

NAL TR-704

ISSN 0389-4010  
UDC 629.7.015.7:  
629.7.036.7:  
519.3

# 航空宇宙技術研究所報告

TECHNICAL REPORT OF NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

TR-704

微小推力による最適地球脱出軌道について

吉 村 庄 市 ・ 山 中 龍 夫

1982年3月

航空宇宙技術研究所  
NATIONAL AEROSPACE LABORATORY

# 微小推力による最適地球脱出軌道について\*

吉 村 庄 市\*\* 山 中 龍 夫\*\*

## Optimal Low-Thrust Earth Escape Spiral Trajectories From Geosynchronous Orbit

by

Shoichi YOSHIMURA and Tatsuo YAMANAKA

### ABSTRACT

A numerical analysis has been carried out on minimum-time low-thrust Earth escape spiral trajectories from geosynchronous orbit. The two-point boundary-value problem has been solved with very good convergence by one of the direct methods (two-dimensional search conjugate gradient method with penalty function), using the digital computer FACOM 203-75.

Starting from geosynchronous orbit, the spacecraft increases both its orbital altitude and its total energy  $E$  (kinetic energy plus potential energy in Earth's gravitational field), rotating round the Earth along the spiral trajectory, and then attains the parabolic velocity ( $E = 0$ ).

The thrust vector oscillates around the velocity vector, i.e., the tangential direction with the period almost equal to the rotational period of the orbit. It can be pointed out that the synchronization is clearer in the first portion of the trajectory and for a smaller initial acceleration  $a_0$ . The amplitude of the oscillation increases gradually in the first portion, but begins to decrease in the final portion of the trajectory, and reaches zero at the escape point. Thus, the steering angle  $\beta$  vanishes at final time. This means that the direction of the thrust vector coincides with the direction of the velocity vector. At the same time, the time derivative  $\frac{d\beta}{dt}$  also vanishes. These two equations, i.e.,  $\beta = 0$  and  $\frac{d\beta}{dt} = 0$ , are also derived analytically through optimality condition and transversality conditions.

The initial value of  $\beta$  seems to vary from plus to minus at random, not uniformly according to the increase of  $a_0$ . Therefore, it can not be predicted for any specified  $a_0$  whether  $\beta$  will start its history from inside or outside the trajectory. On the other hand, all cases computed show that the thrust vector approaches the tangential direction from inside the trajectory.

---

\* 昭和57年2月3日 受付

\*\* 宇宙研究グループ

## 1. まえがき

地球周回軌道上の宇宙船を電気推進系などの微小推力によりスパイラル・レイジング (spiral raising) させて、地球引力圏から脱出させる (放物線軌道速度を達成する) ことは、微小推力の地球周回軌道間の遷移での利用と惑星間飛行での利用との境界領域に属し、興味深い分野である。これまで数多くの宇宙船が惑星探査機として地球引力圏外へ脱出し、内惑星、外惑星へと送られている。しかし、地球引力圏脱出に際して微小推力を用いた例はなく、いずれも推力をインパルス的に付加する方法を探っている。その為もあってか、これまでのところ、この分野に関する報告例は比較的少ない。しかし、微小推力によって宇宙船をスパイラル・レイジングさせて、軌道高度を上昇させ同時にその総エネルギー  $E$  (速度エネルギーと地球重力場における位置エネルギーの和) を増大させる問題については、多くの研究が行なわれて来ており、その一部が脱出 (escape) までを扱っている。 $E$  を増大させる問題についての多くは、解析的に近似解を求めようとする試みであり、もう1つは、それとの比較の目的をも含めた数値解析を行なうものである。

前者は、基本的には微分方程式の解を perturbation method で求める方法である<sup>1)</sup>。即ち、解が、微分方程式に含まれるあるパラメタのべき級数の形に漸近展開 (asymptotic expansion) できるものとして、各項の係数を求めていく方法である。その際、パラメタが小さければ、1乗乃至は2乗の項ぐらいまで考えれば、かなり良い近似解が得られることが予想される。そして、2章で導出するが、微小推力によるスパイラル・レイジングの運動方程式には加速度  $a$  が現われる。 $a$  は宇宙船の質量と微小推力との比であり、一般に  $0 < a \ll 1$  であるから、地球による重力が支配的 (dominant) であると考えられることができる。この考え方に基いて、 $a$  を微小なパラメタとしてべき級数の形の近似解を解析的に求めるのである。

この様な試みは、1950~60年代において、Lawden<sup>2)</sup> Zee,<sup>3,4)</sup> Johnson<sup>5)</sup>, Cohen<sup>6)</sup>, Shi, Eckstein<sup>7,8)</sup>, Brofman<sup>9)</sup> ら数多くの研究者によって行なわれて来たが、推力方向としては軌道接線方向 (tangential direction) や局地水平方向 (circumferential direction) を仮定している。

これらのうち、Lawden, Shi, Eckstein<sup>8)</sup>, Cohenらが脱出までを考えている。しかし、数値計算例と比較すると、いずれもスパイラル・レイジングの初期にはかなり良く一致するのであるが、脱出に近づく後半には大きなずれを示す。これは、脱出点付近では重力による加速度と  $a$  とが同じオーダーになる為に、地球による重力が支配的であるとした仮定が成立しなくなるからと考えられている。

一方、後者の数値解析は更に2つに分けられる。1つは軌道接線方向や局地水平方向推力によって計算するものであり、前述の如く近似解との比較の目的でこれまでに挙げた研究者自身によって行なわれたものを含む。そしてもう1つは、最適解を求める計算である。

Moeckel<sup>10)</sup> は、大きさ一定の軌道接線方向推力を仮定して、初期の推力-重量比  $10 \sim 10^{-4}$  の広範囲にわたって幾つかの場合について計算している。地球周回軌道 ( $E < 0$ ) から双曲線軌道速度 (hyperbolic velocity  $E > 0$ ) に至るまでの、又逆に双曲線軌道速度から地球周回軌道に至るまでの、 $E$ 、距離 (radial distance)、速度、操舵角<sup>\*</sup>、遷移角 (angular distance) などを、噴射時間の関数として多くの図に示している。Irving<sup>11)</sup> は、加速度可変 (大きさ、方向) でペイロードを最大とする最適脱出問題を検討し、計算を行なっている。その際、終端時刻において、加速度の大きさが初期値と等しくなり、且つ加速度の方向 (推力ベクトルの方向) が速度ベクトルの方向と一致することを、横断条件 (transversality conditions) として求めている。高度 320 km の円軌道から初期加速度  $a_0 = 49 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$  で、操舵角の初期推定として局地水平方向を選んで計算を開始し、約8周して1.6日を要して脱出速度

\* 軌道接線方向推力を考えているので、刻々の局地水平方向と軌道接線方向即ち速度ベクトルとのなす角

( $E=0$ )を達成したが、この2つの横断条件を満足できなかったと述べている。他に、最適問題ではなく、大きさ一定(49,及び $9.8\text{mm}\cdot\text{s}^{-2}$ )の軌道接線方向及び局地水平方向推力による計算結果も示している。

Lebedev<sup>12)</sup>は、微小推力による宇宙船の運動について、所謂method of averagesによって接触軌道要素(osculating orbital elements)の時間変化率を求めることから、各種の最適問題に至るまで広範囲に概説しており、脱出速度を達成する最短時間問題にも触れている。そして、円軌道から一定推力で出発する場合、最適条件(optimality condition)及び横断条件から、終端時刻においては推力ベクトルの方向が速度ベクトルの方向に一致し、且つ両ベクトルのなす角の時間変化率が零になることが求められるとしている。これについては、付録-1,-2で詳述する。円軌道上における地球の重力による加速度で無次元化した初期加速度 $1\times^{-2}$ で出発した場合について、間接法の1つであるNewton methodで計算し、得られた操舵角(推力ベクトルと速度ベクトルとのなす角)の履歴により、推力ベクトルが速度ベクトルまわりに振動すること、しかし終端時刻においては前述の2つの条件が十分満足されていることを示している。更に、その振動がスパイラル軌道の周回とはほぼ同期する現象が見られると述べている。

Schwenzfeger<sup>13)</sup>は、同じく一定推力での最短時間脱出問題を扱い、 $1.05r_e$ (高度320km)の円軌道から初期加速度 $0.1, 1\times 10^{-3}, 5\times 10^{-4}\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ で出発する場合について計算し、 $0.1\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$ の場合の操舵角の履歴が終端時刻における2つの条件を十分満足していることを示しており、他に楕円軌道から出発する場合についても若干計算している。計算は間接法で行なわれており、Schwenzfegerの目的は、ラグランジュ乗数の初期値の推定の良否が収斂の過程に大きな影響を与える間接法において、独立変数である時間 $t$ にある変換を行なうと推定誤差の影響が小さくなることを主張することであり、その例証としての計算であって操舵角の履歴にはあまり関心を払っていない。

以上述べて来た様に、数値計算においては、推力方向を軌道接線方向又は局地水平方向と仮定した場

合、或いは最適問題として解いた場合でも、300km程度の比較的低高度の円軌道から、微小推力としてはやや過大な初期加速度で出発するとの想定に立つ例が多い。

微小推力を発生する推進系としては幾つかの種類が考えられるであろうが、代表例として電気推進系が挙げられる。その場合、電源として太陽電池が必要であり、推力を大きくすれば必要パワも大きくなって必然的に太陽電池パドルの面積も大きくなる。300km程度の低軌道では空気抵抗も予想され、又途中バン・アレン帯などによる太陽電池の劣化の問題もある。

これに対し、静止軌道高度程度を考えれば、それらの問題はほぼ無視でき、又蝕などの影響も緩和される。これまで、静止軌道高度程度からの最適脱出軌道の計算例は、調査した範囲ではなく、又将来我国において微小推力による地球引力圏脱出の試みがなされるとしたら、ミッションの終了した静止衛星が恰好の対象とされるのではないとも予想される。

