

UDC 517.949:
532.536

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-646

境界層方程式に対する差分法の実精度について

松野謙一・廣瀬直喜

藤田真人・河村龍馬

1981年1月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

境界層方程式に対する差分法の実精度について*

松野謙一** 廣瀬直喜**
藤田真人*** 河村龍馬****

On the Numerical Accuracy of Some Finite Difference Schemes
for Solving the Boundary-Layer Equations

Kenichi MATSUNO, Naoki HIROSE,
Makoto FUJITA and Ryuma KAWAMURA

ABSTRACT

The numerical accuracy is investigated for two second-order accurate finite difference schemes: a predictor-corrector form of the Crank-Nicolson scheme and the DuFort-Frankel scheme, applied to the Cebeci-transformed two-dimensional incompressible boundary layer equations. The relation between the absolute error of the velocity gradient at the wall and the step width of the finite difference calculation was obtained for the Howarth problem. The result shows that the second-order accuracy is numerically realized when a coupled algorithm for the equations of continuity and momentum is used in a predictor-corrector form of the Crank-Nicolson scheme. The DuFort-Frankel scheme, which is explicit, also maintains the second-order accuracy when a sufficiently small streamwise step width is taken. Comparisons of results for the numerical accuracy and the computation speed with those of the well-known Keller's Box scheme are also discussed.

記号

| | |
|---|------------------------------|
| F : 変換座標系従属変数 | β : 圧力勾配パラメータ |
| f : 流れ関数 | κ : 任意定数 |
| L : 代表長さ | ρ : 密度 |
| P : 圧力 | μ : 粘性係数 |
| P_1 : 圧力勾配パラメータ | ν : 動粘性係数 |
| P_2 : 圧力勾配パラメータ | ξ : 変換座標系 |
| u : x 方向の速度成分またはKeller's Box Scheme の従属変数 | η : 変換座標系 |
| V : 変換座標系従属変数 | φ : 流れ関数 |
| v : y 方向の速度成分またはKeller's Box Scheme の従属変数 | Δx : x 方向格子幅 |
| x : 物体に合う座標 | $\Delta \xi$: ξ 方向格子幅 |
| y : 物体に垂直な座標 | $\Delta \eta$: η 方向格子幅 |
| | 添字 |
| | i : x または ξ 方向の格子番号 |
| | j : y または η 方向の格子番号 |
| | J : η 方向最大格子番号 |
| | e : 境界層外縁 |
| | r : 基準値 |
| | ∞ : 自由流状態 |
| | * : 予測子ステップ |

* 昭和55年10月15日受付

** 空気力学第二部

*** 日本大学理工学部航空宇宙工学科研修生

**** 日本大学理工学部教授

○；修正子ステップ

1；壁上の値

略号

CNS ; Crank-Nicolson Scheme

DCS ; Davis Coupled Scheme

DFS ; DuFort-Frankel Scheme

KBS ; Keller's Box Scheme

PC-CNS ; Predictor-Corrector Crank-Nicolson Scheme

SCNS ; Standard Crank-Nicolson Scheme

1. 序論

流れを支配する厳密な方程式として、一般に Navier-Stokes 方程式が、受け入れられ、この式を解くことにより、流れを解明しようとする努力が、古くからなされている。しかしながらこの方程式は、非線形性が強く、一般に、本式を閉じた形で解くことは、未だにできない。流れの Reynolds 数が十分に大きいという仮定のもとに、Prandtl の境界層近似を導入し、より簡単な、境界層方程式に限っても、現在、解析的に解を得ることは、特殊な問題を除いて困難である。したがって、とにかく解を得るためにには、数値解法によらざるを得ない。境界層方程式の数値解法には、大別して二つ、積分方程式を用いるものと、微分方程式を用いるものとがあるが、流れがより詳細に評価できるという意味で、ここでは、微分方程式による方に興味がある。境界層偏微分方程式を、領域の離散点（格子点）に於いて評価した差分方程式におきかえて解く手法は、決して目新しいものではなく、すでに数十年以上の歴史を持つが、しかし、未だに確立された状態ではなく、発展段階にあるといえる。

差分方程式は、その評価されている格子点間の距離（格子幅）を無限小にすれば、元の微分方程式に収束するのであるから、格子幅は小さい程良いと考えられる。現実には、使用する計算機の能力、計算時間等から、無視できない大きさの格子幅となり、必然的に、その格子幅に応じた大きさの誤差が生まれる。この誤差を、できる限り小さくし、かつ計算アルゴリズムの簡単な差分法を構成することが望ましい。

境界層方程式に対する差分法は、差分近似の仕方によりさまざまな方法が提案されている。その打ち切り誤差が、格子幅の一次の程度のものから、高次のものまで提案されてはいるが、高次精度の差分法程、当然その計算アルゴリズムが複雑になり、従ってより多くの計算時間を必要とすることになる。現在では、精度と、計算時間、またプログラム化の手順等の兼合いから、二次精度差分

法が多用されている。

しかしながら、形式的には二次精度の定式化がなされた差分法であっても境界層流れに適用した場合、非線形項の処理の為の反復アルゴリズムの収束性の如何によっては、実質的には一次精度差分法の振舞いしか示さない（二次精度）差分法があることが、Blottner¹⁾²⁾により指摘されている。Blottner によると、これは、境界層方程式が、連続・運動量両式の強く結びついた連立方程式系に帰因するとし、差分アルゴリズムにおいて、その性質が反映されていない場合に起こると推論されている。

そこで Blottner は、境界層方程式に対する四種類の二次精度陰的差分法；Crank-Nicolson Scheme (CNS と略す、以下同様)、Davis Coupled Scheme (DCS)、Keller's Box Scheme (KBS) 及び Modified-Box Scheme (MBS) をとりあげ、その実精度について議論及び数値実験を行った。その結果、CNS は、境界層方程式の連続、運動量両式を連成 (Coupling) 態度で解く差分アルゴリズムを用いて計算すれば、反復計算の回数の多少にかかわらず、実精度が二次の傾向を示し、しかるに一方、連成されないアルゴリズムの CNS は、反復計算の回数如何では（特に一回きりの反復回数では）、実質的に一次精度の傾向になることを示した。それ故、連続・運動量両式を連成しないアルゴリズムの Douglas-Jones³⁾ の予測子・修正子型 Crank-Nicolson Scheme (PC-CNS) は、予測子ステップ、修正子ステップの両ステップで、一格子分の計算が完結するので、これは、上述の CNS のアルゴリズムに対応づけると、反復一回分に対応し、上述の論点から、実一次精度になると述べている。

以上の結果は、二次元非圧縮線形減速流を例題とした、数値実験の結果ではあるが、差分法のもつ精度について有益な示唆を与える。

精度とともに、差分法上重要な要素として、計算能率があげられる。より高能率な差分法の選定は、とくに三次元流の問題では重要である。そこで著者の一人は、一般的な二独立変数放物型スカラー方程式（二次元問題）に対して提案された Douglas-Jones の PC-CNS を、三次元連立境界層方程式に適用すべく拡張し、更に、ベクトル処理にも適するアルゴリズムを構成した高能率差分法を提案した。⁴⁾⁵⁾ 三次元層流境界層問題に対しては、現在、高能率差分法の代表である KBS よりも、高能率計算が可能なことが示された。この方法は、予め流れ関数を導入することにより、連続の式を消去した形の Cobeci 変換⁶⁾ を施した境界層方程式を基礎方程式として、差分近似が構成されている。この場合、運動量の式のみとな

るが、差分構成上、三階の微分項を二階に落とすために、補助方程式が導入される。差分構成の段階でこの補助方程式は、運動量の式の中に組み込まれ、差分方程式としては、ブロック三対角の代数方程式となる。したがって、結果的には、本方法は、流れ関数を通して基礎方程式の段階で、連続・運動量両式が連成されていることになり、Blottnerの論点からいくと、これは、PC-CNSの連成態のスキームになり、実二次精度を有すると考えられる。文献[4], [5]では、連成の観点に立脚した議論はなされておらず、また、この種の実精度についての数値実験は行なわれていない。

境界層方程式に対する差分法は、ほとんどが陰的なものであるが、二次精度陽的差分法として、境界層流れ問題に適用され、成功を収めているものに、DuFort-Frankel Scheme (DFS) がある。これは、Der⁷⁾とRaetz,⁸⁾ Pletcher⁸⁾により境界層流れ問題に適用されたもので、物理面に於いて差分が適用されている。現在まで報告されているものでは、境界層座標変換を施した変換面での計算例は、筆者らの知る限りまだない。DFSを境界層問題に適用した場合、物理的考察により、零次のオーダーの誤差項が落とされており、この場合も実二次精度になる条件を、数値実験により調べておくことが必要である。Blottnerにも、この DFS の実精度に関する数値実験については、興味が持たれている²⁾が、未だ見当らない。

本論文の目的は、文献[4], [5]に於いて提案された、PC-CNS(詳しくは連成 PC-CNS), 及び DFS を取り上げ、数値実験を行ない、その実精度の振舞いを調べることである。PC-CNSについては、文献[4], [5]で、三次元問題について定式化された差分式を、ここでは二次元問題にもどって再定式化を与える。この場合、連成の観点に基づく議論も与える。DFSについては、境界層変換座標系で記述された方程式に対して、定式化を行なう。更に、現在、比較的広く用いられているKBSとの比較検討を行ない、両差分法の特性を検討する。

以上の目的により本論文の構成は次の様である。第2章で境界層方程式を与え、第3章で Blottnerに基づいて、CNSとDCSを例に「連成」について解説する。第4章では、連成 PC-CNS を、二次元非圧縮性境界層問題に対して再構成し、連続・運動量両式の連成について議論する、第5章では、DFSについて、変換座標系における定式化を与える。また数値実験の比較対象として用いたKBSについても、説明を与える。第6章では、数値実験に例題として用いたHowarth問題、及び初期分布の与え方について説明する。第7章は、数値実験結果があ

げられ、議論される。最後に、これらの結果得られた結論が述べられる。

2. 境界層方程式

二次元定常非圧縮性層流の場合、境界層方程式は、 x を物体に沿った主流方向、 y をそれに垂直な方向とするとき、次のようになる。

連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (2-1)$$

運動量の式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (2-2)$$

境界条件は、物体表面上では粘性流付着条件より

$$y = 0; \quad u = 0, \quad v = 0 \quad (2-3)$$

境界層外縁では、外縁速度が非粘性外部流速度 u_∞ に等しい。すなわち、

$$y \rightarrow \infty, \quad u = u_\infty \quad (2-4)$$

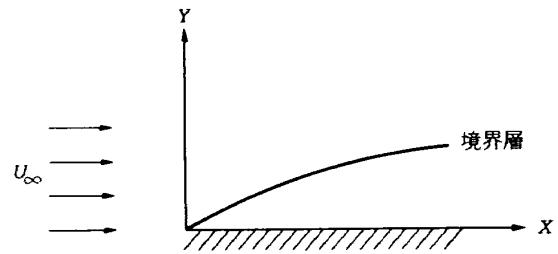


図1 境界層の座標

3. Crank-Nicolson 法の実精度

境界層方程式(2-1), (2-2)式に対し、多く適用される差分法の中で、良い結果を得てきた差分法に、Crank-Nicolson Scheme (CNS)がある。これは、格子幅の二次の程度の打切り誤差を有する、いわゆる二次精度差分法である。しかも流れの下流方向の任意位置で、壁に垂直方向の各格子点の値をすべて未知数とし、その未知数を連立させて解くことにより、流れ方向に格子幅を任意にとっても、安定な解が得られるという、いわゆる無条件安定なスキームという特長を持っている。CNSについては、非線形項の評価の違いにより、種々の変形スキームがあげられるが、本章では、Blottner²⁾のいう、連続・運動量両式の「連成」の観点から、「連成」の手法によらないStandard Crank-Nicolson Scheme (SCNS)，及び「連成」の手法によるDavis Coupled Scheme (DCS)を取りあげ、「連成」の説明、そのアルゴリズム

