin{aligned} \bar{u} &= 1 + \epsilon_K u_1(\bar{\tau}, z) + \epsilon_K^2 \{ u_1(\bar{\tau}, z) + u_2(\bar{\tau}, z) \} \\ &+ \epsilon_K^3 \{ u_1(\bar{\tau}, z) + 2u_2(\bar{\tau}, z) + u_3(\bar{\tau}, z) \} \end{aligned} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} \bar{v} &= \left[\frac{b+2}{2} \epsilon_K \right]^{\frac{1}{2}} \left\{ \epsilon_K v_1(\bar{\tau}, z) + \epsilon_K^2 \left[\frac{3}{2} v_1(\bar{\tau}, z) \right. \right. \\ &+ \left. \left. v_2(\bar{\tau}, z) \right] + \epsilon_K^3 \left[\frac{15}{8} v_1(\bar{\tau}, z) \right. \right. \end{aligned}$$

$$+ \frac{5}{2} v_2(\bar{r}, z) + v_3(\bar{r}, z) \}} \quad (33)$$

ここに

$$\epsilon_K = \frac{1}{R+1} \quad (34)$$

多くのロケットノズルではスロート面を境にその上流の壁面曲率半径 (r_u) と下流のそれ (r_d) とは値が異なるため (図4), 展開パラメータ $\epsilon_K (=1/(R+1))$, $R = r_c/r_t$ 内の r_c の値には上流値 r_u を用いる。このために r_d の影響領域では遷音速解が有効でなくなり, 4.1~3 節で述べた差分解の出発値として上記遷音速解を用いる際にはこのことを考慮する必要がある。本研究では出発値の与え方を以下のようにする。即ち, 判断条件 ($x > 0$ かつ $M > M_{\text{start}}$) を満たさない差分格子点ではその値を遷音速解で評価し, 判断条件を満たす点では差分解で評価すると云う手法を用いる。出発マッハ数: M_{start} はスロート面 ($x = 0$) における壁面上のマッハ数と関係するが, 本研究の計算例では 1.05 の値を用いた。

4.5 化学反応の取扱い

ノズル流における化学反応は, 一般にノズル収縮部から下流では化学非平衡として取扱わなければならないが, ここでは簡単のために局所平衡流あるいは凍結流を仮定する。ただし, 本計算過程に化学非平衡反応を取込むことは差程困難なことではない。

局所化学平衡を仮定した場合, その平衡量は化学組成, 圧力, 温度等が決まると自由エネルギーの最小化の手法で計算できるが,²¹⁾ 総ての差分格子点でこの化学平衡計算を行なうことは計算時間の面で余り望ましくない。そこで計算時間短縮のために化学平衡量をテーブル化する手法を用いる。即ち, 入力の混合比に対する化学平衡量をエンタルピと圧力の二つの量をパラメータとしたテーブルに予めしておき, 各差分格子点で(3)式を満たすような量を捜すようにする。プラントル・マイヤー関数(20)式も同様に前もって計算し数表化しておく。

5. 計算結果

まず(12)式で用いたダンピング項の効果について調べる。第7図は15度円錐ノズルにおいて, スロート部から衝撃波が生じている計算例を等マッハ線で示したものである。軸対称流では壁から対称軸に向かう衝撃波は軸に近づくに従って強さを増し, 軸上で最も強くなる。そのためにダンピングを入れない計算例(a)では, 衝撃波が軸とぶつかった後で等マッハ線の大きな乱れを誘起している。これに対し(b)ではダンピング項の効果によって等マッハ線

の非現実的な乱れはかなり緩和されている。他方衝撃波のような急激な圧力変動の無い所では, このダンピング項は計算結果にほとんど影響を及ぼしていない。

第8図は, 15度円錐ノズル内に生じる衝撃波の位置を Back and Cuffel²²⁾ の測定値 (白丸) と比較したものであり, 理論値はほぼ正確に衝撃波の位置を予測している。図に示されるように, 計算値では衝撃波がある幅を持って表現されているがこれは η 方向の格子数を増す事により薄くできる。第8図の計算例における η 方向の格子数は51点である。スロート近くから発生するこの衝撃波は, 比較的大きな曲率を持ったスロート部の壁面に沿って流れる気流が, その下流の円錐部の壁によって直線的な流れになることによって生じるものである。

同じノズルについて第9図は, ノズル壁面および中心軸上のマッハ数分布を実験値²²⁾ と比較したものである。壁面に沿ってのマッハ数は実験値とほぼ合っており, 中心軸上の分布に関しても衝撃波の前までは良く合っている。衝撃波が中心軸とぶつかった後では実験値と少しず