かくして本報告では、円軌道である静止軌道から、推力、燃料消費率一定(従って比推力 $I_{sp}$ も一定)の条件の下で、地球引力圏脱出を行なう最短時間問題について、Lebedev, Schwenzfegerとは異なる直接法を用いて計算を行なった。

$I_{sp}$ は5000秒で一定とし、初期加速度 $a_0$ をパラメタとして $0.5\sim 10\text{mm}\cdot\text{s}^{-2}$ という微小推力としてはほぼ妥当な範囲で幾つかの値についての計算を、大型計算機FACOM 230-75を用いて行なった。計算は極めて良好に収斂し、Lebedevの挙げた終端時刻における操舵角に関しての2つの条件についてもほぼ満足する結果を得た。

## 2. 記号

$a$	: 加速度
$C_{00}, C_{01}, C_{10},$	拡張された評価関数 $\bar{J}$ を $\alpha$ と $\Delta t_f$
$C_{11}, C_{02}, C_{20}$	: との2次関数と仮定した時の係数
$E$	: 宇宙船の運動エネルギーと地球重力場における位置エネルギーの和(無次元)
$H$	: ハミルトニアン
$I_{sp}$	: 比推力
$J$	: 評価関数

- $\bar{J}$  : 拡張された (augmented) 評価関数  
 $m$  : 宇宙船の質量  
 $m_c$  : 燃料消費率 (無次元)  
 $P$  : ペナルティ・ファンクション  
 $P_1, P_2, P_3, P_4$  : 順次大きくしていくペナルティ・ファンクション  
 $p$  :  $u$  の探索方向, 本報告では共役勾配方向 (conjugate gradient direction)  
 $r$  : 距離 (radial distance)  
 $r_e$  : 地球の半径  
 $s$  :  $t$  に換る新しい独立変数  
 $\mathbf{T}$  : 推力ベクトル (無次元)  
 $T$  :  $\mathbf{T}$  の大きさ,  $|\mathbf{T}|$   
 $t$  : 時間 (無次元)  
 $u$  : 局地水平方向からの操舵角  
 $\mathbf{V}$  : 速度ベクトル (無次元)  
 $v$  : 速度  
 $\mathbf{x}$  : 状態変数ベクトル (無次元)  
 $x_1$  : 距離 (無次元)  
 $x_2$  : 遷移角 (angular distance) rad  
 $x_3$  : radial 方向の速度成分 (無次元)  
 $x_4$  : 局地水平方向の速度成分 (無次元)  
 $\alpha$  :  $u$  の探索方向の長さ  
 $\beta$  : 速度ベクトルと推力ベクトルとのなす角  
 $\gamma$  : 局地水平方向と速度ベクトルとのなす角  
 $dt_f$  :  $t_f$  の修正分  
 $\varepsilon$  : 収斂判定条件  
 $\lambda$  : ラグランジュ乗数ベクトル  
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  :  $x_1 \sim x_4$  に対応するラグランジュ乗数  
 $\psi$  : 終端拘束条件  
 $\mathbf{0}$  : 零ベクトル  
 $( )_0$  : 初期値  
 $( )_f$  : 終端値  
 $( )^{(n)}$  :  $n$  回目のイタレーションにおける値  
 $\frac{d( )}{dt}$  : 時間  $t$  に関する一階微分  
 $( \dot{\ } )$  : 新しい独立変数  $s$  に関する一階微分

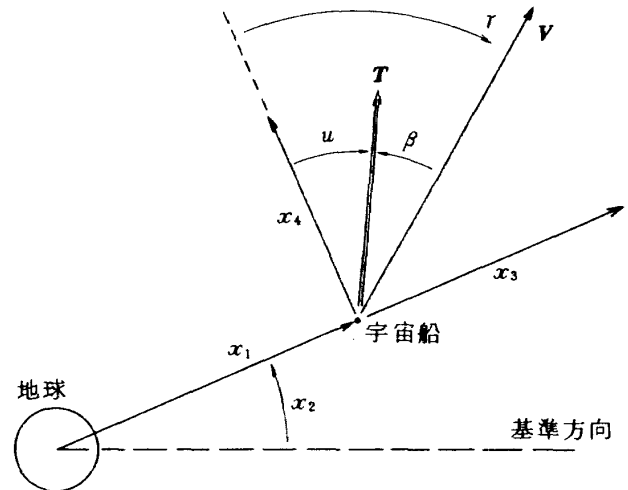


図-1 地球中心極座標系 (二次元平面)

運動を2次元平面に限定し, 各状態変数及び角度  $u, \gamma, \beta$  を, 図-1 に示す様に定義する。但し,  $u$  は操舵角で, 局地水平方向と推力ベクトルのなす角,  $\gamma$  は, 局地水平方向と速度ベクトルとのなす角,  $\beta$  は, 速度ベクトルと推力ベクトルとのなす角である。

中心力場を仮定し, 地球の質量中心を原点とする極座標系 (coplanar geocentric polar coordinate system) における運動方程式は, よく知られている様に次式で表わされる。<sup>12)</sup> 尚, 式は,  $t = t_0$  における距離  $r_0$ , 速度  $v_0$ , 質量  $m_0$ , 基準時間  $r_0/v_0$  により無次元化されている。

$$\frac{dx_1}{dt} = x_3 \quad (1)$$

$$\frac{dx_2}{dt} = x_4/x_1 \quad (2)$$

$$\frac{dx_3}{dt} = x_4^2/x_1 - 1/x_1^2 + T \cdot \sin u / (1 - m_c t) \quad (3)$$

$$\frac{dx_4}{dt} = -x_3 x_4 / x_1 + T \cdot \cos u / (1 - m_c t) \quad (4)$$

但し,  $T$ : 推力の大きさ,  $|\mathbf{T}|$ ,  $m_c$ : 燃料消費率  
 出発軌道として円軌道を考えると, 初期条件は次式で与えられる。

$$x_1(0) = 1.0, x_2(0) : \text{任意 (通常 } 0.0), x_3(0) = 0.0 \\ x_4(0) = 1.0 \quad (5)$$

### 3. 運動方程式及び最適問題の設定

#### 3.1 運動方程式

#### 3.2 最適問題の設定

本報告において考えている最適問題は, 最短時間

問題であるから、評価関数  $J$  は、

$$J = -t_f \quad (6)$$

で定義される。尚、推力の大きさ  $T$ 、燃料消費率  $m_c$  は一定、更にコースティングは含まないと仮定している。これは最小エネルギー問題と同値である。

一方、目標は地球引力圏脱出である。よく知られている様に、ある宇宙船の任意の時刻  $t$  以後の軌道が、周回軌道となるか否かは、その時刻  $t$  における速度エネルギーと地球重力場における位置エネルギーとの和  $E(t)$  によって決定される。

即ち、 $E(t) < 0$  では、円又は楕円の周回軌道であるが、 $E(t) = 0$  で放物線軌道、 $E(t) > 0$  で、双曲線軌道となる。従って、 $E(t) \geq 0$  となることが必要であるが、本問題においては、放物線軌道速度を達成すれば十分である。終端拘束条件は不等式とする必要はなく、次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \psi &\equiv E(t_f) - 0 \\ &= x_3^2(t_f) + x_4^2(t_f) - 2/x_1(t_f) - 0 = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

本問題は、運動方程式(1)~(4)と初期条件(5)及び終端拘束条件(7)の下で、(6)式で定義された  $J$  を最大にする様な操舵角の履歴  $u(t)$ 、 $t \in [t_0, t_f]$  を求める問題として定義できる。これを最適問題 - I と呼ぶ。

以後は、変分問題として扱い、ラグランジュ乗数 (Lagrange multipliers) を導入してハミルトニアン (Hamiltonian) を定義し、Euler-Lagrange 方程式を導出して、2点境界値問題として解くことになる。<sup>14)</sup>

解析的にはそれで良いのであるが、実際の数値計算においては、終端拘束条件  $\psi$  をどの様に取り扱うかが問題となる。本報告では、よく行なわれている、ペナルティ・ファンクション (penalty function)  $P$  を用いて評価関数に組み込む方法を採用した。但し、 $P$  は予め与える大きな正の数値である。拡張された (augmented) 評価関数  $\bar{J}$  は

$$\begin{aligned} \bar{J} &\equiv J + P \cdot \psi^2 \\ &= -t_f + P \cdot [x_3^2(t_f) + x_4^2(t_f) - 2/x_1(t_f)]^2 \end{aligned} \quad (8)$$

と定義される。<sup>14)</sup>

かくして、最初に設定した、終端拘束条件のある最適問題は、同じ運動方程式(1)~(4)と初期条件(5)の下で、終端拘束条件がないものとして、 $\bar{J}$  を最大にする様な  $u(t)$ 、 $t \in [t_0, t_f]$  を求める問題に変更される。これを最適問題 - II と呼ぶ。

最適問題 - I、と - II は、厳密には同値ではなく、後者は、あくまでも前者の近似解を求める方法である。但し、 $P \rightarrow \infty$  においては、ほぼ同値と考えることができる。<sup>14,15)</sup> 従って、 $P$  は収斂の様子を見ながら次第に大きくしていき、言わば拘束条件への締め付けを強めていく。しかし、その度合いが速すぎたり、数値そのものが大きくなりすぎたりすると、収斂が悪くなったり、収斂しなかったりする場合がある。従って、 $P$  の決定には十分な慎重さが要求される。

### 3.3 2点境界値問題

前節の終りで設定した最適問題 - II を解く為に、前節で述べた様に、2点境界値問題を設定する。

まず、ハミルトニアン  $H(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}, t)$  を次式で定義する。

$$\begin{aligned} H(\mathbf{x}, u, \boldsymbol{\lambda}, t) & \\ &\equiv \lambda_1 \cdot [x_3] + \lambda_2 \cdot [x_4/x_1] + \lambda_3 \cdot [x_4^2/x_1 - 1/x_1^2 \\ &\quad + T \cdot \sin u / (1 - m_c t)] + \lambda_4 \cdot [-x_3 x_4 / x_1 \\ &\quad + T \cdot \cos u / (1 - m_c t)] \end{aligned} \quad (9)$$