ム、計算結果上の相違について述べる。

Blottner に従って説明を与えるため、まず Levy-Lees 変換による支配方程式をあげる。この場合の変換は、主に、境界層内における物理量の急激な変化を緩和するため、座標を伸縮する。

二次非圧縮性流に対する Levy-Lees 変換式は、次に示す通りである。

$$\eta(x, y) = \rho u_e \sqrt{\frac{\kappa}{2\xi}} y \quad (3-1)$$

$$\xi(x) = \kappa(\rho\mu)_r \int_0^x u_e dx \quad (3-2)$$

ただし、 κ は定数である。

そのとき、従属変数を次のようにおく。

$$F = \frac{u}{u_e} \quad (3-3)$$

$$V = \frac{2\xi(F \frac{\partial \eta}{\partial x} + \rho u_e \sqrt{\frac{\kappa}{2\xi}})}{\kappa(\rho\mu)_r u_e} \quad (3-4)$$

(2-1), (2-2) 式は、(3-1), (3-2) 式よりそれぞれ、次のように変換される。

連続の式

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} + 2\xi \frac{\partial F}{\partial \xi} + F = 0 \quad (3-5)$$

運動量の式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} - V \frac{\partial F}{\partial \eta} - 2\xi F \frac{\partial F}{\partial \xi} - \beta(F^2 - 1) = 0 \quad (3-6)$$

ただし

$$\beta = \frac{2\xi}{u_e} \frac{du_e}{d\xi} \quad (3-7)$$

境界条件は、(2-3), (2-4) 式より

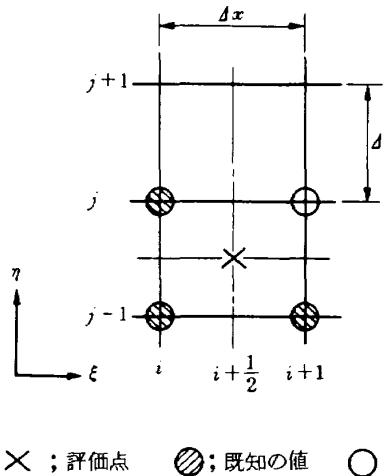
$$\eta = 0; \quad F = 0, \quad V = 0 \quad (3-8)$$

$$\eta = \eta_e; \quad F = 1 \quad (3-9)$$

以下上記(3-5), (3-6) 式に基づく SCNS, 及び DCS の差分法を述べるが、連続の式(3-5)については、同じ評価点で差分近似され、全く同じ差分式になるので、次節で先ずそれを示す。

3-1 連続の式の差分近似

図 2 のような格子系を考え、差分近似する評価点は、 $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$ とし、格子幅 $\Delta\xi$, $\Delta\eta$ はともに一定とする。 ξ , η 方向の微係数は、以下のように中心差分



× ; 評価点 ● ; 既知の値 ○ ; 未知の値

図 2 連続の式差分近似格子図

で近似する。ただし、次式はすべて、二次精度を有する。

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{(F_{i+1} - F_i)_j + (F_{i+1} - F_{i-1})_{j-1}}{2\Delta\xi} \quad (3-10)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \eta} = \frac{(V_j - V_{j-1})_{i+1} + (V_j - V_{j-1})_i}{2\Delta\eta} \quad (3-11)$$

F については、次のように二次精度で近似する。

$$F = \frac{1}{4} [(F_j + F_{j-1})_{i+1} + (F_j + F_{j-1})_i] \quad (3-12)$$

(3-5) 式に以上の関係を代入して整理すれば、

$$V_{i+1,j} = V_{i+1,j-1} - c_j (F_j + F_{j-1})_{i+1} + d_j \quad (3-13)$$

ただし

$$c_j = 2\Delta\eta \left(\frac{1}{4} + \frac{\xi_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta\xi} \right) \quad (3-14)$$

$$d_j = -2\Delta\eta \left(\frac{1}{4} + \frac{\xi_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta\xi} \right) (F_j + F_{j-1})_i - (V_j - V_{j-1})_i \quad (3-15)$$

$V_{i+\frac{1}{2},j}$ を未知数とする場合は、次の式になる。

$$V_{i+\frac{1}{2},j} = V_{i+\frac{1}{2},j-1} - c_j (F_j + F_{j-1})_{i+1} + d_j \quad (3-16)$$

ただし

$$c_j = \Delta\eta \left(\frac{1}{4} + \frac{\xi_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta\xi} \right) \quad (3-17)$$

$$d_j = -\Delta\eta \left(\frac{1}{4} - \frac{\xi_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta\xi} \right) (F_j + F_{j-1})_i \quad (3-18)$$

3-2 Standard Crank-Nicolson Scheme (SCNS)による運動量式の差分近似 運動量式(3-6)を差分近似するために、図3の格子系を考える。差分近似する評価点は、 $(i + \frac{1}{2}, j)$ として、格子幅 $\Delta\xi$ 、 $\Delta\eta$ は一定とする。 ξ 、 η 方向の微係数は、以下のように中心差分で近似する。それ故、以下の式は、すべて二次精度である。

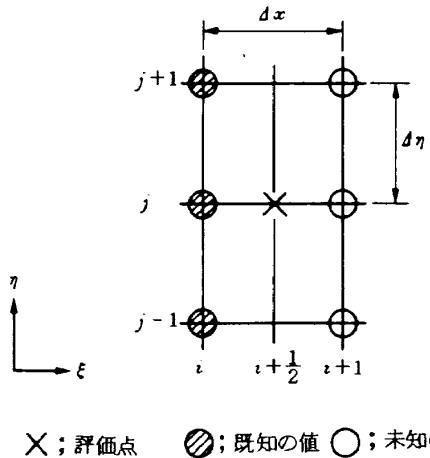


図3 CNSの差分近似格子図

$$\frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{(F_{i+1} - F_i)_j}{\Delta \xi} \quad (3-19)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{(F_{j+1} - F_{j-1})_{i+1} - (F_{j+1} - F_{j-1})_i}{4 \Delta \eta} \quad (3-20)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{(F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1})_{i+1} + (F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1})_i}{2 \Delta \eta^2} \quad (3-21)$$

F については、次のように二次精度で評価する。

$$F = \frac{1}{2} (F_{i+1} + F_i)_j \quad (3-22)$$

ただし、ここでは(3-6)式の V については、 $V_{i+\frac{1}{2}, j}$ で評価し、 $\beta_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\beta_{i+1} + \beta_i)$ 、 $\xi_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (\xi_{i+1} + \xi_i)$ と評価する。

上記の関係を(3-6)式に代入し、整理すれば次の式を得る。

$$(-\widetilde{A}F_{j-1} + \widetilde{B}F_j - \widetilde{C}F_{j+1} + \widetilde{E}F_j^2)_{i+1} = \widetilde{D} \quad (3-23)$$

ただし

$$\widetilde{A} = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Delta \eta}{2} V_{i+\frac{1}{2}, j} \right) \quad (3-24)$$

$$\widetilde{B} = 1 + \frac{1}{2} \beta_{i+\frac{1}{2}} \Delta \eta^2 F_{ij} \quad (3-25)$$

$$\widetilde{C} = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\Delta \eta}{2} V_{i+\frac{1}{2}, j} \right) \quad (3-26)$$

$$\widetilde{E} = \frac{1}{4} \beta_{i+\frac{1}{2}} \Delta \eta^2 + \frac{\xi_{i+\frac{1}{2}} \Delta \eta^2}{\Delta \xi} \quad (3-27)$$

$$\begin{aligned} \widetilde{D} = & (\widetilde{A}F_{j-1} - \widetilde{B}F_j + \widetilde{C}F_{j+1})_i + \beta_{i+\frac{1}{2}} \Delta \eta^2 \\ & + \frac{1}{4} \beta_{i+\frac{1}{2}} \Delta \eta^2 F_{ij}^2 - \frac{\xi_{i+\frac{1}{2}} F_{ij}^2 \Delta \eta^2}{\Delta \xi} \end{aligned} \quad (3-28)$$

$F_{i+1, j}^2$ の非線形項は、次のように線形化する。

$$F_{i+1, j}^2 = (2\bar{F}_j F_j - \bar{F}_j^2)_{i+1} \quad (3-29)$$

頭に $-$ がついている変数は、最初は初期値として与え、以後は前回の反復計算によって求まる値である。この関係を代入することで、次の三項方程式が得られる。

$$(-AF_{j-1} + BF_j - CF_{j+1})_{i+1} = D \quad (3-30)$$

ただし

$$A = \widetilde{A} \quad (3-31)$$

$$B = \widetilde{B} + 2\widetilde{E}\bar{F}_j \quad (3-32)$$

$$C = \widetilde{C} \quad (3-33)$$

$$D = \widetilde{D} + \widetilde{E}\bar{F}_j^2 \quad (3-34)$$

まず、(3-30)式では、 $V_{i+\frac{1}{2}, j}$ を初期値または、前回の反復計算の値を与え、線形三項方程式として、 $F_{i+1, j}$ を求め、次に $V_{i+\frac{1}{2}, j}$ を(3-16)式より求める。この手順をくり返し収束すれば、そのときの $F_{i+1, j}$ 、 $V_{i+\frac{1}{2}, j}$ が収束解である。この場合注意するのは、連続の式の差分式(3-16)と運動量式の差分式(3-30)が、同一点で同時に連立して解かれない。こういう場合を、本論文では、連続の式と運動量の式が、非連成態にあるという。

3-3 Davis Coupled Scheme (DCS)による運動量式の差分近似 この差分法は、(3-5)、(3-6)式を「連成」するように評価する差分法であり、Davisにより提案された。

DCSにおいては、運動量式(3-6)の差分近似を図4の格子系に示したように、 $(i + \frac{1}{2}, j)$ で評価する。ただし、格子幅 $\Delta\xi$ 、 $\Delta\eta$ は一定である。

(3-6)式の各項は、以下のように中心差分で近似する。

各差分式は、二次精度である。

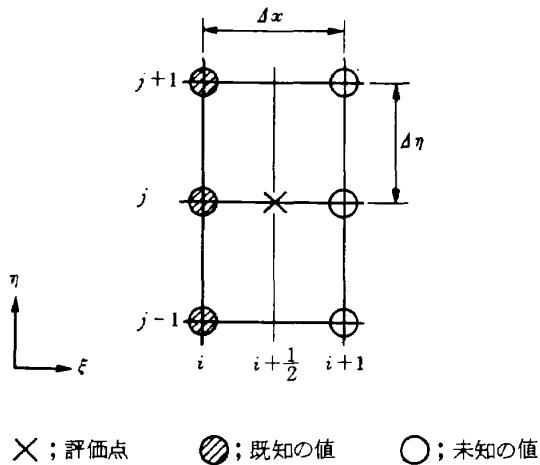


図 4 DCS の差分近似格子図

$$F \frac{\partial F}{\partial \xi} = \frac{(F_{i+1} + F_i)_j (F_{i+1} - F_i)_j}{2 \Delta \xi} = \frac{(F_{i+1}^2 - F_i^2)_j}{2 \Delta \xi} \quad (3-35)$$

$$V \frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{1}{2} (V \frac{\partial F}{\partial \eta})_{i+1} + \frac{1}{2} (V \frac{\partial F}{\partial \eta})_i \quad (3-36)$$

$$\begin{aligned} \beta(F^2 - 1) &= \frac{1}{2} [\beta(F_j^2 - 1)]_{i+1} \\ &\quad + \frac{1}{2} [\beta(F_j^2 - 1)]_i \end{aligned} \quad (3-37)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right]_{i+1,j} + \frac{1}{2} \left[\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right]_{i,j} \quad (3-38)$$

