

NAL TR-655

ISSN 0389-4010

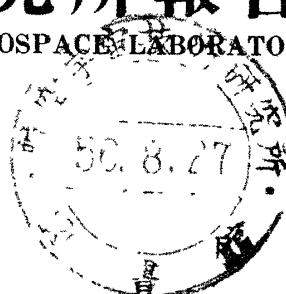
UDC 517.949:
532.526

NAL TR-655

航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-655



境界層方程式に対する実二次精度, 予測子・修正子型
クランク・ニコルソン差分スキームの構成

松野謙一

DP-44
55

1981 年 2 月

航空宇宙技術研究所
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

境界層方程式に対する実二次精度, 予測子・修正子型
クランク・ニコルソン差分スキームの構成*

松野謙一**

A Second-Order Accurate Procedure for Solving
the Boundary Layer Equations Based on the
Predictor-Corrector Form of the Crank-
Nicolson Scheme

By
Kenichi MATSUNO

ABSTRACT

This paper is concerned with the numerical accuracy of a predictor-corrector form of the Crank-Nicolson Scheme for solving boundary layer equations.

According to Blottner, the Crank-Nicolson Scheme with a predictor-corrector step to deal with nonlinearity exhibits only first-order accuracy unless the boundary layer continuity and the momentum equations are solved in a coupled manner. In the present paper, a predictor-corrector form of the Crank-Nicolson Scheme, based on a coupled algorithm for the continuity and the momentum equations, is presented for both the incompressible and the compressible flows. This scheme is then subjected to a computer experiment by use of the problem of the laminar boundary layer development in a linearly retarded edge velocity field, and compared with the Davis-Coupled Scheme. It is shown that the present scheme possesses second-order accuracy and is more efficient than the Davis-Coupled Scheme.

記号

C_p : 定圧比熱

H : 全エンタルピ

k : 热伝導率

M_∞ : 自由流マッハ数

P_r : プラントル数

p : 圧力

R : 気体定数

* 昭和55年12月8日受付

** 空気力学第2部

T	温度
U_∞	自由流速度
u	物体面に沿う方向の速度成分
v	物体面に垂直の方向の速度成分
x	物体面に沿う方向の座標
y	物体面に垂直の方向の座標
δ	境界層厚さ
γ	比熱比
κ	任意定数(式(1)参照)
μ	粘性係数
ν	動粘性係数
ρ	密度
$\Delta x, \Delta y, \Delta \xi, \Delta \eta, \Delta \zeta$	格子幅
$\Delta_y^2, \Delta_\xi^2, \Delta_\eta^2$	二階差分演算子(式(3)参照)
$\delta_y, \delta_\xi, \delta_\eta$	一階差分演算子(式(3)参照)
() _e	境界層外線
() _{ref}	参照状態
() _∞	一様流状態
() _{wall}	壁面上状態

1. 序論

電子計算機の発達に伴い、現在では、境界層流れを支配する偏微分方程式を、直接、差分法により数值的に解くことが普通となっている。今まで数多くの差分解法が提案されて来たが、精度、計算効率(計算時間)、アルゴリズムの簡単さ等の兼合いから、境界層方程式に対する差分解法としては、二次精度陰的差分法が広く用いられている。その中でも、クランク・ニコルソン(Crank-Nicolson)法は、熱伝導問題、化学反応を伴う流れ、境界層流れ等、様々なタイプの問題に成功裡に適用されている。今、我々が取扱おうとしている境界層方程式は、非線型連立偏微分方程式である。この境界層方程式にクランク・ニコルソン法を適用した場合、対応する差分方程式もまた非線型代数方程式となる。一般には、何らかの線型化、および反復処理によってそれを解かなければならない。クランク・ニコルソン法は、差分式上は、二次精度差分法であるが、非線型処理の為の反復処理の取扱い如何によつては、一次精度差

分法の振舞いをすることが Blottner¹⁾により指摘されている。すなわち、境界層方程式自体、連続・運動量の両式が強く連成(Coupling)しているので、差分法の反復処理過程に於いても、それら両式が連成態で取扱われていなければ、収束性が悪くなる。その結果、クランク・ニコルソン法は、連続・運動量両式を連成態で扱う差分アルゴリズムになつていれば、反復回数によらず、実の二次精度の振舞いをし、そうでなければ、反復回数如何では—とくに唯一回の反復処理では—実質的に一次精度の振舞いをする。このことは、DouglasとJones²⁾によつて提案された予測子・修正子型のクランク・ニコルソン法についても当てはまると Blottner により推論されている。すなわち、予測子・修正子型クランク・ニコルソン法は、非線型項を予測子・修正子の二段階とすることにより線型化したもので、計算量は、唯一回の反復処理と対比できるからである。この様な論拠より、Blottner は、境界層方程式を二次精度で解く差分法としては、この予測子・修正子型クランク・ニコルソン法は、適当でないと述べている。しかしながら、この予測子・修正子型クランク・ニコルソン法は、反復処理を必要としないので簡単であり、非常に能率が良いと考えられること、また、クランク・ニコルソン法自体、様々な問題に成功裡に適用されていること等を考慮すると、この予測子・修正子型クランク・ニコルソン法を、境界層方程式が実質的に二次精度で解ける様に定式化を行ない、ひとつの差分スキームとして構成することが望ましい。