但し、 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$  はラグランジュ乗数で、時間の関数である。

Euler-Lagrange 方程式は、

$$\frac{d\boldsymbol{\lambda}}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}} \quad (10)$$

で定義され、以下の式を得る。

$$\begin{aligned} \frac{d\lambda_1}{dt} &= - [-\lambda_2 x_4 / x_1^2 + \lambda_3 (-x_4^2 / x_1^2 + 2/x_1^3) \\ &\quad + \lambda_4 (x_3 x_4 / x_1^2)] \end{aligned} \quad (11)$$

$$\frac{d\lambda_2}{dt} = - [0] \quad (12)$$

$$\frac{d\lambda_3}{dt} = - [\lambda_1 - \lambda_4 x_4 / x_1] \quad (13)$$

\*  $E(t) < 0$  で、且つ十分小さければ、周回軌道をとることさえ出来ない。しかしここでは、 $E(t) < 0$  でも周回軌道をとることが出来る程度には大きい範囲を考えている。

$$\frac{d\lambda_4}{dt} = -[\lambda_2/x_1 + 2\lambda_3x_4/x_1 - \lambda_4x_3/x_1] \quad (14)$$

ラグランジュ乗数の終端条件は

$$\lambda(t_f) = \frac{\partial \bar{J}}{\partial \mathbf{x}(t_f)} \quad (15)$$

で与えられる。従って、

$$\lambda_1(t_f) = 4P \cdot E(t_f)/x_1^2(t_f) \quad (16)$$

$$\lambda_2(t_f) = 0 \quad (17)$$

$$\lambda_3(t_f) = 4P \cdot E(t_f) \cdot x_3(t_f) \quad (18)$$

$$\lambda_4(t_f) = 4P \cdot E(t_f) \cdot x_4(t_f) \quad (19)$$

となる。尚、 $\lambda_2$  についての微分方程式(12)と、ここで得られた  $\lambda_2$  の終端条件(17)とから、

$$\lambda_2(t) = 0, \quad t \in [t_0, t_f] \quad (20)$$

が直ちに求められる。

以上、運動方程式(1)~(4)と状態変数の初期条件(5)、Euler-Lagrange 方程式(11)~(14)とラグランジュ乗数の終端条件(16)~(19)により、2点境界値問題が設定された。

さて、これらにより実際に数値計算を行なう場合に、操舵角  $u(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f]$  の更新の際に若干の問題が生ずる。即ち、 $n$  回目のイタレーションにおいて与えられていた操舵角  $u^{(n)}(t)$ ,  $t \in [t_0, t_f^{(n)}]$  は、次のイタレーションに進む時に

$$u^{(n+1)}(t) = u^{(n)}(t) - \alpha^{(n)} p^{(n)}(t), \quad t \in [t_0, t_f^{(n)}] \quad (21)$$

但し、 $p^{(n)}$  は  $u$  の探索方向で、本報告では共役勾配方向 (conjugate gradient direction) であり、 $\alpha^{(n)}$  はその長さ

によって更新される。一方、これは最短時間問題であるから、終端時刻  $t_f$  が未定であり、 $t_f$  も又

$$t_f^{(n+1)} = t_f^{(n)} + \Delta t_f^{(n)} \quad (22)$$

但し、 $\Delta t_f^{(n)}$  は  $t_f$  の修正分

によって更新される。操舵角は、区間  $[t_0, t_f^{(n)}]$  で与えられていたから、 $\Delta t_f^{(n)} > 0$  ならば、区間  $[t_f^{(n)}, t_f^{(n+1)}]$  の  $u^{(n+1)}(t)$  の値を新たに与える必要が生ずるのである。他方、 $\Delta t_f^{(n)} < 0$  ならば、区間  $[t_f^{(n+1)}, t_f^{(n)}]$  の  $u^{(n+1)}(t)$  の値が不要となる。しかも、次章で述べる様に、各イタレーションにおいて、 $\alpha$  と  $\Delta t_f$  を共に変えながら評価関数の極値を求めていくアルゴリズムを採っているので、この問題は、次のイタレーションに進む時ばかりでなく、

イタレーションの内部でも何度も生ずることになる。

この問題への対策としては、次の2つの方法が考えられる。

- $\Delta t_f^{(n)} < 0$  ならば、 $[t_f^{(n+1)}, t_f^{(n)}]$  の  $u^{(n+1)}(t)$  を捨て、 $\Delta t_f^{(n)} > 0$  ならば、 $[t_f^{(n)}, t_f^{(n+1)}]$  の  $u^{(n+1)}(t)$  を何らかの方法で外挿する。
- $u^{(n+1)}(t)$  の形状はそのまま維持し、 $t_f$  の増減に対しては、ただタイム・スケールのみを伸縮させる。

前者によれば、外挿の方法をどうするかということがあり、又それまでに得て来た  $u(t)$  の一部を捨てるなどの問題がある。後者については、Tripathi<sup>16)</sup> が選択して良好な結果を得ている。又 Long<sup>17)</sup> は、後者を選択し、 $t$  に換る新しい独立変数を導入する変数変換を提案している。

本報告では、後述する様に、積分区間が固定され、それまでに得て来た  $u(t)$  の一部を捨てることもなく、且つ  $t_f$  を、最適値を求めるべき単なるパラメタとして扱える Long の方法、即ち後者を採ることとした。

Long の変換は次式で与えられる。

$$t = (t_f - t_0)s + t_0 \quad (23)$$

上式中の  $s$  が、 $t$  に換る新しい独立変数で、 $t_f$  の変動に依らず、その区間は常に  $[0, 1]$  である。

$t_0 = 0$  としても一般性を失わないから、上式は、

$$t = t_f \cdot s \quad (24)$$

と書け、 $t$  及び  $s$  に関する微分には、

$$\frac{d(\cdot)}{dt} = \frac{1}{t_f} \cdot \frac{d(\cdot)}{ds} \equiv \frac{1}{t_f} (\dot{\cdot}) \quad (25)$$

なる関係が成立する。これを、運動方程式及び

Euler-Lagrange 方程式に適用すると、以下の諸式を得る。

$$\dot{x}_1 = t_f \cdot [x_3] \quad (26)$$

$$\dot{x}_2 = t_f \cdot [x_4/x_1] \quad (27)$$

$$\dot{x}_3 = t_f \cdot [x_4^2/x_1 - 1/x_1^2 + T \cdot \sin u / (1 - m_c t_f \cdot s)] \quad (28)$$

$$\dot{x}_4 = t_f \cdot [-x_3 x_4 / x_1 + T \cdot \cos u / (1 - m_c t_f \cdot s)] \quad (29)$$

$$\dot{\lambda}_1 = -t_f [-\lambda_2 x_4 / x_1^2 + \lambda_3 (-x_4^2 / x_1^2 + 2/x_1^3) + \lambda_4 (x_3 x_4 / x_1^2)] \quad (30)$$

$$\dot{\lambda}_2 = -t_f \cdot [0] \quad (31)$$

$$\dot{\lambda}_3 = -t_f \cdot [\lambda_1 - \lambda_4 x_4 / x_1] \quad (32)$$

$$\dot{\lambda}_4 = -t_f \cdot [\lambda_2 / x_1 + 2 \lambda_3 x_4 / x_1 - \lambda_4 x_3 / x_1] \quad (33)$$

これらの式に見られる様に、 $t_f$ は単なるパラメタとして現われている。又、 $t$ に換って $s$ が独立変数であるから、積分区間は常に $[0, 1]$ である。操舵角は、 $u(t)$ ,  $t \in [0, t_f]$ として各時刻 $t$ において与えられるのではなく、 $u(s)$ ,  $s \in [0, 1]$ として各 $s$ において与えられる。従って、 $n$ 回目のイタレイションの結果として $-\alpha^{(n)} p^{(n)}(s)$ なる修正を受けて更新された操舵角 $u^{(n+1)}(s)$ は、時間領域で考えた場合、終端時刻の修正分 $\Delta t_f^{(n)}$ の正負にかかわらず、その形状を維持したままタイム・スケールのみが伸縮されることになる。

ラグランジュ乗数の終端条件(16)~(19)式は、

$$\lambda_1(1) = 4P \cdot E(1) / x_1^2(1) \quad (34)$$

$$\lambda_2(1) = 0 \quad (35)$$

$$\lambda_3(1) = 4P \cdot E(1) \cdot x_3(1) \quad (36)$$

$$\lambda_4(1) = 4P \cdot E(1) \cdot x_4(1) \quad (37)$$

となる。

#### 4. アルゴリズム及び収斂判定条件

アルゴリズムは、Powers, Shieh<sup>18)</sup>によって開発された、 $u$ の探索方向の長さ $\alpha$ と $t_f$ の修正分 $\Delta t_f$ の2つをパラメタとして各イタレイションにおいて評価関数の極値を求めていく2次元共役勾配法

(conjugate gradient method, CGM)を用いた。

これは、評価関数 $\bar{J}$ を $\alpha$ と $\Delta t_f$ との2次関数

$$\bar{J} \equiv C_{00} + C_{10} \alpha + C_{01} \Delta t_f + C_{20} \alpha^2 + C_{11} \alpha \cdot \Delta t_f + C_{02} \Delta t_f^2 \quad (38)$$

と仮定し、2つのパラメタを変えながら各イタレイションにおいて $\bar{J}$ の極値を求めていく方法である。

惑星間飛行における最短時間問題の様に、 $t_f$ が未定で、3個乃至それ以上の端末拘束条件を持つ2点境界値問題に適用されて、良い収斂結果を得ている<sup>18,19)</sup>。