また、 η 方向の微係数については、次のように中心差分で近似する。

$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta} \right)_{ij} = \frac{(F_{j+1} - F_{j-1})_i}{2 \Delta \eta} \quad (3-39)$$

$$\left(\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} \right)_{ij} = \frac{(F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1})_i}{4 \Delta \eta^2} \quad (3-40)$$

以上の式を (3-6) 式に代入すれば、

$$\begin{aligned} &\frac{(\xi_{i+1} + \xi_i)(F_{i+1}^2 - F_i^2)_j}{2 \Delta \xi} + \frac{V_{i+1,j}(F_{j+1} - F_{j-1})_{i+1}}{4 \Delta \eta} \\ &+ \frac{V_{i,j}(F_{j+1} - F_{j-1})_i}{4 \Delta \eta} + \frac{1}{2} [\beta(F_j^2 - 1)]_{i+1} \\ &+ \frac{1}{2} [\beta(F_j^2 - 1)]_i \\ &= \frac{(F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1})_{i+1} + (F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1})_i}{2 \Delta \eta^2} \end{aligned} \quad (3-41)$$

さらに、 $F_{i+1,j}^2$, $F_{i+1,j} V_{i+1,j}$ の非線形項を次のように線形化する。

$$F_{i+1,j}^2 = (2 F_j \bar{F}_j - \bar{F}_j^2)_{i+1} \quad (3-42)$$

$$F_{i+1,j} V_{i+1,j} = (F_j \bar{V}_j + \bar{F}_j V_j - \bar{F}_j \bar{V}_j)_{i+1} \quad (3-43)$$

F および、 V の頭に $-$ がついたものは、最初は、初期値で与え、以後は前回の反復計算で求まる値である。
(3-42), (3-43) 式を (3-41) 式に代入し、整理すれば、次式を得る。

$$(-A_j F_{j-1} + B_j F_j - C_j F_{j+1})_{i+1} + (aV)_{i+1,j} = D_{i+1,j} \quad (3-44)$$

ただし

$$A_{i+1,j} = \frac{1}{2} (1 + \frac{\Delta \eta}{2} \bar{V}_{i+1,j}) \quad (3-45)$$

$$B_{i+1,j} = \frac{\Delta \eta^2}{\Delta \xi} (\xi_{i+1} + \xi_i) \bar{F}_{i+1,j} + \Delta \eta^2 \beta_{i+1,j} + 1 \quad (3-46)$$

$$C_{i+1,j} = (1 - \frac{\Delta \eta}{2} \bar{V}_{i+1,j}) \quad (3-47)$$

$$a_{i+1,j} = \frac{\Delta \eta}{4} (\bar{F}_j - \bar{F}_{j-1})_{i+1} \quad (3-48)$$

$$\begin{aligned} D_{i+1,j} &= A_{i,j} F_{i,j-1} + C_{i,j} F_{i,j-1} - (F_{i,j} + \frac{1}{2} \Delta \eta^2 \beta_i \cdot F_{i,j}^2) \\ &+ \frac{\Delta \eta^2}{2} (\beta_{i+1} + \beta_i) + \frac{\Delta \eta^2 (\xi_{i+1} + \xi_i) (F_i^2 + \bar{F}_{i+1}^2)}{2 \Delta \xi} \\ &+ \frac{\Delta \eta}{2} \bar{V}_{i+1,j} (\bar{F}_{j+1} - \bar{F}_{j-1})_{i+1} + \frac{1}{2} \Delta \eta^2 \beta_{i+1} \bar{F}_{i+1}^2 \end{aligned} \quad (3-49)$$

DCS は、3-2 節の SCNS とは異なり、 $V_{i+1,j}$ を運動量式の中で、未知数として評価していることである。したがって、連続の式の差分式 (3-13) 式と同時に、連立して解くことによって $F_{i+1,j}$, $V_{i+1,j}$ が求まる。これが、「連成」と呼ばれるものであり、この手法による CNS とそうでない SCNS とでは、次節および 4 章に述べるように、計算結果の精度の上に、重要な差異が生じてくるのである。

3-4 SCNS と DCS の計算結果の精度上の相違

前節で述べた SCNS と、DCS の計算結果の精度の相違は、6 章で述べる精度検査により、Blottner¹⁾ により明らかにされた。5 図は、横軸に格子幅をとり、縦軸に絶対誤差を両対数にプロットしてある。傾きが 2 に近づけば、実質的に二次精度であり、傾きが 1 に近づくなら、実質的に一次精度の傾向である。

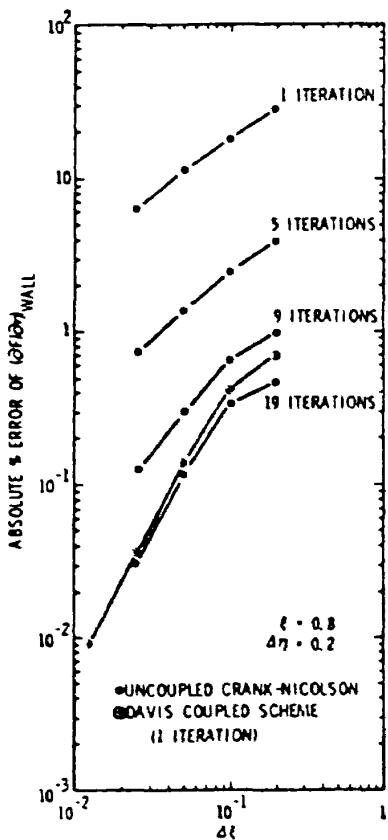


図 5 Blottner の検査結果（文献 1 より引用）

「連成」のアルゴリズムによる DCS は、一回の反復計算でも、実二次精度の傾向を示している。逆に、「連成」のアルゴリズムによらない SCNS は、一回の反復計算では、実一次精度の傾向である。実二次精度の傾向となるのには、実に 19 回の反復計算を経た後である。一反復に要する計算時間は、DCS は、SCNS に比べ、演算量が多いことから、長くかかるものの、19 回反復計算する場合に比べると、約 1/2 程度と短かく、計算能率は高い。

このように、CNS による境界層方程式の数値計算では、精度、計算能率向上のために、「連成」を考慮しなければならないことがわかる。

4. 予測子・修正子型 Crank-Nicolson 法 (PC-CNS)

著者の一人は、Douglas-Jones が提案した Crank-Nicolson 型の予測子・修正子法 (PC-CNS) を、三次元境界層問題に拡張、定式化している。この三次元問題に用いられた PC-CNS を、二次元問題にもどって再定式化を行ない、同時に「連成」の議論を以下に行なう。

文献 [4] に従って、(2-1), (2-2) 式を変換する変換式を、ここでは次の Cebeci 変換⁶⁾を用いる。

$$x = x \quad (4-1)$$

$$\eta = \left(\frac{u_e}{\nu x} \right)^{\frac{1}{2}} y \quad (4-2)$$

$$\psi = (u_e \nu x)^{\frac{1}{2}} f(x, \eta) \quad (4-3)$$

ここで、 ψ は流れ関数であり、次式を満足する。

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (4-4)$$

この流れ関数の導入により、連続の式 (2-1) は、自動的に満足される。(2-2) 式を (4-1) ~ (4-3) 式で変換すると、次式になる。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^3 f}{\partial \eta^3} + P_1 f \frac{\partial f}{\partial \eta} + P_2 \left\{ 1 - \left(\frac{\partial f}{\partial \eta} \right)^2 \right\} \\ &= x \left[\frac{\partial f}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial \eta} - \frac{\partial^2 f}{\partial \eta^2} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} \right] \end{aligned} \quad (4-5)$$

これを二階の偏微分方程式に直すと

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = F \quad (4-6)$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + P_1 f \frac{\partial F}{\partial \eta} + P_2 (1 - F^2) = x \left(F \frac{\partial F}{\partial x} - \frac{\partial F}{\partial \eta} \frac{\partial f}{\partial x} \right) \quad (4-7)$$

ただし

$$P_1 = \frac{P_2 + 1}{2} \quad (4-8)$$

$$P_2 = \frac{x}{u_e} \frac{du_e}{dx} \quad (4-9)$$

$$F = \frac{u}{u_e} \quad (4-10)$$

境界条件は

$$\eta = 0 \text{ (壁上)} : F = f = 0 \quad (4-11)$$

$$\eta = \eta_e \text{ (境界層外縁)} : F = 1 \quad (4-12)$$

流れ関数の導入により、(2-1), (2-2) 式が直接に結びつき、本質的に連続の式が、運動量の式に組み込まれたわけである。

本章のはじめに述べたことと、以上の議論から、(4-6), (4-7) 式を同時に PC-CNS によって解いた場合、実二次精度を有することが考れられ、(4-6) (4-7) 式を分離して差分式化すると、補助方程式 (4-6) は、連続の式に対応していると考えられるので、実一次精度になってしまふことが考えられる。(4-6), (4-7) 両式を、DCS と同様なアルゴリズムとなるように、PC-CNS で差分式化すると、以下のようになる。

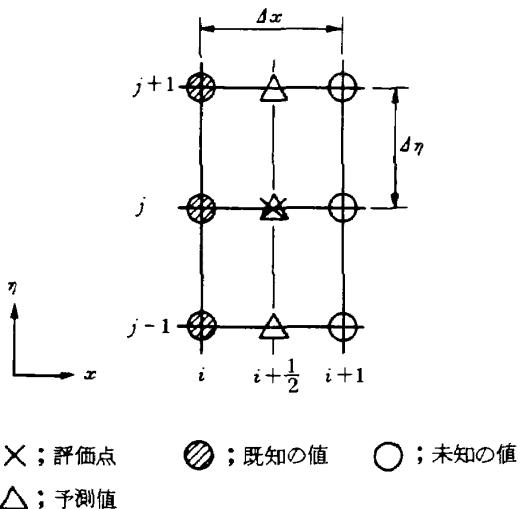


図 6 PC-CNS の差分近似格子図

図 6 の格子系を考え、 $\Delta x, \Delta \eta$ は一定とする。PC-CNS は、 $x_i + \frac{1}{2} = x_i + \frac{1}{2} \Delta x$ の位置での値を予測子(Predictor)により、一次精度で予測し、そしてこの予測値を用いて、 $x_i + \Delta x$ の位置での値を修正子(Corrector)により、二次精度で求めるものである。この PC-CNS を(4-6), (4-7) 方程式系に対し、以下のように適用する。

予測子(Predictor)

図 6 に示してあるように、(4-7)式は、 $(i + \frac{1}{2}, j)$ で評価され、 x 方向の微係数については、一次精度の後退差分により近似する。 η 方向の微係数については、二次精度の中心差分で近似する。予測子となる $x = x_i + \frac{1}{2} \Delta x$ の位置での F 、及び f については、*をつけて示す。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{(F_{j+1}^* - 2F_j^* + F_{j-1}^*)_{i+\frac{1}{2}}}{4\Delta \eta^2} \quad (4-13)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(F_{i+\frac{1}{2}}^* - F_i)_j}{\frac{1}{2} \Delta x} \quad (4-14)$$