そこで、本論文の目的は、Douglas と Jones の予測子・修正子型クランク・ニコルソンアルゴリズムに基づき、非圧縮性及び圧縮性の境界層方程式に対する、実二次精度差分スキームを構成することである。この場合、Blottner の推論に従い、連続・運動量両式は、連成して取扱われるものであるが、それは、流れ関数を導入した境界層変換を通じて直接行なわれる。したがって、本論文で提示される差分スキームは、その取扱いに對応して、連成予測子・修正子型クランク・ニコルソン法(Coupled Predictor-Corrector Crank-Nicolson Scheme, 略して coupled PC-CNS または連成PC-CNS)と呼ぶ。

本論文の構成は次の様である。第2章に於いて、予測子・修正子型クランク・ニコルソン法の一般論を、DouglasとJonesに従い、スカラ放物型方程式に対して与える。第3章では、非連成態の予測子・修正子型クランク・ニコルソン法が、実一次精度しか持ち得ないことを示し、Blottnerの議論を支持する。第4章に於いては、非圧縮性の、また第5章に於いては、圧縮性の、それぞれ境界層方程式に対するcoupled PC-CNSを提案する。差分スキームの実精度の確認は、線型減速型の外縁速度場を例題に数値実験により行なわれるとともに、その計算能力(計算時間)についても、現在、著名なKeller's Box法と並んで、高能率差分スキームといわれるDavis Coupled Schemeと比較検討を行なう。

2. 予測子・修正子型クランク・ニコルソン法の一般的記述

今、一般的な放物型スカラ方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial x}), \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq x \quad (1)$$

に対して、 $0 \leq y \leq 1$ で $u(0, y) \neq C$ 、 $0 \leq x$ で、 $u(x, 0)$ および $u(x, 1) \neq C$ に適当な境界条件が与えられているとする。このとき、標準のクランク・ニコルソン差分方程式は、以下に示すいくつかの差分演算子を導入して次の様に表わされる。

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\Delta_y^2 u_{i+1,j} + \Delta_y^2 u_{i,j}) &= F(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, \\ \frac{1}{2}(u_{i+1,j} + u_{i,j}), \frac{1}{2}(\delta_y u_{i+1,j} + \delta_y u_{i,j}), \\ (u_{i+1,j} - u_{i,j})/\Delta x) \end{aligned} \quad (2)$$

ここで次の記号が用いられた：

$$\left. \begin{aligned} x_i &= i\Delta x, \quad y_j = j\Delta y, \quad u_{i,j} = u(x_i, y_j), \quad 0 < \Delta x, \Delta y \\ \Delta_y^2 u_{i,j} &= (u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1})/(\Delta y)^2 \\ \delta_y u_{i,j} &= (u_{i,j+1} - u_{i,j-1})/(2\Delta y) \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

今、(1)式が非線型方程式であるとすると、対応する差分方程式(2)もまた非線型代数方程式であり、それは各々 x -ステップごとに、反復処理によって解かなければならぬ。この非線型項の線型化の仕方により、いくつかのクランク・ニコルソン法の変形が

ある。DouglasとJones²⁾によって提案された予測子・修正子もクランク・ニコルソン法のひとつの線型化の方法である。予測子・修正子型クランク・ニコルソン法は、(1)式に対して次の様に表わせる。

予測子

$$\begin{aligned} \Delta_y^2 u_{i+\frac{1}{2},j}^* &= F(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, u_{i,j}), \\ \delta_y u_{i,j}, \frac{u_{i+\frac{1}{2},j}^* - u_{i,j}}{\Delta x/2} \end{aligned} \quad (4)$$

修正子

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\Delta_y^2 u_{i+1,j} + \Delta_y^2 u_{i,j}) &= F(x_{i+\frac{1}{2}}, y_j, \\ u_{i+\frac{1}{2},j}^*, \delta_y u_{i+\frac{1}{2},j}^*, \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}) \end{aligned} \quad (5)$$

または

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(\Delta_y^2 u_{i+1,j} + \Delta_y^2 u_{i,j}) &= F(x_{i+\frac{1}{2}}, \\ y_j, u_{i+\frac{1}{2},j}^*, \frac{1}{2}(\delta_y u_{i+1,j} + \delta_y u_{i,j}), \\ \frac{u_{i+1,j} - u_{i,j}}{\Delta x}) \end{aligned} \quad (6)$$

今、与えられた初期／境界条件

$$\begin{aligned} u_{1,j} &= u(0, y_j), \quad u_{i,1} = u(x_j, 0), \\ u_{i,J} &= u(x_i, 1) \end{aligned} \quad (7)$$

のもとで、予測子・修正子型クランク・ニコルソン方程式[(4), (5)]または[(4), (6)]は、 F が、 $\partial u / \partial x$ について線型、または、 $\partial u / \partial x$ 及び $\partial u / \partial y$ の両方について線型とするならば、それぞれ線型代数方程式となる。