収斂の判定には、一般的に用いられる

$$\epsilon = \left\{ \int_0^1 \left[ \frac{\partial H}{\partial u} \right]^T \cdot \left[ \frac{\partial H}{\partial u} \right] ds \right\}^{1/2} \quad (39)$$

を指標とした。<sup>20)</sup>(A-1)式に示す様に、最適条件から言えば $\epsilon$ は0であるべきだから、 $\epsilon$ が小さくなる

程最適条件に近づくと考えられるからである。一方、3章で設定した最適問題-I, 即ち本来の最適問題においては、最適条件及び横断条件から、最適解では、図-1で定義した速度ベクトルと推力ベクトルのなす角 $\beta$ について次式が成立することを解析的に示すことができる。<sup>12)</sup>詳細は附録-2に述べる。

$$\beta(t_f) = 0, \text{ 即ち } \beta(1) = 0 \quad (40)$$

$$\frac{d\beta(t_f)}{dt} = 0, \text{ 即ち } \dot{\beta}(1) = 0 \quad (41)$$

従って、数値解における $\beta$ 及び $\dot{\beta}$ の終端値をも収斂判定の補助的指標とした。

#### 5. 計算結果及び考察

出発軌道としては静止軌道を選んだ。この程度の高度では、電気推進系の電源となる太陽電池のバン・アレン帯による劣化や、蝕などの問題が、かなり緩和されるであろうと考えられること、又将来、我国において微小推力による地球引力圏脱出の試みがなされるとしたら、ミッションの終了した静止衛星が対象とされるのではないかと予想した、などがその理由である。

静止軌道は円軌道であるから、初期条件は(5)式がそのまま使える。既に述べた様に、推力の大きさ $T$ 、燃料消費率 $m_c$ は一定(従って比推力 $I_{sp}$ も一定)、電気推進系は連続して作動し、コースティングは含まず、操舵角 $u$ についての制限はないとの仮定の下で、 $I_{sp} = 5000$ 秒とし、初期加速度 $a_0$ をパラメタとして $0.5 \sim 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ の範囲で変えて計算を行なった。いずれも操舵角の初期推定は、 $u^{(0)}(s) = 0$ ,  $s \in [0, 1]$ , 即ち刻々の局地水平方向を用いた。附録-3で述べる様に、刻々のエネルギー変化率(instantaneous rate of change of the total energy)を最大にするのは軌道接線方向推力であるから、一般的には初期推定として軌道接線方向( $\beta(s) = 0$ ,  $s \in [0, 1]$ )が用いられる。しかし運動方程式には $\beta$ ではなく $u$ が現われており、軌道接線方向を $u$ で表わすと複雑になるので、簡単に入力できる局地水平方向を用いたのである。

それぞれの場合の $\epsilon$ ,  $E_f$ ,  $\beta_f$ , 所要イタレイション回数を表-1に示す。いずれも、収斂判定条件 $\epsilon$ が $10^{-3} \sim 10^{-4}$ 程度まで小さくなり、終端拘束条件



表 - 1 収 斂 結 果

$a_0$ ( $\text{mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )	所要イタレーション数 ( $P$ 変更)	$\epsilon$	$\beta_f$ (度)	$E_f$ (無次元) ( $\text{k m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ )
0.5	10 (4, 7, 10)	$4.32 \times 10^{-3}$	$2.630 \times 10^{-2}$	$-3.160 \times 10^{-4}$ ( $-1.494 \times 10^{-3}$ )
0.75	11 (6, 10)	$2.77 \times 10^{-3}$	$4.973 \times 10^{-2}$	$-3.822 \times 10^{-4}$ ( $-1.807 \times 10^{-3}$ )
1.0	10 (6, 10)	$5.55 \times 10^{-4}$	$3.213 \times 10^{-2}$	$-2.673 \times 10^{-4}$ ( $-1.263 \times 10^{-3}$ )
2.0	12 (6, 10)	$2.97 \times 10^{-3}$	$3.677 \times 10^{-2}$	$-5.635 \times 10^{-4}$ ( $-2.664 \times 10^{-3}$ )
3.0	13 (6, 10, 13)	$2.59 \times 10^{-4}$	$6.120 \times 10^{-3}$	$-1.698 \times 10^{-4}$ ( $-8.027 \times 10^{-4}$ )
4.0	11 (6, 10)	$1.45 \times 10^{-3}$	$4.471 \times 10^{-3}$	$-4.723 \times 10^{-4}$ ( $-2.232 \times 10^{-3}$ )
5.0	10 (6, 10)	$7.61 \times 10^{-4}$	$2.544 \times 10^{-2}$	$-3.634 \times 10^{-4}$ ( $-1.718 \times 10^{-3}$ )
10.0	6 (4)	$5.41 \times 10^{-4}$	$-1.760 \times 10^{-2}$	$-3.838 \times 10^{-4}$ ( $-1.814 \times 10^{-3}$ )

ペナルティ・ファンクション  $P_1 = 1 \times 10^3$ ,  $P_2 = 2 \times 10^3$ ,  $P_3 = 5 \times 10^3$   
 $P_4 = 1 \times 10^4$

$E_f$  も  $10^{-4}$  程度まで目標値零に近づいている。又、補助的収斂判定条件の1つである  $\beta_f$  も  $10^{-2} \sim 10^{-3}$  度となって十分零度に近づいている。これらを得るのに要したイタレーション回数は、6回という少い場合もあるが、ほぼ10回程度であり、1回のイタレーションに要した計算時間は、ほぼ1.5秒程度である。(FACOM 230-75使用)

ペナルティ・ファンクションは、 $P_1 = 1 \times 10^3$  から出発し、その後、表に示す各イタレーションにおいて  $P_2 = 2 \times 10^3$ ,  $P_3 = 5 \times 10^3$ ,  $P_4 = 1 \times 10^4$  と大きくしていった。 $P_2$  までで収斂した場合もあり、又  $P_4$  まで大きくする必要があった場合もある。表-2に、得られた最短時間  $t_f$  と各状態変数の終端値を示す。初期加速度  $a_0$  が  $0.5 \sim 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$  と変る時、358.1(57日弱) ~ 13.83(2日強)を要し、その間に17.8 ~ 1.02周して、脱出速度を達成する。 $a_0$  が大きい程、最終速度が大きいのは、 $x_{1f}$  の小さい所、即ち地球重力場という「井戸」の中の深い所で脱出する(速度エネルギーと位置エネルギーの和を零に

する) 為である。

図-2に、 $a_0 = 1 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$  の場合の操舵角の履歴を示す。但し  $u$  ではなく  $\beta$  である。参考文献12, 13などにも操舵角としては  $\beta$  を図示しており、それらとの比較上、又3章で述べ、附録-2で証明し、4章で補助的収斂判定条件とすると述べた  $\beta(1) = 0$ ,  $\dot{\beta}(1) = 0$  がどの程度満足されているかを明瞭に把握する目的で  $\beta$  を選んだのである。従って、横軸は刻々の速度ベクトルの方向(軌道接線方向)を意味する。図から明らかに、推力ベクトルは速度ベクトルのまわりに振動しており、Lebedev<sup>12)</sup>, Schwenzfeger<sup>13)</sup> らの報告と同様の特徴を示す。その振幅は、発散するかのように周期毎に大きくなるが、約12度を最大値として以後急速に減少し、横軸(速度ベクトルの方向)に近づく。しかも、横軸を横切るのではなく接する様に近づいている。従って、残る1つの補助的判定条件  $\dot{\beta}_f = 0$  をもほぼ満足していると言えることができる。

以上、収斂判定条件  $\epsilon$  が十分小さく、補助的収斂

表-2 計算結果

$a_0$ ( $\text{mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )	$t_f$	$x_{1f}$	$x_{2f}$ rad.	$x_{3f}$	$x_{4f}$	$m_f / m_0$
0.5	358.06 ( 56.83 日 )	17.65 ( 744,330 km )	111.6 ( 17.77 周 )	0.2126 ( 0.654 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.2604 ( 0.801 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.950
0.75	233.28 ( 37.03 日 )	14.44 ( 608,770 km )	74.73 ( 11.89 周 )	0.2348 ( 0.722 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.2881 ( 0.886 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.951
1.0	171.88 ( 27.28 日 )	12.52 ( 527,820 km )	56.28 ( 8.96 周 )	0.2521 ( 0.775 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.3097 ( 0.952 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.952
2.0	81.499 ( 12.94 日 )	8.842 ( 372,820 km )	28.60 ( 4.55 周 )	0.3012 ( 0.926 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.3673 ( 1.129 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.954
3.0	52.600 ( 8.349日 )	7.236 ( 305,100 km )	19.36 ( 3.08 周 )	0.3288 ( 1.011 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.4100 ( 1.261 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.956
4.0	38.196 ( 6.063日 )	6.186 ( 260,830 km )	14.77 ( 2.35 周 )	0.3572 ( 1.098 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.4418 ( 1.359 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.957
5.0	29.953 ( 4.754日 )	5.714 ( 240,930 km )	11.95 ( 1.90 周 )	0.3718 ( 1.143 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.4598 ( 1.414 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.958
10.0	13.826 ( 2.194日 )	4.056 ( 171,000 km )	6.384 ( 1.02 周 )	0.4278 ( 1.315 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.5565 ( 1.711 $\text{km} \cdot \text{s}^{-1}$ )	0.948