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{(F_{j+1} - F_{j-1})_i}{2\Delta \eta} \quad (4-15)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(f_{i+\frac{1}{2}}^* - f_i)_j}{\frac{1}{2} \Delta x} \quad (4-16)$$

F, f については、次のように評価する。

$$F = F_{ij} \quad (4-17)$$

$$f = f_{ij} \quad (4-18)$$

上記差分式を(4-7)式に代入して整理すれば、次式を得る。

$$(AF_{j-1}^* + BF_j^* + CF_{j+1}^*)_{i+\frac{1}{2}} + HF_{i+\frac{1}{2}} = D \quad (4-19)$$

ただし

$$A = -\frac{1}{4\Delta \eta^2} \quad (4-20)$$

$$B = 2 \left(\frac{1}{4\Delta \eta^2} + \frac{x_i + \frac{1}{2}}{\Delta x} F_{ij} \right) \quad (4-21)$$

$$C = -\frac{1}{4\Delta \eta^2} \quad (4-22)$$

$$H = \frac{x_i + \frac{1}{2} (F_{j+1} - F_{j-1})_i}{4\Delta x \Delta \eta} \quad (4-23)$$

$$D = \frac{P_1 f_{ij} (F_{j+1} - F_{j-1})_i}{2\Delta \eta} + P_2 (1 - F_{ij}^2) - 2 \frac{x_i + \frac{1}{2}}{\Delta x} F_{ij}^2 + \frac{x_i + \frac{1}{2} (F_{j+1} - F_{j-1})_i f_{ij}}{4\Delta x \Delta \eta} \quad (4-24)$$

(4-6)について、 $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$ で評価し、

$\frac{\partial f}{\partial \eta}$ 、 F は、次のように差分近似する。

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{(f_j^* - f_{j-1}^*)_{i+\frac{1}{2}}}{4\Delta \eta} \quad (4-25)$$

$$F = \frac{(F_j^* + F_{j-1}^*)_{i+\frac{1}{2}}}{2} \quad (4-26)$$

これを、(4-6)に代入して整理すれば、

$$f_{i+\frac{1}{2}, j}^* - f_{i+\frac{1}{2}, j-1}^* - \frac{4\Delta \eta}{2} (F_j^* + F_{j-1}^*)_{i+\frac{1}{2}} = 0 \quad (4-27)$$

(4-19), (4-27)式をまとめて書き直すと、

$$(Ax_{j-1}^* + Bx_j^* + Cx_{j+1}^*)_{i+\frac{1}{2}} = D \quad (4-28)$$

となる。

ただし

$$x_j^* = \begin{bmatrix} F_j^* \\ f_j^* \end{bmatrix} \quad (4-29)$$

$$A = \begin{bmatrix} A & 0 \\ 1 & \frac{2}{4\Delta \eta} \end{bmatrix} \quad (4-30)$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} B & H \\ 1 & -\frac{2}{\Delta\eta} \end{bmatrix} \quad (4-31)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-32)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} D \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-33)$$

修正子 (Corrector)

予測子による(4-28)式で、 $x_i + \frac{1}{2} = x_i + \frac{1}{2} \Delta x$ の位置での F 及び f の値がすでに求まっているので、 F についての η 方向の一階の微係数は、図 6 の様に $(i + \frac{1}{2}, j)$ の点で差分近似する。

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{(F_{j+1}^* - F_{j-1}^*)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta} \quad (4-34)$$

$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2}, \frac{\partial F}{\partial x}$ 、 F については、 $(i + \frac{1}{2}, j)$ で評価される中心差分で近似する。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{(F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1})_{i+1} + (F_{j+1} - 2F_j + F_{j-1})_i}{\Delta\eta^2} \quad (4-35)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(F_{i+1} - F_i)_j}{\Delta x} \quad (4-36)$$

$$F = F_{i+\frac{1}{2}, j}^* \quad (4-37)$$

f についても、 F と同様に次のように評価する。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(f_{i+1} - f_i)_j}{\Delta x} \quad (4-38)$$

$$f = f_{i+\frac{1}{2}, j}^* \quad (4-39)$$

上記の関係を(4-7)に代入して整理すれば、次式を得る。

$$(A^* F_{j-1} + B^* F_j + C^* F_{j+1})_{i+1} + H^* f_{i+1,j} = D^* \quad (4-40)$$

ただし

$$A^* = -\frac{1}{2\Delta\eta^2} \quad (4-41)$$

$$B^* = \left(\frac{1}{\Delta\eta^2} + \frac{x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} F_{i+\frac{1}{2}, j}^* \right) \quad (4-42)$$

$$C^* = -\frac{1}{2\Delta\eta^2} \quad (4-43)$$

$$H^* = -\frac{x_{i+\frac{1}{2}} (F_{j+1}^* - F_{j-1}^*)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta x \Delta\eta} \quad (4-44)$$

$$D^* = \frac{(F_{j-1} - 2F_j + F_{j+1})_i}{2\Delta\eta^2} + \frac{P_1 f_{i+\frac{1}{2}, j}^* (F_{i+1}^* - F_{j-1}^*)_{i+\frac{1}{2}}}{2\Delta\eta} + P_2 (1 - F_{i+\frac{1}{2}, j}^*) - \frac{x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} F_{i+\frac{1}{2}, j}^* E_{ij}$$

$$+ \frac{x_{i+\frac{1}{2}}}{\Delta x} (F_{j+1}^* - F_{j-1}^*)_{i+\frac{1}{2}} f_{ij} \quad (4-45)$$

(4-6)式については、 $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$ で評価し、 $\frac{\partial f}{\partial \eta}$ 、 F は、次のように差分近似する。

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{(f_j - f_{j-1})_{i+1}}{\Delta\eta} \quad (4-46)$$

$$F = \frac{1}{2} (F_j + F_{j-1})_{i+1} \quad (4-47)$$

上記の関係を(4-6)式に代入して、整理すれば、

$$f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1} - \frac{\Delta\eta}{2} (F_j + F_{j-1})_{i+1} = 0 \quad (4-48)$$

(4-40), (4-48)式を(4-28)式と同じくベクトル形式で表わせば、次の様になる。

$$(A^* \mathbf{x}_{j-1} + B^* \mathbf{x}_j + C^* \mathbf{x}_{j+1})_{i+1} = D^* \quad (4-49)$$

ただし

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} F_j \\ f_j \end{bmatrix} \quad (4-50)$$

$$\mathbf{A}^* = \begin{bmatrix} A^* & 0 \\ 1 & \frac{2}{\Delta\eta} \end{bmatrix} \quad (4-51)$$

$$\mathbf{B}^* = \begin{bmatrix} B^* & H^* \\ 1 & -\frac{2}{\Delta\eta} \end{bmatrix} \quad (4-52)$$

$$\mathbf{C}^* = \begin{bmatrix} C^* & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4-53)$$

$$\mathbf{D}^* = \begin{bmatrix} D^* \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4-54)$$

予測子修正子を通じて P_1, P_2 は、 $x_{i+\frac{1}{2}}$ で評価する。

前述の通り、(4-28)式より、 $x_i + \frac{1}{2} = x_i + \frac{1}{2} \Delta x$ の位置で、 $F_{i+\frac{1}{2},j}^*$, $f_{i+\frac{1}{2},j}^*$ の値を予測し、次に修正子(4-49)式により、 $x_{i+1} = x_i + \Delta x$ の位置での $F_{i+1,j}$, $f_{i+1,j}$ の値を求める手順中、(4-28), (4-29)式の各係数は、いずれも既知となるため、線形三項方程式となり、Gauss 消去法の唯一回のスウェーブで、 F , f の値が求められる。

また、上式の定式化では、流れ関数の導入で、連続・運動量両式が結びつき、さらに、アルゴリズム上、(4-28), (4-49)式においては、未知数 F のみでなく f についても評価できるので、DCS と同様に F , f について「連成」されていることになる。しかも SCNS に対応づけると、予測子・修正子で、一回の反復計算に相当すると考えられる。

5. DuFort-Frankel 法 (DFS)

前章までは、陰的差分解法の CNS を中心に述べてきたが、本章では、まず 5-1 節で、代表的な陽的解法の一つである、DuFort-Frankel Scheme をとりあげ、Cebeci 変換を適用した変換座標系での定式化を示す。

5-2 節は、現在 CNS と同様、境界層方程式の計算に広く用いられている Keller's Box Scheme について、第 6 章の数値実験の項で、他のスキームと比較のために用いるので、ここでその差分式を示す。

5-1 DuFort-Frankel Scheme (DFS)

この差分法は、前述までの CNS と異なり、陽的解法を代表する差分法の一つである。この差分法においても、陰的差分法と同様に、流れ方向に格子幅を任意にとっても安定な解が得られる、無条件安定の差分法である。しかし、この差分法の計算上の実精度について未だ、議論されていない。4-1 節の PC-CNS と実精度比較をも考察してこの差分法を、(4-1)～(4-3)式による変換座標系での境界層方程式に適用することを試みる。

(4-1)～(4-3)式の変換式による境界層方程式(4-6)～(4-10)に対し、(4-7)式は、(i , j) で評価する中心差分とし、陽的解法のため、図 7 のように ($i+1$, j) の値を、既知の値、(i , j), ($i-1$, j), (i , $j+1$), (i , $j-1$) の 4 点より求める。また、 x , η 方向の微係数は、以下のように二次精度で差分近似する。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} = \frac{(F_{ij+1} + F_{ij-1} - F_{i+1,j} - F_{i-1,j})}{4\eta^2} \quad (5-1)$$

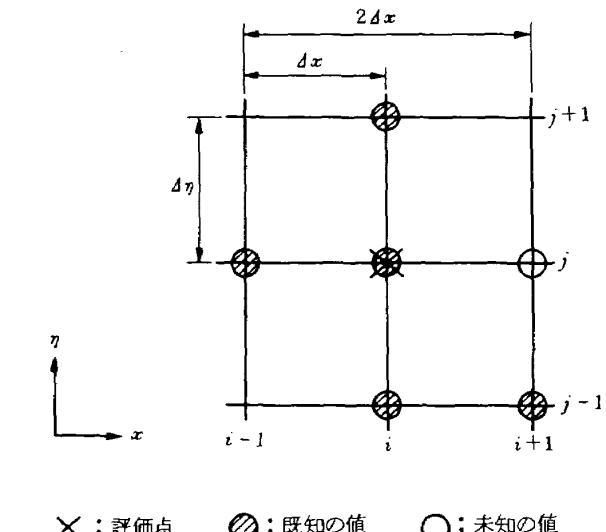


図 7 DFS の差分近似格子図

$$\frac{\partial F}{\partial \eta} = \frac{(F_{j+1} - F_{j-1})_i}{2\Delta \eta} \quad (5-2)$$

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{(F_{i+1} - F_{i-1})_j}{2\Delta x} \quad (5-3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(f_{i+1} - f_{i-1})_j}{2\Delta x} \quad (5-4)$$