3. 予測子・修正子型クランク・ニコルソン法の実一次精度への退化

本章では、連続・運動量両式が、非連成態で差分過程に組み込まれた場合、予測子・修正子型クランク・ニコルソン法は、実精度が一次に退化することを示し、Blottnerの推論¹⁾を支持する。このため、本章では、非圧縮流を考察する。

二次元、定常、非圧縮、層流境界層の支配方程式

は次の様に書かれる：

連続の式

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (8)$$

運動量の式

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = u_e \frac{du_e}{dx} + v \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \quad (9)$$

境界条件は、次の様に書かれる：

$$y=0 : u=v=0, \quad y=\delta : u=u_e \quad (10)$$

Blottner¹⁾ に従って、Levy-Lees 変換を導入する。

新しい独立変数

$$\xi(x) = \kappa(\rho\mu)_{ref} \int_0^x u_e dx, \quad \zeta(x, y) = \rho u_e \sqrt{\kappa/2\xi} y \quad (11)$$

によって、境界層方程式(8)～(10)は次の様に書かれる。

連続の式

$$2\xi F_\xi + V_\zeta + F = 0 \quad (12)$$

運動量の式

$$2\xi F F_\xi + V F_\zeta + \beta(F^2 - 1) = F_\xi F_\zeta \quad (13)$$

ここで

$$\begin{aligned} \beta &= 2\xi/u_e (du_e/d\xi), \quad F = u/u_e, \\ V &= 2\xi(F_\xi x + \rho v \sqrt{\kappa/2\xi}) / \{ \kappa(\rho\mu)_{ref} u_e \} \end{aligned} \quad (14)$$

であり、境界条件は

$$\zeta=0 : F=V=0, \quad \zeta=\zeta_e : F=1 \quad (15)$$

である。

式(4)及び(6)を、式(12)及び(13)に適用すると、差分方程式は、次の様になる。

予測子

(運動量)

$$\begin{aligned} &4\xi^* F_{i+\frac{1}{2}, j} - V_{i, j} \delta_\zeta F_{i, j} + \beta(1 - F_{i, j}^2) \\ &= 2\xi_{i+\frac{1}{2}} F_{i, j} \frac{F_{i+\frac{1}{2}, j} - F_{i, j}}{\Delta\xi/2} \end{aligned} \quad (16)$$

(連続)

$$\begin{aligned} &2\xi_{i+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left[\frac{F_{i+\frac{1}{2}, j}^* - F_{i, j}}{\Delta\xi/2} \right. \\ &\left. + \frac{F_{i+\frac{1}{2}, j-1}^* - F_{i, j-1}}{\Delta\xi/2} \right] + \frac{V_{i+\frac{1}{2}, j}^* - V_{i+\frac{1}{2}, j-1}^*}{\Delta\xi} \\ &+ \frac{1}{2} (F_{i+\frac{1}{2}, j}^* + F_{i+\frac{1}{2}, j-1}^*) = 0 \end{aligned} \quad (17)$$

修正子

(運動量)

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} (4\xi^* F_{i+1, j} + 4\xi^* F_{i, j}) \\ &- V_{i+\frac{1}{2}, j}^* \frac{1}{2} (\delta_\zeta F_{i+1, j} + \delta_\zeta F_{i, j}) \\ &+ \beta(1 - F_{i+\frac{1}{2}, j}^2) = 2\xi_{i+\frac{1}{2}} F_{i+\frac{1}{2}, j}^* \\ &\times \frac{F_{i+1, j} - F_{i, j}}{\Delta\xi} \end{aligned} \quad (18)$$

(連続)

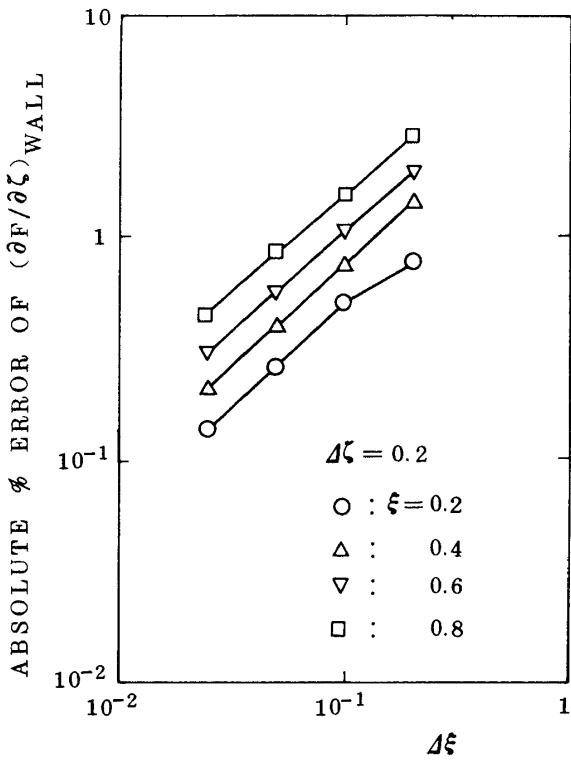
$$\begin{aligned} &2\xi_{i+\frac{1}{2}} \frac{1}{2} \left[\frac{F_{i+1, j} - F_{i, j}}{\Delta\xi} \right. \\ &+ \frac{F_{i+1, j-1} - F_{i, j-1}}{\Delta\xi} \left. \right] + \frac{1}{2} \left[\frac{V_{i+1, j} - V_{i+1, j-1}}{\Delta\xi} \right. \\ &+ \frac{V_{i, j} - V_{i, j-1}}{\Delta\xi} \left. \right] + \frac{1}{4} [F_{i+1, j} + F_{i+1, j-1} \\ &+ F_{i, j} + F_{i, j-1}] = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