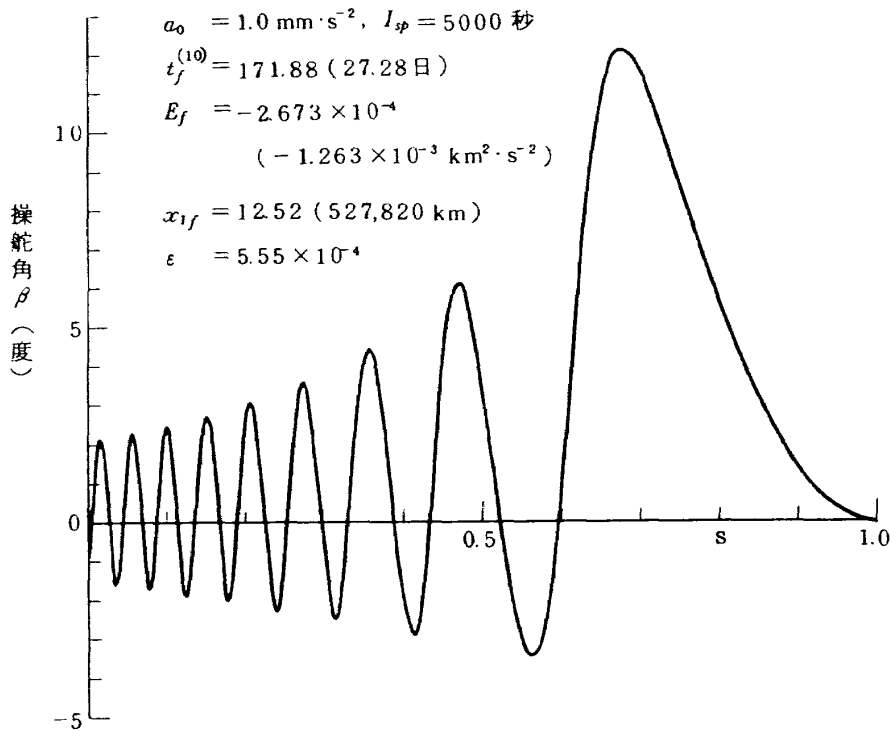


図-2 操舵角の履歴 ( $a_0 = 1.0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )

条件もほぼ満足し、勿論、終端拘束条件  $E_f$  もほぼ満足している事から、このシミュレーションは極めて良好に収斂していると判断することができる。

図からは、推力ベクトルが速度ベクトルまわりにかなり急激に振動している様に見えるが、実時間での変化率は高々  $0.5$  度/hr. 程度である。図-3に軌道を示す。錯綜を避ける為に第2~6周は省略してある。宇宙船は、文字通りスパイラルを描きながら徐々に高度を上げ、約  $8.9$  周し、距離  $12.5$  ( $530,000$  km 弱) で、期間  $171.9$  (27日強) を費して遂に脱出速度を達成する。

推力ベクトルが速度ベクトルのまわりに何回振動しているかは、スパイラル・レイジングの初期には規則正しく振動しているが終盤にはそれが乱れているので、図-2から簡単には決められないが、約  $8.5$  回程度と言えよう。この値はスパイラル軌道の周回数  $8.96$  に近く、図-2と-3を比較すると、推力ベクトルはほぼ1周回する毎に速度ベクトルのまわりを1回振動していると言える<sup>12)</sup>。

次に  $a_0 = 5 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$  の場合について、それぞれ  $\beta$  の履歴及び軌道を図-4、-5に示す。この場合もやはり、 $\beta$  は速度ベクトルのまわりに振動し、その

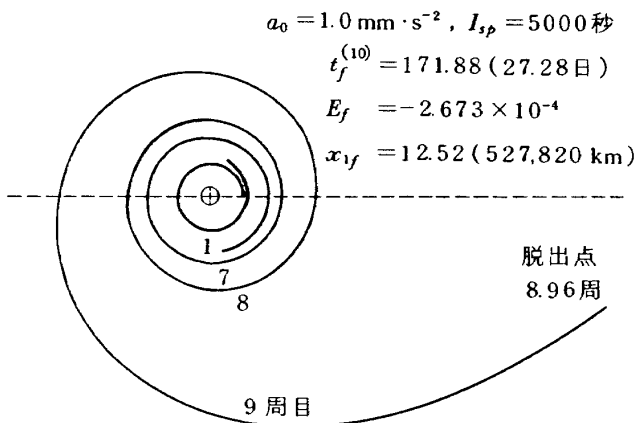


図-3 スパイラル脱出軌道 ( $a_0 = 1.0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )

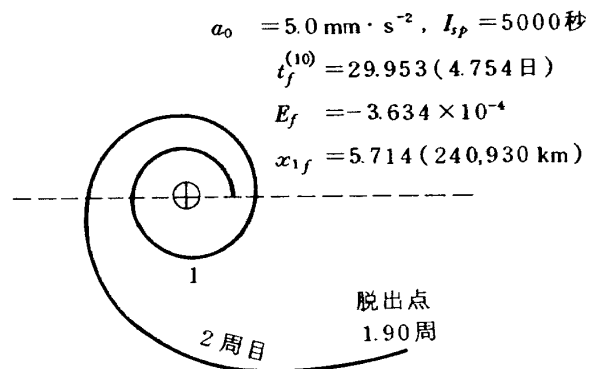


図-5 スパラル脱出軌道 ( $a_0 = 5.0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )

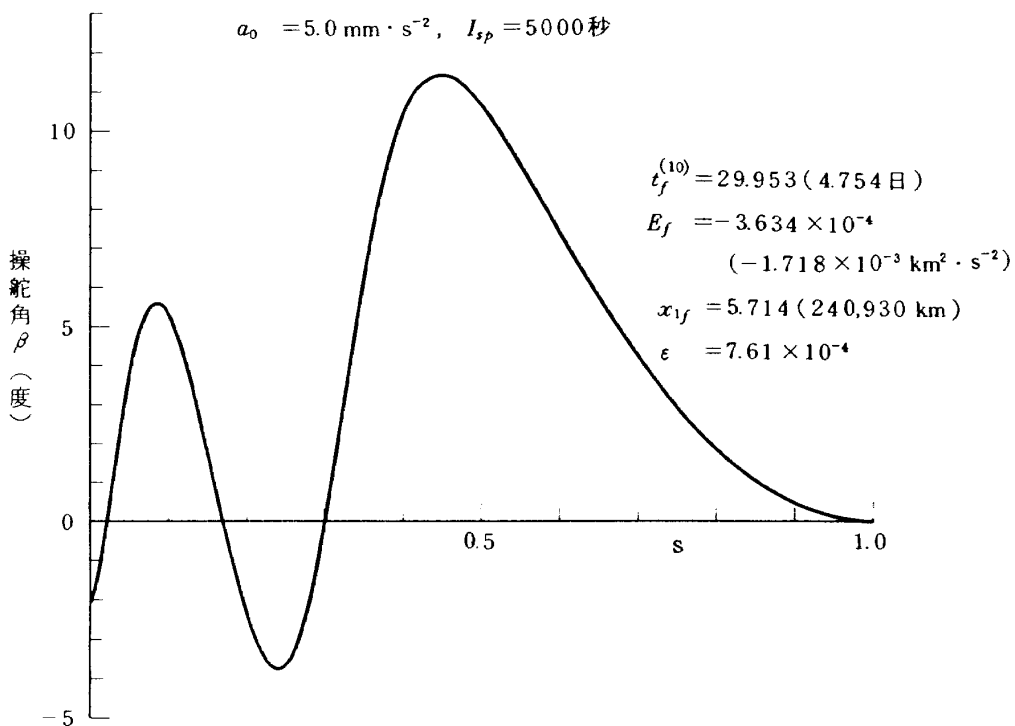


図-4 操舵角の履歴 ( $a_0 = 5.0 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )

最大振れ角は約12度であり、 $\beta(1) = 0$ 、 $\dot{\beta}(1) = 0$ をほぼ満足している。振動回数は約1.5回と考えられ、一方スパイラル軌道の周回数は約1.90周であり、ここでも同様の事が言える。 $\beta$ の実時間での変化率は高々1.2度/hr.程度であり、やや大きくなって

いる。  
 $a_0 = 0.75, 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ の場合についても、それぞれ $\beta$ 及び軌道を図-6～-9に示す。これらについても、これまでの2例と同様の特徴を指摘することができる。且つ、図-2～-9により、推力ベクトルの振動と軌道周回との同期は、 $a_0$ の小さい程、又スパイラル・レイジングの初期程、良い一致を見せる傾向がある事がわかる。一方、 $\beta$ の実時間での変化率は、 $a_0 = 0.75, 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ でそれぞれ高々0.32, 2.0度/hr.であり、 $a_0$ の増大と共に大きくなる傾向がある。

$\beta$ の履歴において、 $\beta(0)$ 即ちスパイラル・レイジング開始時における推力ベクトルと速度ベクトルとの相対的位置関係を見ると、 $a_0 = 0.75, 1, 5, 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ と変るのに伴い、 $\beta(0)$ は、ほぼ-0.5, -1.4, -2.2, -4.3度と変る。一見 $a_0$ の増大に伴って正から負へ、つまり図-1の定義からすると軌道の内側から外側へと移っている様に見える。しか

$$a_0 = 0.75 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}, I_{sp} = 5000 \text{ 秒}$$

$$t_f^{(11)} = 233.28 \text{ (37.03日)}$$

$$E_f = -3.822 \times 10^{-4}$$

$$(-1.807 \times 10^{-3} \text{ km}^2 \cdot \text{s}^{-2})$$

$$x_{1f} = 14.44 \text{ (608,770 km)}$$

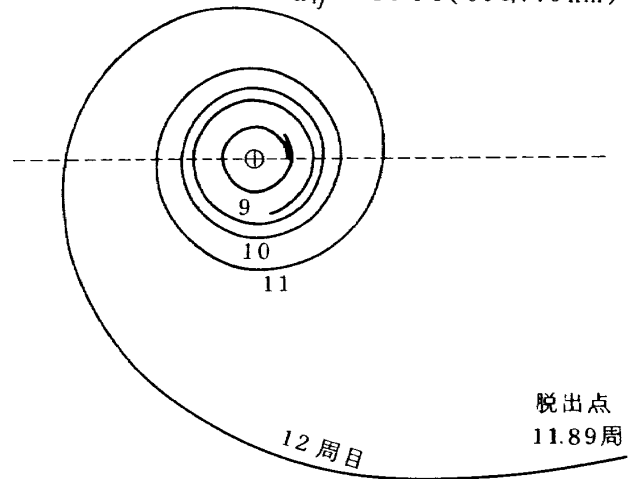


図-7 スパイラル脱出軌道 ( $a_0 = 0.75 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )