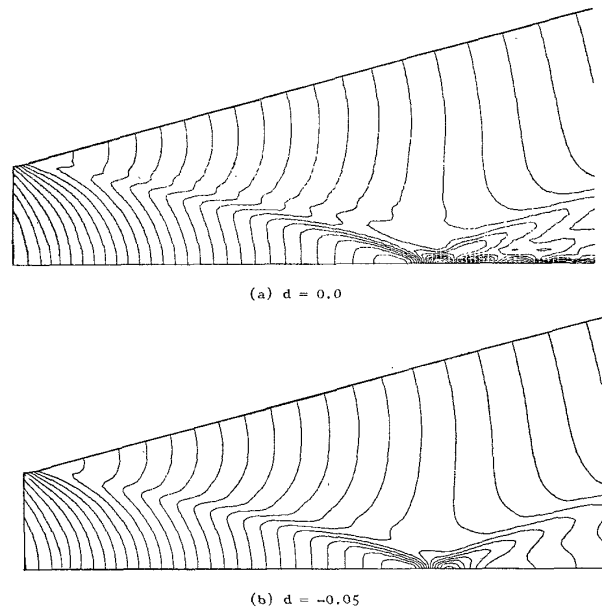


図7 ダンピング項の効果: $D = -d \Delta \eta^4 \frac{\partial^4 U}{\partial \eta^4}$

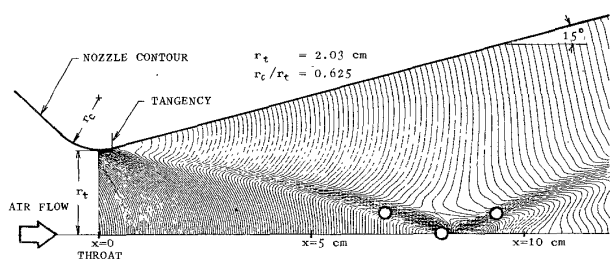


図8 15度円錐ノズル内の等マッハ線図;
 $P_0 = 10.6 \text{ kg/cm}^2, T_0 = 294^\circ \text{K}$

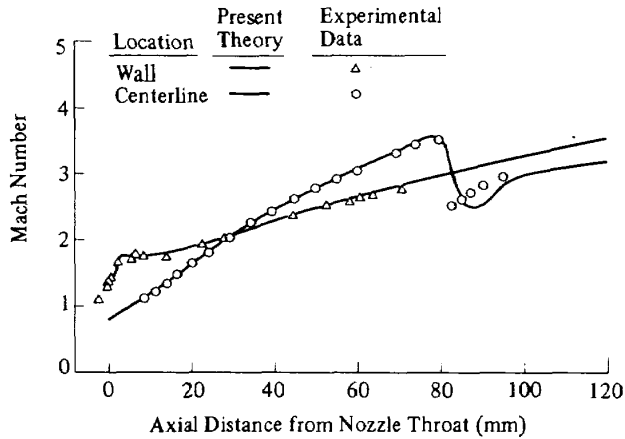


図9 15度円錐ノズル内の壁面および中心軸上のマッハ数分布； $P_0 = 10.6 \text{ kg/cm}^2$ ， $T_0 = 294^\circ \text{K}$

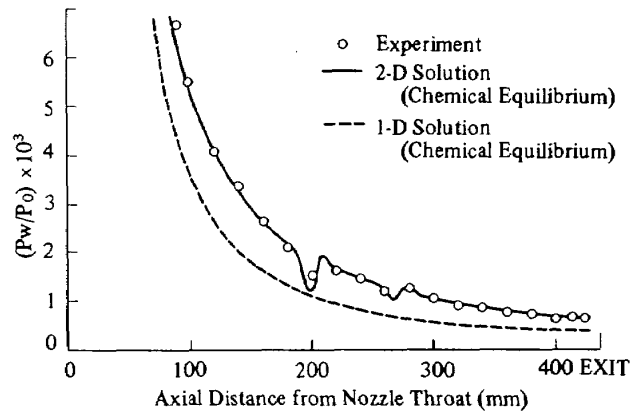


図11 水素酸素用ベルノズル内の壁面静圧分布； $P_0 = 35 \text{ kg/cm}^2$ ， $T_0 = 3382^\circ \text{K}$ ， $O/F = 5.5$ ，出口面開口比 = 140