まず、予測子に於いて、(16)式により、 $F_{i+\frac{1}{2}, j}^*$ が先に決定され、次に、(17)式により $V_{i+\frac{1}{2}, j}^*$ が決定される。同様の手続きが、修正子に於いてもとられる。この非連成態の予測子・修正子型クランク・ニコルソン法は、 $O[(\Delta\xi)^2] + O[(\Delta\xi)^2]$ の打ち切り誤差をもつ。この誤差は、 F 及び V をテーラー級数に展開し、それを(18)式と(19)式に代入し、 $F_{i+\frac{1}{2}, j}^* = F_{i, j} + (\Delta\xi/2)(F_\xi)_{i, j} + O[(\Delta\xi)^2]$ 及び、 $V_{i+\frac{1}{2}, j}^* = V_{i, j} + (\Delta\xi/2)(V_\xi)_{i, j} + O[(\Delta\xi)^2]$ に留意して計算すると求められる。

上述の非連成態の差分方程式(16)～(19)は、打ち切り誤差が、 $O[(\Delta\xi)^2] + O[(\Delta\xi)^2]$ であるにもかかわらず、 ξ 一方向の実精度が一次であることを次に示す。テスト問題として、ハワース流をとりあげる。このハワース流は、境界層外縁速度分布が、

$$u_e/u_\infty = 1 - x/L \quad (L=8) \quad (20)$$

で与えられる線型減速流れである。このハワース流に対するテスト結果を第1図に示す。図では、 $\xi = 0.2, 0.4, 0.6$ 及び 0.8 の位置に於ける壁面の速度勾配の誤差が、 $\Delta\xi = 0.2$ (一定)とした時の、格子幅 $\Delta\xi$ の関数として表わされている。絶対誤差(%)を評価するために仮定した「厳密解」は、Richardson外挿



第1図 ハワース問題に対する非連成PC-CNS の x 方向の実精度

$$F'_{\Delta\zeta \rightarrow 0} = F'(\frac{1}{2}\Delta\zeta) + \frac{1}{3}[F'(\frac{1}{2}\Delta\zeta) - F'(\Delta\zeta)] \quad (21)$$

により求めた。ここで $F' = (\partial F / \partial \zeta)_{wall}$ ($wall; j=1$) である。速度勾配は、等間隔格子を用いているので、次式により二次精度で表現される。

$$(\partial F / \partial \zeta)_{wall} = [-(3/2)F_{j=1} + 2F_{j=2} - (1/2)F_{j=3}] / \Delta\zeta \quad (22)$$

図1に示されている如く、曲線の傾きが、1であり、これは格子幅と誤差が比例関係にあることを表わしている。すなわち、本節で取扱った差分スキーム(16)～(19)式は、実精度が、一次であることを同図は示している。

4. 非圧縮流に対する実二次精度予測子・修正子型クランク・ニコルソンスキームの構成

本章に於いて、非圧縮流に対する実二次精度予測子・修正子型クランク・ニコルソンスキームを提示する。連続及び運動量の両式は、連成態で取扱われるが、それは、Cebeci³⁾の境界層変換の導入に伴う流れ関数を通して直接的に行なわれる。

連続の式を満足する様に、流れ関数を次の様に定義する。

$$u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (23)$$

次の変換及び、無次元流れ関数 $f(x, \eta)$,

$$x = x, \quad \eta = (u_e / \nu x)^{1/2} y \quad (24)$$

$$\Psi = (u_e / \nu x)^{1/2} f(x, \eta) \quad (25)$$

を導入すると境界層方程式(8)及び(9)は、

$$F = f_\eta \quad (26)$$

$$F_{\eta\eta} + P_1 f F_\eta + P_2 (1 - F^2) = x (FF_x - F_\eta f_x) \quad (27)$$

ただし

$$F = u / u_e, \quad P_1 = (1 + P_2) / 2,$$

$$P_2 = (x / u_e) (du_e / dx) \quad (28)$$

に変換される。ここで F は、方程式のオーダーを3から2に落とすために導入された。境界条件は、

$$\eta = 0; f = F = 0, \quad \eta = \eta_e; F = 1 \quad (29)$$

となる。

(4)式及び(5)式で示される差分アルゴリズムを(26)式及び(27)式に適用して、次の差分スキームを構成する。

予測子

$$\frac{1}{2}(F_{i+\frac{1}{2}, j}^* + F_{i+\frac{1}{2}, j-1}^*) = \frac{f_{i+\frac{1}{2}, j}^* - f_{i+\frac{1}{2}, j-1}^*}{\Delta\eta} \quad (30)$$