し、 $a_0 = 0.5, 2, 3, 4 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ ではそれぞれ、ほぼ0.3, 2.9, -2.5, 2.5度であり、これらを図-10に示す。従って、 $a_0$ の増大に伴って、単純に正から負へと移るとは言い難い。

以上の事から、スパイラル・レイジング開始時に推力プログラムが軌道の内側 ( $\beta > 0$ )、外側 ( $\beta$

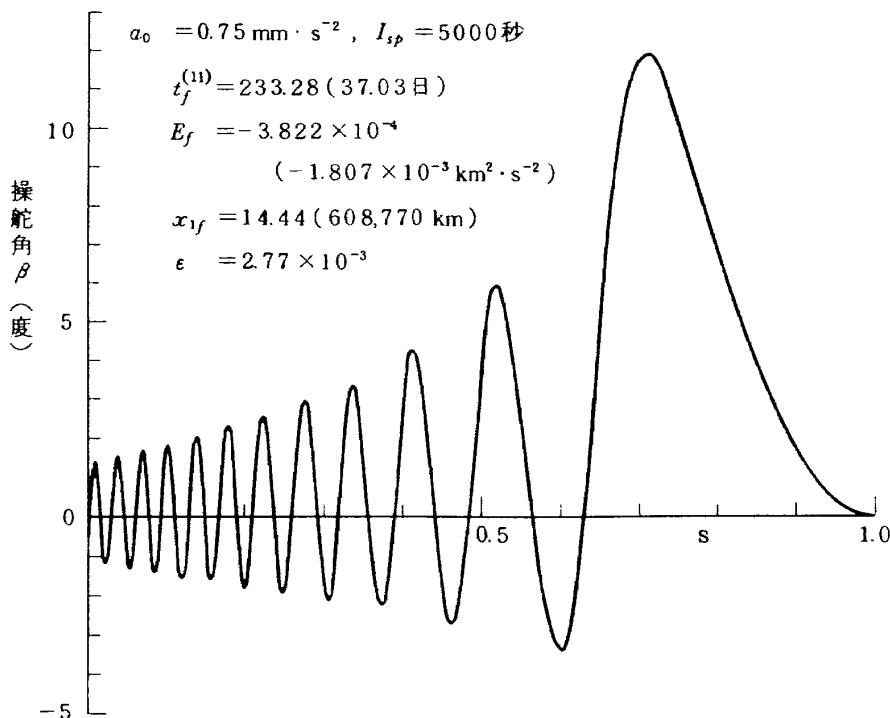


図-6 操舵角の履歴 ( $a_0 = 0.75 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )

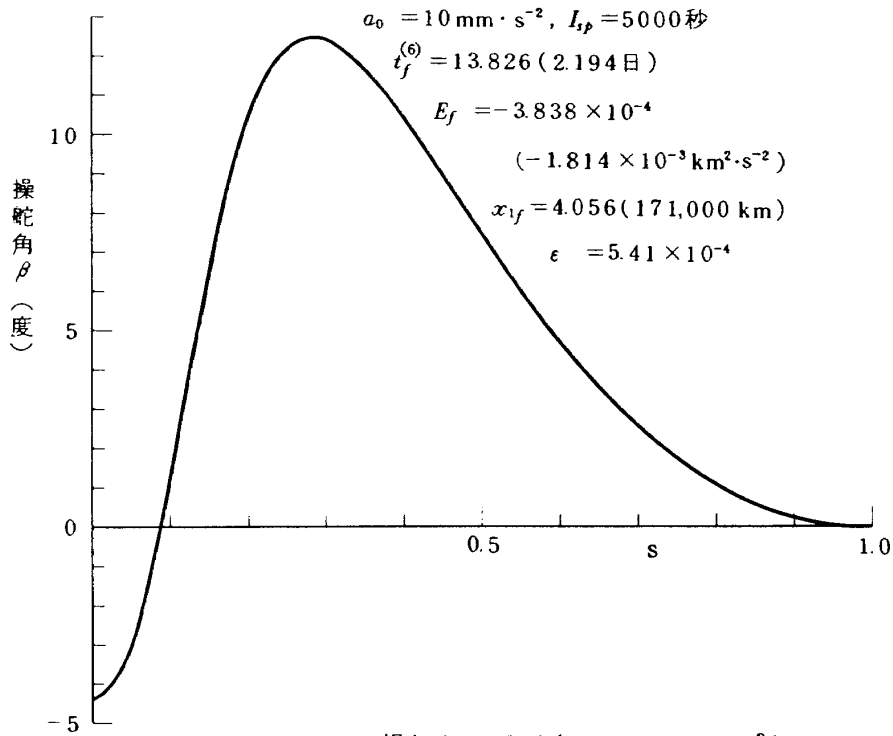


図-8 操舵角の履歴 ( $a_0 = 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )

$a_0 = 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ ,  $I_{sp} = 5000 \text{ 秒}$   
 $t_f^{(6)} = 13.826 (2.194 \text{ 日})$   
 $E_f = -3.838 \times 10^{-4} (-1.814 \times 10^{-3} \text{ km}^2 \cdot \text{s}^{-2})$   
 $x_{1f} = 4.056 (171,000 \text{ km})$

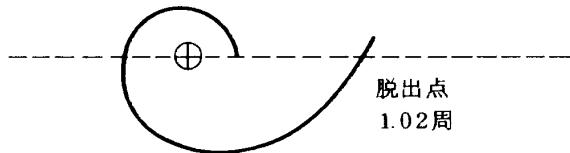


図-9 スパイラル脱出軌道 ( $a_0 = 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$ )

< 0 ) のどちらの側から始まるかには、規則性がなく予測が困難であると言える。

一方、終端時刻において、 $\beta$ が正つまり軌道の内側から急速に速度ベクトル（軌道接線方向）に接近する点はすべてに共通であり、且つ、最大振れ角が約12度という点も共通である。

表-1で示した、 $a_0$ とそれに対応する所要期間  $t_f$ とを両対数グラフにプロットしたものを図-11に

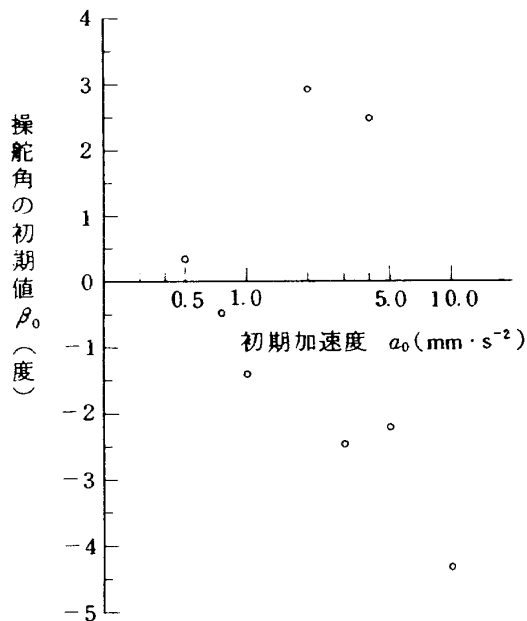


図-10 初期加速度と操舵角の初期値の関係

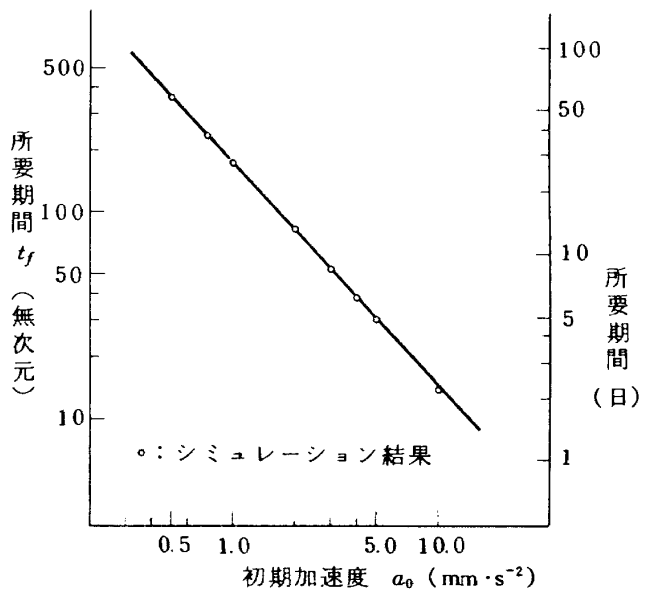


図-11  $a_0$ と $t_f$ の関係

示す。図から明らかな様に、両者の関係はほぼ直線となる。

## 6. あとがき

地球周回軌道上の宇宙船を、微小推力によって地球引力圏から脱出させる問題に関する最適問題を、ペナルティ・ファンクションを用いた直接法によって計算し、数値解を得た。扱った最適問題は、推力の大きさ  $T$ 、燃料消費率  $m_c$  一定（従って  $I_{sp}$  も一定）との仮定の下での最短時間脱出問題である。

これまでこの種の問題では、比較的低高度の円軌道から、微小推力としてはやや過大な初期加速度で出発する場合を扱った例が殆んどであった。

本報告では、出発軌道高度を高くして静止軌道とし、初期加速度も微小推力としてはほぼ妥当な  $0.5 \sim 10 \text{ mm} \cdot \text{s}^{-2}$  の範囲で数例の計算を行なった。計算はいずれも、収斂判定条件  $\epsilon$  が十分に小さくなり、補助的な判定条件とした、終端時刻における操舵角に関する条件  $\beta(1) = 0$ 、 $\dot{\beta}(1) = 0$  もほぼ満足するなど、10 回程度のイタレーションで良好に収斂した。上記の条件は、最適条件及び横断条件から解析的に求められるのである。