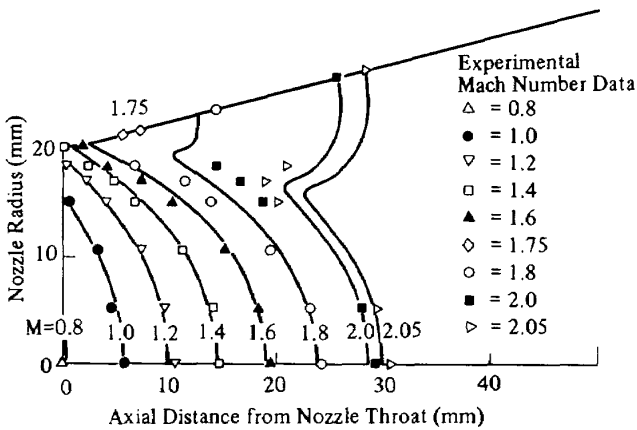


図10 15度円錐ノズルスロート領域のマッハ数分布； $P_0 = 4.92 \text{ kg/cm}^2$ ， $T_0 = 300^\circ \text{K}$

れているが、これは衝撃波を有限な厚さで表現する衝撃波捕獲差分法の欠点とも云えよう。

第10図は15度円錐ノズルのスロート近くのマッハ数分布を示したものであり、Cuffel and Back²⁰⁾の測定値と比較している。理論値、実験値ともに衝撃波がスロート部と円錐部との接続部から発生している様子を捕えている。

次に、液体水素酸素用のロケットノズルに関する計算例を第11図以下に示す。まず第11図はノズル壁面に沿ったの静圧分布を実験値と比較したもので、実験結果は昭和54年から航技研角田支所ロケット高空性能研究室で行なっているものである。図に示されるように一次元計算値(点線)²¹⁾では実験値を十分捕捉できないのに対し、二次元計算値はほぼ満足しうる結果を与えている。このことは、この種のベル型ノズルでは二次元効果が大きいために一次元計算では不十分であることを示している。静圧分布の途中に見られる若干の圧力変動は、ノズル設

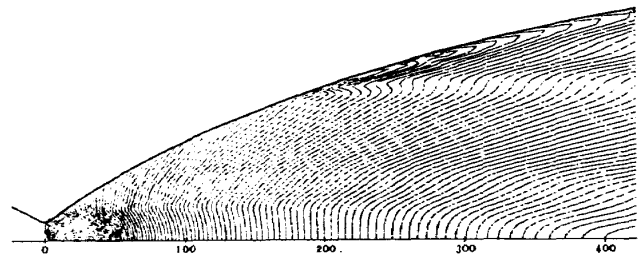


図12 水素酸素用ベルノズル内の等マッハ線図 (等マッハ線の間隔； $\Delta M = 0.05$)

計時点のミスによる壁面の僅かな起伏によるものである。参考のためにノズル形状データを表1に示す。表1の(a)は、図11、12の計算に用いた形状データであり、(b)はノズル壁面の起伏を平滑化した後のデータで、図13の計算に用いた。

第12図はノズル内の流れの様子を等マッハ線で示したものであるが、壁面静圧の変動のあった箇所からは弱い波の生じている様子が認められる。

次に局所化学平衡を仮定した計算と凍結流の場合との比較を第13図に示す。凍結流の計算は燃焼室における化学組成を凍結したものとしている。

最後に特性曲線法と衝撃捕獲差分法とを計算時間等で比較し、その結果を第2表に示す。この比較は上述の開口比140のベルノズルに関するもので、両計算手法とも理想気体($\gamma = \text{一定}$)を仮定している。差分法は特性曲線法に比べてアルゴリズムが簡単であるため、表に示されるようにプログラム開発に要する労力が少なく済み、また計算時間も短い。特性曲線法のプログラムでは、大きな開口比のノズルの場合に生じる格子点分布の不均一性を是正する部分がプログラム長および計算時間の増大

表 1(a) ノズル形状座標-I, $r_t = 14\text{mm}$,
 $r_u = 28\text{mm}$, $r_d = 7\text{mm}$

x (mm)	r (mm)	x (mm)	r (mm)
0.0 ⁽¹⁾	14.0	193.55	107.56
3.55 ⁽²⁾	14.97	200.55	110.84
5.40	16.10	210.55	114.04
7.03	17.13	220.55	117.14
10.05	19.11	230.55	120.17
11.77	20.27	240.55	123.11
13.55	21.47	250.55	125.97
17.66	24.27	260.55	128.76
23.55	28.28	270.55	131.78
33.55	34.91	280.55	134.13
43.55	41.19	290.55	136.72
53.55	47.13	300.55	139.25
63.55	52.75	310.55	141.71
73.55	58.08	320.55	144.12
83.55	63.16	330.55	146.47
93.55	68.01	340.55	148.77
103.55	72.66	350.55	151.02
113.55	77.12	360.55	153.22
123.55	81.40	370.55	155.37
133.55	85.53	380.55	157.46
143.55	89.51	390.55	159.52
153.55	93.36	400.55	161.53
163.55	97.08	410.55	163.50
173.55	100.68	420.55	165.42
183.55	104.17	427.78 ⁽³⁾	165.65