なお、 P_1 , P_2 , x , F , f については、すべて (i , j) で評価する。

以上の関係を (4-7) 式に代入して整理すれば、

$$AF_{i+1,j} + BF_{i,j+1} = C \quad (5-5)$$

ただし

$$A = \frac{1}{4\eta^2} + \frac{x_i F_{ij}}{2\Delta x} \quad (5-6)$$

$$B = -\frac{x_i (F_{j+1} - F_{j-1})_i}{4\Delta \eta \Delta x} \quad (5-7)$$

$$C = \frac{(F_{ij+1} + F_{ij-1} - F_{ij})}{4\eta^2} + \frac{x_i F_{ij} F_{i-1,j}}{2\Delta x} - \frac{x_i (F_{j+1} - F_{j-1})_i f_{ij}}{4\Delta \eta \Delta x} + \frac{P_1 f_{ij} (F_{j+1} - F_{j-1})_i}{2\Delta \eta} + P_2 (1 - F_{ij}^2) \quad (5-8)$$

(4-6) 式については、($i+1$, $j - \frac{1}{2}$) で評価する中心差分とし、 $\frac{\partial f}{\partial \eta}$, F については、次のように差分近似する。

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = \frac{(f_j - f_{j-1})_{i+1}}{4\eta} \quad (5-9)$$

$$F = \frac{(F_j + F_{j-1})_{i+1}}{2} \quad (5-10)$$

(4-6)式に代入して整理すれば、

$$aF_{i+1,j} + b f_{i+1,j} = c \quad (5-11)$$

ただし

$$a = -4\eta \quad (5-12)$$

$$b = 2 \quad (5-13)$$

$$c = 2f_{i+1,j-1} + 4\eta F_{i+1,j-1} \quad (5-14)$$

(5-5), (5-11)両式を通じて、 $F_{i+1,j}$, $f_{i+1,j}$ が未知数であり、両式を連立させて以下の手順で、代数方程式系を解けばよい。

$$\mathbf{A}_j (\mathbf{x}_j)_{i+1} = \mathbf{C}_j \quad (5-15)$$

ただし

$$\mathbf{x}_j = \begin{bmatrix} F_j \\ f_j \end{bmatrix} \quad (5-16)$$

$$\mathbf{A}_j = \begin{bmatrix} A & B \\ a & b \end{bmatrix} \quad (5-17)$$

$$\mathbf{C}_j = \begin{bmatrix} C \\ c \end{bmatrix} \quad (5-18)$$

求める \mathbf{x}_j は

$$(\mathbf{x}_j)_{i+1} = \mathbf{A}_j^{-1} \mathbf{C} \quad (5-19)$$

以上のことより、 $j=1$ ($F_1=f_1=0$) から順に、 j 方向に $F_{i+1,j}$, $f_{i+1,j}$ が求まる。

5-2 Keller's Box Scheme (KBS)

この差分法は、Keller により提案され、Cebeci により、境界層方程式に適用されており、次のような特徴をもつ。

i) 支配方程式を一階の連立偏微分方程式に直す。

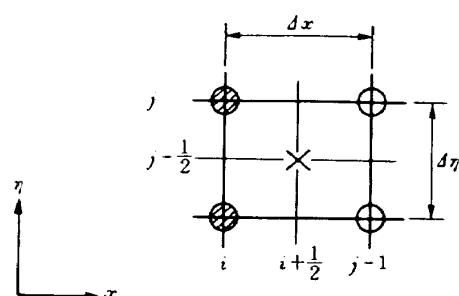


図 8 KBS の差分近似格子図

ii) 図 8 の如く、○印 4 点による Box の中心点で差分評価を行ない、すべての微係数は、二点差分近似する。

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = u \quad (5-20)$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = v \quad (5-21)$$

とおくことにより、(4-5)式を一階の偏微分方程式に直すと次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \eta} + P_1 f v + P_2 (1 - u^2) \\ - x \left[-u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial f}{\partial x} \right] = 0 \end{aligned} \quad (5-22)$$

(5-20), (5-21)式は、 $(i+1, j - \frac{1}{2})$ で評価し、次のように差分近似する。

$$\frac{(f_j - f_{j-1})_{i+1}}{4\eta} = \frac{1}{2} (u_j + u_{j-1})_{i+1} \quad (5-23)$$

$$\frac{(u_j - u_{j-1})_{i+1}}{4\eta} = \frac{1}{2} (v_j + v_{j-1})_{i+1} \quad (5-24)$$

(5-22)式は、図 7 の矩形 (Box) の中心、 $(i + \frac{1}{2}, j - \frac{1}{2})$ で評価し、以下のように中心差分で近似する。

$$\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{(v_j - v_{j-1})_{i+1} + (v_j - v_{j-1})_i}{24\eta} \quad (5-25)$$

$$P_1 f v = \frac{1}{2} [(P_1 f v)_{i+1} + (P_1 f v)_i]_{j - \frac{1}{2}} \quad (5-26)$$

$$P_2 u^2 = \frac{1}{2} [(P_2 u^2)_{i+1} + (P_2 u^2)_i]_{j - \frac{1}{2}} \quad (5-27)$$

$$xu \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} (u_{i+1} + u_i)_{j - \frac{1}{2}} - (u_{i+1} - u_i)_{j - \frac{1}{2}}}{24x} \quad (5-28)$$

$$xv \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x_{i+\frac{1}{2}} (v_{i+1} + v_i)_{j - \frac{1}{2}} - (f_{i+1} - f_i)_{j - \frac{1}{2}}}{24x} \quad (5-29)$$

$$x_{i+\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} (x_{i+1} + x_i) \quad (5-30)$$

上記の関係を(5-22)式に代入すると

$$\begin{aligned} & (v_j - v_{j-1})_{i+1} + \Delta\eta\sigma(f_{i+1}v_i - f_iv_{i+1})_{j-\frac{1}{2}} \\ & + \Delta\eta(P_{1i+1} + \sigma)(fv)_{i+1j-\frac{1}{2}} \\ & - \Delta\eta(P_{2i+1} + \sigma)u_{i+1j-\frac{1}{2}}^2 = S_j \end{aligned} \quad (5-31)$$

ただし

$$\begin{aligned} S_j = & -(v_j - v_{j-1})_i + \Delta\eta(\sigma - P_{1i})(fv)_{ij-\frac{1}{2}} \\ & - P_{2i} + \frac{1}{2}2\Delta\eta + \Delta\eta(P_{2i} - \sigma)u_{ij-\frac{1}{2}}^2 \end{aligned} \quad (5-32)$$

$$\sigma = \frac{x_{i+1} + x_i}{4x} \quad (5-33)$$

$$P_{2i} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}(P_{2i+1} + P_{2i}) \quad (5-34)$$

非線形項 $(fv)_{i+1j-\frac{1}{2}}$, $u_{i+1j-\frac{1}{2}}^2$ は次のように線形化する。

$$(fv)_{i+1j-\frac{1}{2}} = (-\bar{f}\bar{v} + \bar{f}v + f\bar{v})_{i+1j-\frac{1}{2}} \quad (5-35)$$

$$u_{i+1j-\frac{1}{2}}^2 = (-\bar{u}^2 + 2u\bar{u})_{i+1j-\frac{1}{2}} \quad (5-36)$$

頭に - がついた変数は、最初は初期値で与え、以後は、前回の反復計算で求めた値である。

さらに $j - \frac{1}{2}$ の項は、次のように評価する。

$$(fv)_{i+1j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}((fv)_j + (fv)_{j-1})_{i+1} \quad (5-37)$$

$$(u\bar{u})_{i+1j-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}((u\bar{u})_j + (u\bar{u})_{j-1})_{i+1} \quad (5-38)$$

(5-35)～(5-39)式を(5-31)式に代入すると、次式を得る。

$$a_j f_j - \tilde{a}_j f_{j-1} + b_j u_j - \tilde{b}_j u_{j-1} + c_j v_j - \tilde{c}_j v_{j-1} = S_j \quad (5-39)$$

ただし

$$a_j = \frac{\Delta\eta}{2} \left\{ (P_{1i+1} + \sigma) \bar{v}_{i+1j} + \frac{\sigma}{2} (v_j + v_{j-1})_i \right\} \quad (5-40)$$

$$\tilde{a}_j = -\frac{\Delta\eta}{2} \left\{ (P_{1i+1} + \sigma) \bar{v}_{i+1j} + \frac{\sigma}{2} (v_j + v_{j-1})_i \right\} \quad (5-41)$$

$$b_j = -\Delta\eta (P_{2i+1} + \sigma) \bar{u}_{i+1j} \quad (5-42)$$

$$\tilde{b}_j = \Delta\eta (P_{2i+1} + \sigma) \bar{u}_{i+1j-1} \quad (5-43)$$

$$c_j = 1 + \frac{\Delta\eta}{2} \left[(P_{1i+1} + \sigma) \bar{f}_{i+1j} - \frac{\sigma}{2} (f_j + f_{j-1})_i \right] \quad (5-44)$$

$$\begin{aligned} \tilde{c}_j = & 1 - \frac{\Delta\eta}{2} \left[(P_{1i+1} + \sigma) f_{i+1j-1} \right. \\ & \left. - \frac{\sigma}{2} (f_j + f_{j-1})_i \right] \end{aligned} \quad (5-45)$$

$$\tilde{S}_j = -(v_j - v_{j-1})_i - P_2 2\Delta\eta$$

$$\begin{aligned} & + \frac{\Delta\eta}{2} (P_{2i} - \sigma) (u_j^2 + u_{j-1}^2)_i \\ & + \frac{\Delta\eta}{2} (\sigma - P_{1i}) \{(fv)_j + (fv)_{j-1}\}_i \end{aligned} \quad (5-46)$$

$$\begin{aligned} S_j = \tilde{S}_j & - \frac{\Delta\eta}{2} (P_{1i+1} + \sigma) \{(-\bar{f}\bar{v})_j + (-\bar{f}\bar{v})_{j-1}\}_{i+1} \\ & + \frac{\Delta\eta}{2} (P_{2i+1} + \sigma) (-u_j^2 - u_{j-1}^2)_{i+1} \end{aligned} \quad (5-47)$$

(5-23), (5-24), (5-39)の三式を、ベクトル形式で示せば次のようになる。

$$(AW_{j-1} + BW_j + CW_{j+1})_{i+1} = D \quad (5-48)$$

$$2 \leq j \leq J-1$$

ただし

$$W_j = \begin{bmatrix} f_j \\ u_j \\ v_j \end{bmatrix} \quad (5-49)$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \frac{\Delta\eta}{2} & 0 \\ \tilde{a}_j & \tilde{b}_j & \tilde{c}_j \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (5-50)$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{\Delta\eta}{2} & 0 \\ a_j & b_j & c_j \\ 0 & -1 & -\frac{\Delta\eta}{2} \end{bmatrix} \quad (5-51)$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & \frac{\Delta\eta}{2} \end{bmatrix} \quad (5-52)$$

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} 0 \\ S_j \\ 0 \end{bmatrix} \quad (5-53)$$

以上より、 f , u , v が求まる。

KBSは、DCS, PC-CNSのような 2×2 の三対角行列ではなく、 3×3 のブロック三対角行列を解くアルゴリズムとなる。

6. 数値実験による精度検定

本章では、数値実験に用いた例題、数値解を得る手順、および精度検定の方法について述べる。検定に用いた例題は、BlottnerにならうHowarth問題である。

6-1 Howarth問題

二次元境界層方程式を数値解法で解く場合、一般に、境界層外縁における x 方向速度分布を与えるなければならない。ここでは、その速度分布を線形減速とするHowarth問題をとりあげ、次式で与える。

$$\frac{u_e}{U_\infty} = (1 - \frac{x}{L}) \quad (6-1)$$

ただし

L ：代表長（reference Length）

(6-1)式の関係を使って、(4-9)式より

$$P_2 = \frac{\frac{x}{L}}{\left(\frac{x}{L}\right) - 1} \quad (6-2)$$

ゆえに P_2 は、 x の関数として決まる。

さらに、壁から境界層外縁までの距離 η_e を決める必要があるが、層流境界層では、 $\eta_e = 6$ で十分である。また、(6-1), (6-2)式で代表長さ L については、Blottnerにならう、 $L = 8$ とし、 U_∞ についても同様に、 $U_\infty = 1$ とする。