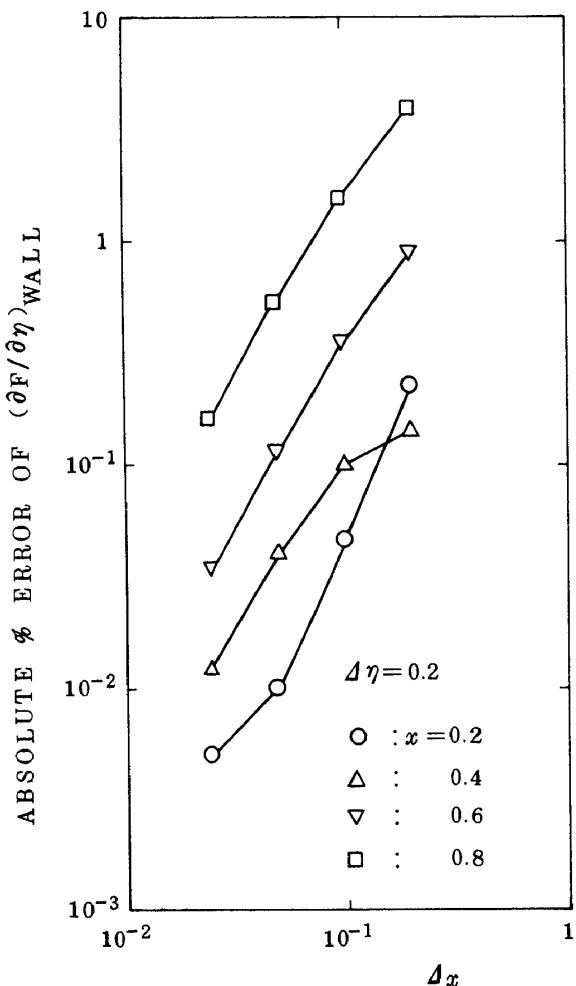
$$\begin{aligned} & \Delta_\eta^2 F_{i+\frac{1}{2}, j}^* + P_1 f_{i, j} \delta_\eta F_{i, j} + P_2 (1 - F_{i, j}^2) \\ &= x_{i+\frac{1}{2}} (F_{i, j} \frac{F_{i+\frac{1}{2}, j}^* - F_{i, j}}{\Delta x / 2} \\ & - \delta_\eta F_{i, j} \frac{f_{i+\frac{1}{2}, j}^* - f_{i, j}}{\Delta x / 2}) \end{aligned} \quad (31)$$

修正子

$$\frac{1}{2}(F_{i+1, j} + F_{i+1, j-1}) = \frac{f_{i+1, j} - f_{i+1, j-1}}{\Delta\eta} \quad (32)$$

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}(\Delta_\eta^2 F_{i+1, j} + \Delta_\eta^2 F_{i, j}) + P_1 f_{i+\frac{1}{2}, j}^* \delta_\eta F_{i+\frac{1}{2}, j}^* \\ & + P_2 (1 - F_{i+\frac{1}{2}, j}^2) = x_{i+\frac{1}{2}} (F_{i+\frac{1}{2}, j}^* \frac{F_{i+1, j} - F_{i, j}}{\Delta x} \\ & - \delta_\eta F_{i+\frac{1}{2}, j}^* \frac{f_{i+1, j} - f_{i, j}}{\Delta x}) \end{aligned} \quad (33)$$

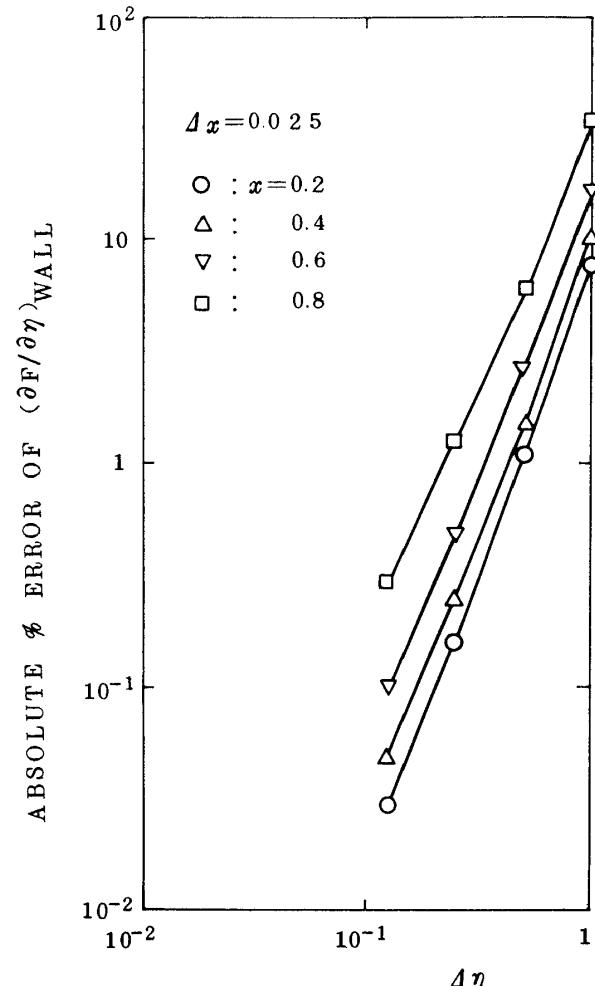
ここで、 P_1 及び P_2 は、 $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \Delta x / 2$ で評価する。上述の差分方程式は、未知数 $(f_{i+\frac{1}{2}, j}^*, F_{i+\frac{1}{2}, j}^*)$