注) (1)=スロート, (2)= r_d の終端,
(3)=ノズル出口 ($\epsilon = 140$)

表 1(b) ノズル形状座標-II, $r_t = 14\text{mm}$,
 $r_u = 28\text{mm}$, $r_d = 7\text{mm}$

x (mm)	r (mm)	x (mm)	r (mm)
0.0 ⁽¹⁾	14.0	193.55	107.54
3.55 ⁽²⁾	14.97	200.55	109.83
5.40	16.10	210.55	113.03
7.03	17.13	220.55	116.14
10.05	19.11	230.55	119.17
11.77	20.27	240.55	122.12
13.55	21.47	250.55	124.99
17.66	24.27	260.55	127.79
23.55	28.28	270.55	130.52
33.55	34.91	280.55	133.18
43.55	41.19	290.55	135.77
53.55	47.13	300.55	138.31
63.55	52.75	310.55	140.78
70.00	56.23	320.55	143.19
73.55	58.10	330.55	145.54
83.55	63.21	340.55	147.83
93.55	68.08	350.55	150.07
103.55	72.75	360.55	152.25
113.55	77.21	370.55	154.39
123.55	81.50	380.55	156.48
133.55	85.63	390.55	158.54
143.55	89.60	400.55	160.52
153.55	93.43	410.55	163.48
163.55	97.13	420.55	164.42
173.55	100.71	424.55	165.22
183.55	104.17	427.00 ⁽³⁾	165.65

注) (1)=スロート, (2)= r_d の終端,
(3)=ノズル出口 ($\epsilon = 140$)

表 2 特性曲線法と差分法の比較

	特性曲線法	差分法
JOB CARD枚数	1641 枚	456 枚
計算時間	1819 秒	688 秒
格子点数	5825 点	16112 点
1格子点当りの 計算時間	0.31 秒	0.043 秒

使用計算機 : TOSBAC-3400

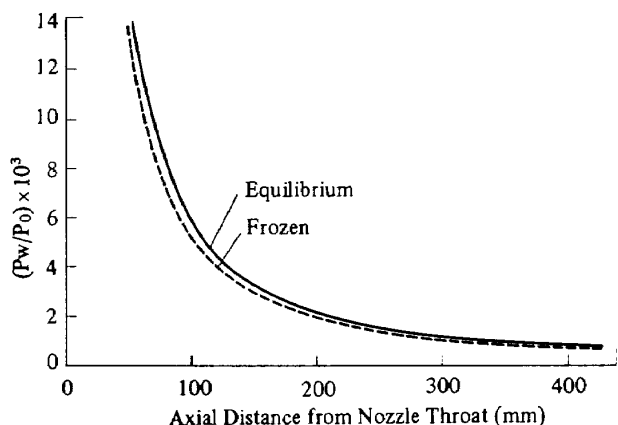


図13 壁面静圧分布に対する化学反応モデルの影響
 $P_0 = 35 \text{ kg/cm}^2$, $T_0 = 3382^\circ \text{K}$, $O/F = 5.5$,
 出口面開口比 = 140

をもたらしているが、衝撃波を含む流れ場の場合には更に複雑な計算過程を必要とする。以上の点から、差分法は簡便性および計算効率の面で特性曲線法よりも勝れていることが理解できる。

6. 結 論

ロケットノズル内の超音速非粘性流を解析する手法として空間マーチングによる衝撃波捕獲差分法の適用を試み、従来用いられて来た特性曲線法による手法との比較を行なって以下の結論を得た。

まず特性曲線法では、円錐ノズルや超音速風洞ノズルのようなノズル開口角の比較的小さい場合には十分な精度の計算結果が得られるものの、ロケット用のベル型ノズルのようなスロート部の壁面曲率半径が小さく、またその下流の開口角が大きき場合には、特性曲線の網を形成する際に問題が生じ、このために計算手法を複雑にしかつ計算時間の増大をもたらす。差分法、特に本論文で述べた空間マーチングによる衝撃波捕獲差分法は、計算手法の簡単さおよび計算時間の点において特性曲線法よりも数段勝れている。

ノズル超音速部の計算に際して初期値として必要なスロート部遷音速解に関しては、従来理想気体に対するKliegelらの解析解が最も一般的であるが、これをその簡便性を損なう事なしに化学反応流にも適用できる手法を示した。

参 考 文 献

- 1) P. Kutler, W. A. Reinhardt and R. F. Warming; Multishocked, Three-Dimensional Supersonic Flowfields with Real Gas Effects, AIAA

Journal Vol. 11, No. 5, pp. 657-664, 1973.