6-2 初期速度分布の決定

境界層は、鈍頭物体では淀み点から発達し、平板では、その先端より発達する。一般的な境界層方程式では、淀み点、平板の先端での速度分布を与えることができない。

しかし、境界層方程式である放物型の偏微分方程式を解く場合、初期値及び、境界値が必要であり、境界値については、境界条件で決まる。

そこで、初期値については、以下に示す相似解を用いて与えることにする。

6-2-1 相似解

6-1節で述べたHowarth問題について、(6-1)式で、 $x \rightarrow 0$ のとき $u_e \rightarrow 1$ である。そこで、局所相似性の仮定、すなわち $\frac{\partial}{\partial x} = 0$ をおく。すると(4-6), (4-7)式は次のようになる。

$$\frac{\partial^2 F}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2} f \frac{\partial F}{\partial \eta} = 0 \quad (6-3)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = F \quad (6-4)$$

これは、Blasiusの解を与える常微分方程式である。(6-3), (6-4)式を解くことによって、 $x = 0$ での F 、及び f の初期値、つまり境界層内の速度分布を与えることになる。ただし、(6-3), (6-4)式を解くときは、常微分方程式の二点境界値問題となる。それを解く手順は、いろいろあるが、ここでは、反復法を用いた。

ただし、DFSについては、 $x = 0$, $x = 0 + \Delta x$ の位置での初期値が必要であり、 $x = 0 + \Delta x$ の位置については、 Δx を20等分し、 $x = 0 + \frac{\Delta x}{20}$ の位置での値を $x = 0$ の値と等しく置き、 $x = 0 + \Delta x$ の位置まで、DFSで解き与え、それを $x = 0 + \Delta x$ の位置での初期値とした。

6-3 計算上の実精度の評価

前述の各差分法による計算結果の実精度の評価の仕方について述べる。本論文では、各格子幅 Δx , $\Delta\eta$ に対する絶対誤差を百分率で示す。今、次式によって $\Delta\eta$ を一定としたときの $\Delta x \rightarrow 0$ に於ける $F' = (\partial F / \partial \eta)_{\eta=0}$ の値を外挿し、それをもって、 Δx に対する%誤差を評価するための「厳密解」と仮定する：

$$F'_{\Delta x \rightarrow 0} = F' \left(\frac{1}{2} \Delta x \right) + \frac{1}{3} [F' \left(\frac{1}{2} \Delta x \right) - F' (\Delta x)] \quad (6-5)$$

%誤差の絶対値は次式によって与える。

$$|F' (\Delta x) の \% 誤差 | = \left| \frac{F' (\Delta x) - F'_{\Delta x \rightarrow 0}}{F'_{\Delta x \rightarrow 0}} \right| \times 100$$

Δx を一定としたときの Δ に対する誤差も同様にして評価する。

今、差分法が、実二次精度を持つとすると、壁面速度勾配に対する計算解は次のように表示される：

$$F'_{\text{compute}} = F'_{\text{exact}} + a \Delta x^2 + b \Delta \eta^2 + \dots \quad (6-7)$$

したがって、これより、高次の項を無視して適当に a 及び b を消去すれば「厳密解」が求められ、それは、(6-5)式と同じものになる。

なお、 $(\partial F / \partial \eta)_{\eta=0}$ の値は、図 9 に示した既知の値（○印） F_1, F_2, F_3 から片側差分により、二次精度で次式より評価する。

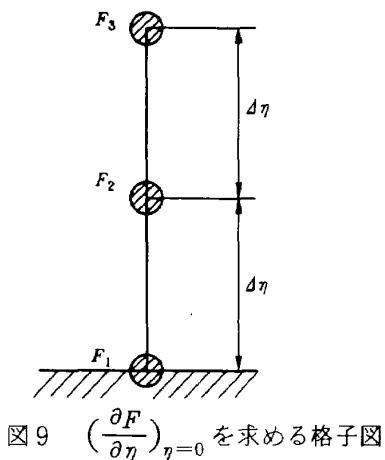
$$\left(\frac{\partial F}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} = \frac{(4F_2 - F_3 - 3F_1)}{2\Delta \eta} \quad (6-8)$$

F_1 については、(4-12)より $F_1 = 0$ であり、KBS については、(5-48)式より解の一部として直接求まる。

検査に必要な格子幅及び、 x 座標の位置については、Blottner の論文 [2] を参考に決める。その場合については、変換座標系は異なるものの、 x 方向の検査位置については、Blottner が使った検査位置とほとんど変わらないので、計算の便宜上、 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ としても、本質的な問題はない。 x 方向の格子数は [2] と同じくするため、 $\Delta x = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ とする。このとき、 $\Delta \eta = 0.2$ とする。 η 方向については、 $\eta_e = 6$ としているので、その間の格子数を [2] と同じ数にするため、 $\Delta \eta = 1.0, 0.5, 0.25, 0.125$ とする。検査位置については、 x 方向の検査位置と同じとし、 $\Delta x = 0.025$ とする。

(6-6) 式で求めた絶対誤差と、そのときの格子幅を両対数にプロットすると、実二次精度なら、傾きが 2 に近づき、実一次精度なら、傾きが 1 に近づく。

以上の手順で、PC-CNS, DFS の実質精度を調べ、両者との比較のため、KBS についても調べる。



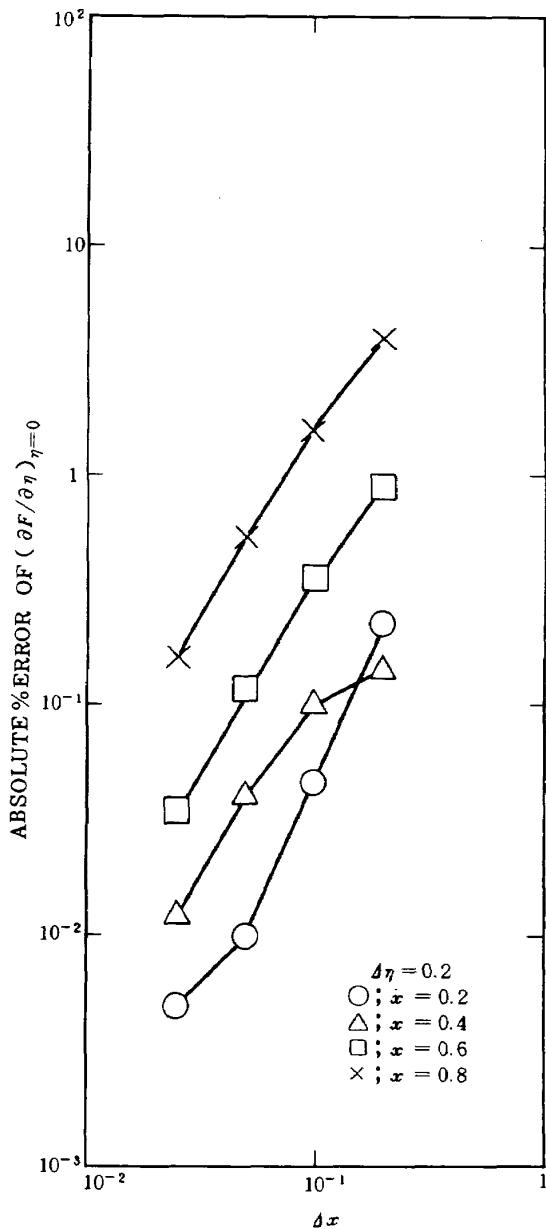
7. 結果と考察

7-1 PC-CNS の検査結果

表 1 は、 $\Delta \eta = 0.2, \Delta x = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ の格子幅で、 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の位置における

表 1 PC-CNS $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の値 (x 方向)

| x | Δx | | | |
|-----|------------|----------|----------|----------|
| | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.025 |
| 0.2 | 0.292339 | 0.291831 | 0.291925 | 0.291902 |
| 0.4 | 0.245717 | 0.245433 | 0.245221 | 0.245142 |
| 0.6 | 0.191694 | 0.190413 | 0.189884 | 0.189713 |
| 0.8 | 0.124245 | 0.120576 | 0.119066 | 0.118559 |



る、壁上での速度勾配 $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の計算結果である。

図 10 は、横軸に格子幅、縦軸に%絶対誤差を両対数にとり、 $\Delta x = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ のときの、(6-8)式の計算結果を示したものである。

図 10 から、 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の位置で、それぞれ傾きが 2 に近づいていることがわかり、一回の反復計算に相当すると考えられる PC-CNS が、実二次精度の傾向にあることが示されている。流れ関数の導入による Cebeci 変換での「連成」のアルゴリズムでは、PC-CNS は、反復計算が不要なので、高能率に計算でき、また精度の点からも、計算結果の実精度は、差分式上の精度に一致する。

表 2 には、 $\Delta x = 0.025, \Delta \eta = 1.0, 0.5, 0.25,$

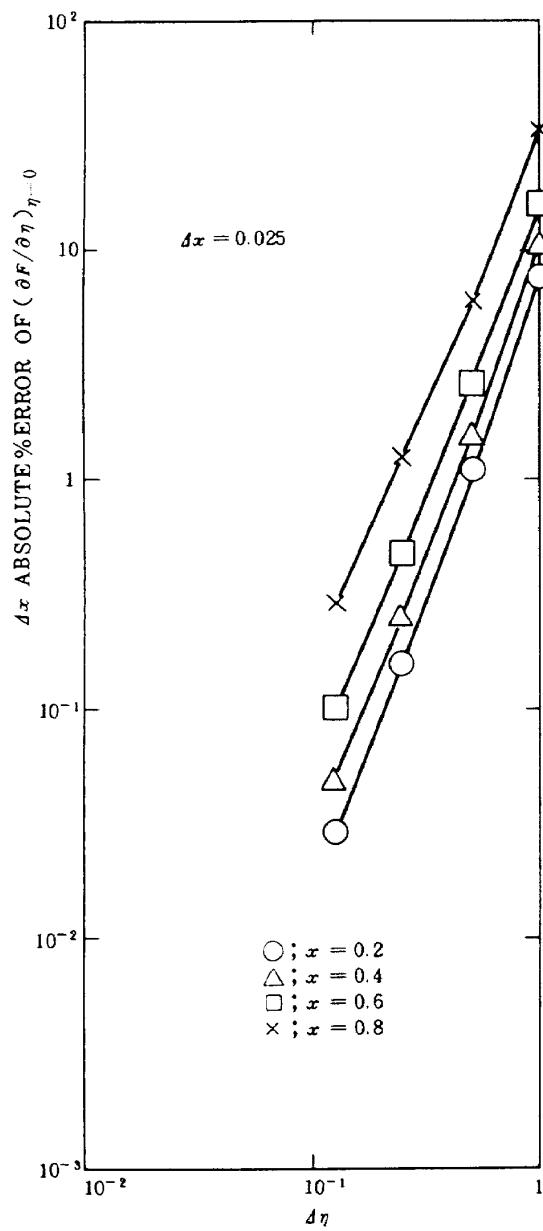


図 11 PC-CNS η 方向の精度検査結果

表 2 PC-CNS $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の値 (η 方向)

| x | $\Delta \eta$ | | | |
|-----|---------------|----------|----------|----------|
| | 1.0 | 0.5 | 0.25 | 0.125 |
| 0.2 | 0.309990 | 0.294330 | 0.292088 | 0.291735 |
| 0.4 | 0.266442 | 0.248132 | 0.245384 | 0.244913 |
| 0.6 | 0.215211 | 0.193567 | 0.190500 | 0.189381 |
| 0.8 | 0.151649 | 0.124312 | 0.119115 | 0.117983 |