第2図 ハワース問題に対する連成PC-CNSの
 x 方向の実精度

及び $(f_{i+1,j}, F_{i+1,j})$ について線型であり、また、打ち切り誤差についても二次： $O[(\Delta x)^2] + O[(\Delta \eta)^2]$ 、又は、より厳密には $O[(\Delta x)^2] + O[(\Delta \eta)^2] + O[\Delta x(\Delta \eta)^2]$ である。

本差分スキームの実精度を評価するため、前章と同様にハワース流を用いて、数値実験を行なう。 x 方向の精度についての結果を第2図に示す。図では、曲線が、傾き2となっており、これは、絶対誤差が、 Δx の2乗に比例することを示している。これより、本差分スキームは、 x 方向について実二次精度であることが示された。なお、 η 方向の精度についての結果を、第3図に示す。これより、 η 方向についても実二次精度を有することがわかる。



第3図 ハワース問題に対する連成PC-CNSの
 η 方向の実精度

5. 連成PC-CNSの圧縮流への拡張

本章に於いて、前章で提示された連成PC-CNSを圧縮性境界層方程式に適用すべく拡張する。

理想気体の二次元、定常、圧縮性、層流境界層を支配する方程式は、以下の様に与えられる。

連続の式

$$\frac{\partial}{\partial x}(\rho u) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v) = 0 \quad (34)$$

運動量の式

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \rho_e u_e \frac{du_e}{dx} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right) \quad (35)$$

エネルギー式

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial H}{\partial x} + \rho v \frac{\partial H}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\mu}{P_r} \frac{\partial H}{\partial y} + \mu \left(1 - \frac{1}{P_r}\right) \right] \\ &\times \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{u^2}{2} \right) \end{aligned} \quad (36)$$

状態方程式

$$P = \rho R T \quad (37)$$

上述の支配方程式は、次の関係式及び仮定を用い完結する。

$$\begin{aligned} H &= C_p T + u^2 / 2, \quad C_p = \text{const.}, \quad P_r = \mu C_p / k \\ &= \text{const.}, \quad \mu = \mu(T) \end{aligned} \quad (38)$$

境界条件は次である。

$$\begin{aligned} y=0 : u=v=0, \quad H &= H_{\text{wall}} \quad (T=T_{\text{wall}}), \\ y=\delta : u=u_e, \quad H &= H_e \end{aligned} \quad (39)$$

以下の変換を導入する。まず、連続の式を満足する様に流れ関数を定義する：

$$\rho u = \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \rho v = -\frac{\partial \Psi}{\partial x} \quad (40)$$

変換及び無次元流れ関数：

$$\begin{aligned} x &= x, \quad \eta = (u_e / \nu_e x)^{1/2} \int_0^y \rho / \rho_e dy, \\ \Psi &= (\nu_e u_e x)^{1/2} \rho_e f(x, \eta) \end{aligned} \quad (41)$$

を導入すると、境界層方程式34～36、及び境界条件39式は次の様になる。

運動量の式

$$F = f_\eta \quad (42)$$

$$\begin{aligned} CF_{\eta\eta} + C_\eta F_\eta + m_1 f F_\eta + m_2 (c - F^2) \\ = x (FF_x - F_\eta f_x) \end{aligned} \quad (43)$$

エネルギー式

$$\begin{aligned} \sigma_1 E_{\eta\eta} + \sigma_{1,\eta} E_\eta + \sigma_2 E_\eta + \sigma_{3,\eta} \\ = x (FE_x - E_\eta f_x) \end{aligned} \quad (44)$$

ここで、

$$F = u/u_e, \quad E = H/H_e, \quad c = \rho_e/\rho, \quad C = \rho\mu/\rho_e\mu_e \quad (45)$$

$$m_1 = \frac{1}{2} \left\{ 1 + m_2 + (x/\rho_e\mu_e) (d(\rho_e\mu_e)/dx) \right\},$$

$$m_2 = (x/u_e)(du_e/dx), \quad \sigma_1 = C/P_r,$$

$$\sigma_2 = m_1 f, \quad \sigma_3 = C(u_e^2/H_e)(1-1/P_r)FF_\eta \quad (46)$$

境界条件

$$\eta=0 : f=F=0, \quad E=E_{\text{wall}} \quad (47)$$

$$\eta=\eta_e : F=1, \quad E=1 \quad (47)$$

前章で提示した差分スキーム：連成 PC-CNS を、圧縮性境界層方程式に対するものへ拡張する。この

場合、エネルギー方程式に関しては、非連成態で取扱っても、実二次精度を得ることが後述の数値実験によって立証される。このエネルギー式のみを非連成態で取扱う手法は、Blottnerにより Davis-Coupled Schemeについて行なわれている。¹⁾