宇宙船は、文字通りスパイラルを描きながら地球を周回し、次第に高度を上げ、遂に放物線軌道速度を達成して脱出を完了する。その間の操舵角  $\beta$  の履歴には、推力ベクトルが速度ベクトル（軌道接線方向）のまわりを、地球周回とほぼ同期しながら振動する現象が見られた。しかもこの現象は、スパイラル・レイジングの初期程、又初期加速度が小さい程ははっきりと観察できた。振幅は、振動毎に発散するかのように大きくなるが、いずれも約12度を最大値としてその後急速に小さくなり零となる。即ち推力ベクトルの方向は、終端時刻において速度ベクトルの方向に一致し、且つ  $\beta > 0$  つまり軌道の内側から速度ベクトルの方向（軌道接線方向）に接する様に近づく。

振動中の操舵角の時間変化率は、高々  $0.5 \sim 2.0$  度/hr. 程度と小さいが、初期加速度の増大に伴って大きくなる傾向がある。

一方、 $\beta(0)$  は、初期加速度の値によって正又は負の値を不規則にとる。つまり、最適操舵角の履歴が、

軌道の内側、外側のどちら側から始まるかには規則性がなく、予測が困難であると言っていることができる。

又、初期加速度  $a_0$  と得られた最短時間  $t_f$  とを両対数グラフにプロットすると、ほぼ直線の関係があることがわかった。

今後は、地球引力圏脱出 (spiral escape) 及び、その後の目標惑星までの遷移飛行 (interplanetary transfer) を含めた最短時間問題に取り組みたいと考えている。

## 参 考 文 献

- 1) Julian D. Cole ; Perturbation Methods in Applied Mathematics, Blaisdell Publishing Company, Waltham, Mass., 1968, chapter 1, 2
- 2) D.F. Lawden ; Optimal Escape from a Circular Orbit, Astronautica Acta, Vol.4, No. 3, March 1958, pp. 218-233
- 3) Chong-Hung Zee ; Low Constant Tangential Thrust Spiral Trajectories, AIAA J. Vol. 1, No. 7, July 1963, pp.1581-1583
- 4) Chong-Hung Zee ; Low Tangential Thrust Trajectories—Improved First-Order Solution, AIAA J. Vol.6, No.7, July 1968, pp.1378-1379
- 5) Duane P. Johnson ; Perturbation Solutions for Low-Thrust Rocket Trajectories, AIAA J. Vol.3, No.10, October 1965, pp. 1934-1936
- 6) M.J. Cohen ; Low-Thrust Spiral Trajectory of a Satellite of Variable Mass, AIAA J. Vol.3, No.10, October 1965, pp. 1946-1949
- 7) Yun Y. Shi and Martin C. Eckstein ; Ascent or Descent from Satellite Orbit by Low Thrust, AIAA J. Vol.4, No.12, December 1966, pp.2203-2209
- 8) Yun-Yuan Shi and Martin C. Eckstein ; An Approximate Solution for Ascending Low-Thrust Trajectories without Singularity, AIAA J. Vol.5, No.1, January

- 1967, pp.170-172
- 9) Woody Brofman ; Approximate Analytical Solution for Satellite Orbits Subjected to Small Thrust or Drag, AIAA J. Vol. 5, No.6, June 1967, pp.1121-1128
  - 10) W.E. Moeckel ; Trajectories with Constant Tangential Thrust in Central Gravitational Fields, NASA TR R-53, 1959
  - 11) Jack H. Irving ; Low-Thrust Flight ; Variable Exhaust Velocity in Gravitational Fields, Space Technology, Howard S. Seifert, ed., John Wiley and Sons, Inc. New York 1959, pp.10.01-10.54
  - 12) V.N. Lebedev ; Calculation of the Motion of a Low-Thrust Spacecraft, NASA TT F-586, 1969
  - 13) K.J. Schwenzfeger ; Low Thrust Space Vehicle Trajectory Optimization Using Regularized Variables, NASA TR R-426 April 1974
  - 14) Arthur E. Bryson, Jr. and Yu-Chi Ho : Applied Optimal Control, Revised Printing, John Wiley and Sons, New York, 1975
  - 15) Theodore N. Edelbaum ; Theory of Maxima and Minima, Optimization Techniques with Applications to Aerospace Systems, George Leitmann, ed., Academic Press, New York, 1962, pp.12
  - 16) S.S. Tripathi and K.S. Narendra ; Constrained Optimization Problems Using Multiplier Methods, J. Optimization Theory and Applications, Vol.9, No.1, 1972 pp.59-70
  - 17) Robert S. Long ; Newton-Raphson Operator ; Problems with Undetermined End Points, AIAA J. Vol.3, No.7, July 1965 pp.1351-1352
  - 18) W.F. Powers and C.J. Shieh ; Improved Convergence of Gradient-Type Methods Involving Free Final Time and Penalty Functions, AIAA Paper No.76-153, January 1976
  - 19) W.F. Powers and Shoichi Yoshimura ; Computation of Optimal Earth-Mars and Earth-Venus Trajectories, IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems, Vol. AES-13, No.5, September 1977, pp.549-550
  - 20) Donald E. Kirk ; Optimal Control Theory An Introduction, Prentice-Hall Inc., New Jersey, 1970 pp.336

附録 1. 最適条件及び横断条件の導出

3章で設定した最適問題 - I, 即ち本来の最適問題の最適条件及び横断条件を導出する。<sup>14)</sup>

○最適条件の導出

最適条件は,

$$\frac{\partial H(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \boldsymbol{\lambda}, t)}{\partial \mathbf{u}} = 0 \quad (\text{A-1})$$

で定義される。従って,

$$\frac{\partial H}{\partial u} = \frac{T}{1 - m_c t} (\lambda_3 \cos u - \lambda_4 \sin u) \quad (\text{A-2})$$

から

$$\tan u = \lambda_3 / \lambda_4 \quad (\text{A-3})$$

を得る。これより, 次式を得る。

$$\cos u = \pm \lambda_4 / \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \quad (\text{A-4})$$

$$\sin u = \pm \lambda_3 / \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \quad (\text{A-5})$$

又,  $u$  には拘束がないものと仮定している<sup>\*</sup>,

ポントリアギンの最大原理 (Pontryagin Maximum Principle) により,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} < 0 \quad (\text{A-6})$$

が成り立つ。従って,

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \frac{-T}{1 - \dot{m}t} (\lambda_3 \sin u + \lambda_4 \cos u) < 0 \quad (\text{A-7})$$

を得る。上式に (A-4), (A-5) 式を代入すると

$$\frac{\partial^2 H}{\partial u^2} = \mp \frac{T}{1 - \dot{m}t} \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} < 0 \quad (\text{A-8})$$

となり, 不等式が成立するのは負の符号の時, 即ち (A-4), (A-5) 式では正の符号の時であるから, 両式の符号を決定でき,

$$\cos u = \lambda_4 / \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \quad (\text{A-9})$$

$$\sin u = \lambda_3 / \sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \quad (\text{A-10})$$

を得る。これにより, 最適条件を用いて  $\cos u, \sin u$  がラグランジュ乗数により記述できた。

○横断条件の導出

横断条件は,

$$[H dt - \boldsymbol{\lambda}^T d\mathbf{x}]_{t_0}^{t_f} + dJ = 0 \quad (\text{A-11})$$

拘束条件(7)式,

$$\psi = x_{3f}^2 + x_{4f}^2 - 2/x_{1f} = 0 \quad (\text{A-12})$$

及び

$$d\psi = 2x_{3f} dx_{3f} + 2x_{4f} dx_{4f} + (2/x_{1f}^2) dx_{1f} = 0 \quad (\text{A-13})$$

により定義される。一般に,  $t_0$  及び  $\mathbf{x}(t_0)$  は与えられるので,  $dt_0 = 0, d\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{0}$  として (A-11) 式を整理すると,

$$[H_f - 1] dt_f - \lambda_{1f} dx_{1f} - \lambda_{2f} dx_{2f} - \lambda_{3f} dx_{3f} - \lambda_{4f} dx_{4f} = 0 \quad (\text{A-14})$$

を得る。(A-13) 式は, (A-12) 式で表わされる 1 つの拘束条件により,  $dx_{1f}, dx_{3f}, dx_{4f}$  の内の 1 つは独立には変り得ない事を示している。そこで,  $dx_{1f}$  を他の 2 つで記述すると, (A-13) 式より

$$dx_{1f} = -x_{1f}^2 x_{3f} dx_{3f} - x_{1f}^2 x_{4f} dx_{4f} \quad (\text{A-15})$$

となる。上式を (A-14) 式に代入すると

$$[H_f - 1] dt_f + [-\lambda_{2f}] dx_{2f} + [-\lambda_{3f} + \lambda_{1f} x_{1f}^2 x_{3f}] dx_{3f} + [-\lambda_{4f} + \lambda_{1f} x_{1f}^2 x_{4f}] dx_{4f} = 0 \quad (\text{A-16})$$

を得る。 $t_f$  は未定であり, 既に 1 つの拘束条件により自由度を 1 つ減じているから,  $dt_f, dx_{2f}, dx_{3f}, dx_{4f}$  は独立に任意の値をとり得る。従って, それらの任意の値に対して上式が成立するには, 次の 4 式が満足されなければならない。

$$H_f - 1 = 0 \quad (\text{A-17})$$

$$\lambda_{2f} = 0 \quad (\text{A-18})$$

$$\lambda_{3f} - \lambda_{1f} x_{1f}^2 x_{3f} = 0 \quad (\text{A-19})$$

$$\lambda_{4f} - \lambda_{1f} x_{1f}^2 x_{4f} = 0 \quad (\text{A-20})$$

以上 4 式及び拘束条件 (A-12) 式が横断条件である。

附録 2.  $\beta(t_f) = 0$  及び  $\frac{d\beta(t_f)}{dt} = 0$  の導出

附録 1 で求めた最適条件及び横断条件を用いて, 標記 2 式を導出する。以後,  $t = t_f$  における値を意味する添字 ( )<sub>f</sub> を省略する。