0.125 の格子幅で、 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の位置での $(\partial F / \partial \eta)_{\eta=0}$ の計算結果を示してある。また、図 11 には、 η 方向について、 $\Delta \eta = 1.0, 0.5, 0.25, 0.125$ としたときの、(6-8)式の計算結果をプロットしたものである。この図から、 η 方向には、非常に良い実二次精度の傾向にあることがわかる。

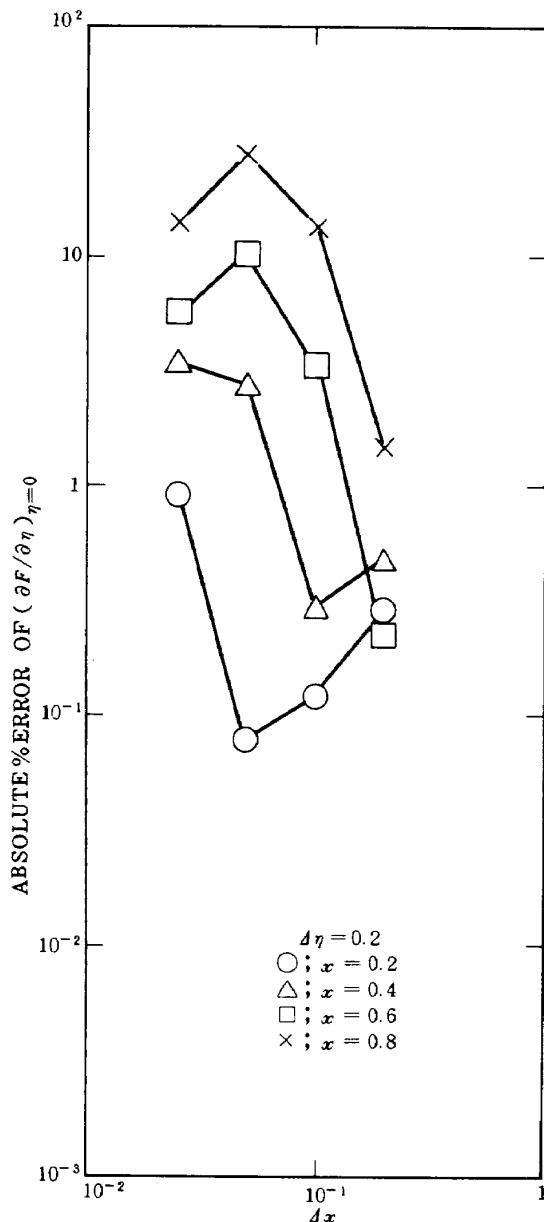
7-2 DFS の検査結果

陽的解法では、陰的解法に比べ、一般に格子幅を小さくする必要があると言われている。この検査でも、PC-CNS と同じ格子幅、すなわち、 $\Delta \eta = 0.2, \Delta x = 0.2, 0.1, 0.05, 0.025$ で、 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ においてそれぞれ調べてみた結果が、図 12 であり、何ら二次精度の傾向を示すものではないことがわかる。

そこで、表 3 には、さらに格子幅を小さくし、 $\Delta \eta = 0.2, \Delta x = 0.02, 0.01, 0.005, 0.0025$ で、 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の位置における $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の計算結果を示してある。また図 13 には、 $\Delta \eta = 0.2, \Delta x = 0.02, 0.01, 0.005, 0.0025$ としたときの(6-8)式の計算結果をプロットしてある。DFS は、初期値として、 $x = 0, x = 0 + \Delta x$ の位置での初期値が必要であり、特に、 $x = 0 + \Delta x$ の位置の初期値は、 $x = 0$ の初期値より、流れ方向に解き進めるという解法上、陽的に二次精度で決定することは、困難であるため、6-2-1節で示したような方法で与えた。しかし、図 13 を見てわか

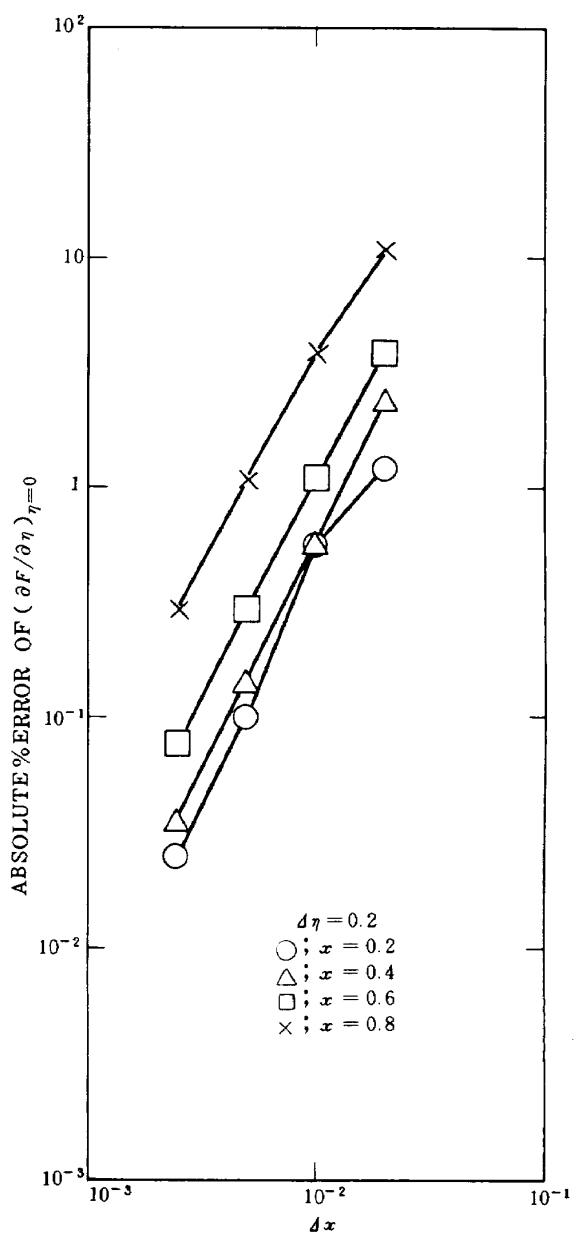
表 3 DFS $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の値 (x 方向)

| x | Δx | | | |
|-----|------------|----------|----------|----------|
| | 0.02 | 0.01 | 0.005 | 0.0025 |
| 0.2 | 0.296056 | 0.293413 | 0.292178 | 0.291958 |
| 0.4 | 0.251008 | 0.246509 | 0.245468 | 0.245198 |
| 0.6 | 0.197256 | 0.191826 | 0.190213 | 0.189787 |
| 0.8 | 0.132945 | 0.123200 | 0.119720 | 0.118710 |

図 12 DFS x 方向の精度検査結果

る通り、この影響は、ほとんど見受けられず、 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の位置で、それぞれ実二次精度を示している。

また、DFS が無条件安定差分法にもかかわらず一般の陽解法と同様、 x 方向の格子幅を小さくしなければならない理由は次の様である。 $(4-7)$ 式を差分式化するときに、打切り誤差が $(\frac{\Delta x}{\Delta \eta})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + O(\Delta x^2) + O(\Delta \eta^2)$ であり、境界層近似の場合、 $F = \frac{u}{u_e}$ であることより、物理的考察から $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ が微小量として無視でき、DFS が差分式上二次精度となっていた。実際、Pletcher⁸⁾

図 13 DFS x 方向の精度検査結果

は、それを承知の上で計算している。しかし数値計算では、 Δx が $\Delta \eta$ と同じ程度の格子幅では、 $(\frac{\Delta x}{\Delta \eta})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ の項の影響が現われ、安定計算が可能であっても、実二次精度とはならず、 $\frac{\Delta x}{\Delta \eta} \rightarrow 0$ となるように、格子幅を選ぶ必要があるためである。この検査では、 x 方向については、 $\Delta \eta = 0.2$ (一定) で、 $\frac{\Delta x}{\Delta \eta}$ の値が $\frac{1}{10}$ 程度以下で、実二次精度を保持しており、 $\frac{\Delta x}{\Delta \eta} < \frac{1}{10}$ となるように、 Δx の大きさを決めるべきである。

表 4 には、 $\Delta x = 0.025, \Delta \eta = 1.0, 0.5, 0.25$,

0.125で、 $x = 0.2, 0.4, 0.6, 0.8$ の位置における $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の計算結果を示してある。図14には、 x 方向と同様に(6-8)の計算結果をプロットしてあり、

表4 DFS $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の値(η 方向)

| x | $\Delta \eta$ | | | |
|-----|---------------|----------|----------|----------|
| | 1.0 | 0.5 | 0.25 | 0.125 |
| 0.2 | 0.31097 | 0.295276 | 0.294838 | 0.303966 |
| 0.4 | 0.266721 | 0.249329 | 0.250555 | 0.268306 |
| 0.6 | 0.215631 | 0.195499 | 0.197325 | 0.220268 |
| 0.8 | 0.152442 | 0.128489 | 0.133152 | 0.160910 |

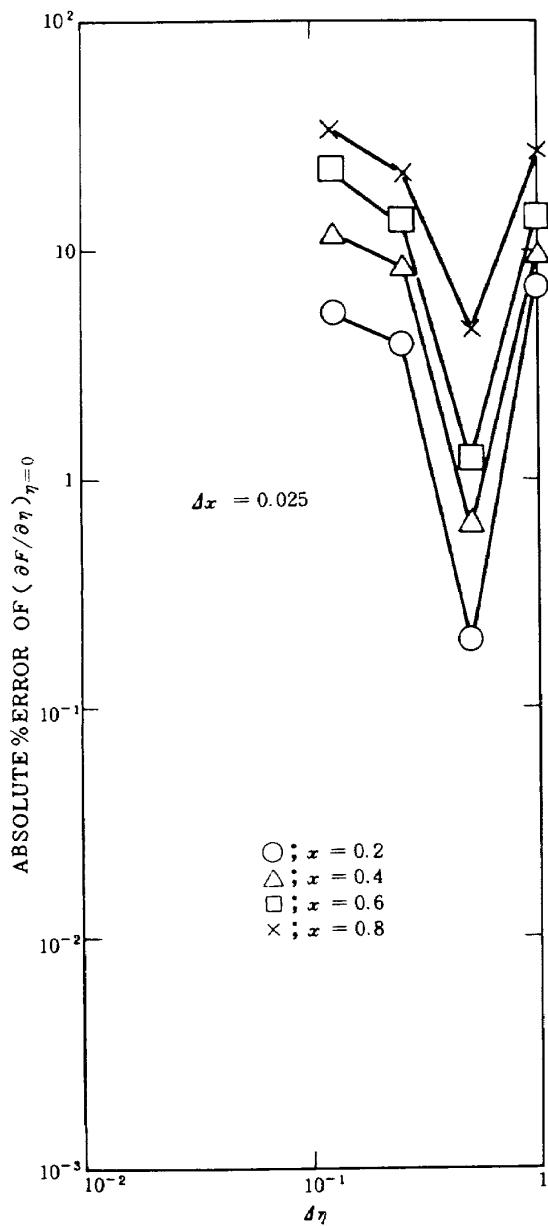


図14 DFS η 方向の精度検査結果

ある格子幅から、誤差が増大する傾向にある。これは、 $\Delta \eta \rightarrow 0$ とすると、先に示したように、 $(\frac{\Delta x}{\Delta \eta})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ の項で、 $(\frac{\Delta x}{\Delta \eta})^2$ が大きくなり、 $(\frac{\Delta x}{\Delta \eta})^2 \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$ の項が無視できなくなるためである。