圧縮性境界層方程式42～44Cに対する連成 PC-CNS は次の様に定式化できる：

予測子

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (F_{i+\frac{1}{2},j}^* + F_{i-\frac{1}{2},j-1}^*) \\ = \frac{f_{i+\frac{1}{2},j}^* - f_{i-\frac{1}{2},j-1}^*}{\Delta\eta} \end{aligned} \quad (48)$$

$$\begin{aligned} C_{ij} \Delta_\eta^2 F_{i+\frac{1}{2},j}^* + \delta_\eta C_{i,j} \delta_\eta F_{i,j} \\ + m_1 f_{i,j} \delta_\eta F_{i,j} + m_2 (c_{i,j} - F_{i,j}^2) \\ = x_{i+\frac{1}{2}} \left[F_{i,j} \frac{F_{i+\frac{1}{2},j}^* - F_{i,j}}{\Delta x / 2} \right. \\ \left. - \delta_\eta F_{i,j} \frac{f_{i+\frac{1}{2},j}^* - f_{i,j}}{\Delta x / 2} \right] \end{aligned} \quad (49)$$

$$\begin{aligned} \sigma_{1,i,j} \Delta_\eta^2 E_{i+\frac{1}{2},j}^* + \delta_\eta \sigma_{1,i,j} \delta_\eta E_{i,j} \\ + \sigma_{2,i,j} \delta_\eta E_{i,j} + \delta_\eta \sigma_{3,i,j} \\ = x_{i+\frac{1}{2}} \left[F_{i,j} \frac{E_{i+\frac{1}{2},j}^* - E_{i,j}}{\Delta x / 2} \right. \\ \left. - \delta_\eta E_{i,j} \frac{f_{i+\frac{1}{2},j}^* - f_{i,j}}{\Delta x / 2} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

修正子

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} (F_{i+1,j} + F_{i+1,j-1}) &= \frac{f_{i+1,j} - f_{i+1,j-1}}{\Delta\eta} \\ C_{i+\frac{1}{2},j}^* \frac{1}{2} (\Delta_\eta^2 F_{i+1,j} + \Delta_\eta^2 F_{i,j}) \\ + \delta_\eta C_{i+\frac{1}{2},j}^* \delta_\eta F_{i+\frac{1}{2},j}^* \\ + m_1 f_{i+\frac{1}{2},j}^* \delta_\eta F_{i+\frac{1}{2},j}^* \end{aligned} \quad (51)$$

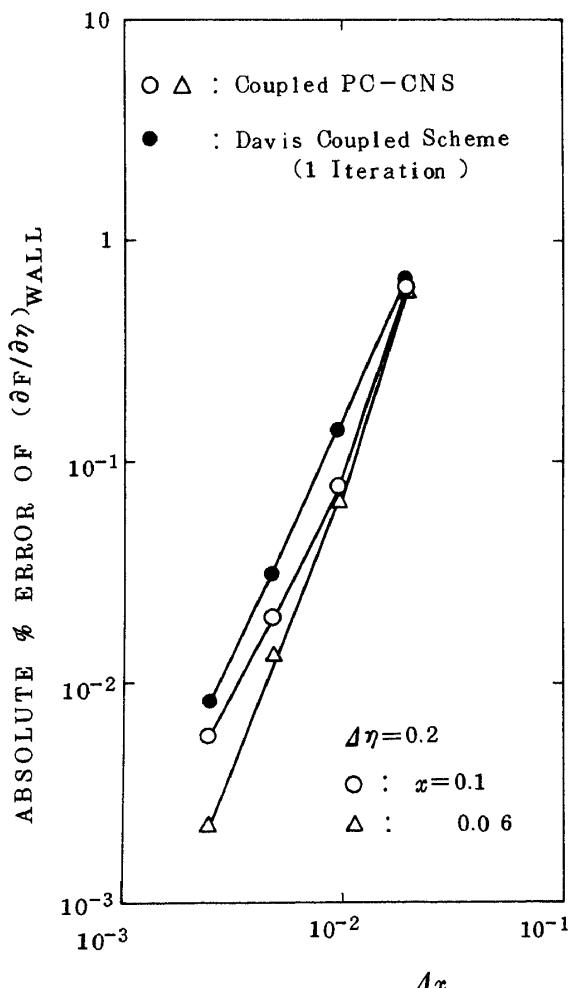
$$+ m_2 (c_{i+\frac{1}{2},j}^* - F_{i+\frac{1}{2},j}^{*2})$$

$$= x_{i+\frac{1}{2}} \left[F_{i+\frac{1}{2},j}^* \frac{F_{i+1,j} - F_{i,j}}{\Delta x} \right]$$

$$\begin{aligned}
 & -\delta_\eta F_{i+\frac{1}{2},j}^* \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta\eta}] \quad (52) \\
 & \sigma_{1,i+\frac{1}{2},j}^* \frac{1}{2} (\Delta_\eta^2 E_{i+1,j} + \Delta_\eta^2 E_{i,j}) \\
 & + \delta_\eta \sigma_{1,i+\frac{1}{2},j}^* \delta_\eta E_{i+\frac{1}{2},j}^* \\
 & + \sigma_{2,i+\frac{1}{2},j}^* \delta_\eta E_{i+\frac{1}{2},j}^* + \delta_\eta \sigma_{3,i+\frac{1}{2},j}^* \\
 & = x_{i+\frac{1}{2}} [F_{i+\frac{1}{2},j}^* \frac{E_{i+1,j} - E_{i,j}}{\Delta x} \\
 & - \delta_\eta E_{i+\frac{1}{2},j}^* \frac{f_{i+1,j} - f_{i,j}}{\Delta x}] \quad (53)
 \end{aligned}$$