- 2) J. J. Der; Theoretical Studies of Supersonic Two-Dimensional and Axisymmetric Non-equilibrium Flow, Including Calculations of Flow Through a Nozzle, NASA TR R-164, 1963.
- 3) J. W. Little; Analysis of Axially Symmetric De Laval Nozzles for Adiabatic, Steady, Non-viscous, Rotational, Compressible Flow, NTIS-N65-15331, 1964.
- 4) R. R. Craig; Applying the Method of Characteristics to Analyze the Flow Field of a Chemically Reacting Gas in a Two-Dimensional or an Axisymmetric Nozzle, AFAPL-TR-65-20, 1965.
- 5) J. M. Cousins; Computer Programs to Calculate Chemically Reacting Flow in Axisymmetric Nozzles, AD-A058869, 1978.
- 6) J. D. Hoffman; Accuracy Studies of the Numerical Method of Characteristics for Axisymmetric, Steady Supersonic Flows, J. of Computational Physics, Vol. 11, pp. 210-239, 1973.
- 7) R. W. MacCormack; The Effect of Viscosity in Hypervelocity Impact Cratering, AIAA Paper 69-354, 1969.
- 8) R. Sauer; General Characteristics of the Flow Through Nozzles at Near Critical Speeds, NACA TM-1147, 1947.
- 9) I. M. Hall; Transonic Flow in Two-Dimensional and Axially-Symmetric Nozzles, Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mechanics, Vol. 15, Pt. 4, pp. 487-508, 1962.
- 10) J. R. Kliegel and J. N. Levine; Transonic Flow in Small Throat Radius of Curvature Nozzles, AIAA Journal Vol. 7, No. 7, pp. 1375-1378, 1969.
- 11) S. Boraas; Transonic Nozzle Flow with Non-uniform Gas Properties, AIAA Journal Vol. 11, No. 2, pp. 210-215, 1973.
- 12) R. Ishii; Transonic Nozzle Flows of Gases with a Rate Process, AIAA Journal Vol. 15, No. 3, pp. 299-300, 1977.
- 13) D. Migdal, K. Klein, and G. Moretti; Time-Dependent Calculations for Transonic Nozzle Flow, AIAA Journal Vol. 7, No. 2, pp.

- 372–374, 1969.
- 14) S. Wehofer and W. C. Moger; Transonic Flow in Conical Convergent and Convergent-Divergent Nozzles with Nonuniform Inlet Conditions, AIAA Paper No. 70–635, 1970.
 - 15) P. Laval; Time-Dependent Calculation Method for Transonic Nozzle Flows, Lecture Notes in Physics, Vol. 8, pp. 187–192, 1971.
 - 16) R. A. Serra; The Determination of Internal Gas Flows by a Transient Numerical Technique, AIAA Paper No. 71-45, 1971.
 - 17) E. F. Brown and H. M. Ozcan; A Time-Dependent Solution of Mixed Flow Through Convergent Nozzles, AIAA Paper No. 72-680, 1972.
 - 18) M. C. Cline; Computation of Steady Nozzle Flow by a Time-Dependent Method, AIAA Journal Vol. 12, No. 4, pp. 419–420, 1974, or NASA TMX-71918.
 - 19) R. J. May; Comparison of Transonic Flow Solutions in C-D Nozzles, AFAPL-TR-74-110, 1974.
 - 20) R. F. Cuffel, L. H. Back, and P. F. Massier; Transonic Flowfield in a Supersonic Nozzle with Small Throat Radius of Curvature, AIAA Journal Vol. 7, No. 7, pp. 1364–1366, 1969.
 - 21) S. Gordon and B. J. McBride; Computer Program for Calculation of Complex Chemical Equilibrium Compositions, Rocket Performance, Incident and Reflected Shocks, and Champman-Jouguet Detonations, NASA SP-273, 1971.
 - 22) L. H. Back and R. F. Cuffel; Detection of Oblique Shocks in a Conical Nozzle with a Circular-Arc Throat, AIAA Journal Vol. 4, No. 12, pp. 2219–2221, 1966.

航空宇宙技術研究所報告634号

昭和55年10月発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町1880
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊦182
印刷所 株式会社 共 進
東京都杉並区久我山5-6-17