したがって、単に $\Delta x, \Delta \eta$ を小さくしたのでは、必ずしも、実二次精度とはならない。しかし $(\frac{\Delta x}{\Delta \eta})$ を十分小さくとて、その打切り誤差への影響を配慮するようすれば、実二次精度とすることが可能である。

7-3 PC-CNS, DFS, KBS 比較結果

初期値の誤差の影響を受けず、差分式上の実精度がよく現われている、 $x = 0.8$ の位置で、 x, η それぞれの方向の実精度を PC-CNS, DFS, KBS について比較する。(図15, 16 参照)

KBS は、他と比較のため、一回の反復計算とし、KBS 一回の反復計算による、 $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の計算結果を表5、表6に示す。

図15より、絶対誤差が小さい差分法は、KBS であり、しかも格子数が DFS に比べ、極端に少ない PC-CNS と格子数は同じであるが、PC-CNS より精度は良い。

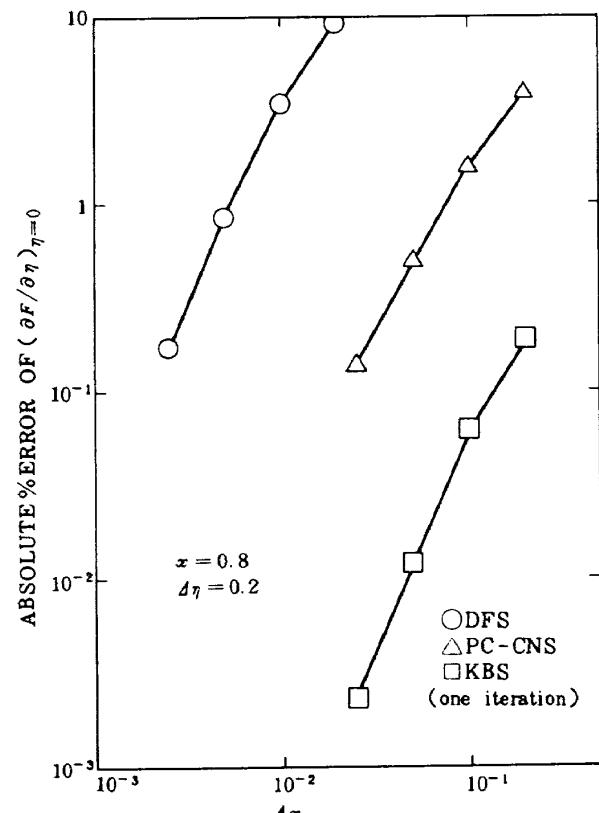
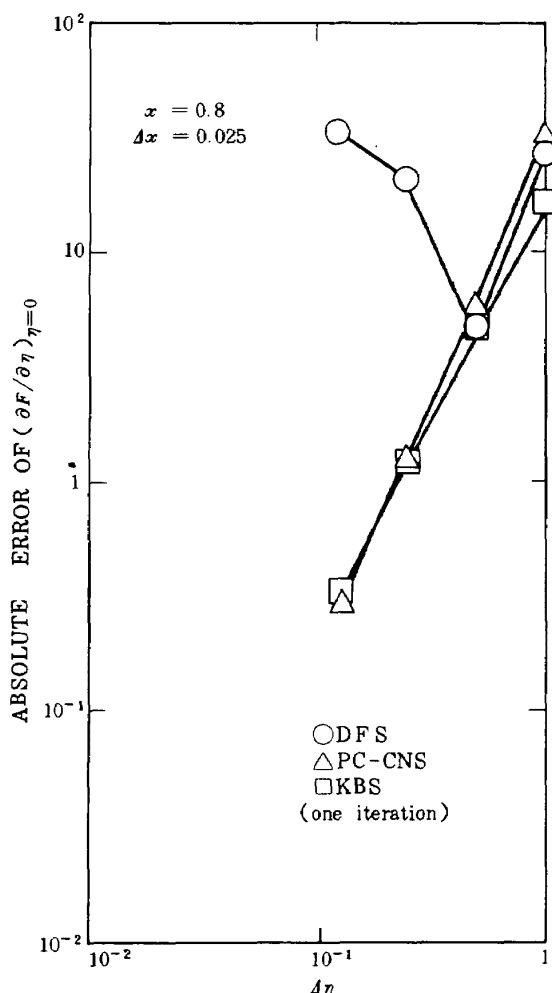


図15 各スキーム比較結果の図(x 方向)

図 16 各スキーム比較結果の図(η 方向)表 5 KBS $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の値(x 方向, 一反復)

| x | Δx | 0.2 | 0.1 | 0.05 | 0.025 |
|-----|------------|----------|----------|----------|-------|
| 0.2 | 0.291437 | 0.291633 | 0.291684 | 0.291696 | |
| 0.4 | 0.244699 | 0.244920 | 0.244974 | 0.244987 | |
| 0.6 | 0.189339 | 0.189530 | 0.189578 | 0.189590 | |
| 0.8 | 0.118599 | 0.118441 | 0.118389 | 0.118378 | |

表 6 KBS $(\frac{\partial F}{\partial \eta})_{\eta=0}$ の値(η 方向, 一反復)

| x | $\Delta \eta$ | 1.0 | 0.5 | 0.25 | 0.125 |
|-----|---------------|----------|----------|----------|-------|
| 0.2 | 0.292670 | 0.291988 | 0.291730 | 0.291659 | |
| 0.4 | 0.249614 | 0.246139 | 0.245114 | 0.244848 | |
| 0.6 | 0.199250 | 0.191954 | 0.189851 | 0.189305 | |
| 0.8 | 0.137087 | 0.123095 | 0.118903 | 0.117800 | |

表 7 各差分法計算時間

| Scheme | 計算時間(秒/一格子) |
|--------|-----------------------|
| D F S | 3.57×10^{-5} |
| PC-CNS | 1.12×10^{-4} |
| K B S | 3.02×10^{-4} |

計算時間については(表 7 参照), $\Delta \eta = 0.2$, $\Delta x = 0.2$, 0.1, 0.05, 0.025 の計算に要した一格子あたりの平均時間は, PC-CNS については, 1.12×10^{-4} 秒/一格子, KBS については, 3.02×10^{-4} 秒/一格子であり, DFS については, $\Delta \eta = 0.2$, $\Delta x = 0.02$, 0.01, 0.005, 0.0025 の計算に要した一格子あたりの平均時間は, 3.57×10^{-5} 秒/一格子であった。上記の計算は, いずれも, NAL, FACOM230-75 CPU(FORTRAN, OPT2) によった。三者の間では, 一格子あたりでは, DFS が最も計算時間が短かく, 陽的解法の特徴を示している。陰的解法の PC-CNS と KBS を比較すると, PC-CNS が KBS より約 3 倍程計算時間が短かく, PC-CNS が, KBS より高能率に計算できることを示している。しかし, 数値的に同一の精度を得るために, (一格子あたりの計算時間) \times (格子数) で考えると, PC-CNS は, KBS とともに, DFS より効率よく求まる。したがって, 一般に受け入れられている如く, 陰的解法である PC-CNS 及び KBS の方が, 陽的解法の DFS より優れている。

図 16 には, η 方向についての検査結果を示してあるが, DFS 以外は, 絶対誤差も含め, 同程度の実二次精度の傾向を示していることがわかる。

結論

式上, 二次精度差分法である PC-CNS, DFS 及び KBS を取り上げ, Howarth 問題を例に数値実験を行ない, その実精度について比較議論した。その結果, 次の事が結論される。

- 文献[4]の定式化による PC-CNS は, 流れ関数を導入した Cebeci 変換を用いることにより, 連続, 運動量の両式が, 流れ関数により直接結びつき, 差分化アルゴリズム上も分離されないので, 連成型スキームとなり, 数値実験によっても, 実質的な二次精度が確認された。

- 上述の結論は, Crank-Nicolson 法に対する Blottner の主張を支持する。

- DFS を境界層変換された座標系で適用し, 問題

なく計算が遂行できた。

4) DFS を境界層方程式に適用した場合、打ち切り誤差には、 $(\frac{\Delta x}{\Delta \eta})^2 (\frac{\partial^2 F}{\partial x^2})$ の項があり、したがって、格子幅比 ($\frac{\Delta x}{\Delta \eta}$) が実精度に大きく影響する。すなわち、 x 方向の精度については、 $\frac{\Delta x}{\Delta \eta} < \frac{1}{10}$ の場合に、二次精度を示す。 η 方向については、同じ理由から単に $\Delta \eta$ を小さくしたのでは、二次精度の振舞いはしない。

5) PC-CNS, DFS 及び KBS 間の比較では、精度の面からは、DFS が最も劣り、次に PC-CNS そして KBS の順に良い。一格子点あたりの計算時間では、逆に、KBS が最も劣り、PC-CNS, DFS と高能率になる。ただ精度・効率の両者総合的観点からは、一般に受け入れられている如く、陽的解法である DFS は、陰的解法である PC-CNS, KBS に比べ劣る。

なお、圧縮流問題への応用も含め、連成予測子、修正子型 Crank-Nicolson 法の実精度に関する詳しい議論は、文献 [9] に行なわれている。

参考文献

- 1) F. G. Blottner; Computation Techniques for Boundary-Layers, AGARD-LS-73, (1975).
- 2) F. G. Blottner; Investigation of Some Finite-Difference Techniques for Solving the Boundary-Layer Equations, Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 6 (1975), pp. 1 ~ 30.
- 3) J. Douglas, Jr. and B. F. Jones; On Prediction Corrector Methods for Nonlinear Parabolic Differential Equations, SIAM J., 11 (1963), pp. 195 ~ 204.
- 4) 松野謙一, 三次元境界層の計算, 第 10 期航空宇宙学会年会講演集(1979), pp.66-67.
- 5) 松野謙一, 翼上三次元乱流境界層の計算, 第 17 回飛行機シンポジウム講演集(1979), pp.142-145.
- 6) T. Cebeci and P. Bradshaw; Momentum Transfer in Boundary Layers, McGRAW HILL (1977).
- 7) J. Der, Jr. and G. S. Raetz; Solution of General Three-Dimensional Laminar Boundary Layer Problem by an Exact Numerical Method, IAS paper, No. 62-70, (1962).
- 8) R. H. Pletcher; On a Finite-Difference Solution for the Constant-Property Turbulent Boundary Layer, AIAA J., 7 (1969), pp. 305 ~ 311.
- 9) 松野謙一, 境界層方程式に対する実二次精度予測子・修正子型クランク・ニコルソン法の構成
航技研報告に出版予定 (TR-655).

航空宇宙技術研究所報告 646 号

昭和 56 年 1 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880

電話 武藏野三鷹 (0422) 47-5911 (大代表) 〒182

印刷所 株式会社 東京プレス
東京都板橋区桜川 2-27-12