\*  $u$  及び  $\frac{du}{dt}$  の値には制限がないものと仮定している。



○  $\beta(t_f) = 0$  の導出

図-1における定義から明らかに,  $u, r, \beta$ の間には次式が成立する。

$$\beta = r - u \quad (\text{B-1})$$

又

$$r = \tan^{-1} \left( \frac{x_3}{x_4} \right) \quad (\text{B-2})$$

$$\cos r = x_4 / \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \quad (\text{B-3})$$

$$\sin r = x_3 / \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \quad (\text{B-4})$$

も容易に得られる。最適条件(A-9), (A-10)は,  $t$ の全区間 $[t_0, t_f]$ において成立するから, 当然  $t = t_f$  においても成立する。

(B-1)式両辺の正接関数をとると,

$$\tan \beta = \tan(r - u) = \frac{\sin r \cos u - \cos r \sin u}{\cos r \cos u + \sin r \sin u}$$

を得, 上式に(B-3), (B-4)及び(A-9), (A-10)式を代入し, 整理すると次式を得る。

$$\tan \beta = \frac{\lambda_4 x_3 - \lambda_3 x_4}{\lambda_4 x_4 + \lambda_3 x_3} \quad (\text{B-5})$$

上式に, 横断条件(A-19), (A-20)を代入すると,

$$\tan \beta = \frac{\lambda_1 x_1^2 x_3 x_4 - \lambda_1 x_1^2 x_3 x_4}{\lambda_1 x_1^2 x_4^2 + \lambda_1 x_1^2 x_3^2} = 0 \quad (\text{B-6})$$

を得る。これにより

$$\beta(t_f) = 0 \quad (\text{B-7})$$

を得る。

言うまでもなく, 上式は, 終端時刻  $t_f$  においては, 推力ベクトルの方向が速度ベクトルの方向(軌道接線方向)と一致することを示している。

○  $\frac{d\beta(t_f)}{dt} = 0$  の導出

(B-1)式の両辺の時間微分をとると次式を得る。

$$\frac{d\beta}{dt} = \frac{dr}{dt} - \frac{du}{dt} \quad (\text{B-8})$$

$r$ の時間微分をとり, (B-2)式を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{d}{dt} \left[ \tan^{-1} \left( \frac{x_3}{x_4} \right) \right] = \frac{1}{1 + (x_3/x_4)^2} \\ &\times \left( \frac{1}{x_4} \frac{dx_3}{dt} - \frac{x_3}{x_4^2} \frac{dx_4}{dt} \right) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{x_3^2 + x_4^2} \left( x_4 \frac{dx_3}{dt} - x_3 \frac{dx_4}{dt} \right) \quad (\text{B-9})$$

を得る。一方,

$$\frac{d}{dt} (\tan u) = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot \frac{du}{dt}$$

であり, 上式に(A-4)式を代入すると,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \frac{d}{dt} (\tan u) \quad (\text{B-10})$$

となる。又, (A-3)式を用いると

$$\frac{d}{dt} (\tan u) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_4} \right) = \frac{1}{\lambda_4} \frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4^2} \frac{d\lambda_4}{dt} \quad (\text{B-11})$$

を得る。従って,  $u$ の時間微分は, (B-10)式に(B-11)式を代入して得られる。

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{\lambda_4^2}{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \left( \frac{1}{\lambda_4} \frac{d\lambda_3}{dt} - \frac{\lambda_3}{\lambda_4^2} \frac{d\lambda_4}{dt} \right) \\ &= \frac{1}{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \left( \lambda_4 \frac{d\lambda_3}{dt} - \lambda_3 \frac{d\lambda_4}{dt} \right) \end{aligned} \quad (\text{B-12})$$

(B-9)式に, 運動方程式(3), (4)を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{1}{x_3^2 + x_4^2} \left[ \frac{x_4^3}{x_1} - \frac{x_4}{x_1^2} + \frac{T}{1 - \dot{m}t} (x_4 \sin u \right. \\ &\quad \left. - x_3 \cos u) + \frac{x_3^2 x_4}{x_1} \right] \end{aligned}$$

となり, これに最適条件(A-9), (A-10)を代入して, 整理すると,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{x_3^2 + x_4^2} \left[ \frac{x_4 (x_4^2 + x_3^2)}{x_1} - \frac{x_4}{x_1^2} \right. \\ &\quad \left. + \frac{T}{1 - \dot{m}t} \frac{x_4 \lambda_3 - x_3 \lambda_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} \right] \end{aligned}$$

となる。これに端末拘束条件(A-12)と横断条件(A-19), (A-20)を代入すると,

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} &= \frac{x_1}{2} \left[ \frac{x_4}{x_1} \cdot \frac{2}{x_1} - \frac{x_4}{x_1^2} + \frac{T}{1 - \dot{m}t} \right. \\ &\quad \left. \cdot \frac{\lambda_1 x_1^2 x_3 x_4 - \lambda_1 x_1^2 x_3 x_4}{\sqrt{\lambda_3^2 + \lambda_4^2}} \right] \\ &= \frac{x_1}{2} \cdot \frac{x_4}{x_1^2} = \frac{x_4}{2x_1} \end{aligned} \quad (\text{B-13})$$

を得る。

一方, (B-12)式に Euler-Lagrange 方程式(13),

(14)を代入すると、

$$\frac{du}{dt} = \frac{1}{\lambda_3^2 + \lambda_4^2} \left[ -\lambda_1 \lambda_4 + \frac{\lambda_4^2 x_4}{x_1} + \frac{\lambda_2 \lambda_3}{x_1} + \frac{2 \lambda_3^2 x_4}{x_1} - \frac{\lambda_3 \lambda_4 x_3}{x_1} \right]$$

となり、これに横断条件 (A-18), (A-19), (A-20) を代入すると、

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{\lambda_1^2 x_1^4 (x_3^2 + x_4^2)} \left[ -\lambda_1^2 x_1^2 x_4 + \frac{\lambda_1^2 x_1^4 x_4^3 + 2 \lambda_1^2 x_1^4 x_3^2 x_4 - \lambda_1^2 x_1^4 x_3^2 x_4}{x_1} \right] \\ &= \frac{1}{\lambda_1^2 x_1^4 (x_3^2 + x_4^2)} \left[ -\lambda_1^2 x_1^2 x_4 + \lambda_1^2 x_1^3 x_4 (x_4^2 + x_3^2) \right] \end{aligned}$$

となる。これに端末拘束条件 (A-12) を代入すると、

$$\begin{aligned} \frac{du}{dt} &= \frac{1}{\lambda_1^2 x_1^4} \cdot \frac{x_1}{2} \left[ -\lambda_1^2 x_1^2 x_4 + \frac{2 \lambda_1^2 x_1^3 x_4}{x_1} \right] \\ &= \frac{1}{2 \lambda_1^2 x_1^3} \cdot \lambda_1^2 x_1^2 x_4 = \frac{x_4}{2 x_1} \end{aligned} \quad (\text{B-14})$$

を得る。

(B-8) 式に、(B-13), (B-14) 式を代入すると

$$\frac{d\beta(t_f)}{dt} = \frac{x_4}{2x_1} - \frac{x_4}{2x_1} = 0 \quad (\text{B-15})$$

が求められる。

### 附録 3. エネルギーの時間変化率

時刻  $t$  における宇宙船の全エネルギー (運動エネルギーと位置エネルギーの和) は、(7) 式から次の様に与えられる。

$$E(t) = x_3^2(t) + x_4^2(t) - 2/x_1(t) \quad (\text{C-1})$$

従って、時刻  $t$  における全エネルギーの時間変化率

(instantaneous rate of change of the total energy  $E$ ) は、

$$\frac{dE(t)}{dt} = 2x_3 \frac{dx_3}{dt} + 2x_4 \frac{dx_4}{dt} + \frac{2}{x_1^2} \cdot \frac{dx_1}{dt} \quad (\text{C-2})$$

で与えられる。上式に運動方程式 (1), (3), (4) を代入して整理すると、

$$\frac{dE(t)}{dt} = \frac{2T}{1-m_c t} (x_3 \sin u + x_4 \cos u) \quad (\text{C-3})$$

を得る。

次に、この時刻  $t$  における時間変化率を操舵角  $u$  の関数として、どのような  $u$  に対して最大値をとるかを求める。即ち、

$$\frac{d}{du} \left[ \frac{dE}{dt} \right] = \frac{2T}{1-m_c t} (x_3 \cos u - x_4 \sin u) = 0 \quad (\text{C-4})$$

及び

$$\frac{d^2}{du^2} \left[ \frac{dE}{dt} \right] = \frac{-2T}{1-m_c t} (x_3 \sin u + x_4 \cos u) < 0 \quad (\text{C-5})$$

を満足しなければならない。この2式は、附録-1で最適条件を導出した際の (A-2), (A-7) 式と同じ形をしている。従って、容易に

$$\cos u = x_4 / \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \quad (\text{C-6})$$

$$\sin u = x_3 / \sqrt{x_3^2 + x_4^2} \quad (\text{C-7})$$

を得る。

即ち、時刻  $t$  におけるエネルギーの時間変化率を最大にするのは、推力ベクトルを速度ベクトル (軌道接線方向) の方向に一致させた時であることが求められる。

但し、よく知られている様に、この軌道接線方向推力は、ある一定時間噴き続けた場合のエネルギーの全変化量を最大にはしない。<sup>11)</sup>

---

## 航空宇宙技術研究所報告704号

昭和57年3月発行

発行所 航空宇宙技術研究所  
東京都調布市深大寺町1880  
電話武蔵野三鷹(0422)47-5911(大代表) ㊦182  
印刷所 株式会社 共 進  
東京都杉並区久我山5-6-17

---

**Printed in Japan**