ここで、 m_1 及び m_2 は格子の中間点: $x_{i+\frac{1}{2}} = x_i + \Delta x / 2$ に於いて評価される。系(48)～(53)は、また線型三項方程式系となり、容易に解かれうる。

本差分スキームの実精度を数値実験により確かめ



第4図 圧縮性線形減速流問題に対する差分スキームの x 方向の実精度 ($M_\infty = 4$, $T_{wall} = T_\infty$)

る。例題として、境界層外縁の速度場が

$$u_e/U_\infty = 1 - x/L \quad (54)$$

で与えられる線型減速流で、かつ、付随する熱力学的関係が等エントロピ関係:

$$\begin{aligned}
 Te/T_\infty &= 1 + (\gamma-1) M_\infty^2 / 2 [1 - (u_e/U_\infty)^2], \\
 \rho_e/\rho_\infty &= (T_e/T_\infty)^{\gamma/(\gamma-1)}, \quad \mu/\mu_\infty = T/T_\infty
 \end{aligned} \quad (55)$$

で与えられる流れを用いる。ここで、 $M_\infty = 4$, $T_{wall} = T_\infty$, $P_r = 1$, $L = 1$, $\gamma = 1.4$ 及び $\eta_e = 5$ とする。 x 方向の精度についての結果を第4図に示す。この場合も、曲線の傾きが 2 となり、本差分スキームが、実二次精度であることが示される。図では、 $x = 0.1$ の位置について、比較のため、Blottnerによる Davis-Coupled Scheme の結果¹⁾ も合せて示してある。Blottnerによる計算の座標系は、本論文第3章のそれと同一であり、本差分スキームのとは異なっている。しかしながら、この差異は、差分スキームの精度比較に関して、本質的でない。第4図に見られる如く、本差分スキームの誤差は、Davis-Coupled Scheme のそれとほとんど同じである。

本差分スキームの所要計算は、アルゴリズム自体に反復計算を必要としないので、非常に小さい。格子数が 160×26 の計算では、FACOM 230-75 CPU(Central Processing Unit: 中央演算装置)によると、0.96秒必要とした。これは 1 格子点あたり 0.00023 秒の計算時間を本差分スキームはかけることになる。一方、Davis-Coupled Scheme では、CDC 6600 CPU によった場合、1 格子点あたり 0.00082 秒(格子点数 370×88 , 所要計算時間 26.8 秒、文献 1. による) 必要とすることが報告されている。一般に、FACOM 230-75 CPU の演算処理能力は、CDC 6600 CPU のそれとほぼ同程度と言われている。したがって、本差分スキームは、Davis-Coupled Scheme よりも高能率であると思われる。

結語

本論文に於いて、スカラ方程式について Douglas と Jones が提案した予測子・修正子型クランク・ニコルソンアルゴリズムを、境界層方程式に適用した。この場合、まず連続、運動量の両式を非連成態で取扱ったならば、この予測子・修正子法は、実精度が

1次に退化することを数値実験により示した。これは、予測子・修正子型クランク・ニコルソン法に対する Blottner の推論を支持するものである。

次に連続・運動量の両式を、流れ関数及び境界層変換を通して連成した差分スキーム（連成 PC-CNS）を非圧縮流及び圧縮流の両方について構成、提示した。本差分スキームが、実二次精度をもつことを、境界層外縁速度分布が線型減速する流れ場を例題とした数値実験により確かめた。現在、最も高能率差分スキームのひとつといわれる Davis-Coupled Scheme との比較を行ない、精度については、同程度、計算能率については、本差分スキームの方が、Davis-Coupled Scheme よりも優れていることを示した。

参考文献

- 1) Blottner, F.G., Investigation of Some Finite-Difference Techniques for Solving the Boundary Layer Equations, Comp. Meth. Appl. Mech. Engng., Vol. 6, (1975) 1-30.
- 2) Douglas, J. and Jones, B.F., On Predictor-Corrector Methods for Non-linear Parabolic Differential Equations. J. Soc. Indust. Appl. Math., Vol. 11, (1963) 195-204.
- 3) Cebeci, T. and Bradshaw, P., Momentum Transfer in Boundary Layers. Hemisphere Publishing Corp., (1977).

航空宇宙技術研究所報告 655 号

昭和 56 年 2 月 発行

発行所 航空宇宙技術研究所
東京都調布市深大寺町 1880

電話 武藏野三鷹(0422)47-5911(大代表) 〒182

印刷所 株式会社 実業公報社
東京都千代田区九段南 4-2-12

Printed in Japan

This document is provided by JAXA.